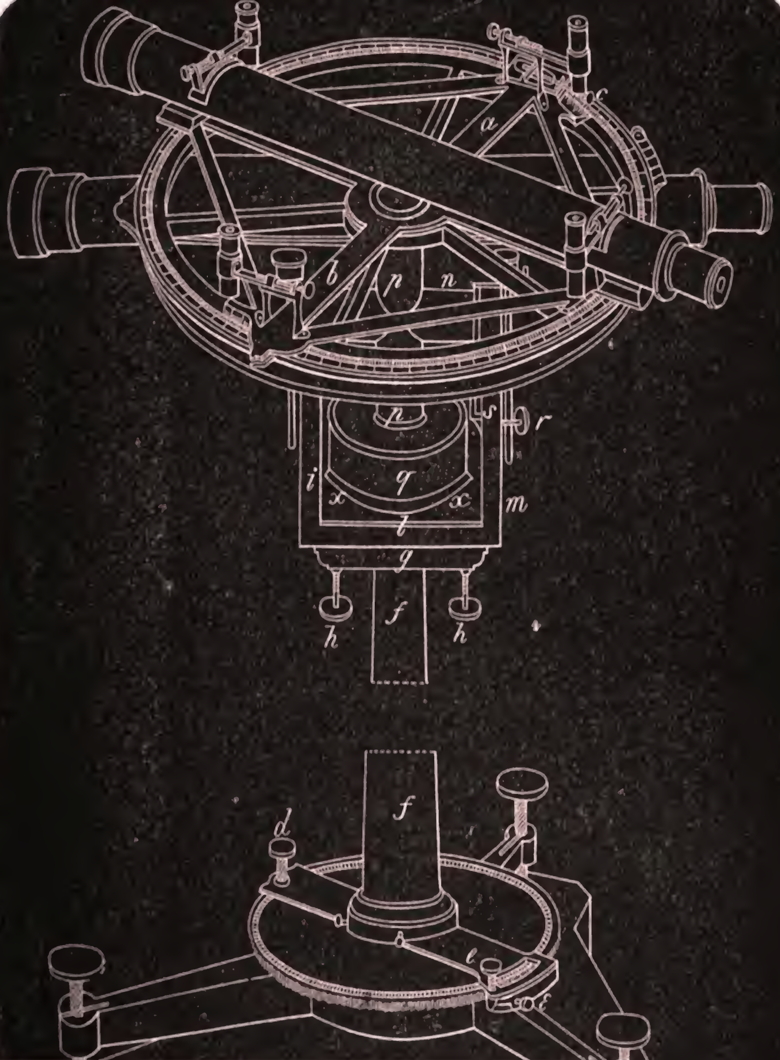


Mathematisches Wörterbuch

Ludwig Hoffmann

MATHEMATISCHES
WÖRTERBUCH

ALPHABETISCHE ZUSAMMENSTELLUNG

SÄMMTLICHER

IN DIE MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN GEHÖRENDER GEGENSTÄNDE IN ERKLÄRENDEN UND BEWEISENDEN SYNTHETISCH UND ANALYTISCH BEARBEITETEN ABHANDLUNGEN

VON

LUDWIG HOFFMANN
BAUMEISTER IN BERLIN.

I. BAND
A—B. D.

BERLIN
VERLAG VON GUSTAV BOSSELMANN
1858.

Berichtigungen zum ersten Bande.

Pag. 1 rechts, Z. 7 v. u. hinter Morgenpunkt setze: (M)

" 2 rechts, Z. 6 v. o. statt: sein Parallelkreis schneide lies: sein Parallelkreis als Grundfläche, der Erdmittelpunkt als Spitze eines Kegels gedacht, schneide

" 2 rechts, Z. 4 v. u. statt $\angle P'CS$ lies: $\angle P'CS''$

" 4 links, Z. 7 v. o. statt AD lies: AD (Fig. 3)

" 7 Fig. 10 statt des Buchstabens E (über E'') setze E'

" 7 rechts, Z. 5 v. u. statt $> 2\lambda$ lies: $> 2\alpha$

" 8 links, von Z. 7 v. u. ab, und weiter bis rechts, Z. 1 v. o. statt $Arc\ z$, $Arc\ 2z$ u. s. w. lies: $Arc\ sin\ z$, $Arc\ sin\ 2z$ u. s. w.

" 8 rechts, Z. 3 v. o. statt Gl. 1 lies: Gl. 2

" 10 rechts, Z. 1 v. u. statt $\times B$ lies: $\times \frac{1}{B}$

" 11 links, Z. 3 v. o. statt $\times B$ lies: $\times \frac{1}{B}$

" 12 Fig. 11, in der geraden Linie $A'Cd$ setze an den Endpunkt bei d den Buchstaben A

" 12 rechts, Z. 17, 18 und 19 v. o. jedesmal statt a lies: d

" 20 Fig. 21 bezeichne den Stern im Bogen AP mit S, und schreibe statt des rechts stehenden Q den Buchstaben q

" 21 Fig. 22. Die durch C geführte punktirte Linie ist im unteren Endpunkt statt mit M mit M' zu bezeichnen, der obere Endpunkt bleibt M, man zeichne noch den Bogen PM und setze in den Punkt des Bogens PD, in welchem die Bogen von M und B aus zusammentreffen, den Buchstab A

" 22 rechts, Z. 21 v. o. statt einfallen, an lies: einfallen, ist die Zerstreuung an

" 24 links, Z. 16 v. u. statt $a'b' = ab$ lies: $a'b' \neq ab$

" 25 links, Z. 9. v. o. statt $\delta + \varepsilon = \omega'$ lies: $\delta + \varepsilon = \delta' + \varepsilon' = \omega'$

" 26 rechts, Z. 11 v. u. statt r lies: R

" 27 links, Z. 5 v. o. statt $2(\sqrt{2r^2 - r})$ lies: $2(\sqrt{2r^2} - r)$

" 47 links, Z. 10 v. o. statt $\angle CHF$ lies: $\angle EHF$

" 47 rechts, Z. 11 v. o. hinter $(b + c - a)$ setze noch eine Klammer:]

" 55 rechts, Z. 4 v. u. statt $\sqrt{\frac{15}{b}}$ lies: $\sqrt{\frac{15}{6}}$

" 56 links, Z. 16 v. o. statt

$$tg\ \varphi = \sqrt{\frac{27c^2}{4b^3} - 1} \quad \text{Denn da } tg\ \varphi \text{ immer lies:}$$

$$sec\ \varphi = \sqrt{\frac{27c^2}{4b^3}} \quad \text{Denn da } sec\ \varphi \text{ immer}$$

" 61 links, Z. 12 v. u. statt $y = - \frac{cd - af}{bd + ae}$ lies $y = \frac{-cd - af}{bd + ae}$

" 67 rechts, Z. 17 v. u. statt $\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - a^2}$ lies: $\sqrt{\left(\frac{3a}{2}\right)^2 - a^2}$

Z. 14 v. u. statt $AB + AG = HI$
lies: $AB \times AG = AH \times AB = HI$

" 69 rechts, Z. 6 v. u. statt AB lies: $AB = a + b$

Fig. 56 fehlt der Buchstab C in der Mitte von AB, links von D

" 71 rechts, Z. 17 v. o. statt denselben lies: diesen Functionen

Pag. 86 rechts, Z. 23 v. o. statt $= \ldots g'' : g' : g$ lies: $= \frac{1}{g} : \frac{1}{g'} : \frac{1}{g''} \ldots$

„ 86 rechts, Z. 18 v. u. statt $= \ldots S'' : S'$ lies: $= 1 : \frac{1}{S'} : \frac{1}{S''} \ldots$

„ 87 rechts, von Z. 13 bis 22 statt L lies: L'

„ 88 links, Z. 4 v. o. statt bei 10 lies: bei dem Theilstrich 10
Z. 9 v. o. statt $= 2gl$ lies: $= 2ql$

„ 98 links, Z. 3 v. o. statt das lies: dieses
Z. 11 v. u. statt Wasser $= 1{,}6p$ lies: Wasser $= p + p' = 1{,}6p$
Z. 1 v. u. statt $= \frac{1000}{\frac{11}{9} \cdot 18}$ setze: $\frac{P}{g} = \frac{1000}{\frac{11}{9} \cdot 18}$

„ 98 rechts, Z. 2 v. o. statt gezeichneten lies: bezeichneten

„ 100 links, Z. 6 v. u. statt hat y lies: hat man y

„ 104 links, Z. 16 v. o. statt des Mantels lies: des Mantels Fig. 75

„ 109 links, Z. 21 v. u. statt die gegebene lies: die No 5 gegebene

„ 115 links, Z. 21 v. u. statt unveränderliche lies: urveränderliche

„ 118 rechts, Z. 2 v. o. statt $D - E$ lies: $D - A$

„ 122 Z. 7 v. o. statt $D + 4C + 6B + A + d$ lies: $D + 4C + 6B + 4A + d$

„ 137 Fig. 88. In den Durchschnittspunkt der Linien CS'' und AD setze den Buchstaben I und in die Verlängerung von AI den Buchstaben K

„ 138 links, Z. 19 v. u. statt niedriger als lies: zu Mitternacht weniger tief als

„ 139 Fig. 90. In den Durchschnittspunkt der beiden Bogen SZ und HOh setze den Buchstaben A

„ 140 rechts, Z. 14 v. o. statt wenn die Sonne lies: Wenn nämlich die Sonne

„ 168 links, Z. 22 v. u. statt müfste lies: mufste

„ 223 rechts, Z. 16 v. o. statt $x = h$ lies: $x = H$

„ 224 links, Z. 18 v. o. statt zugleich $1 - \sqrt{\frac{1}{m}}$ lies: zugleich $\sqrt{\frac{1}{m}}$

„ 229 links, Z. 3 v. u. statt $t' = t''$ lies: $t' - t''$

„ 272 links, Z. 9 v. u. vor: „Man hat für“ etc. setze: 7

„ 272 rechts, Z. 1 v. o. für V setze v
Z. 3 v. o. für Vt setze vt

„ 341 Fig. 210 fehlt im Endpunkt der Ordinate in D der Buchstab B

„ 341 rechts, Z. 6 v. o. statt: wo a die grofse und c die kleine Axe ist, lies: wo a die halbe grofse und c die halbe kleine Axe ist

„ 342 links, Z. 5 v. u. statt grofse Axe lies: Hauptaxe

„ 403 links, Z. 2 v. u. statt dieser beiden lies: diesen beiden.

An die geehrten Leser.

Bei dem Wörterbuch, dessen erstes Heft vorliegt, soll es mein Bestreben sein, dem Inhalt des Titelblattes nach allen Richtungen möglichst zu entsprechen, und die mathematischen Wissenschaften nicht nur an sich, sondern auch in ihrer Anwendung auf andere Wissenschaften abzuhandeln und zugleich die Theorie mit der Praxis zu verbinden.

Fast alle Wörterbücher haben Artikel, die in bloſser Wort-Anführung des Gegenstandes bestehen und für die ausführliche Sacherklärung auf einen späteren Artikel verweisen. Nicht nur, daſs solcher Gebrauch für den Leser lästig und zeitraubend ist, sondern überhaupt nicht angemessen, wenn das Wörterbuch, weil es von gröſserem Umfang, nur nach und nach erscheinen kann. Bei dem vorliegenden Wörterbuch ist dies vermieden, und eine Berufung findet immer nur auf voranstehende Artikel statt, und jeder Artikel ist als ein in sich Vollständiges abgehandelt.

Am Schluſs des Art: Ablenkung der Magnetnadel stehen die Worte: Vergl. Abweichung der Magnetnadel; sie sollen nur darauf aufmerksam machen, daſs Ablenkung und Abweichung Zweierlei sind.

In dem Art: Abplattung der Erde, der ohne Hülfe eines anderen Art. verständlich sein soll, heiſst es pag. 13 am Schluſs des ersten Satzes: (das Nähere s. unter Gradmessungen, Ellipsoid), d. h. wenn es beliebt, bei Gelegenheit der erzählend hier aufgeführten Dimensionen auf der Erdoberfläche genauere Kenntniſs von denselben zu nehmen, s. den angeführten, erst noch folgenden Art. Am Schluſs des zweiten Satzes heiſst es: (das Nähere s. u. Pendelschwingungen), d. h. zum Verständniſs des Art: Abplattung ist das über Pendelschwingungen Gesagte gerade genug; wer aber bei Durchlesung desselben Neigung hat, Ausführlicheres darüber zu lesen, findet dies in dem noch folgenden Art: Pendelschwingungen. Dieselbe Bedeutung haben die Worte am Schluſs des Art: (das Nähere s. u. Centrifugalkraft).

Viele Artikel bedingen, wenn sie Anspruch auf Vollständigkeit machen wollen, umfangreiche Abhandlungen. Solche von Anfang bis Ende durchzulesen, ermüdet; und wenn man, wie dies so häufig vorkommt, nur einen sehr kleinen Theil des Dahingehörigen aufsucht, so braucht man in der Regel gar zu viel Zeit, ehe man das Verlangte auffindet. Diesen, in allen wissenschaftlichen Wörterbüchern mehr und weniger vorkommenden Uebelstand werde ich nach Kräften zu umgehen suchen. So z. B. könnte der pag. 6 begonnene Art: Ablenkung des Lichtstrahls eine bedeutende Ausdehnung erhalten, ich habe dagegen nur das Allgemeinste des Gegenstandes geschrieben, und den Art: Achromatisch, pag. 22, als unmittelbare Fortsetzung desselben behandelt. Dafs ich die Lehre hier nur auf das Prisma bezogen habe, liegt wiederum darin, dafs ich dem Art: Achromatisch nicht mehr Umfang geben wollte, und das Weitere dem Art: Linse vorbehalte, der bekanntlich auf die Lehre vom Prisma sich gründet, welches Wort aber alphabetisch wieder hinter Linse gehört.

Ferner werde ich, ohne der Deutlichkeit zu schaden, der möglichsten Kürze mich befleifsigen, und damit der Umfang in dem möglich geringsten Verhältnifs zum Inhalt stehe, sind die noch gut lesbaren Typen comprefs gesetzt. Auf die Correctur wird Fleifs gewandt und der Herr Verleger scheut keine Kosten an einer guten Ausstattung. Voraussichtlich wird alle zwei Monat ein Heft erscheinen.

Auf dem Umschlag jedes Heftes befindet sich als Inhaltsverzeichnifs die Reihenfolge der Artikel aufgeführt, am Schlufs jedes Bandes soll aufserdem ein Sachregister beigegeben werden, aus welchem die nicht alphabetisch geordneten Gegenstände nach paginis aufzufinden sind.

Berlin, im Januar 1857.

L. H.

A.

a in hydraulischen Formeln bezeichnet den Contractions-Coefficient: Es sei g die Höhe (etwa $15\frac{5}{8}$ preufs. Fufs), in welcher ein in der Nähe der Erdoberfläche befindlicher Körper im luftleer zu denkenden Raum in der ersten Secunde frei herabfällt, h die Höhe, welche er überhaupt fällt, so ist seine Endgeschwindigkeit $2\sqrt{g}.\ \sqrt{h}=7{,}9\sqrt{h}$. Beim Fallen des Wassers durch Ausflufsöffnungen, welche um die senkrechte Höhe h vom Wasserspiegel entfernt sind, wird nun der Coefficient 7,9 vermöge der Contraction des Wassers in den Oeffnungen, je nach deren Gestalt und Gröfse bald mehr bald weniger vermindert, und der somit verminderte Coefficient a, bei welchem $a\sqrt{h}$ die richtige Endgeschwindigkeit des Wassers ist, heifst Contractions-Coefficient.

Abacus ist Tabelle; z. B. A. Pythagoricus die bekannte Einmaleins-Tafel.

Abänderungsflächen sind bei einer Krystallform diejenigen Flächen, welche die als Grundform zu denkende einfache Krystallform zu einer zusammengesetzten Form abändern. Sie sind entweder Abstumpfungsflächen von Ecken und Kanten, wenn statt einer Ecke oder einer Kante, welche der Grundform angehört, eine Fläche sich vorfindet. Oder Zuschärfungsflächen, wenn statt einer Kante oder einer vierflächigen Ecke zwei Flächen sich vorfinden, die unter einer stumpferen Kante zusammentreffen, so dafs statt einer einzigen Kante oder einer Ecke der Grundform 3 Kanten entstehen. Oder Zuspitzungsflächen, wenn statt einer Ecke eben so viele neue Flächen, wie zur Bildung jener Ecke der Grundform gehören, unter einer neuen stumpferen Ecke zu sammentreffen.

Abbreviren der Brüche. Man abbrevirt einen Bruch, wenn man dessen Zähler und Nenner mit einerlei Zahl dividirt, wobei er in seinem Werth ungeändert bleibt. Denn wie $1=\frac{1}{1}=\frac{7}{7}=\frac{14}{14}=\frac{2\cdot 7}{2\cdot 7}$, so ist auch z. B. $\frac{5}{7}=\frac{2\cdot 5}{2\cdot 7}=\frac{10}{14}$ und $\frac{36}{8}=\frac{9\cdot 4}{2\cdot 4}=\frac{9}{2}$. Also Brüche behalten ihren Werth, wenn ihre Zähler und Nenner mit einerlei Zahl multiplicirt, oder mit einerlei Zahl dividirt werden. Die letztere Operation heifst einen Bruch abbreviren, heben, vereinfachen, ihn auf kleinere Zahlen bringen, oder auf kleinere Zahlen reduciren.

Abdachung, Abfall, Plongée bei einer Brustwehr. Der Unterschied der Höhe zwischen der vorderen Oberkante der Krone und der höheren Hinterkante, der Feuerlinie derselben. Die A. beträgt auf den laufenden Fufs horizontaler Kronenbreite 1 bis 2 Zoll.

Abend (Abendpunkt, Westen, Westpunkt, Occidens) eines Orts der Erde ist der in der Himmelskugel belegene Durchschnittspunkt zwischen dem Horizont des Orts und der Aequator-Ebene nach der Richtung des Untergangs der Sonne und aller Gestirne, und in dem diese wirklich untergehen, wenn sie in der Aequator-Ebene sich befinden; der entgegengesetzt liegende Durchschnittspunkt beider Ebenen heifst Morgen, Morgenpunkt.

Die beiden Pole haben weder A. noch M., denn deren Horizonte sind $\#$ der Aequator-Ebene, schneiden also dieselbe nicht; alle Gestirne, die unterhalb des Aeq. stehen, gehen den Polen nicht auf, und die oberhalb des Aeq. nicht unter,

sondern bewegen sich in Kreisen, die mit dem Horizont ‡ laufen.

In jedem andern Ort der Erde sieht man nach dem A. in der auf der Meridian-Ebene des Orts normalen Linie, wenn man den Nordpol zur Rechten hat. Denn da der A. in der Aeq.-Ebene auf der scheinbaren Himmelskugel, also unendlich weit von der Erde entfernt ist, so ist in jedem andern Ort der Erde die Richtung nach dem A. der in der Aeq.-Ebene befindlichen Richtung nach demselben A. ‡.

Aus diesem Grunde ist der geometrische Ort aller A. und aller M. für alle Orte der Erde eine und dieselbe unendlich weit entfernte Kreislinie; für beide Erdpole ist jeder einzelne Punkt dieser Kreislinie der A. und der M.

Von Abend nach Morgen ist die Bezeichnung der Richtung über Mittag; also, das Gesicht nach Mittag gekehrt, von Rechts nach Links.

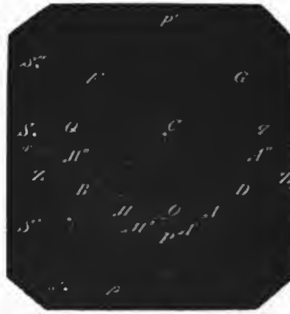
Abenddämmerung, die Erleuchtung der Erdoberfläche nach Sonnen-Untergang vermöge der astronomischen Strahlenbrechung (s. diese u. astronomische Dämmerung).

Abendseite, die durch die Meridian-Ebene eines Ortes der Erde abgetheilte Hälfte der Himmelskugel, in welcher der Abendpunkt liegt; in deren Horizont gehen alle Gestirne unter, während sie in dem Horizont der Morgenseite aufgehen.

Abendweite eines Gestirns. Der Bogen im Horizont eines Orts (O) der Erde als Abstand zwischen dem Untergangspunkt des Gestirns und dem Abendpunkt, sowie der Bogen des Abstandes zwischen dem Aufgang des Gestirns und dem Morgenpunkt die Morgenweite (M) des O. ist. Ein Stern, dessen Parallelkreis in der nördl. Halbkugel liegt, hat nördliche, in der südl. Halbkugel südliche M. und A. und beide, M. und A. desselben Sterns sind einander gleich grofs. Ein in der Ebene des Aequators liegender Stern hat beide Weiten = Null, weil er im Morgenpunkt auf- und im Abendpunkt untergeht. Je weiter südlich vom Aequator der Parallelkreis des Sterns liegt, desto gröfser ist die südliche M. und A. Je weiter nördlich der Parallelkreis des Sterns sich befindet, desto gröfser ist seine nördl. M. und A.

Denn es sei Qq der Aequator, P der Nordpol, P' der Südpol, O ein Ort der Erdoberfläche, welche um PP' nach der Richtung qCQ sich umwälze. Ist S ein Gestirn in der Aequator-Ebene Qq, so ist die Linie Os ‡ CS die Richtung desselben Sterns in O (vergl. Abend), weil S unendlich weit von C und O entfernt ist; er geht also in dem Morgenpunkt M auf und in dem Abendpunkt A unter. Zz und $Z'z$ seien die Horizonte von O in M und A.

Fig. 1.



Der Stern S' befinde sich in der nördlichen Halbkugel, sein Parallelkreis schneide die Erde in BD, so ist die Linie Os' ‡ CS' die Richtung des Sterns S' in O.

Liegt der Parallelkreis gerade vom Nordpol so weit entfernt als die Polhöhe des O beträgt, so fällt M. und A. jede 90° in einem Punkt nämlich in dem Nordpunkt des Horizonts zusammen, der Tagebogen des Sterns ist 360°; er ist also der ganze Tageskreis, der den Horizont im Norden tangirt, der Stern ist der äufserste der Circumpolarsterne des O.

Denn zieht man Mp in M ‡ $P'P$, so ist $\angle zMp$, der Winkel, den die Richtung der Erdaxe mit dem Horizont des Orts bildet, die Polhöhe, $\angle S'Cz = \angle s'Oz$ die Entfernung des Sterns S' vom Pol P. Ist nun $\angle s'Oz = \angle A'Oz = \angle zMp$, so ist OA' ‡ Mz, daher $\angle A'Oz = \angle OzM = OzA$, folglich Os' ‡ $Z'z$, diese mithin die Richtung des Sterns S' in A; der Stern S' tangirt also in seinem tiefsten Stande den Horizont in A, und geht nicht unter, sondern von da ab wieder in die Höhe.

Der Stern S'' in der südlichen Halbk. schneidet mit seiner Richtungslinie die Erde in dem Parallelkreise FG, Os'' ist dessen Richtung in O. Liegt der Parallelkreis FG gerade vom Südpol P' so weit entfernt, als die Aequatorhöhe ZMs des Orts, ist also $\angle P'CS = \angle ZMs$, so geht der Stern S'' nicht mehr auf, er berührt nur zu Mittage den Horizont unterhalb in dem Meridian des Orts.

Fig. 2.



Bezeichnet *Hh* den Horizont eines Orts *O* der nördl. Halbkugel, *Qq* den Aequator, beide Bogen in der westl. Halbkugel belegen, so dafs deren Durchschnittspunkt *A* der Abendpunkt von *O* ist, so geht die Sonne, wenn sie im Aequator steht, in *A* unter; hat sie die nördliche Abweichung *ND* (d. h. befindet sich der Parallelkreis *NS'*, in dem die Sonne sich augenblicklich bewegt, um den Bogen *ND* vom Aequator *Qq* nördlich entfernt), so bewegt sie sich nach *S'N*, sie geht erst später in *N* unter und *NA* ist die nördl. A.; hat die Sonne die südl. Abweichung *SD*, so geht sie schon in *S''* unter und *AS''* ist die südl. A. Liegen die Bogen in der östl. Halbkugel, dann ist *A* der Morgenpunkt, die Bogen *NS'*, *Aq* bleiben über dem Horizont, die Sonne hat die Bewegungen nach *DA*, *NS'*, *SS''*, die Punkte *A*, *N*, *S''* sind die Aufgangspunkte, in *N* geht die Sonne früher, in *S''* später auf als in *A*, und *NA*, *S''A* sind die Morgenweiten, welche den A. gleich sind.

In dem sphärischen, bei *D* rechtwinkligen △ *ADN* ist *DN* die Abweichung der Sonne, die für einen bestimmten Tag bekannt ist und am 21. Juni im Wendekreise 23½° beträgt, ∠ *DAN* ist die Aequatorhöhe des Orts (d. h. der Winkel, den die Richtung des Aequators mit dem Horizont des Orts bildet; für *O*, Fig. 1, ∠ *sMZ*, für Berlin 37° 28′ 30″).

Man hat also $\sin AN = \frac{\sin DN}{\sin DAN} = \frac{\text{Sin Abweichung}}{\text{Sin Aequatorhöhe}}$

Für die südliche Abweichung *DS* = *BS''* der Sonne hat man in dem sphärischen △ *ABS''* $\sin AS'' = \frac{\sin BS''}{\sin DAN}$ weil ∠ *DAN* und *BAS''* als Scheitel ∠ gleich sind.

Am längsten Tage ist $DN = 23° 30'$, mithin für Berlin $\sin AN = \frac{\sin 23° 30'}{\sin 37° 28' 30''}$ woraus die nördliche Morgenweite *AN* = 40° 57′. Eben so viel beträgt die Abendweite.

Für den kürzesten Tag hat man dasselbe △ und dieselbe Gröfse der südlichen M. und A.

Aberration, Abirrung des Lichtes. Die Erscheinung, dafs alle Fixsterne eine Bewegung zu machen scheinen und zwar in Ellipsen, deren grofse Axe ǂ der Ekliptik = 40,5 Sec. beträgt, deren kleine Axe aber um so gröfser ist, je weiter der Stern von der Ekliptik entfernt steht.

Fig. 3.



Diese scheinbare Bewegung hat ihren Grund in dem ⋕ der Geschwindigkeiten, von denen die des Lichts die eine und die der Erde in der Ekliptik die andere Seite bildet. Bedeutet *AB* die Geschwindigkeit der Erde um die Sonne, = 4,14 Meilen per Secunde, *DA* die Geschw. des Lichts = 42000 Meilen per Sec., so kommt dem von *A* nach *B* sich bewegenden Beobachter der Lichtstrahl *EB* mit einer Geschw. in dem Verhältnifs *EB* : *AB* entgegen.

Denn da der in *A* auf der Erde befindliche Beobachter seine Bewegung mit der Geschw. *AB* nicht wahrnimmt und also sich einbildet, still zu stehn, so würde ein in der Richtung *AB* befindlicher still stehender Lichtpunkt ihm mit der Geschw. *BA* entgegen zu kommen scheinen.

In Bezug auf solche Augentäuschung erinnere ich an die Ueberraschung, wenn man während Hochwasser und Treibeis auf einem schnell strömenden Flufs in einem Boot sich befindet und zwischen 2 Eisschollen geräth: In demselben Augenblick, wo dies geschieht, bewegen sich die Ufer mit allen auf dem Lande befindlichen Gegenständen stromaufwärts mit der Geschw. des Stroms, während man selbst mit dem Treibeise, dem Wasser und allen auf dem Flufs herabschwimmenden Körpern still zu stehen glaubt, und dieser grofsartige Anblick währt bis zu dem Augenblick, in dem man sich aus der Klemme losgemacht hat, von wo ab man seine eigene Bewegung auf dem Strome wahrnimmt. Ein bei dunkler Nacht sichtbar schnell herbei kommender Eisenbahnzug scheint, während der Zeit, dafs ein Blitz herabfährt, still zu stehen; denn die Zeit, während dies geschieht, ist so klein, dafs die Bewegung des Zuges als Null angesehen werden kann; da aber die Erscheinung des Blitzes vermöge des Eindrucks auf unser Auge viel länger zu dauern scheint, so dauern auch alle Erscheinungen, die mit dem Blitz in Zusammenhang stehen, also auch der scheinbare Stillstand des Zuges dieselbe längere Zeit.

Bei neben einander und in entgegengesetzter Richtung fahrenden Zügen scheint es dem Fahrenden, wenn er auf den zweiten Zug sieht, dafs dieser die doppelte Geschw. hat, und dafs er selbst in Ruhe sich befindet.

Ein Fixstern in der Richtung ***AD*** von der Erde in einem Ort ***A*** der Ekliptik behält nun wegen seiner unermefslichen Weite von der Erde in allen Punkten ihrer Bahn dieselbe mit ***AD*** parallele Richtung, also in ***B*** die Richtung ***BE*** ∥ ***AD***. Während die Erde von ***A*** nach ***B*** sich bewegt, sendet der Stern sein Licht nach ***B*** in der Richtung und mit dem Wege ***EB***, wie aber dem in ***A*** befindlichen Beobachter ein in ***AB*** still stehendes Licht scheinbar mit der Geschw. ***BA*** entgegen kommen würde, so kommt ihm das in ***E*** still stehende Licht mit der Geschw. ***ED*** scheinbar entgegen; der Lichtstrahl aus ***E*** hat also beide Geschw. ***EB*** und ***ED*** als Componenten und er scheint in der Resultante ***EA*** herabzukommen. Es scheint also in jedem Ort der Erdbahn der Stern in der Richtung ***AE***, also in der Richtung der Bewegung der Erde um den ∠ ***DAE***, der bei dem Verhältnifs von ***AE*** : ***DE*** = 20,25" beträgt, voraus sich zu befinden. Ein Stern im Pol der Ekliptik steht auf allen Punkten der Erdbahn senkrecht, er ist also in allen Punkten derselben scheinbar um 20,25 Sec. voraus, er scheint also nicht in dem Pol selbst, sondern um 20,25" von demselben entfernt sich zu befinden und beschreibt daher jährlich einen Kreis von 20,25" Halbmesser.

Fig. 4.



Ein in der Ekliptik der Erdbahn befindlicher Stern beschreibt während des jährlichen Umlaufs der Erde eine gerade Linie von 40,5 Sec. Länge hin und zurück.

Es sei ***C*** der Stand der Sonne, ***ABDE*** die Erdbahn, der Stern ***S*** befinde sich mit dieser Bahn in einerlei Ebene, so sind die Richtungen ***AS***, ***BS***, ***DS***, ***ES*** einander ∥. Befindet sich die Erde in ***A***, so ist deren Bewegung der des Lichts aus ***S*** geradlinig entgegen, das # der Geschw. fällt in einerlei Linie zusammen und eine ***A*** findet also hier nicht statt. Dagegen entfernt sich die Richtung der Erdbahn immer mehr von der Richtung des Lichts aus ***S***, je weiter sie sich von ***A*** entfernt, es wächst also die ***A*** des Lichts, je mehr die Erde dem Punkt ***B*** sich nähert. Hier ist die Erdbewegung mit der des Lichts aus ***S*** normal und ***S*** scheint um den ∠***SBF*** = 20,25 Sec. voraus, also in ***F*** zu stehen. Je weiter ***S*** nach ***D*** kommt, desto mehr nimmt ∠***SBF*** ab, bis er in ***D*** = Null ist, und ***DS*** mit ***AS*** ∥ läuft. Von ***D*** nach ***E*** erhält die Erdbahn eine immer gröfsere Abweichung von der Richtung des Lichts aus ***S*** bis in den Punkt ***E***, wo sie das Maximum = 90° erreicht, und ***S*** scheint um den ∠***SEG*** = 20,25" voran, also in ***G*** zu stehen; aber diese scheinbare Richtung schliefst sich von nun ab immer mehr wieder der wirklichen Richtung des Lichtstrahls an, bis sie in ***A*** mit derselben einerlei ist.

Während des jährl. Umlaufs der Erde um die Sonne scheint also der Stern ***S*** die geradlinige Bewegung ***FBS*** + ***BEG*** = 40,5 Sec. zu machen, und zwar von der Opposition ***B*** bis zur Conjunction ***E*** macht er die Bewegung von Ost nach West, von ***E*** aber bis ***B*** die von West nach Ost zurück.

Mit Hülfe dieser Figur kann man sich die Erscheinung der ***A*** auch folgender Art versinnlichen: Gesetzt, die Erde empfinge den geraden Lichtstrahl ***SB***; kommt sie hierauf nach einem halben Jahr in den Punkt ***E***, so braucht der Lichtstrahl aus ***S*** noch die Zeit für den Weg ***BE***, und während dieser Zeit rückt die Erde von ***E*** nach ***A*** weiter und trifft in ***e*** in dem Augenblick ein, wo der Strahl den Punkt ***E***, also auch den Punkt ***e*** erreicht, und somit wird der Stern ***S*** bei ***E*** um den Bogen ***Ee*** mehr westlich gesehen. Der Erdbahndurchmesser beträgt im Mittel 41.325000 Meilen, die Geschw. des Lichts im Mittel 42000 Ml., mithin die Zeit, in welcher der Lichtstrahl den Durchmesser ***BE*** durchläuft $\frac{41.325000}{42000} = 984$ Sec. = 16,4 Min. In dieser Zeit durchläuft die Erde einen Bogen = 984 × 4,14 = 4073,76 Ml., und diesem ent-

spricht ein Centri $\angle = x$ nach der Proportion

$41.325000 \times \pi : 4073,76 = 360^\circ : x$

woraus $x = 0,1129626^\circ = 40,666$ Sec., eine Uebereinstimmung, wie sie nur immer zu erwarten ist, und wobei noch bemerkt werden mufs, dafs aus verschiedenen Beobachtungen verschiedener Astronomen die Angabe für die *A* von 20'' bis 20,7'' schwankend ist.

Je weiter die Erde von *E* ab nach *A* oder *D* hin sich befindet, desto geringer ist ihre Entfernung von ihrem ✝ mit *EB* in dem oberen Halbkreise gewesenen Standpunkt, einen desto geringeren Weg hat der Lichtstrahl zwischen beiden Erdstandpunkten zurück zu legen, und desto geringer wird die A.; in *A* und *D* ist sie folglich = Null.

Wenn der Stern weder im Pol noch in der Ebene der Ekl., sondern zwischen beiden unter einem $\angle \alpha$ zwischen 90° und 0° steht, so denke man Fig. 3 als Rhomboid, und $\angle DAB = \alpha$; dann hat man:

$$AE : DE = Sin\, ADE \text{ (oder } Sin\, DAB) : Sin\, DAE$$

Da nun bei dem verhältnifsmäfsig sehr geringen Unterschied von *DE* gegen *AE*, für *AE* die Länge *AD* gesetzt werden kann, so hat man äufserst nahe

$$AD : DE = \sin DAB : \sin DAE$$

d. h. die Geschw. des Lichts zur Geschw. der Erde in ihrer Bahn, wie der *Sin* der Schiefe des Sterns gegen die Ekliptik zum *Sin* des Aberrationswinkels, und dieser Winkel ist = 20,25. *Sin* α (in Secunden).

Fig. 5.



Es sei nun *ABDE* die Ekliptik, der Stern *S* stehe über derselben unter der Schiefe $S'CS = \alpha$, in senkrechter Projection über der Linie *CS*, so fällt in *B* und *E* der Lichtstrahl senkrecht auf die Richtung der Erdbahn, daher ist in *B* die $A. = Cd = 20,25''$ und in $E = Ca = 20,25''$. In *A* und *D* würde die A. = Null sein, wenn *S* in der Ebene, und 20,25'' wenn *S* senkrecht über *C* stände. Während aber die Erde in *D* die Richtung *FD* hat, trifft sie der Strahl in *D* unter dem $\angle GDF = \alpha$. Die *A*. in *B* und in *D* verhalten sich also wie $GD : GF$. Fällt man also von *a* und *d* auf die Richtung *CS'* Lothe, und nimmt $Ce = Cb =$ den dadurch erhaltenen Abschnitten auf *CS'*, so erhält man die kleine Axe *be* der Ellipse, in welcher der Stern *S* innerhalb des Umlaufs der Erde um die Sonne sich zu bewegen scheint.

Die Sonne steht in der Ebene der Ekliptik, sie wird also überall von der Erde aus um 20,25 Sec. weiter vorgerückt erscheinen, als ihr wirklicher Standpunkt ist.

Abfall, s. Abdachung.

Abflufsgraben (-canal, -röhre, -rinne). Ein Graben etc., der von einem Behälter geneigt abgeht, um zur Vermeidung dessen Ueberfüllung das Wasser abfliefsen zu lassen.

Abflufshöhe. Die senkrechte Entfernung der Wasserspiegel am Anfang und am Ende des Abflufsgrabens, -canals etc.

Abgekürzte Multiplication. Es kann bei der M. in der Praxis vorkommen, dafs man nur wenige Decimalstellen im Product nöthig hat, indem die folgenden ihres geringen Werthes wegen gleichgültig sind; dann bedient man sich mit Vortheil der abgekürzten oder verkürzten M. Z. B. das Product von 0,576×0,3854 hat 7 Decimalstellen und ist 0,2219904. Hätte man aber nur 3 Decimalstellen nöthig, so rechne man statt:

0,3854		0,3854
0, 576	folgend	0, 576
23124		23
26978		269
19270		1927
0,2219904		0,2219

Nämlich man rechnet der Genauigkeit wegen eine Stelle mehr; bemerkt, dafs die 6 in der dritten Stelle des Multiplicators mit der 3 in der ersten Stelle des Multiplicandus die vierte Stelle im Product giebt, um aber diese genau zu erhalten, zählt man die im Sinne behaltene Zahl aus der Multiplication der vorhergehenden 8 mit der 6, also aus der 48, und zwar nicht die 4 hinzu, sondern, weil die 48 der 50 näher als der 40, eine 5 und spricht: 6×8=48; 5 im Sinn; 6×3=18, hierzu 5 sind 23. Für die zweite Productenreihe multiplicirt 7

in der zweiten Stelle mit 8 in der zweiten Stelle, giebt die vierte Stelle im Product; sprich: $7 \times 5 = 35$; 3 im Sinn; $7 \times 8 = 56$, hierzu 3 sind 59 u. s. w. Das vollständige Product ist 0,2219. Da aber nur 3 Stellen gebraucht werden, so nimm 0,222, weil 9 näher an 10 als an 0 ist.

Fig. 6.



Abgekürzte Pyramide. Der Theil der Pyr. zwischen der Grundebene und einer Durchschnitts-Ebene d. Mantels. Ist diese E. ∦ der Grundebene, so ist die Pyr. gerade abgekürzt, sonst schief abgekürzt.

Sind die parallelen Grundflächen $= A, A'$; Höhe $= h$ gegeben, so ist der Inhalt:

$$K = \tfrac{1}{3} h \left[A + A' + \sqrt{A A'}\right]$$

die Höhe der Ergänzungspyramide

$$h' = \frac{A' + \sqrt{A A'}}{A - A'} \times h$$

Sind 2 homologe Seiten a und $a_,$ und die untere Grundebene gegeben, so ist der Inhalt:

$$K = \tfrac{1}{3} A \cdot h \frac{a^2 + a a_, + a_,^2}{a^2}$$

die Höhe der Ergänzungspyramide

$$h' = \frac{a_,}{a - a_,} \cdot h$$

Abgekürzter Kegel. Der Theil des Kegels zwischen dem Grundkreise und einer Durchschnitts-Ebene des Mantels. Ist diese Ebene ∦ dem Grundkreise, so ist der K. gerade abgekürzt, sonst schief abgekürzt.

Fig. 7.



Sind die Halbmesser R, r der parallelen Grund-Ebenen und die Höhe h gegeben, so hat man den Inhalt:

$$K = \pi (R^2 + Rr + r^2)$$

den abgekürzten Kegelmantel:

$$F = \pi (R + r) s = \pi (R + r) \sqrt{h^2 + (R - r)^2}$$

Abgestumpft in der Stereometrie s. v. w. abgekürzt; als abgestumpfte Pyramide s. v. w. abgekürzte Pyramide.

Abgestumpfte Ecken und **Kanten** eines Krystalls sind in einer zusammengesetzten Krystallform die von den Abstumpfungsflächen fortgenommenen Ecken und Kanten der als Grundform des Krystalls zu denkenden einfachen Form. (S. Abänderungsflächen und Abstumpfungsflächen).

Abgewickelte Linie s. v. w. Evolute. S. Abwickelung.

Abhang (Hydraul). Das Verhältnifs der lothrechten Höhe des geneigten Wasserspiegels in einem Graben, Kanal, Flufs u. s. w. zur waagerechten Länge desselben. Damit das Wasser noch fliefsen könne, ist ein Gefälle erforderlich von mindestens 1 Zoll auf 100 preufs Ruthen (in krautigen und engen Gräben viel mehr), dies giebt den A. $= \frac{1}{14400}$. Im Wegebau sagt man Steigung, das Maximum der Steigung bei Chausseen in Preufsen ist mit 6 Zoll auf 1 Ruthe, also die Steigung $\frac{1}{24}$ festgesetzt (vergleiche Abdachung).

Abirrung des Lichts s. v. w. Aberration. (s. d.)

Abkürzung eines algebraischen Ausdrucks zur Erleichterung der Entwickelung oder Rechnung geschieht zweckmäfsig in Gleichungen mit zusammengesetzten Coefficienten als:

$$\frac{a + 2b - 3c}{2d - 4f + g} x$$

wofür man $A \cdot x$ setzen, die Rechnung durchführen und in das Resultat den ursprünglichen Ausdruck wieder einsetzen kann.

Ablenkung des Lichtstrahls. 1. Durch ein Medium von anderer Dichtigkeit. Wenn der Lichtstrahl aus einem dünneren in ein dichteres Medium, wie z. B. aus Luft in Wasser, oder aus einem dichteren in ein dünneres, wie z. B. aus Wasser in Luft tritt, ist die A. die Differenz zwischen dem Einfallswinkel und dem Brechungs∠.

Fig. 8.



Ist S ein Lichtpunkt, der den Wasserspiegel in

a mit dem Einfallsloth Ee unter dem Einfallswinkel $EaS=\eta$ trifft, und wird der Strahl nach der Richtung as, also unter dem Brechungswinkel $sae=\beta$ gebrochen, so ist $\eta-\beta$ die A. des Strahls. Da ein und dasselbe Medium einen constanten Brechungsexponenten $n=\frac{\sin\eta}{\sin\beta}$ hat, der z. B. für Luft und Wasser = 1,336 beträgt, so ist die A. (δ) für jedes η und für jedes β zu berechnen.

Es sei für den Strahl aus Luft in Wasser der Einfalls$\angle\,\eta=45°$, so ist $1{,}336=\frac{\sin 45°}{\sin\beta}$, woraus $\angle\beta=31°\,57'$, also $\delta=45°-31°\,57'=13°\,3'$.

Der gröfste Winkel, den ein Strahl mit dem Einfallsloth Ea bilden kann ist 90°. Hierbei geht der Strahl ∦ der Wasserfläche fort, er trifft somit die Fläche nirgend, oder auch, je nachdem man die Sache ansieht, in jedem einzelnen Berührungspunkt mit der Wasserebene, z. B. in a. Dann hat man $1{,}336=\frac{\sin 90°}{\sin\beta}$, woraus $\sin\beta=\frac{1}{1{,}336}$ und $\beta=48°\,27^1/_2'$.

Ein im Wasser befindlicher leuchtender Punkt wirft nach allen Punkten des Wasserspiegels Strahlen, einer dieser Strahlen nach einem so weit entfernten Punkt des Spiegels, dafs er mit dem Einfallsloth daselbst einen $\angle$ von $48°\,27^1/_2'$ bildet, tritt nicht mehr aus, er geht längs der Oberfläche fort; alle Strahlen derselben Lage bilden auf dem Wasserspiegel eine Kreislinie, von der aus der Spiegel als eine erleuchtete Ebene erscheint. Man nennt den zu dem Einfalls$\angle=90°$ gehörenden Brechungs$\angle$, hier $48°\,27^1/_2'$ den Grenzwinkel.

2. Durch ein Prisma. *A.* Ein Lichtstrahl, der durch ein Prisma geht, erleidet 2 A., eine beim Eintritt und die

Fig. 9.



andere beim Austritt: der Strahl sa wird bei a, wo er aus der Luft in Glas tritt, nach der Linie ab gebrochen, in b tritt er aus dem Glase in die Luft und erfährt daselbst die Brechung abs' und zwar geschehen beide Brechungen nach einerlei Gesetz, indem, wenn Ee und $E'e$ die Einfallslothe sind

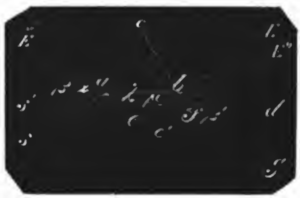
$\sin Eas : \sin bae = \sin E'bs' : \sin eba$

der kleinere Winkel $s'fd$, den der austretende Strahl bs' mit dem eintretenden sa bildet, ist die A. oder die Total-A. des Lichtstrahls, nämlich

$$=\angle Eas - bae + E'bs' - eba = \angle fab + fba = \angle dfb.$$

B. Es ist von grofser Wichtigkeit, die Bedingungen zu kennen, unter welchen ein Strahl durch ein gegebenes Prisma die kleinste Total-A. erfährt, und diese finden bei jedem Prisma statt, wenn der Strahl so einfällt, dafs der innerhalb des Prisma gebrochene Strahl mit beiden Prismenflächen gleiche Winkel bildet. Es werde der Strahl sa nach der Linie ab

Fig. 10.



gebrochen, so dafs $\angle cab=\angle cba$, so wird dieser Strahl in b wieder gebrochen und tritt nach der Richtung bd aus dem Prisma, so dafs $\angle dbE'=\angle saE$ ist. Die Total-A. des Strahls sa ist demnach der Winkel, den sa und bd in ihrer Verlängerung bilden. Bezeichnet man den Einfalls$\angle\,Eas$ mit α, seinen Brechungs$\angle\,bae$ mit λ, so ist auch $\angle abe=\lambda$; und der Austritts$\angle\,E'bd=\alpha$; mithin die Total-A.

$$=\alpha-\lambda+\alpha-\lambda=2(\alpha-\lambda) \qquad (1)$$

s' unter dem Einfalls$\angle\,\beta<\alpha$ sei ein zweiter Strahl, der in der Linie af unter dem $\angle fae=\lambda-\mu$ gebrochen werde, und dieser Strahl trete in fg aus, unter dem $\angle E'fg=\beta'$, so ist $\angle afe'=\angle abe+\angle baf=\lambda+\mu$. Die Total-A. des Strahls $s'a$ $=\beta-(\lambda-\mu)+\beta'-(\lambda+\mu)=\beta+\beta'-2\lambda$ und es ist nur zu zeigen, dafs $\beta+\beta'>2\lambda$ Nun ist

$$\frac{\sin\beta}{\sin(\lambda-\mu)}=\frac{\sin\alpha}{\sin\lambda}=\frac{\sin\beta'}{\sin(\lambda+\mu)} \qquad (2)$$

Löst man den Bogen s in eine unendliche Reihe nach den fortlaufenden Potenzen

des ihm zugehörigen Sinus auf, so erhält man

$$Arc(sin=z)=z+\frac{1}{2}\frac{z^3}{3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\frac{z^5}{5}+\dots$$

Da z ein ächter Bruch ist, so ist jedes folgende Glied der Reihe kleiner als das ihm zunächst voranstehende, und es können für den vorliegenden Nachweis die ersten beiden Glieder genügen. Man hat demnach äufserst nahe

$$Arc\,(sin=z)=z+\tfrac{1}{6}z^3$$
$$Arc(sin=2z)=2z+\tfrac{1}{6}(2z)^3$$
$$=2\,(z+\tfrac{1}{6}z^3)+z^3$$
$$Arc(sin=3z)=3\,z+\tfrac{1}{6}(3z)^3$$
$$=3\,(z+\tfrac{1}{6}z^3)+4\,z^3$$
$$Arc(sin=n\,z)=n\,z+\tfrac{1}{6}(n\,z)^3$$
$$=n\,(z+\tfrac{1}{6}z^3)+\frac{n^3-n}{6}z^3$$

Während also die Sinus in dem Verhältnifs $1:2:3:\dots n$ wachsen, wachsen die zugehörigen Bogen in einem höheren Maafse und zwar in dem Verhältnifs

$$1:2+\delta:3+4\delta:\dots\dots n+\frac{n^3-n}{6}\delta$$

wo δ den Cubus des einfachen Sinus bedeutet.

Bezeichnet man $(z+\frac{1}{6}z^3)$ mit A, so ist

$$\frac{Arc\ sin\ 2z}{Arc\ sin\ z}=\frac{2A+\delta}{A}=2+\frac{\delta}{A}$$

$$\frac{Arc\,sin\,2\,n\,z}{Arc\,sin\,n\,z}=\frac{2nA+\dfrac{8n^3-2n}{6}\delta}{nA+\dfrac{n^3-n}{6}\delta}$$

$$=2+n^2\frac{\delta}{A}-\frac{n(n^3-n)}{6}\frac{\delta^2}{A^2}+\dots$$

wo jedes folgende Glied im absoluten Werth wieder kleiner ist als das ihm voranstehende.

Demnach ist sehr nahe

$$\frac{Arc\,sin\,2\,nz}{Arc\,sin\,nz}=2+n^2\frac{z^3}{z+\frac{1}{6}z^3}$$

Die Verhältnisse der Bogen nehmen also bei einerlei Verhältnifs deren Sinus mit den Quadraten der Vielfachen dieser Sinus zu:

$$\frac{Arc\ 2z}{Arc\ z}<\frac{Arc\ 4z}{Arc\ 2z}<\frac{Arc\ 6z}{Arc\ 3z}\dots<\frac{Arc\ 2\,n\,z}{Arc\ n\,z}$$

und zwar ist der Unterschied zwischen den ersten beiden $=3\frac{\delta}{A}$, der zwischen den folgenden $5\frac{\delta}{A}$ u. s. w.

Demnach ist

$$\frac{Arc\ 2z}{Arc\ z}+3\,\frac{\delta}{A}=\frac{Arc\ 4z}{Arc\ 2z}$$

$$\frac{Arc\ 4z}{Arc\ 2z}+5\,\frac{\delta}{A}=\frac{Arc\ 6z}{Arc\ 3z}\ \text{u. s. w.}$$

So wie hier die Sinus-Quotienten $\frac{2z}{z}=\frac{4z}{2z}=\frac{6z}{3z}$, so findet dies in Gl. I. statt, und da $\beta<\alpha<\beta'$, so ist

$$\frac{\beta}{\lambda-\mu}<\frac{\alpha}{\mu}<\frac{\beta'}{\lambda+\mu}$$

und zwar so, dafs wenn $\frac{\beta}{\lambda-\mu}+k\,\delta=\frac{\alpha}{\lambda}$

und $\frac{\alpha}{\lambda}+k'\,\delta=\frac{\beta}{\lambda+\mu}$

$k<k'$ und zwar im Verhältnifs auf einander folgender ungerader Zahlen $3:5:7\dots$

Nun hat man

$$\beta+k\,\delta\,(\lambda-\mu)=\frac{\alpha\,(\lambda-\mu)}{\lambda}$$

$$\beta'-k'\delta\,(\lambda+\mu)=\frac{\alpha\,(\lambda+\mu)}{\lambda}$$

mithin $\beta+\beta'=2\,\alpha+\delta\mu\,(k'+k)+\delta\lambda\,(k'-k)$

Da nun die letzten beiden Glieder positiv sind, so ist

$$\beta+\beta'>2\,\alpha$$

Für den Beweis, dafs $\beta+\beta'>2\,\alpha$, war der Einfalls$\angle\,\beta<\alpha$, denkt man sich gf als eintretenden Strahl, so tritt derselbe in as' aus. Der Einfalls$\angle\,\beta'$ ist dann $>\alpha$ und es ist somit auch für solche das Gesetz bewiesen.

Bezeichnet man die kleinste Total-A. (Gl. 1) $2\,(\alpha-\lambda)$ durch D, den Brechungs$\angle\ acb$ des Prisma (Fig. 10) mit c, so ist

$$c+\angle\,acb=2\ \text{R}$$
$$2\lambda+\angle\,acb=2\ \text{R}$$
$$2\lambda=c$$
$$2\alpha-2\lambda=D$$
$$\text{woraus}\ D=2\alpha-c$$

Wird $2\alpha-c>90^\circ$, so wird $D=180-(2\alpha-c)$

Die hier gewonnenen Resultate sind also folgende:

1. Die geringste totale A. (D) des Lichtstrahls durch ein Prisma in 2 hinter einander erfolgenden Brechungen geschieht, wenn der innerhalb des Prisma gebrochene Strahl mit beiden Brechungsflächen einerlei Winkel bildet; der Einfalls$\angle\,\alpha$ wird = dem Austritts$\angle$, einer kann für den anderen gelten, beide Brechungs$\angle\,\lambda$ innerhalb des Prisma sind gleich grofs und jeder gleich dem halben, von den brechenden Flächen gebildeten brechenden Winkel c des Prisma, und die totale Ablenkung des Strahls D ist = dem doppelten Einfallswinkel weniger dem brechenden Winkel des Prisma.

Der Brechungs-Exponent für Glas ist im Mittel $=\frac{3}{2}$; d. h.

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\lambda}=\frac{3}{2}$$

oder $\sin\lambda = \sin\frac{1}{2}c = \frac{2}{3}\sin\alpha$; mithin hat man für jedes gegebene c auch α und gegenseitig. Das gröfste α ist 90° im Grenzwerth, wenn der Strahl längs oder $\mp$ ac gerichtet ist. Dann ist $\sin\frac{1}{2}c = \frac{2}{3} = 0{,}666$; woraus $\frac{1}{2}c = 41\frac{3}{4}°$ und mithin der gröfstmögliche brechende $\angle\, c$ des Prisma $= 83\frac{1}{2}°$, die Total-A. (D) ist $(180° - 96\frac{1}{2})° = 83\frac{1}{2}°$. Dieser Strahl unter $\alpha = 90°$ als Grenze $\mp$ ac, wenn er in das Prisma eintreten könnte, wäre bei dem Prisma von $c = 83\frac{1}{2}°$ zugleich der einzige Strahl, welcher wieder auszutreten vermag. Denn ein beliebiger anderer Strahl sa unter dem Einfalls$\angle\, a < 90°$ hat einen Brechungs$\angle\, bae < 41\frac{3}{4}°$; er sei $= 41\frac{3}{4}° - \omega$. Dieser Strahl hat in cb den Brechungs$\angle\, eba$.

Nun ist $\angle\, aeb = 180° - 83\frac{1}{2}° = 96\frac{1}{2}°$

also $\angle\, abe = 180° - 96\frac{1}{2}° - (41\frac{3}{4}° - \omega)$
$= 41\frac{3}{4}° + \omega$.

Der Strahl ab tritt also nicht aus, sondern geht in das Prisma zurück.

Demnach ist für den brechenden Winkel c eines Glasprisma $83\frac{1}{2}°$ das Maximum als Grenzwerth.

Je kleiner c wird, desto kleiner wird der Brechungs$\angle\, \lambda = \frac{1}{2}c$, desto kleiner also auch der ihm zugehörige Einfalls$\angle\, \alpha$ und desto kleiner zugleich D.

Ablenkung der Magnetnadel von der nach dem magnetischen Pol gerichteten Horizontalen geschieht durch die Nähe von Eisenmassen. Besonders nachtheilig wird sie auf Schiffen, und es gehören für jedes neu erbaute Seeschiff besondere genaue Untersuchungen, um den Einflufs der eisernen Baustücke und Geräthe, als Anker, Ketten, auf die Nadel des Compasses zu erfahren und Correctionen, um die wahre Richtung der Magnetnadel aus der unrichtigen, die für jede Lage des Schiffes eine andere ist, augenblicklich zu finden.

Je weiter die Entfernung auf der Erde vom magnetischen Pol, desto näher ist die frei spielende Nadel der Horizontalen; ganz horizontal spielt sie im magnetischen Aequator, der den Erdaequator in zwei Punkten schneidet. In den magn. Polen der Erde (zwischen 70° und 80° geogr. Br.), steht die Magnetnadel vertical, die Horizontalkraft des Magnetismus ist hier = Null. Aus diesem Grunde ist die Einwirkung der Eisenmassen auf die horizontale Ablenkung der Nadel in dem magn. Aeq. am geringsten, an den magn. Polen am stärksten. (Vergl. Abweichung der Magnetnadel.)

Ablösung von Bauverpflichtungen und **Bauberechtigungen.** Stehen 2 Personen A und B in dem Verhältnifs zu einander, dafs der Erste ein dem Zweiten zugehörendes Bauwerk, wenn es baufällig geworden ist, wieder neu herzustellen hat, so ist jener Erste der Bauverpflichtete, dieser Zweite der Bauberechtigte. Das Verhältnifs kann der Art sein, dafs solcher Pflicht-Neubau nur einmal geschehen mufs; in den meisten Fällen jedoch erstreckt sich die Verpflichtung auf sogenannte ewige Zeiten, so dafs das Bauwerk, wenn es seiner augenblicklichen Beschaffenheit wegen muthmaafslich in n Jahren zum ersten Mal, seiner Construction und Bestimmung zufolge von da ab alle m Jahre baufällig wird, also zum ersten Mal nach n Jahren und von da ab alle m Jahre neu erbaut werden mufs. Der erste Fall ist in dem letzten enthalten, wenn man in diesem für $m = \infty$ setzt.

Soll dies Verhältnifs gegen Entschädigung des Berechtigten aufgelöst werden, so geschieht die Ablösung dadurch, dafs der Verpflichtete dem Berechtigten entweder augenblicklich eine Summe Geldes K giebt (Ablösung durch Kapital), oder dafs er ihm eine jährliche Rente R zahlt (Ablösung durch Rente).

Ist der Zinsfufs z (4 bis 5 Procent) bestimmt, nach welchem ein jetzt gezahltes Kapital K sich verzinsen soll, um die Baukosten B in jenen n und wiederholten ferneren m Jahren zu geben, so finden 3 Principien statt:

1. Das Princip mit einfachen Zinsen. Das jetzt gezahlte Kapital K soll mit jährlich zu erhebenden Zinsen nach n Jahren die Baukosten B geben und das noch übrig gebliebene Kapital K soll mit dessen jährlich zu erhebenden Zinsen nach m Jahren wieder $B + K$ geben. Und so fort.

Für diesen Fall ist

$$K = \frac{1 + \frac{100}{mz}}{1 + \frac{z}{100}\cdot n} \times B$$

$$R = \frac{1 + \frac{100}{mz}}{n + \frac{100}{z}} \times B$$

Für den Fall, dafs das Bauwerk nur

einmal, nämlich nach n Jahren neu zu bauen ist, hat man für $m = \infty$

$$K = \frac{1}{1 + \frac{z}{100} \cdot n} \times B, \text{ und } R = \frac{1}{n + \frac{100}{z}} \times B$$

Dieses Ablösungsprincip ist aber nicht billig, denn die jährlich erhobenen Zinsen $= \frac{z}{100} K$ können von dem Empfänger jährlich in eine Sparkasse gelegt werden und ihm z' Procent Zinsen einbringen; oder er kann sie in seiner Wirthschaft verwenden, wo er sie vielleicht zu einem höheren Zinsfuſs als z verwerthet; der Verpflichtete aber, besonders wenn er Mehreres abzulösen hat, kann die Zinsen direct zum Zinsfuſs z verwerthen. Bezeichnet man die jährlichen Zinsen von $\frac{z}{100} K = \frac{z}{100} \times \frac{z}{100} K$ mit k, so hat man nach n Jahren eingenommen $(n - 1 + n - 2 + \ldots\ldots + 1) k = \frac{1}{2} n (n - 1) k$, also für $n = 100$ Jahre $= 4950 \cdot k$ Zinsen; ist $B = 1000$ Thlr., $z = 4$, so ist $k = 1{,}6$ Thlr. und die Summe sämmtlicher Zinsen $= 4950 \times 1{,}6$ Thlr. $= 6920$ Thlr.

2. Das Princip mit Zwischenzinsen. Es ist dasjenige, bei welchem die eben betrachteten zu viel gezahlten und eingenommenen Zinsen mit berücksichtigt werden.

Für dieses Princip ist

$$K = \frac{1 + \frac{mz}{100}\left[1 + \frac{m-1}{2} \cdot \frac{z}{100}\right]}{\frac{mz}{100}\left[1 + \frac{m-1}{2} \cdot \frac{z}{100}\right]\left[1 + \frac{nz}{100}\left(1 + \frac{n-1}{2} \cdot \frac{z}{100}\right)\right]} \times B$$

$$R = \frac{1 + \frac{mz}{100}\left[1 + \frac{m-1}{2} \cdot \frac{z}{100}\right]}{m\left[1 + \frac{m-1}{2} \cdot \frac{z}{100}\right]\left[1 + \frac{nz}{100}\left(1 + \frac{n-1}{2} \cdot \frac{z}{100}\right)\right]} \times B$$

Dividirt man zuerst Zähler und Nenner mit m, so erhält man für K

$$\frac{\frac{1}{m} + \frac{z}{100}\left[1 + \frac{m-1}{2} \cdot \frac{z}{100}\right]}{\frac{z}{100}\left(1 + \frac{m-1}{2} \cdot \frac{z}{100}\right)\left[1 + \frac{nz}{100}\left(1 + \frac{n-1}{2} \cdot \frac{z}{100}\right)\right]} \times B$$

für $m = \infty$ fällt das erste Glied $= \frac{1}{m} = 0$ des Zählers fort, der Zähler hebt sich nun mit dem ersten Factor des Nenners und man hat für einen einzigen Neubau nach n Jahren

$$K = \frac{1}{1 + \frac{nz}{100}\left(1 + \frac{n-1}{2} \cdot \frac{z}{100}\right)} \times B$$

$$R = \frac{\frac{z}{100}}{1 + \frac{nz}{100}\left(1 + \frac{n-1}{2} \cdot \frac{z}{100}\right)} \times B$$

3. Das Princip mit Zins auf Zins. Bei diesem sollen nicht allein die *ad* 1 und 2 gedachten einfachen Zinsen als verzinst gerechnet, sondern das augenblicklich zu zahlende Kapital soll zu Zinses-Zinsen verliehen gedacht werden. Für dieses Princip ist

$$K = \frac{\left(1 + \frac{z}{100}\right)^m}{\left[\left(1 + \frac{z}{100}\right)^m - 1\right]\left(1 + \frac{z}{100}\right)^n} \times B$$

und

$$R = \frac{z\left(1 + \frac{z}{100}\right)^m}{100\left[\left(1 + \frac{z}{100}\right)^m - 1\right]\left(1 + \frac{z}{100}\right)^n} \times B$$

Um zu ermitteln, wie groſs K und R werden, wenn nur einmal, nach n Jahren, neu zu erbauen ist, hat man

$$\frac{1}{K} = \left[\left(1 + \frac{z}{100}\right)^n - \frac{\left(1 + \frac{z}{100}\right)^n}{\left(1 + \frac{z}{100}\right)^m}\right] \times B$$

für $m=\infty$ wird das zweite Glied der Klammergröfse = 0, daher

$$\frac{1}{K} = \left(1 + \frac{z}{100}\right)^n \times B \text{ und}$$

$$K = \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{100}\right)^n} \times B \text{ und desgl.}$$

$$R = \frac{z}{100} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{100}\right)^n} \times B$$

Eine Ablösung auf diese Weise ist der Natur der Sache nicht angemessen. Denn wenn die *ad* 1 gedachten einfachen Zinsen in der Wirthschaft verwendet werden, und hier besonders zu Verbesserung des abgelösten Bauwerks, so werden die damit eingebrachten neuen Baustücke mit der Zeit baufällig, sie hören auf zu sein, und bei einem Kapital, welches Zinses-Zinsen tragen soll, ist Grundbedingung, dafs Kapital nebst Zinsen nicht zu sein aufhören, sondern dafs sie unverletzt, oder, wie man es nennt, eisern bleiben.

Somit ist nur das zweite Princip das allein richtige für Ablösungen von Bau-Verpflichtungen und Berechtigungen, und für dieses gelten die von mir herausgegebenen und bei G. Bosselmann erschienenen Tabellen zur Berechnung der Rente bei Ablösung etc.

Abmessung (Dimension) ist die Gröfse einer Ausdehnung, eine Länge; sie kann sich also nur auf Raumgröfsen beziehen. Eine Linie hat nur eine Abmessung, die Linie selbst, als ihre Längen-Ausdehnung; eine Fläche hat 2 A., welche Länge und Breite heifsen, indem die Fläche nach 2 Richtungen ausgedehnt ist; ein Körper hat 3 A., Länge, Breite und Höhe, indem derselbe nach 3 Richtungen ausgedehnt ist. Ein Raumgegenstand von 4 A. ist undenkbar.

Werden die Raumgröfsen algebraisch behandelt, so wird jede A. durch einen Buchstaben ausgedrückt; in Folge eines Calcüls sind Ausdrücke, wie

$$a;\ \frac{b^2}{c};\ \frac{ac^2}{c^2};\ \sqrt{a \cdot b};\ \sqrt[3]{ad^2} \text{ u. s. w.}$$

Linien (weil jeder nur von einer Abmessung ist); die Ausdrücke:

$$ab;\ c^2;\ \frac{d^3}{a};\ \frac{ef^3}{g^2}$$

sind Flächen (weil jeder 2 Abmessungen zeigt). Die Ausdrücke:

$$a \cdot b \cdot c;\ d^3;\ \frac{g^2 f^2}{a}$$

sind Körper (jeder hat 3 Abmessungen). Die Ausdrücke:

$$\frac{ab}{c^2};\ \frac{de}{fg}$$

haben keine Abmessung und sind abstracte Zahlen oder Coefficienten.

Abplattung der Erde. Hierunter versteht man das Verhältnifs des Längen-Unterschiedes zwischen dem Durchmesser des Aequators und der Erdaxe zu dem Durchmesser. Bezeichnet D den Durchmesser des Aequators, d den kleineren Durchmesser der Erdaxe, so ist die A. = $\frac{D-d}{D}$, also eine abstracte Zahl, die etwa $\frac{1}{300}$ beträgt. Auch wird bisweilen unter A. das Verhältnifs $\frac{D-d}{d}$ verstanden.

Dafs der Aequator-Durchmesser gröfser ist als die Axe, hat seinen Grund in der Rotation der Erde, wodurch die Umfangspunkte des Aequators eine grofse Geschwindigkeit erhalten, während die Pole hierbei in Ruhe bleiben, so dafs früher, wo die Erde, wie die Geognosie unabweisbar lehrt, in flüssigem Zustande sich befunden hat, eine Aufschwellung der um den Aequator befindlichen Masse hat stattfinden müssen, und die Erde aus der Kugel, der natürlichen Form flüssiger, einer und derselben Centralkraft unterworfener Massen in die des Sphäroids übergegangen ist.

Dieser angeführte Grund ist hypothetisch, seine Richtigkeit aber wird unterstützt durch die wirkliche Wahrnehmung der Erdabplattung:

1) Mittelst der Breitengradmessungen, indem die Grade nach den Polen zu immer länger werden.
2) Mittelst der Pendelschwingungen, welche nach den Polen hin immer schneller geschehen.
3) Mittelst Beobachtung des Schwankens der Erdaxe, indem Sonne und Mond, wenn sie in der Erd-Aequator-Ebene sich nicht befinden, auf deren beide Halbkugeln eine ungleiche Anziehung ausüben.

Dafs aus dem Zunehmen der Breitengrade nach den Polen hin auf die A. der Erde geschlossen werden mufs, und von dieser auf jene, erklärt sich dadurch, dafs mit der A., also mit der elliptischen Form eines durch beide Pole genommenen Erddurchschnitts die Krümmungshalbmesser vom Aequator zum Pol hin immer zunehmen, also der für den Pol am gröfsten ist, und Marbach giebt pag. 876. Bohnenbergers elementaren Beweis wie folgt:

Sind f, g, h, k die Mittelpunkte der Krümmungen für die Bogen ab, bd, de, ep, so wird gezeigt, dafs $af + fg + gh + hk = kp < aC + Ck$, woraus $Cp < aC$.

Fig. 11.



Sind nun die $\angle$ *afb*, *bgd*, *dhe* und *ekp* einander gleich, so wachsen deren zugehörige Bogen in Verhältnifs der ihnen zugehörenden Halbmesser, und theilt man den Quadrant *aP* in 90 gleiche Theile, so müssen die Bogen auf *ap*, von denen jeder einen Grad ausmacht, von *a* bis *p* fortwährend wachsen.

Denkt man sich durch die 90 Durchschnittspunkte wie *f*, *g*, *h*, *k* eine Curve gelegt, so erhält man die Curve der Mittelpunkte für sämmtliche Krümmungshalbmesser, so dafs die von jedem einzelnen Punkt zwischen den beiden zunächst liegenden Radien gezeichneten Kreisbogen, wie *ab* aus *f*, *bd* aus *g*, *de* aus *h* und *ep* aus *k*, sehr annähernd die elliptische Form des Erdquadranten bilden. Die Radien wie *af*, *bg*, *dh*, *ek* sind zugleich die Schwerlinien für die Punkte auf den Bogen *ab*, *bd*, *de*, *ep*, d. h. die Richtungen, nach welchen die Bleilothe daselbst die lothrechte Linie angeben, daher mufs man sich die Mittelpunktscurve der Radien viel näher an den Mittelpunkt *C* gerückt denken, etwa wie Fig. 11 durch *xy* angedeutet ist.

Dafs diese Schwerlinien seitwärts von dem Mittelpunkt *C*, dem wirklichen Schwerpunkt der Erde, und für den Quadrant *ap* nach einerlei Richtung seitwärts fallen, erklärt sich folgendermafsen.

Gesetzt, die Erde wäre eine Kugel, so würde in jedem Punkt der Oberfläche, wie in *A*, die Schwerlinie genau nach dem Mittelpunkt *C* der Erde, hier nach *AC* gerichtet sein, weil beiderseits von *AC* gleich viel Masse und in einerlei Entfernung von *A* vorhanden ist. Ist die Erde dagegen abgeplattet, mithin *d* statt *A* der Punkt deren Oberfläche, so fehlt links das kleine Stück Masse *Ada*, und rechts das bei weitem gröfsere *AdpP*.

Es liegt zwar dem ersten fehlenden Stück das gleich grofse Stück *A'qd'*, und dem zweiten das ihm gleich grofse Stück *A'd'p'P'* symmetrisch gegenüber, so dafs von beiden Seiten des Durchmessers *aq* gleich viel Masse fehlt, also auch gleich viel Masse vorhanden ist. Dagegen wirkt die Schwere nicht nur direct, wie die Gröfsen der dieselbe afficirenden Massen, sondern zugleich indirect, wie die Quadrate deren Entfernung; die Masse *dd'p'ad* oder deren Schwerpunkt *M'* ist aber dem Punkt *d* viel näher als die ihr gleiche Masse *dd'qpd*, oder deren Schwerpunkt *M*, und daher trifft die Schwerlinie von *a*, (d. h. das in *a* messende Bleiloth) unterhalb *C*, etwa nach der Richtung *al*.

Für *a* und *p* fallen die Schwerlinien durch *C*; je näher der Punkt der Erdoberfläche von *a* nach *p* hin an *a* liegt, desto näher fällt seine Schwerlinie an den Mittelpunkt *C*; je näher ein solcher Punkt von *p* nach *a* hin an *p* liegt, desto näher fällt ebenfalls dessen Schwerlinie an den Mittelpunkt *C*; es mufs also einen Punkt zwischen *a* und *p* geben, wo die Abweichung der Schwerlinie vom Mittelpunkt *C* der Erde ein Maximum ist, und es findet dieser Punkt ziemlich in der Mitte zwischen *p* und *a* oder für $\angle ACa = 45°$ statt.

Bei den unvermeidlichen Fehlern, welche mit jeder Gradmessung verbunden sind, als ungleichen Einflufs der verschiedenen Wärmegrade bei den Temperaturwechseln der Atmosphäre auf die Maafsstäbe, Ungenauigkeit der Winkelmefsinstrumente, Luft- und Lichttäuschungen beim Abnehmen der Winkel, Fehler beim Nivelliren der gemessenen Längen und deren Reduction auf den Meeresspiegel als Horizont, Beobachtungsfehler u. s. w.; bei allen diesen Fehlern, die sich auch wohl gegenseitig zum Theil compensiren, ist es klar, dafs die vielen angestellten Gradmessungen nicht ganz zuverlässige Resultate gewähren, und man hat aus den Consequenzen von Gradmessungen die Abplattung der Erde von $\frac{1}{297,48}$ bis auf $\frac{1}{302,78}$ berechnet.

Beträgt der Grad im Aequator 15 geogr. Meilen, so hat man den ersten dem Aequator zunächst liegenden Meridiangrad ungefähr 14,9 Ml., den 90sten zunächst dem Pol ungefähr 15,047 Ml.

Nach Sabine's Messungen hat Muncke berechnet

den Halbmesser des Aeq. = 3271952 Toisen
die halbe Erdaxe . . . . = 3260643 „

den Unterschied also 11309 Toisen giebt zu 1,035003 preufsische Klafter = 11708,849 Klafter = 70229 preufs. Fufs oder 2,926 preufs. Meilen oder 2,972 geogr. Meilen, also gegen 3 geograph. Meilen. Oder der Durchmesser des Aequators = 1719, die Erdaxe 1713 geogr. Meilen. (Das Nähere s. u. Gradmessungen, Ellipsoid.)

Dafs man aus den Pendelschwingungen an verschiedenen Punkten der Erdoberfläche auf deren Abplattung schliefsen kann, liegt gleichfalls in dem oben gedachten Gesetz der Schwerkraft: am Aeq. ist der Mittelpunkt (der Schwerpunkt) der Erde am entferntesten, an einem der Pole am nächsten. Unterm Aequator wirkt also die Schwere am geringsten, unter den Polen am stärksten, dort fällt ein Körper langsamer, hier rascher, mithin macht einerlei Pendel in einerlei Zeit am Aequator die wenigsten Schwingungen, an den Polen die meisten Schwingungen. Ein Pendel, welches während einer Secunde eine Schwingung machen soll (das Secundenpendel), mufs also am Aequator am kürzesten, unter dem Pol am längsten sein, die Länge desselben beträgt dort 991, am Pol 996¼ Millimeter. (Das Nähere s. u. Pendelschwingungen.)

Das Schwanken der Erdaxe und einige Unregelmäfsigkeiten in der Bewegung des Mondes werden von den Astronomen ebenfalls aus der A. der Erde hergeleitet, und zwar in Folge des oben gedachten Gesetzes der Schwerkraft; aus den Beobachtungen hierüber beträgt die Abplattung der Erde $\frac{1}{304,6}$ bis $\frac{1}{318}$

Aus der Geschwindigkeit der Erdoberfläche bei ihrem Umschwung um ihre Axe mit Voraussetzung von ehemals tropfbarer Flüssigkeit des Erdballs hat Newton die Abplattung = $\frac{1}{230}$ berechnet. (Das Nähere s. u. Centrifugalkraft.)

Abplattung der Weltkörper. Alle Weltkörper, die aufser einer Bahnbeschreibung auch noch um ihre Axe rotiren, müssen nach dem vor. Art. in der Richtung dieser Axe abgeplattet sein, und zwar um so mehr, je gröfser die Länge und die Winkelgeschwindigkeit des Aequator-Halbmessers ist.

Unsere Sonne hat Rotation um die Axe und somit höchst wahrscheinlich haben sie auch alle Fixsterne, die gleichfalls Sonnen sind; dagegen hat bei der Sonne wegen ihres Lichteindrucks eine A. durch Beobachtung noch nicht nachgewiesen werden können, und es kann dies um so weniger bei den Fixsternen geschehen, die wegen ihrer Fernen uns nur als Lichtpunkte erscheinen.

Diejenigen Weltk., bei denen wir eine A. nachweisen können, sind allein die zu unserem Sonnensystem gehörenden Planeten. Bei den Asteroiden ist es wegen ihrer Kleinheit noch nicht möglich gewesen, und auch bei dem Merkur, der Venus und dem Mars sind die Beobachtungen und Angaben der A. unsicher.

Merkur mit 670 Meilen Durchmesser, einem Umschwung in 24 St. 5 Min. soll $\frac{1}{253}$ A. haben, also eine gröfsere als die Erde, was höchst unwahrscheinlich ist.

Venus bei etwa 1690 Meilen Durchm. und einem Umschwung in 23⅓ Stunden, also in beiden Beziehungen der Erde sehr nahe kommend, eine A. = $\frac{1}{306}$, welches mit der ziemlich genauen Ermittelung der A. unserer Erde übereinstimmt.

Mars mit einem Durchm. nach verschiedenen Angaben im Mittel von 950 Ml., einem Umschwung in 24⅔ Stunden, eine A. = $\frac{1}{343}$, welches nicht unwahrscheinlich ist.

Jupiter, der hiernach folgende und gröfste Planet mit beinahe 11¼ Erddurchm., also über 19000 Ml. Durchm., vollendet einen Umschwung um seine Axe in weniger als 10 Stunden; es ist aber auch ganz analog der Theorie eine sehr grofse A. nämlich von $\frac{1}{12,73}$ (nach Struve zeigt sich der Aequator-Durchm. 38,44", die Axe 35,64"), also von nahe 1750 Ml. beobachtet worden, während sie bei der Erde nur gegen 6 Ml., oder auf den Jupiter bezogen 6×11¼ = 67½ Ml. : 1750 Ml. beträgt.

Saturn mit nahe 9¼ Erddurchm., also etwa 16750 Ml. Durchm., macht einen Umschwung um die Axe ebenfalls in nahe 10 Stunden, hat gleichfalls eine A. von $\frac{1}{13}$, indem den neuesten Beobachtungen zufolge der Aequator zur Axe wie 17,0 zu 15,7 sich verhält.

Uranus, der entfernteste Planet (aufser dem noch nicht zuverlässig genug ebobachteten Neptun) mit 4,34 Erddurchm., also mit 7460 Ml. Durchm., soll eine A.

$= \frac{1}{60}$ haben. Die Zeit seines Umschwungs ist noch nicht ermittelt.

Monde, wie z. B. der unserer Erde, haben keine Rotation um ihre Axen, sie können also auch nicht abgeplattet sein, und es ist an ihnen auch keine A. beobachtet worden.

Die Beobachtungen stimmen also, soweit es überhaupt möglich, genau überein mit der Theorie, nach welcher eine A. jedem rotirenden Weltk. nothwendig zukommt.

Abschnitt einer Figur (Segment) ist der Theil derselben, welcher von einer durch zwei Punkte ihres Umfangs gezogenen geraden Linie abgeschnitten wird; A. eines Körpers der Theil, welcher von einer durch den Körper gelegten Ebene abgeschnitten wird.

Abschnittswinkel (beim Kreise) der Winkel, den eine Tangente *DE* in *A* mit einer von d. Berührungspunkt aus gezogenen Sehne bildet.

Fig. 12.



$\angle DAB$ ist der $\angle$ des Abschn. *AFB*, u. $\angle EAB$ der $\angle$ des Abschnitts *AGB*. Setzt man $\angle DAB = \alpha$, den Halbmesser des Kreises $= r$, so hat man

Sehne $AB = 2r \sin \alpha$, und

Abschnitt $\overset{\frown}{ABF} = (\frac{\alpha}{180}\pi - \frac{1}{2}\sin 2\alpha)\, r^2$

Für $\alpha = 0$ wird die Sehne $= 0$ und der Abschnitt $= 0$

Für $\alpha = 90°$ wird die Sehne $= 2r$, der Abschnitt $= \frac{\alpha}{180}\pi r^2 = \frac{1}{2}\pi r^2$

Für $\alpha = 180°$ wird die Sehne $= 0$, der Abschnitt $= \pi r^2$.

Abscisse ist eine gerade Linie, durch welche man die Lage eines oder mehrerer außer ihr gelegenen Punkte bestimmt, und zwar mit Hülfe von anderen geraden Linien, deren Längen und deren Lagen zur ersten gegeben werden.

Fig. 13.



Die Lage des Punktes *P* gegen die Abscisse *AB* wird gegeben, wenn man die Länge *PD*, den $\angle \alpha = PDB$ und den Abstand *AD* von einem festen Punkt *A* der geraden Linie *AB* kennt: *AD* heifst die A. von *P*, *PD* die Ordinate, *A* der Anfangspunkt der A.

Hat man mehrere mit *PAB* in einerlei Ebene liegende Punkte p, p' u. s. w. gegen *AB* zu bestimmen, so nimmt man von *A* aus 2 unter α geneigte gerade Linien *AX* und *AY* und man hat für den Punkt *P* die Abstände *Aa* und *Aa'*, für *p* die Abstände *Ab* und *Ab'*, für *p'* die Abstände *Ac* und *Ac'* u. s. w. Man sieht, dafs für die A. in *AX* die Abstände in *AY* die Ordinaten und für die in *AY* liegenden A. die Abstände in *AX* Ordinaten sind, daher führen A. und Ordinaten den gemeinschaftlichen Namen Coordinaten, *A* heifst der Anfangspunkt der Coordinaten, α der Coordinatenwinkel; die beiden geraden Linien durch den Anfangspunkt *A* heifsen Coordinaten-Axen, die *AX* heifst die Axe der *X*, die *AY* die Axe der *Y*, die Abstände *Aa*, *Ab*, *Ac* . . . . bezeichnet man mit x, x', x'' . . . die *Aa'*, *Ab'*, *Ac'* . . . y, y', y'' u. s. w.

Fig. 14.



Ist der Coordinaten $\angle \alpha$ ein rechter $\angle$, so heisen die C. normale, rechtwinklige oder orthogonale Coordinaten.

Sind die Lagen einer Reihe von Punkten, die alle in verschiedenen Ebenen liegen, zu bestimmen, wie z. B. die auf einander folgenden Punkte einer krummen Linie von doppelter Krümmung, so sind 3 Coordinaten-Axen erforderlich, welche die 3 Dimensionen des Raumes zu vertreten haben. Es seien diese die der *X*, der *Y* und der *Z*; der Punkt *P* wird gegen dieselben bestimmt, indem man $Pm \mp AZ$, $mx \mp AY$, $my \mp AX$ zieht, vollendet man das Parallelepiped, so erhält man *Ax*, *Ay* und *Az* als die 3 Coordinaten für *P*.

Fig. 15.



Die Reduction der Coordinaten eines Punkts *P* auf zwei andere gegebene Coordinaten-Axen desselben Anfangspunkts und in derselben Ebene findet man wie folgt.

Der Coordinaten $\angle$ zwischen den Axen der *X* und der *Y* sei α, die neue Axe der *X'* habe mit der Axe der *X* den $\angle \beta$,

Fig. 16.



die der Y' mit der der Y den $\angle \gamma$; $AC = x$; $AB = y$; $AD = x'$; $AE = y'$

$$AG = AE \cdot \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} = y' \cdot \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha}$$

$$GC = PF = PE \cdot \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha} = x' \cdot \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha}$$

$$\text{I. } AG + GC = x = y' \cdot \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} + x' \cdot \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha}$$

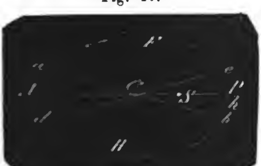
$$\text{ferner ist } EG = AE \cdot \frac{\sin(\alpha + \gamma)}{\sin \alpha}$$

$$EF = EP \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$$

$$\text{II. } EG - EF = y = y' \cdot \frac{\sin(\alpha - \gamma)}{\sin \alpha} - x' \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$$

Absiden sind in der elliptischen Bahn eines Planeten die Endpunkte der großen Axe. Da die Sonne in einem der beiden Brennpunkte der Ellipse sich befindet, so ist die eine A. zugleich das Perihelium (die Sonnennähe), die andere das Aphelium (die Sonnenferne). Von den A. aller Planetenbahnen interessirt uns die der Ekliptik, der Bahn unserer Erde um die Sonne am meisten.

Fig. 17.



Bedeutet *A* das Aphel, *P* das Perihel, *S* den Stand der Sonne in dem einen Brennpunkt, *C* den Mittelpunkt der Ekliptik, *F* den Frühlingspunkt, *H* den Herbstpunkt, so geht die gerade Verbindungslinie *FH* durch *C*. Diese Linie steht auf der Absidenlinie schief, so dafs $\angle FCA$, die Länge des Aphels als der östliche Abstand desselben vom Frühlingspunkt = 99° 52' und also $\angle HCA$ der Abstand des Herbstpunkts vom Aphel = 80° 8' beträgt, während dessen Länge = HAF = 180° ist. Man darf also die Absiden nicht mit den Sonnenwenden verwechseln, diese normal auf *FH*, etwa wie *a*, *b* liegen 9° 52' westlich von den A., so dafs die Sommerwende *a* um so viel westlich vom Aphel und die Winterwende *b* um so viel westlich vom Perihel abliegt.

Die Erde bewegt sich in der Ekliptik nach der Richtung der gezeichneten Pfeile von Abend nach Morgen mit ungleichförmiger Geschwindigkeit: in *A* ist diese am kleinsten, in *P* am gröfsten; beide Ellipsenhälften *AHP* und *PFA* werden aber gleichzeitig, also jede in einem halben (anomalistischen) Jahr durchlaufen. Man kann daher die Punkte *A*, *P* durch Beobachtung folgender Art finden.

Man nehme in demselben Jahr mehrere Punkte *a*, *d* ..., *b*, *e* ... in der Ekliptik nahe *A* und *P*, messe deren Länge von *F* aus und beobachte die Zeit, in der die zwischen liegenden Bogen durchlaufen werden. Von den einander gegenüber liegenden Punkten wähle man zwei, deren Längen-Unterschied nahe 180° ist, *a* sei der erste, *b* der zweite Punkt, der Bogen *aHb* sei in der Zeit *T'* durchlaufen und beide seien um einen kleinen Bogen δ geringer als 180° an Länge unterschieden, so wähle den an *b* zunächst liegenden Beobachtungspunkt *h*; es kann der kleine Bogen *bh* in der beobachteten bekannten Zeit *t* als gleichförmig durchlaufen betrachtet werden, desgleichen der noch kleinere Bogen δ und man erhält die Zeit *x* für die noch von *b* aus zu durchlaufende Länge δ durch die Proportion:

$$bh : \delta = t : x$$

$$\text{woraus } x = \frac{\delta}{bh} \cdot t$$

wonach die Zeit *T'* von *a* nach dem corrigirten Punkt $b' = T' + \frac{d}{bh} \cdot t$ gefunden ist.

Gesetzt, die Zeit *T'* wäre gröfser als die bekannte halbe Umlaufszeit *T*, so ist damit erwiesen, dafs zwischen *a* und *b* das Aphel *A* durchlaufen worden, weil in *A* die geringste Geschwindigkeit stattfindet und weil also für die halbe Ellipse *FAH* mehr als die halbe Umlaufszeit erforderlich ist; die Punkte *a* und *b* haben also

die gezeichnete Lage. So wie wenn die durchlaufene Zeit kleiner als die halbe Umlaufszeit gefunden wird, diese Punkte jedenfalls die Lage d, e haben, weil in P die gröfste Geschwindigkeit stattfindet und für die halbe Ellipse HPF weniger als die halbe Umlaufszeit erforderlich ist.

Nun ist die Zeit für die halbe Ellipse AHP = der Zeit durch die Bogen ($aHb' + b'P - aA$).

Die Zeit für $aHb' = T'$ ist beobachtet, berechnet und $T' > T$; mithin $T' - T$ = der Zeit für $aA - b'P$.

Da a und b' sehr nahe an A und P genommen worden, die Abnahme der Geschwindigkeit von a bis A und die Zunahme von b' bis P nur gering sind, so können die Geschwindigkeiten von a bis A und von b' bis P als gleichförmig angesehen werden. Bezeichnet man den bekannten Weg der Sonne innerhalb 24 Stunden bei A mit $w = 57'\ 11,''4$; den bei P mit $w' = 61'\ 10,''3$; die Zeiten für die Bogen aA, $b'P = x$ und y, so hat man

$$w : \angle aCA = 24 \text{ Stunden} : x$$
$$w' : \angle b'CP = 24 \text{ Stunden} : y$$

Da die $\angle aCA$ und $b'CP$ als Scheitel $\angle$ einander gleich sind, so hat man

$$w' : w = x : y$$

woraus $w' - w : w' = x - y : x$

und $w' - w : w = x - y : y$

Nun ist $w' - w = 61'\ 10,''3 - 57'\ 11,''4$
$$= 3'\ 58,''9$$
$$x - y = T' - T$$

daher $x = \dfrac{61'\ 10,''3}{3'\ 58,''9} \times (T' - T)$

$$y = \frac{57'\ 11,''4}{3'\ 58,''9} \times (T' - T)$$

der Bogen aA, der zu der Länge Fa addirt werden mufs, um die Länge von A zu finden, ist nun

$$= \frac{x}{24 \text{ Stunden}} \times 57'\ 11,''4$$

der Bogen $b'P$, der zu $FAHb'$ addirt werden mufs, um die Länge $FAHP$ zu finden.

$$= \frac{y}{24 \text{ Stunden}} \times 61'\ 10,''3.$$

Absidenlinie, die gerade Verbindungslinie beider Absiden (s. d.) einer Planetenbahn, also zugleich deren grofse Axe.

Absolut (von absolvére, ablösen). Abgelöst, für sich allein, ohne Beziehung zu etwas Gleichem, Aehnlichem, oder in irgend einem Zusammenhang Befindlichen betrachtet; im Gegensatz von relativ (referre, beziehen) oder specifisch.

Absolute Bewegung. Diejenige B., d. h. stete Ortsänderung einer Raumgröfse oder eines materiellen Punkts in derselben, welche man ohne Rücksicht auf die Bewegung anderer mit ihr in Zusammenhang stehenden Raumgröfsen betrachtet. Ein fester Gegenstand auf der Erdoberfläche scheint in Ruhe zu sein, allein er bewegt sich um die Erd-Axe und mit dieser um die Sonne; dagegen ist er in Betracht aller um ihn befindlichen theils ruhenden, theils sich bewegenden Gegenständen in relativer Ruhe. Die Bewegung eines Körpers auf der Erde, welche man wahrnimmt, ist nur dessen relative B., seine absolute B. ist die, welche er zugleich mit der Erdoberfläche macht.

Absolutes Gewicht, das wirkl. Gew. eines Körpers, verglichen mit einer Gewichts-Einheit, im Gegensatz zu seinem specifischen Gew., einer Verhältnifszahl, welche ausdrückt, ein Wievieltes das Gew. des Körpers von dem eines anderen Körpers ist, wenn beide einerlei Volumen haben.

Absolutes Glied. Das Glied in einer Gleichung, welches eine Unbekannte nicht als Factor enthält. In der Gleichung: $x^3 + ax^2 - bx + c = 0$ ist c das abs. Gl.

Absolute Gröfse einer Festung wird in dem Falle von relativer G. derselben unterschieden, wenn sie aufser dem Flächenraum, der durch zusammenhangende Wall-Linien als Umrifs bestimmt wird, noch aufserhalb derselben einzelne Werke besitzt, welche durch zu denkende gerade Linien mit einander verbunden als Umrifs den ersten Umrifs umschliefsen. Der erstere innere Flächenraum heifst A. G., der von dem äufsersten Umrifs begrenzte Flächenraum die relative G. der Festung.

Absolute Kraft, die Kraft, welche auf einen Körper dieselbe Wirkung ausübt, gleichviel, ob dieser in Ruhe oder in Bewegung ist (Schwerkraft oder Attraction, Kraft der Wärme auf die Ausdehnung der Körper).

Absolute Länge bei ähnlichen Kreis- oder Curvenbogen, die wirkliche Längen-Ausdehnung derselben nach einer Längen-Einheit gemessen.

Absolute Primzahl ist jede Primzahl an und für sich betrachtet, als 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13 u. s. w. im Gegensatz von relativer Primzahl, nämlich eine Zahl in Beziehung auf eine oder mehrere andere, wo diese alle oder auch nur zum Theil Primzahlen sein können. Z. B. 7 und 15 sind relative Primzahlen, weil sie keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, wenngleich 15 keine Primzahl, sondern eine zusammengesetzte Zahl ist, eben so sind 8 und 9 relative Primzahlen, obgleich jede von beiden eine zusammengesetzte Zahl ist.

Absolute Ruhe, das wirkliche Verblei-

ben an einem und demselben Ort. Wir kennen keinen Körper, der in abs. R. sich befände, und auch von der Sonne und den Fixsternen ist sie bei Betrachtung der Attraction der Weltkörper zu einander kaum anzunehmen. (Vergl. Absolute Bewegung.)

Absoluter Werth einer Gröfse ist deren Quantität, ohne Rücksicht, ob sie positiv oder negativ zu nehmen ist: in $x = \pm\sqrt{3}$ ist $\sqrt{3}$ der abs. W. von x.

Absolute Zahl, eine Z. hinsichtlich ihrer Quantität und ohne Rücksicht auf ihr positives oder negatives Vorzeichen.

Absorption. Die Aufsaugung von Gasen durch feste und flüssige Körper; letztere wird auch als Auflösnng der Gase in Flüssigkeiten erklärt, aber wohl mit Unrecht. Denn aufgelöst wird ein Körper, wenn er von einem anderen Körper durchdrungen wird, während hier die Gase in die Poren der Flüssigkeit dringen. Je kälter feste Körper und Flüssigkeiten sind, desto mehr Gas wird von ihnen absorbirt. Poröse feste Körper absorbiren oft so viel atmosphärische Luft, dafs diese eine bedeutende Verdichtung im Innern derselben erfährt, wodurch Wärme frei wird, die, wenn sie in brennbaren Körpern stattfindet, bis zu deren Selbst-Entzündung gesteigert werden kann.

Abstand zweier Punkte in einer Ebene und im freien Raum ist die Länge deren geraden Verbindungslinie.

A. eines Punktes von einer geraden Linie oder von einer Ebene, die Länge des von ihm auf die Linie oder die Ebene gefällten Lothes.

A. zweier Parallel-Linien, das von der einen Linie auf die andere gefällte Loth, welches überall zwischen beiden Linien gleich grofs ist.

A. zweier Punkte auf einer Kugel-Oberfläche, der kleinere Bogen des gröfsten Kreises durch dieselben als deren kürzeste Verbindungslinie.

A. eines Gestirns vom Scheitel, Scheitelabstand, Zenithdistanz, der zwischen einem Stern und dem Zenith eines Orts der Erdoberfläche, nämlich dem äufsersten Punkt des in dem Ort errichteten Loths auf der scheinbaren Himmelskugel zu denkende Bogen eines gröfsten Kreises, des Scheitelkreises; er wird direct durch einen Winkel gemessen und ist das Complement der Höhe des Gestirns über dem Horizont.

Absteckung von Linien auf dem Felde. Eine gerade Linie wird in beiden Endpunkten durch Stangen (Absteckstangen) bezeichnet, welche 6, 8, auch wohl 16 Fufs lang, $1\frac{1}{2}$ bis 2 Zoll stark sind und bei langen Linien besondere Auszeichnungen, als Fahnen, Kreuze oder Strohwische an dem oberen Ende erhalten. Ist ein Berg in der Linie, so dafs man von einem Ende das andere Endsignal nicht sehen kann, so müssen Zwischenstangen eingerichtet werden; hierzu sind mindestens 2 Stangen erforderlich, von welchen man nach jedem der beiden Endpunkte sehen kann, und an jeder Stange ein Mann, von denen jeder die Stange des andern durch Winken mit der Hand richtig einvisirt. Kreise, Ellipsen und andere Krümmungen werden, wenn sie eine bedeutende Ausdehnung haben, zuvor auf Papier gezeichnet, Hauptlinien als Abscissen genommen, die Ordinaten berechnet und demgemäfs auf dem Felde abgesteckt.

Bei Befestigungsbauten werden die mittelst der Absteckschnur (etwa 100 Klafter lang, 2 bis 3 Linien stark) bezeichneten geraden Linien in dem Erdboden mittelst Hacken und Spaten gefurcht.

Absteigende Reihe, eine Reihe von der Form:

$$ax^n \pm bx^{n-1} \pm cx^{n-2} \;.\;.\;.\;. \pm wx$$

in welcher also die Exponenten der Grundzahl in den auf einander folgenden Gliedern abnehmen.

Absteigender Knoten (☋) ist der Durchschnittspunkt der Bahn eines Planeten mit der Ebene der Ekliptik, wenn er aus deren nördlichen in die südliche Halbkugel tritt, wogegen aufsteigender Knoten (☊) ein solcher Durchschnittspunkt, wenn der Planet aus der südlichen in die nördliche Halbkugel tritt. Die gerade Verbindungslinie beider Knoten heifst Knotenlinie. Bedeutet Qq den Aequator, Ee die Ekliptik, $bkak'b$ die Bahn eines Planeten, f den Frühlingspunkt, so ist k der aufsteigende Knoten, fk seine Länge, k' der a. K., $fkek'$

Fig. 18.



seine Länge und *kk'* die Knotenlinie. Ebenso heifsen die Durchschnittspunkte der Mondbahn mit der Ekliptik aufsteigende u. a. K.

Absteigendes Zeichen. Jedes der 6 Zeichen des Thierkreises, in welchen die Sonne von der Sommer-Sonnenwende nach der südlichen Halbkugel bis zur Winter-Sonnenwende (für die nördliche Halbkugel nämlich) scheinbar hinabsteigt, so wie aufsteigendes Zeichen jedes der 6 Z., in welchen die Sonne von der Winterwende zur Sommerwende zu uns scheinbar heraufsteigt, indem nämlich die Sonne still steht und die Erde in der Ekliptik, wenn die Sonne aufzusteigen scheint, wirklich absteigt, und wenn die Sonne abzusteigen scheint, durch die aufsteigenden Zeichen wirklich ihren Weg nimmt.

Fig. 19.



Bedeutet der Kreis die Ekliptik, *N* Norden, *S* Süden, *F* den Frühlingspunkt, *H* den Herbstpunkt, so standen vor 4 bis 5000 Jahren die Zeichen wie angegeben: der Steinbock (♑) in der Winterwende ist das südlichste, der Krebs (♋) in der Sommerwende das nördlichste Z. Die Sonne stieg von ♑ durch Wassermann (♒), Fische (♓), trat bei Widder (♈), dem Frühlingspunkt, in die nördliche Halbkugel, und weiter durch Stier (♉), Zwillinge (♊) in den Krebs (♋) in die Sommerwende; von hier wieder hinab durch Löwe (♌), Jungfrau (♍) in die Waage (♎), wo sie in die südliche Halbkugel tritt, und weiter durch Skorpion (♏), Schütze (♐) zur Winterwende. Die zuerst genannten 6 Zeichen sind daher die aufsteigenden, die zuletzt genannten 6 die absteigenden Z.

Seit der Zeit des grauen Alterthums bis heut sind die Nachtgleichenpunkte *F* und *H* um etwa 30° vorgerückt und *F* befindet sich jetzt in dem Sternbild der Fische.

Absteigung eines Gestirns (Descension) ist der Punkt des Aequators, der mit einem Gestirn in dem Horizont eines Orts der Erde zugleich untergeht, während Aufsteigung (Ascension) derjenige Punkt des Aequators ist, der mit einem Gestirn zugleich aufgeht. Für Orte im Aequator selbst heifst die A. gerade, für alle anderen Orte der Erdoberfläche heifst sie schief, der Unterschied zwischen der geraden und schiefen Absteigung als Bogen gemessen, heifst der Absteigungs-Unterschied (Descensional-Differenz). (S. das Weitere in Aufsteigung und Absteigung der Gestirne.)

Absteigungs-Unterschied, s. u. Absteigung.

Abstofsende Kraft, die einer Masse beiwohnende K., vermöge welcher eine andere Masse der ersten nur bis zu einem gewissen Grade nahe kommen kann; sie ist der anziehenden K. entgegengesetzt. Die Undurchdringlichkeit der Atome eines jeden Stoffs ist eine a. K. für die Atome aller anderen Stoffe. Die Wärme dehnt alle Körper aus; sie wirkt also durch ihr Eindringen zwischen die Atome und indem sie zugleich dieselben von einander entfernt, auf jeden Körper als a. K. Die Centrifugalkraft wirkt als a. K. auf die Weltkörper bei deren Bewegung um eine Sonne in Ellipsen, während die Attraction als anziehende K. wieder dahin wirkt, dafs deren Entfernung von einander nicht in's Unendliche geht. Die Elasticität zweier starren Massen wirkt bei deren Zusammentreffen als a. K. auf die Aenderung ihrer Geschwindigkeit und unter Umständen auch auf die Aenderung ihrer Richtungen.

Abstofsung (Repulsion), der Erfolg der Wirkung einer abstofsenden Kraft.

Abstofsungskraft s. v. w. abstofsende Kraft.

Abstract ist abgesondert; in der Mathematik: abgesondert von physischen Beschaffenheiten gedacht.

Abstracte Mathematik s. v. w. reine Mathematik, welche von Gegenständen der Erfahrung abstrahirt.

Abstracte Zahl. Eine Z. ohne Beziehung auf Gegenstände, als 3; 5; $(m+n)$; im Gegensatz von concreter Zahl (3 Fufs, 5 Thaler). Man sagt auch für erstere unbenannte, für letztere benannte Zahl.

Abstracter Begriff, ein Begriff, der einer grofsen Anzahl von verschiedenen Gegenständen zukommt, von deren Verschiedenheit jedoch abstrahirt wird. Z. B. Pflanze, Körper.

Abstürzung eines Walles (Kriegsw.), die Höhe dessen steiler Vorderfläche von der Oberkante bis zur Unterkante, wo das Terrain anschliefst, also auch bis zur Sohle des trockenen oder zum Wasserspiegel des nassen Grabens, wenn solcher unmittelbar vor dem Wall sich befindet.

Abstumpfungsflächen eines Krystalls sind die kleineren untergeordneten Flächen, welche statt der Kanten oder Ecken der als Grundform zu denkenden einfachen Form vorhanden sind und dadurch die Form des Krystalls zu einer zusammengesetzten Krystallform machen.

Man denke sich ein gleichschenkliges Dreieck als geraden Durchschnitt der Kante einer einfachen Krystallform, ziehe nahe der Spitze eine gerade Linie zwischen die Schenkel des Winkels und bewege dies Dreieck geradlinig in normal auf dasselbe befindlicher Richtung, so entsteht durch die Schenkel des Dreiecks die Kante der einfachen Krystallform, und wenn man das an der Spitze abgeschnittene kleine Dreieck fortnimmt, die zusammengesetzte Form, indem statt der Kante eine Fläche, eine A. eingeführt wird, die mit dieser Kante ‡ ist und deren beide stumpfere Kanten, welche sie mit den beiden Flächen der einfachen Form bildet, ebenfalls ‡ sind.

Ist die kleine gerade Linie in dem gleichschenkligen Dreieck der Grundlinie ‡ gezogen, so wird ein kleines gleichschenkliges Dreieck abgeschnitten; die aus der kleinen Grundlinie desselben bei ihrer Fortbewegung entstehende A. bildet mit den beiden Flächen der Grundform 2 Kanten von gleichen Neigungswinkeln, gleiche Kanten genannt, und heifst eine gerade A.

Ist die kleine Linie der Grundlinie nicht ‡ gezogen, so entsteht durch dieselbe eine A., deren Kanten mit den beiden Flächen der Grundform ungleich sind, und heifst eine schiefe A. Betrachtet man die fehlende Kante der Grundform, so nennt man diese eine abgestumpfte Kante und diese ist also entweder gerade oder schief abgestumpft.

Denkt man sich die Spitze h' der abgekürzten Pyramide, Fig. 6, pag. 6, als fehlende Ecke einer einfachen Krystallform und statt derselben die Fläche A', so ist die Ecke h' abgestumpft und die Fläche A' ist deren A. Sind die Kanten, welche diese A. mit sämmtlichen Flächen der Grundform bildet, einander gleich, so ist die A. gerade, sind die Kanten ungleich, so heifst die A. schief; die Ecke ist also entweder gerade oder schief abgestumpft. Ist die A. schief und so gelegen, dafs sie mit zweien eine Kante bildenden Flächen der Grundform gleiche Kanten bildet, so heifst die A. auf diese Kante gerade aufgesetzt; sind beide Kanten ungleich, so heifst die A. schief aufgesetzt. Gerade aufgesetzt ist eine A. auf eine Kante, wenn die durch diese Kante auf die A. normal gelegte Ebene den Winkel zwischen beiden neu gebildeten Kanten halbirt.

Absurd (ungereimt) ist eine gemachte Annahme, wenn richtige Folgerungen aus derselben auf einen Widerspruch gegen dieselbe führen.

Fig. 20.



Es werde z. B. behauptet $\alpha+\beta<\delta$

bewiesen ist $\alpha+\beta+\gamma=2$ R.

desgl. $\delta+\gamma=2$ R.

daher ist $\alpha+\beta+\gamma=\delta+\gamma$

aber auch $\gamma=\gamma$

folglich $\alpha+\beta=\delta$

Es kann also nicht $\alpha+\beta<\delta$ sein, mithin war obige Behauptung absurd.

Man erhält eben so absurde Resultate aus richtigen Annahmen und unrichtigen Schlüssen und Folgerungen:

Nimmt man z. B. von irgend einer Zahl $a>1$ die zweite Wurzel, hierauf die dritte u. s. w., so wird jede folgende $n+1$te Wurzel kleiner als die vorhergehende $n$te, sie bleibt aber immer >1. Dagegen kann man der Zahl 1 durch Vergröfserung von n beliebig nahe kommen, und die Zahl 1 ist also offenbar deren Grenzwerth, so dafs $\sqrt[\infty]{a}=1$ ist. Potenziirt man nun nach den Regeln der Arithmetik zu beiden Seiten mit ∞, so erhält man $1^{\infty}=a$, also 1^{∞} auch $=b$ und gleich jeder beliebigen Zahl, die >1 ist. Es bleibt aber 1 zu jeder noch so hohen Potenz erhoben $=1$. Das Absurde liegt darin, dafs Unendlichkeit keine Gröfse ist, und mathematische Folgerungen nur auf Gröfsen sich erstrecken können.

Ein gleich ungereimtes Resultat erhält man, wenn man mit Null als Gröfse operirt. Z. B.

Jede Gröfse ist sich selbst gleich, also $0=0$

Nun ist $3\times 0=0$

und eben so $4\times 0=0$

daher $3\times 0=4\times 0$

nach 1 ist aber $0=0$

Gleiches durch Gleiches dividirt, giebt gleiche Quotienten, also $\frac{3\times 0}{0} = \frac{4\times 0}{0}$

Zähler und Nenner mit gleicher Zahl dividirt bleiben gleich, folglich hier mit 0 dividirt, giebt $3 = 4$.

Abtrift. Der Winkel, den die horizontale gerade Linie, in welcher der Lauf des Schiffes erfolgt, mit der horizontalen Längenmittellinie des Schiffes bildet, und zwar derjenige, von dessen in dieser Mittellinie befindlichen Spitze aus die Schenkel nach der Hinterseite (dem Hinterdeck) des Schiffes gerichtet sind. Der der A. gleiche Scheitelwinkel, dessen Schenkel von der Winkelspitze ab nach dem Vorderdeck gerichtet sind, heifst der Leeweg. Den zuerst gedachten Schenkel, den Lauf, bezeichnet die Furche, die das Schiff in dem Wasser hinter sich sichtbar zurückläfst (das Kielwasser), den zweiten Schenkel bezeichnet die gerade Verbindungslinie beider Steven, des Vorder- und des Hinterstevens, Hölzer, die an beiden Enden des Schiffs in den Kiel und zwar in dessen Normalebene gerichtet eingesetzt sind. Beide Schenkel werden von dem Hinterdeck aus durch einen besonders aufgestellten Compafs visirt und der Winkel gemessen (mit dem Peilcompafs gepeilt).

Abweichung (Declination) **eines Gestirns.** Die durch einen gröfsten Kreisbogen gemessene Entfernung des Sterns vom Aequator. Bedeutet P einen Pol der Himmelskugel, QAq den Aequator, so trifft das Loth aus P den Mittelpunkt C

Fig. 21.



desselben, die Entfernung SA des Sterns S von Qq auf QAq senkrecht mufs also durch den Pol P gehen. Der Kreis PSA bis zu dem zweiten Pol gezogen, heifst Abweichungskreis, Declinationskreis des Sterns S. Je nachdem das Gestirn S in der nördlichen oder südlichen Halbkugel liegt, ist seine Abweichung SA eine nördliche oder südliche A. Gestirne, die in der Richtung CS hinter einander, so wie die, welche in demselben Parallelkreise sich befinden, haben einerlei A. Gestirne in der Aequator-Ebene haben die A. = 0, Gestirne in der Richtung der Axe CP haben die A. = 90°.

Die A. eines Gestirns ist = seiner beobachteten Mittagshöhe (Sh) weniger der bekannten Aequatorhöhe (Qh) des Orts; ist letztere gröfser als Sh, so ist die A. negativ, d. h. sie ist südlich. Eben so ist die A. = der Polhöhe (Ph) des Orts weniger der beim Culminiren des Sterns gemessenen Zenithdistanz.

Aus der gegebenen Länge l und der Breite b eines Gestirns findet man dessen A. aus der Formel

$$\sin A = \frac{\sin b \cdot \sin(k+e)}{\sin k}$$

wo e die Schiefe der Ekliptik bezeichnet und K aus $tg\,k = \frac{tg\,b}{\sin l}$ gefunden wird.

Abweichung der Magnetnadel (Declination der Magnetnadel), der Winkel, den der magnetische Meridian mit dem Erdmeridian bildet.

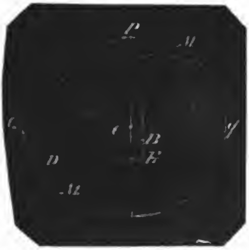
Die magnetischen Pole, zwischen 70 und 80° geographischer Breite liegend, ändern zwar ihren Ort auf der Erde; in jedem Augenblick jedoch zeigt eine frei spielende Magnetnadel durch ihre feste Lage die Richtung der Verbindungslinie derselben, und diese bis zu beiden Polen verlängert gedacht, giebt den magn. Meridian für den Standort der Nadel, und die durch diese Linie und den Mittelpunkt der Erde gelegte Ebene ist die Ebene des magn. Meridians. Jeder Ort auf der Erdoberfläche in jedem andern magn. Meridian hat also eine andere A.

Es giebt nur wenig Orte auf der Erde, in welchen die Magnetnadel genau nach Süden und Norden zeigt, wo also die magn. Abweichung = Null ist. Nach dem Obigen sollte dies in allen Punkten desjenigen gröfsten Kreises der Erdoberfläche stattfinden, in welchem die magn. Pole und zugleich die geogr. Pole der Erde liegen. Je nachdem die magn. A. in Beziehung auf den Nordpol der Erde nach Ost oder West hin gerichtet ist, hat man eine östliche oder westliche magn. A. Aus den beobachteten magn. A. in zwei verschiedenen nach geogr. Länge und Breite bekannten Orten kann man die magn. Pole auf der Erdoberfläche construiren oder auch deren Lage nach geogr. Länge und Breite berechnen.

Es sei Qq der Aequator, P der Nordpol; A, B seien zwei Orte, in welchen die magn. A. beobachtet worden. Beträgt

dieselbe α in A und β in B, so legt man an die Meridiane PAD, PBE in A und B unter dem $\angle PAM = \alpha$ und $\angle PBM = \beta$

Fig. 22.



gröfste Kreise, und es sind deren Durchschnittspunkte M in der nördl. Halbkugel und dem M' in der südl. die magn. Pole, deren Axe durch den Mittelpunkt C der Erdkugel geht, und die magn. Pole sind durch Construction gefunden.

Aus der geogr. Breite AD von A und der BE von B erhält man die Polar-Abstände $PA = 90° - AD$ und $PB = 90° - BE$. Bedeutet PQ den ersten Meridian, so ist Bog. QD oder $\angle QPA$ die Länge von A, Bog. QE oder $\angle QPB$ die Länge von B, also $\angle APB$ = dem bekannten Längen-Unterschied von A und B; daher sind aus dem sphärischen $\triangle APB$ der Abstand AB, desgl. $\angle PAB$ und $\angle PBA$ zu berechnen.

Nun ist $\angle MAB = \angle PAB - \alpha$, $\angle MBA = \angle PBA + \beta$; aus dem sphär. $\triangle MAB$ also die Seite AM zu berechnen; endlich aus dem sphär. $\triangle PAM$, nämlich aus PA, AM und $\angle PAM = \alpha$ der $\angle APM$ und die Seite PM zu berechnen.

Nun ist $\angle APM + \angle QPA$ die geogr. Länge von M, und $90° - PM$ die geogr. Breite von M, womit M der Lage nach berechnet ist.

Construirt oder berechnet man auf die gezeigte Weise für mehrere Punkte der Erde die magn. Pole, so treffen sie nicht in einerlei Punkten zusammen, auch die Verbindungslinien der nördl. und südl. erhaltenen schneiden nicht den Erdmittelpunkt. Daher nehmen mehrere Naturforscher 4 solcher Punkte an, die innerhalb der Polarzonen fallen, und nennen sie magn. Convergenz-Punkte, und auch diese sind der Ortsänderung unterworfen. Bedenkt man aber, dafs die Abweichungen bei einer Magnetnadel ihrer Kürze wegen nicht allzu genau gemessen werden können und dafs diese A. an verschiedenen Orten auch noch von vielen theils bekannten, theils unbekannten anderweitigen Ursachen oft augenblicklich, oft auf längere Zeit constant geändert werden, so bleibt die Theorie der A. noch unaufgeklärt.

So sind die jährlichen Schwankungen der Magnetnadel höchst wahrscheinlich mit abhängig von der Zeit der Nachtgleichen und Sonnenwenden, so dafs die Nadel von der Frühlingsnachtgleiche bis zur Sommerwende nach Osten, und die ganze übrige Jahreszeit nach Westen sich bewegt. Nordlichter ändern die Richtung der Magnetnadel augenblicklich.

Die Ortsänderungen (Schwankungen) der magn. Pole oder Convergenzpunkte und mit diesen die der magn. A. geschehen ununterbrochen. Dagegen sind dieselben bald östlich, bald westlich, und geraume Zeit hindurch so ziemlich in einerlei Grenzen. In Paris hatte die (westliche) A. von 1807 bis 1832 zwischen 22° 34' und 22° 3' geschwankt. In Berlin war sie im Jahre 1805 = 18° 5'; im Jahre 1829 = 17° 31' westlich.

Das Wissen der augenblicklichen A. der Magnetnadel in irgend einem Ort auf offener See ist für den Schiffer von der gröfsten Wichtigkeit: Er erfährt bei Tage aus dem zu messenden Stand der Sonne und deren bekannten Abweichung (z. B. 22. Juli $23\frac{1}{2}°$ nördl.), bei Nacht aus dem Stande von Fixsternen und deren bekannten Parallelkreisen die geogr. Breite des Orts, oder dessen Aequatorhöhe, und mit dieser (s. Abendweite) die Abend- oder Morgenweite der Sonne. Es sei diese der Rechnung oder den Schiffstabellen nach 45° nördlich. Beobachtet er nun eine derselben und den Winkel, den die Nadel mit ihr bildet, so erfährt er die A. der Nadel. Ist nämlich der Winkel der Nadel mit der Morgenweite = 65°, so ist die A. derselben = 20° westlich; dieselbe A. erhält er, wenn er den Winkel zwischen Nadel und Abendweite beobachtet, der dann = 25° gefunden wird.

Abweichungskreis, Declinationskreis, s. Abweichung eines Gestirns.

Abwickelnde Linie, Evolvente, s. u. Abwickelung.

Abwickelung einer krummen Linie ABC geschieht, indem ein biegsamer Faden um dieselbe gelegt, in einem Punkt, z. B. C befestigt, und von einem anderen Punkt, z. B. A aus, unter steter Anspannung nach C hin bis E, wo EC in C an ABC Tangente ist, fortbewegt wird. Die Linie ADE heifst die abwickelnde Linie,

Fig. 23.



Evolvente, die Linie *ABC* die abgewickelte Linie oder Evolute.

Abwickelungslinie s. v. w. abwickelnde Linie.

Abziehen (eine Zahl von einer anderen), von einer Zahl so viel Einheiten fortnehmen, als eine ihr gleichartige zweite Zahl enthält. Oder: Aus zweien Zahlen eine dritte bestimmen, die in ihren Einheiten angiebt, wie viel Einheiten die eine weniger enthält als die andere.

Abzugsgraben(-kanal, -rinne, -röhre). Ein Graben etc., der von einem Teich, Sumpf etc. aus angelegt wird, um stehendes Wasser abzuführen. Gräben und Rinnen sind oben offen, Kanäle offen und unterirdisch, Röhren immer unterirdisch.

Acceleration (Beschleunigung) ist die Länge, um welche der Weg eines sich bewegenden Punkts oder Körpers in jeder folgenden Zeit-Einheit (Secunde) gröfser wird, bleibt die A. in jeder Secunde gleich grofs, so heifst die Bewegung gleichförmig beschleunigt, ist die A. in jeder Secunde veränderlich, so heifst die Bewegung ungleichförmig beschleunigt.

Achromatisch (χρωμα Farbe und α Verneinungs-Vorsylbe, also: farbenlos, ungefärbt) nennt man Gläser, durch welche der Lichtstrahl farblos gebrochen wird. Der Art: Ablenkung des Lichtstrahls zeigt, dafs jeder Lichtstrahl, der aus einem Mittel in ein anderes von anderer Dichtigkeit, z. B. aus Luft in Glas übergeht, eine Aenderung seiner Richtung, eine Ablenkung, eine Brechung erleidet. Hier ist noch hinzuzufügen, dafs jeder Lichtstrahl, sowohl der primitive, von einem selbstleuchtenden Körper, wie: der Fixsterne, der Sonne, des elektrischen Funkens u. s. m., als auch der secundäre, der reflectirte, wie der vom Monde, oder von irgend einem erleuchteten Körper der Erde, aus mehreren parallelen Farbenstrahlen besteht, die vereinigt zu einem weifsen Licht sich zusammensetzen, dafs jeder dieser Farbenstrahlen, je nachdem seine Farbe ist, ein verschiedenes Brechungsvermögen hat, dafs daher der Lichtstrahl in dem Brechungspunkt zerspaltet, jeder Farbenstrahl, wie es in dem Regenbogen zu sehen ist, wenn die Sonne auf eine Regentropfenwolke scheint, eine besondere Richtung nimmt, der Strahl also in gröfserer Breite und verschiedenfarbig erscheint, und ein farbiges und undeutliches Bild von dem Gegenstande liefert, von dem er ausgegangen ist.

Diese Verbreiterung des Lichtstrahls, dessen Farbenzerstreuung und die Undeutlichkeit des Bildes wächst mit dem Winkel, in welchem der Lichtstrahl unzerspaltet sich brechen würde, bei den Linsengläsern also, wenn die Strahlen ∦ deren Axe einfallen, an deren Rändern am stärksten, nach der Mitte hin allmählich abnehmend, und bei den Fernröhren mufste man deshalb den Rand der Gläser, besonders den des Objectivglases, mit einem breiten undurchsichtigen Ring, gewöhnlich von schwarzer Pappe, Blendung genannt, versehen, damit nur die durch die mittlere Oeffnung, die Apertur, also die in der Nähe der Axe einfallenden Strahlen zu einem möglichst deutlichen Bilde vereinigt würden.

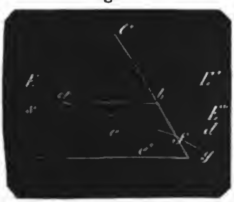
Newton, der die Zerlegung des Lichtstrahls in Farbenstrahlen durch ein Glasprisma beobachtet und gelehrt, war der Ansicht, dafs die Farbenzerstreuung, die Dispersion des Lichtstrahls der brechenden Kraft des durchsichtigen Körpers proportional sei, und dafs es unmöglich sei, Gläser zu construiren, die den Lichtstrahl ablenken (die Hauptnothwendigkeit für Fernröhre), ohne ihn zugleich in Farben zu zerlegen, bis Euler, das aus Linsen bestehende und dennoch achromatische menschliche Auge betrachtend, den Vorschlag that, statt eines Glases zwei Gläser mit zwischen gefülltem Wasser zu nehmen. John Dollond, Optiker in London, machte Versuche, erhielt durch Verbindung von Glas mit Wasser zuerst Färbung ohne Brechung, und mittelst eines in Wasser gestellten Glasprisma auch Brechung ohne Färbung; der Achromatismus war erfunden, und es gelang demselben Dollond, achromatische Linsen, ohne das Wasser als Zwischenmittel, aus verschiedenen Glasarten zusammen zu setzen. Diese beiden Glasarten, die auch noch jetzt dazu angewendet werden, sind das Flintglas und das Crownglas. Beide Glasarten bestehen, wie jedes Glas, aus Kieselerde und Kali; das Flintglas (von

dem engl. Wort: **Flint**, Feuerstein, also deutsch Feuersteinglas, weil der Feuerstein eine grofse Menge von Kieselerde enthält) mit einem Zusatz von Bleioxyd, dem es auch seine gröfsere Farbenzerstreuungskraft verdankt, das Crownglas (Kronenglas), wegen seiner schönen weifsen Farbe so genannt, ohne weitere Beimischungen, hat eine geringere Zerstreuungsfähigkeit. Aus diesem wird die biconvexe Objectivlinse gefertigt und aus Flintglas eine Hohllinse, welche, mit jener verbunden, deren farbige Strahlen wieder in parallele weifse Lichtstrahlen zusammenlenkt.

2. Zur Erklärung des Achromatismus gebrochener Strahlen soll das Folgende die Fortsetzung des Art.: **Ablenkung des Lichtstrahls** sein.

Es sei *sa* der in das Prisma eintretende Lichtstrahl, *ab* der innerhalb gebrochene, *bd* der austretende Strahl, und zwar bei der kleinsten Total-Ablenkung *D*, so wird der Lichtstrahl in Farbenstrahlen zerlegt, nach *ab* geht der rothe Strahl, der die geringste Brechung erleidet, die übrigen

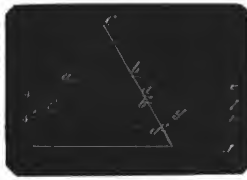
Fig. 24.



Farbenstrahlen haben Richtungen, von *a* aus, unterhalb *ab* und zwar der Reihe nach orange, gelb, grün, blau und violett. Dieser letzte Strahl von der stärksten Brechung sei *af*, so ist $\angle afe' > \angle abe$, daher auch $\angle gfE'' > \angle dbE'$, d. h. die austretenden Strahlen zwischen *db* und *gf* divergiren, und man sieht einen regenbogenfarbigen Rand *bf*.

3. Läfst man von einem leuchtenden Körper, z. B. der Sonne, durch eine kleine Oeffnung eines geschlossenen Fensterladens Licht auf ein Prisma fallen, so seien *sa*, *s'a'* die hier ⫲ gezeichneten Grenzstrahlen; deren Brechungen in Roth seien *ab*, *a'b'*; in Violett *ad*, *a'd'*; zwischen *bd* und *b'd'* treffen die übrigen Farbenstrahlen der beiden Grenzstrahlen *sa*, *s'a'*. Die austretenden Strahlen seien *be*, *dm*, *b'l*, *d'f*. Da nun *be* und *dm* (s. No. 2) divergiren, *be* ⫲ *b'l* und *dm* ⫲ *d'f*, so müssen sich die mittleren Strahlen, violett *dm* und roth *b'l*, in einem Punkt z. B. *g* schneiden.

Fig. 25.

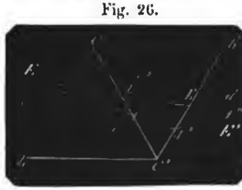


Zwischen *a* und *a'* fallen eine unendliche Menge Lichtstrahlen ⫲ *sa* auf das Prisma. Deren rothe Strahlen ⫲ mit und zwischen *ab* und *a'b'*, die violetten ⫲ mit und zwischen *ad* und *a'd'*; die zwischen *d* und *b'* austretenden Strahlen enthalten also alle Farbenstrahlen und in dem Farben $\triangle$ *db'g* sind sämmtliche, einen Lichtstrahl ausmachende Farben mit einander, folglich zu einem reinen weifsen Licht zusammengesetzt. In *g* durchkreuzen sich diese Lichtstrahlen und geben auf einer Tafel *ef* ein reines weifses Bild *lm*.

Innerhalb *bd* tritt nur ein einziger violetter Strahl aus, nämlich *ad*, mehrere blaue, noch mehr grüne, gelbe, orange und die meisten rothen Strahlen; innerhalb *b'd'* tritt nur ein einziger rother Strahl aus, nämlich *a'b'*, mehr orange, noch mehr gelbe, grüne, blaue und die meisten violette; *el* und *mf* auf der Tafel sind also farbige Bilder, die von *e* in starkem Roth bis *l* zum schwachen Blau und von *f* in starkem Violett bis *m* in schwachem Orange in einander verschmelzen. Bedeckt man *bd* und *b'd'* mit einer Blendung (s. No. 1.), so hat man durch die Apertur *db'* ein reines Lichtbild *lm* ohne Farbenränder.

4. Legt man an die Fläche *CC'* ein zweites Prisma *Ch'C'*, so dafs *C'h'* ⫲ *Ch*, so

Fig. 26.



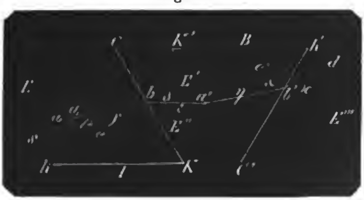
geht der rothe Strahl *ab* bis *b'* geradlinig fort, es ist das Loth *E'e'* ⫲ *Ee*, $\angle ab'e' = \angle b'ae$, mithin bildet der austretende

Strahl $b'd$ den $\angle db'E' = \angle Eas$, es ist $b'd \parallel sa$ und der rothe Strahl $b'd$ hat keine Ablenkung erlitten.

Der violette Strahl af geht geradlinig bis f, hier macht er mit dem Einfallsloth in f den mit $\angle fae$ gleichen $\angle$, mithin hat er auch einen mit $\angle Eas$ gleichen Austritts $\angle$, und ff' ist $\parallel b'd$. Der Lichtstrahl as hat also die Parallelität seiner Farbenstrahlen erhalten, und erscheint in seiner ursprünglichen Reinheit, allein er ist in paralleler Richtung geblieben, also nicht abgelenkt worden.

5. Es sei ab die in dem Prisma A gebrochene Richtung irgend eines Strahls sa. Das dem A gleiche, aus gleichem Stoff bestehende Prisma B befinde sich in beliebiger Entfernung von A, doch so, dafs die Flächen Ch und $C'h'$, sowie Ck und $C'k' \parallel$ seien; der in b austretende Strahl ba' trifft das Prisma B in a', wird in $a'b'$ gebrochen und tritt in der Richtung $b'd$ wieder aus.

Fig. 27.



Es sind nun die Einfallslothe

$$Ee \parallel E'''e' \text{ und } E'e \parallel E''e'$$

daher $\delta = \varepsilon$

$$\text{ferner } \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin\delta}{\sin\gamma} = \frac{\sin\varepsilon}{\sin\eta} = \frac{\sin x}{\sin\vartheta} =$$

dem beiden Prismen zugehörigen Brechungs-Exponent,

folglich $\angle\gamma = \angle\eta$
mithin $a'b' = ab$
hieraus $\angle\beta = \angle\vartheta$
und folglich $\angle\alpha = \angle x$
woraus $b'd \parallel sa$

Der Strahl sa ist nicht gebrochen, und es ist daher gleichgültig für die Wirkung, ob die form- und stoffgleichen Prismen dicht an einander oder in beliebiger Entfernung von einander ab liegen.

6. Sind beide Prismen A und B von verschiedenem Stoff, haben also beide verschiedene Brechungs-Exponenten, so ist es ebenfalls gleichgültig, ob der Strahl ab erst durch die Luft geht, oder ob beide Prismen dicht an einander liegen. Denn der Brechungs-Exponent von A sei $= \varphi$, der von $B = \mu$. So ist für den Fall, dafs beide P auseinander liegen:

$$\frac{\text{Luft}}{A} = \varphi = \frac{\sin\delta}{\sin\gamma}$$

$$\frac{\text{Luft}}{B} = \mu = \frac{\sin\varepsilon}{\sin\eta} = \frac{\sin\delta}{\sin\eta}$$

$$\text{mithin } \frac{A}{B} = \frac{\mu}{\varphi} = \frac{\sin\gamma}{\sin\eta}$$

Liegen nun beide Prismen an einander, so ist der Einfallswinkel in $B = \gamma$; mithin wird, wenn der Strahl aus A in B tritt, durch den Einfallswinkel γ derselbe Brechungswinkel η erzeugt.

7. Es sei ABC ein Prisma, dessen brechender Winkel $= \omega$, dessen Brechungsexponent für den rothen Strahl $= \mu$, für den violetten $= \mu'$. Es soll ein zweites Prisma ADC von anderem gegebenen Stoff angelegt werden, so dafs für den unter einem bestimmten Einfalls $\angle\,\alpha$ auf die Fläche AB treffenden Lichtstrahl Ablenkung und Farblosigkeit hervorgeht.

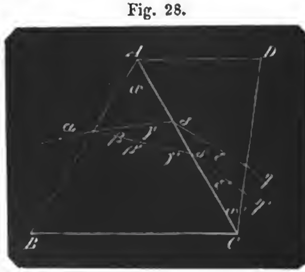
Das Prisma ADC habe für Roth den Br.-Exp. $= \varphi$, für Violett $= \varphi'$; es ist der brechende Winkel ω' zu finden.

Der rothe Strahl giebt bei dem Einfalls $\angle\,\alpha$ die Brechungs $\angle$, der Reihe nach, β, γ, δ, ε und den Austritts $\angle\,\eta$.

Der violette Strahl, bei demselben Einfalls $\angle\,\alpha$ die Brechungs $\angle$ β', γ', δ', ε' und den Austritts $\angle$ η'.

Die Aufgabe ist, ω' so zu bestimmen, dafs $\eta' = \eta$ werde.

Fig. 28.



$$\text{Es ist } \mu = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta};\quad \mu' = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta'}$$

$$\varphi = \frac{\sin\eta}{\sin\varepsilon};\quad \varphi' = \frac{\sin\eta}{\sin\varepsilon'}$$

Wäre zwischen AC Luft, so hätte $\angle\gamma$ für Roth einen Austritts $\angle\,x$ und δ denselben Eintritts $\angle\,x$; und es ist

$\frac{\sin x}{\sin \gamma} = \mu$ und $\frac{\sin x}{\sin \delta} = \varphi$

daher $\mu \sin \gamma = \varphi \sin \delta$

und da $\gamma + \beta = \omega$

also $\gamma = \omega - \beta$

so ist $\mu \sin(\omega - \beta) = \varphi \sin \delta$

woraus $\sin \delta = \frac{\mu}{\varphi} \sin(\omega - \beta)$

Eben so erhält man für Violett

$$\sin \delta' = \frac{\mu'}{\varphi'} \sin(\omega - \beta')$$

Nun ist $\delta + \varepsilon = \omega'$

Also

I. $\sin(\omega' - \varepsilon) = \frac{\mu}{\varphi} \sin(\omega - \beta)$

II. $\sin(\omega' - \varepsilon') = \frac{\mu'}{\varphi'} \sin(\omega - \beta')$

Hierzu

III. $\varphi \sin \varepsilon = \varphi' \sin \varepsilon'$

Mithin 3 Gleichungen für die 3 unbekannten Gröſsen ε, ε', ω', aus welchen also ω' gefunden wird.

8. Gehlers physikalisches Wörterbuch, Bd. 7, pag. 941 bis 943 (Verfasser Brandes) lös't diese Aufgabe mit Hülfe der Differenzialrechnung, da jedoch die Mathematik bei diesem Wörterbuch nur Hülfswissenschaft ist: Satz für Satz in Resultaten, denen nur mit Hülfe eigenen Zwischenrechnens zu folgen ist. Beide Prismen hier liegen auseinander, es entstehen also mit den Ein- und Austrittswinkeln 8 Winkel, die nach einander mit φ bis φ^{VII} bezeichnet sind; auch ist mit μ der reciproke Werth $\frac{1}{\mu}$ bezeichnet. Das dort gegebene interessante Beispiel soll hier mit den vorstehenden 3 Gleichungen durchgeführt werden.

Ein Wasserprisma hat den brechenden $\angle \omega = 20°$, der Einfalls$\angle \alpha = 15°$; $\mu' - \mu$ [dort mit $d \frac{1}{\mu}$ bezeichnet] ist angegeben $= 0{,}0068$

Nämlich Roth μ wohl $= 1{,}3321$

Violett $\mu' = 1{,}3389$

$\mu' - \mu = 0{,}0068$

Dies Prisma soll durch ein Flintglasprisma achromatisirt werden.

$\varphi' - \varphi \left[d \frac{1}{\varphi} \right]$ ist angegeben 0,0213

Nämlich Roth φ wohl $= 1{,}63074$

Violett $\varphi' = 1{,}65204$

$\varphi' - \varphi = 0{,}0213$

Nun ist $\sin \beta = \frac{\sin \alpha}{\mu} = \frac{\sin 15°}{1{,}3321}$

giebt $\log \sin \beta = 9{,}2884594 - 10$

woraus $\beta = 11° \, 12' \, 12{,}55''$

[Brandes findet $\beta = 11° \, 12' \, 13''$]

Eben so ist $\log \sin \beta' = \log \frac{\sin 15°}{1{,}3389}$

$= 9{,}2862481 - 10$

woraus $\beta' = 11° \, 8' \, 45{,}08''$

[Brandes findet $\beta' = 11° \, 8' \, 45''$]

Es ist nun $\omega - \beta = 8° \, 47' \, 47{,}45''$

und $\omega - \beta' = 8° \, 51' \, 14{,}92''$

folglich (Gleich. I. und II.)

$$\log \sin(\omega' - \varepsilon) = \log \frac{1{,}3321}{1{,}63074} \cdot \sin 8° \, 47' \, 47{,}45''$$

$= 9{,}09663525 - 10$

und

$$\log \sin(\omega' - \varepsilon') = \log \frac{1{,}3389}{1{,}65204} \cdot \sin 8° \, 51' \, 14{,}92''$$

$= 9{,}09602142 - 10$

woraus $\omega' - \varepsilon = 7° \, 10' \, 34{,}30''$

und $\omega' - \varepsilon' = 7° \, 9' \, 57{,}61''$

Hieraus $\varepsilon' - \varepsilon = 36{,}69''$

[Brandes findet

$\omega' - \varepsilon = \delta = 7° \, 10' \, 34''$

$\omega' - \varepsilon' = \delta' = 7° \, 9' \, 59''$

also $\delta' - \delta = 35''$]

Aus Gleichung III. erhält man

$$\varphi : \varphi - \varphi' = \sin \varepsilon' : \sin \varepsilon' - \sin \varepsilon$$

da $\varepsilon' - \varepsilon$ nur 36,69", so kann man ohne einen Irrthum zu begehen $\sin \varepsilon' - \sin \varepsilon = \sin 36{,}69''$ setzen; dann ist

$$\sin \varepsilon' = \frac{\varphi}{\varphi - \varphi'} \sin 36{,}69''$$

und

$$\log \sin \varepsilon' = \log \frac{1{,}63074}{-0{,}0213} \cdot \sin 36{,}69''$$

also

$$\log \sin(-\varepsilon') = \log \frac{1{,}63074}{0{,}0213} \cdot \sin 36{,}69''$$

$= 8{,}1341275 - 10$

woraus $-\varepsilon' = 46' \, 49{,}10''$

Nun ist $\omega' - \varepsilon' = 7° \, 9' \, 57{,}61''$

also $\omega' = 6° \, 23' \, 8{,}51''$

Aus $\angle \varepsilon' = -46' \, 49{,}10''$

und $\varepsilon' - \varepsilon = + \, 36{,}69''$

hat man $\angle \varepsilon = -47' \, 25{,}79''$

[Brandes findet $\varepsilon = -46' \, 34''$

$\varepsilon' = -45' \, 57''$]

Um nun η mit η' zu vergleichen, hat man:

$\sin \eta = \varphi \cdot \sin \varepsilon = 1{,}63074 \times \sin(-47' \, 25{,}79'')$

$\sin \eta' = \varphi' \sin \varepsilon' = 1{,}65204 \times \sin(-46' \, 49{,}10'')$

Also

$\log \sin(-\eta) = \log 1{,}63074 \times \sin 47' \, 25{,}79''$

$= 8{,}3521480 - 10$

woraus $\eta = -1° \, 17' \, 20{,}98''$

und

$\log \sin(-\eta') = \log 1{,}65204 \cdot \sin 46' \, 49{,}10''$

$= 8{,}3521490 - 10$

woraus $\eta' = -1° \, 17' \, 20{,}99''$

so daſs der Unterschied zwischen η und η' nur 0,01 Secunde beträgt.

[Brandes erhält $\eta = 1° \, 15' \, 57''$

$\eta' = 1° \, 15' \, 55''$]

Dafs beide Rechnungen mit einander differiren, und dafs bei Brandes η und η' nicht ganz gleich grofs gefunden werden, liegt darin, dafs dort die Differenzen $\varphi - \varphi'$; $\mu - \mu'$ als Differenziale angesehen werden, was nur näherungsweise richtig ist.

Der einfallende Strahl hat in Roth und Violett den $\angle \alpha = 15°$; der zuerst gebrochene Strahl

in Roth $\beta = 11° \, 12' \, 12{,}55''$

in Violett $\beta' = 11° \; 8' \, 45{,}08''$

$\beta - \beta' = 3' \, 27{,}47''$

Dieselben Strahlen gegen die zweite Fläche AC die Differenz $\gamma' - \gamma = 3' \, 27{,}47''$.

Die hieraus in dem 2ten Prisma gebrochenen Strahlen

$\delta = 7° \, 10' \, 34{,}30''$

$\delta' = 7° \; 9' \, 57{,}61''$

Differenz $\delta - \delta' = 36{,}69''$

Dieselben Strahlen, in CD treffend, die Differenz

$\varepsilon' - \varepsilon = 36{,}69''$

und die austretenden Strahlen η' und η die Differenz $\eta' - \eta$ nur 0,01 Secunden.

Die Totalbrechung oder Ablenkung beträgt $15° + 1° \, 17' \, 21'' = 16° \, 17' \, 21''$.

Achse ist ein Körper, um welchen andere mit demselben fest verbundene Körper sich drehen. Die Mittellinie einer festen Achse, welche während der Umdrehung allein in unveränderlicher Lage bleibt, welche aber, wenn die Achse sich fortbewegt, nur die Richtung angiebt, in welcher das System in jedem Augenblick sich fortbewegt, ohne sich zu drehen, ist die Axe der Achse und des ganzen Systems. (Vergl. Axe.)

Achteck. 1. Eine aus 8 Seiten bestehende Figur. Die Anzahl der erforderlichen Bestimmungsstücke (Im $n$eck $= 2n - 3) = 13$.

Die Anzahl der Dreiecke, in die es zerlegt werden kann, $n - 2 = 6$, und zwar durch $n - 3 = 5$ Diagonalen.

Die Anzahl aller möglichen Diagonalen $\frac{1}{2} n(n-3) = 20$.

Die Summe sämmtlicher Umfangswinkel $2n - 4 = 12 R\angle$.

Die gröfstmögliche Zahl der convexen Winkel $n - 3 = 5$.

(Vergl. Viereck, Fünfeck, Sechseck, Vieleck.)

2. Regelmäfsiges Achteck. (F=Inhalt des A. im Kreise, F' desselben um den Kreis.)

$$x = \frac{4}{n} R\angle = \frac{1}{2} R\angle = 45°$$

$$y = \frac{2n-4}{n} R\angle = \frac{3}{2} R\angle = 135°$$

$$s = r\sqrt{2 - \sqrt{2}} = 2r \sin 22\tfrac{1}{2}° = r \times 0{,}7653668$$

$$S = 2r\,(\sqrt{2} - 1) = 2r \, tg \, 22\tfrac{1}{2}° = r \times 0{,}8284272$$

$$r = \tfrac{1}{2} s\sqrt{2(2+\sqrt{2})} = \tfrac{1}{2} s \cdot cosec \, 22\tfrac{1}{2}° = s \times 1{,}3065628$$

$$r = \tfrac{1}{2} S(\sqrt{2} + 1) = \tfrac{1}{2} S \cot 22\tfrac{1}{2}° = S \times 1{,}2071068$$

$$F = 2r^2\sqrt{2} = 4r^2 \sin 45° = r^2 \times 2{,}8284272$$

$$F = 2s^2(1 + \sqrt{2}) = 2s^2 \cot 22\tfrac{1}{2}° = s^2 \times 4{,}8284272$$

$$F' = 8r^2(\sqrt{2} - 1) = 8r^2 \, tg \, 22\tfrac{1}{2}° = r^2 \times 3{,}3137088$$

$$F' = 2S^2(\sqrt{2} + 1) = 2S^2 \cot 22\tfrac{1}{2}° = S^2 \times 4{,}8284272$$

Soll man die Seite des regulären Achtecks finden, wenn der Inhalt F gegeben ist, so hat man

$$s = \sqrt{\tfrac{1}{2}(\sqrt{2} - 1)F} = \sqrt{\tfrac{1}{2} \, tg \, 22\tfrac{1}{2}° \cdot F} = 0{,}4550899\sqrt{F}.$$

Fig. 29.



3. Geometrische Construction des regulären Achtecks.

Fig. 30.



1. Wenn der Halbmesser R des umschriebenen Kreises gegeben ist, so nimm $CA = CB = r$, beschreibe den Kreis, errichte in C den normalen Durchmesser DE, halbire die vier rechten Centriwinkel, so erhält man die acht Punkte in der Peripherie, die man der Reihenfolge nach mit Sehnen verbindet.

2. Wenn der Halbmesser r des inbeschriebenen Kreises gegeben ist. Man verfahre wie *ad* 1, construire das Quadrat $FGHI$ und in den Punkten K, L u. s. w. Normalen auf CF, CG u. s. w. bis an die

Seiten des Quadrats, so erhält man das reg. Achteck.

Nach construirtem Quadrat kann man auch nach der Formel $S = 2r(\sqrt{2} - 1) = 2(\sqrt{2r^2} - r)$ verfahren. Zieht man nämlich

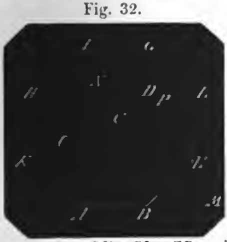
Fig. 31.



BE, so ist diese $= \sqrt{2r^2}$, beschreibt man nun den Bogen HM aus B, so ist $EM = \sqrt{2r^2} - r =$ der halben Seite S, beschreibt man nun aus den Punkten A, E, B u. s. w. mit EM als Radius, Halbkreise über FI, HI u. s. w., so erhält man die Durchschnittspunkte N, O, P, Q, ... von denen man O mit P u. s. w. durch gerade Linien verbindet.

3. Wenn eine Seite S gegeben ist. Nimm $AB = S$, verlängere S durch B, errichte in B auf AB das Loth BD, halbire $\angle DBM$ durch BE, nimm $BE = AB$, ziehe AE, zeichne über AE das Quadrat $AEGH$, halbire HG in N, ziehe BI durch N, halbire AH in O, EG in P, ziehe KL durch

Fig. 32.



O, P, nimm $CI = CK = CL = CB$, so bilden die Punkte A, B, E, L, G, I, H, K die acht Ecken des verlangten Achtecks.

Achtelkreis (Octant), der achte Theil eines Kreis-Umfangs.

Achtflach (Octaëder), ein Körper, der von acht gleich großen gleichseitigen Dreiecken begrenzt wird.

Achtflächner, der deutsche Name des Octaëders in der Krystallographie.

Achtundvierzigeck. Eine aus 48 Seiten bestehende Figur. (Vergl. Viereck, Fünfeck, Sechseck, Vieleck.)

Reguläres Achtundvierzigeck. Bei denselben Bezeichnungen wie beim Achteck hat man

$$s = \frac{4}{n} R\angle = \frac{1}{12} R\angle = 7^\circ 30'$$

$$y = \frac{2n-4}{n} R\angle = \frac{23}{12} R\angle = 172^\circ 30'$$

$$s = r\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}} = 2r \sin 3^\circ 45' = r \times 0{,}1308062$$

$$S = 2r\sqrt{\frac{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}} = 2r \operatorname{tg} 3^\circ 45' = r \times 0{,}1310870$$

$$r = s\sqrt{\frac{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}} = \tfrac{1}{2} s \operatorname{cosec} 3^\circ 45' = s \times 7{,}6448995$$

$$r = \tfrac{1}{2} S\sqrt{\frac{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}} = \tfrac{1}{2} S \cot 3^\circ 45' = S \times 7{,}6285263$$

$$F = 48r^2\sqrt{\frac{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}} = 24r^2 \sin 7^\circ 30' = r^2 \times 3{,}1326288$$

$$F = 48s^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}} = 12 s^2 \cdot \cot 3^\circ 45' = s^2 \times 183{,}08463$$

$$F' = 48r^2\sqrt{\frac{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}} = 48r^2 \operatorname{tg} 3^\circ 45' = r^2 \times 3{,}1460880$$

$$F' = 12S^2\sqrt{\frac{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}} = 12S^2 \cot 3^\circ 45' = S^2 \times 183{,}08463$$

Addiren. Mehrere gleichartige, nach irgend einem System geschriebene Zahlen zu einer einzigen Zahl durch Zusammenzählen vereinigen, und diese nach demselben System darstellen. Die einzelnen Zahlen heifsen Summanden, das Resultat die Summe.

Addition. 1. Die Rechnungsart oder das Verfahren beim Addiren. Das Zeichen, welches die Addition verlangt, das Additionszeichen ist ein stehendes Kreuz (+), *plus* genannt: $a + b$, $5 + 6$ heifst: es soll a zu b, 5 zu 6 addirt werden; man liest: a *plus* b, 5 *plus* 6.

Nur gleichartige Gröfsen können addirt werden, also nur solche, die sich auf einerlei Einheit beziehen.

2. Bei unbenannten Zahlen addirt man also Einer zu Einern, Zehner zu Zehnern

u. s. w., Zehntel zu Zehnteln, Hundertel zu Hunderteln u. s. w.

Beispiele.

124356	0,5340
75180	12,79 . .
• 1921	218,321 .
35272	4,0009
236729	235,6459

Man setzt die gleichen Einheiten unter einander. Um bei Decimalen nicht zu irren, füllt man die fehlenden Stellen mit Nullen oder Punkten aus; letzteres kann auch bei ganzen Zahlen geschehen. Die Einersumme ist 9, die Zehnersumme 22, mithin 2. Zehner und 2 Hunderter; letztere werden zu den Hundertern addirt und man erhält 1700, d. i. 1 Tausender und 7 Hunderter u. s. w. Eben so verfährt man bei den Decimalbrüchen.

3. Um die Richtigkeit der Rechnung zu prüfen, addirt man zum zweiten Mal und zwar von unten nach oben, wenn man zuerst von oben nach unten addirt hat. Es ist aber möglich, dafs die Reihenfolge von Zahlen in beiden Rechnungen irgend wo übereinstimmt, daher ist die Probe sicherer, bei welcher man zum zweiten Mal in derselben ersten Richtung addirt und mit einer um 1 gröfseren oder geringeren Zahl anfängt. Man sagt also bei der Proberechnung $7+0+1+2=10$ und schreibt 9; $6+8+2+7=23$ und nimmt 22, statt des Restes 2 für die Hunderter nimmt man 3 und sagt $3+3+1+9+2=18$ u. s. w.

4. Eine dritte Prüfungsweise ist die sogenannte Neunerprobe: Nämlich die Summe der Ziffern der Summanden durch 9 dividirt, giebt denselben Rest, der entsteht, wenn man die Summe der Ziffern der Summe durch 9 dividirt.

In 124356 ist die Summe der Ziffern = 21
„ 75180 „ „ „ „ „ = 21
„ 1912 „ „ „ „ „ = 13
„ 35272 „ „ „ „ „ = 19
Summe = 74

In 236729 ist die Summe der Ziffern = 29

$$\frac{74}{9}=8+\frac{2}{9}, \quad \frac{29}{9}=3+\frac{2}{9}$$

Der Rest ist in beiden gleich grofs, folglich die Addition richtig ausgeführt.

In dem zweiten Beispiel ist die Summe der Ziffern der Summanden = 61, der Summe 34, jede Zahl mit 9 dividirt giebt den Rest 7.

Eine vierte Prüfungsweise ist die Eilferprobe: Man nimmt die Summe der Zahlen in den ungeraden Stellen von der Rechten zur Linken und subtrahirt davon die Summe der Zahlen in den geraden Stellen. In dem ersten Beispiel ist die Summe der ungeraden Stellenzahlen

$11+8+10+7=36$, die der geraden
$10+13+3+12=38$
Differenz $=-2$

und da diese negativ ist, so addirt man 11 hinzu, giebt die Probezahl = 9; in der Summe erhält man $19-10=9$. Beide Probezahlen stimmen überein, und daher ist die Addition richtig ausgeführt.

In dem zweiten Beispiel mufs von den Einern als erste Stelle ausgegangen und nach links und rechts gezählt werden.

Die ungeraden Stellen geben
$3+11+12+13=39$
Die geraden Stellen geben . . . . . . $9+8+5+0=22$
Differenz = 17
hiervon 11 abgezogen giebt die Probezahl 6
in der Summe hat man $20-14$ . . . = 6

Beide letztgenannten Proben, die Neuner- und die Eilferprobe, sind trüglich, indem auch unrichtige Summen mit den Summanden einerlei Probezahl geben können.

5. Bei Addition von periodischen Decimalbrüchen thut man wohl, die Stellen bis auf den spätesten Eintritt einer Periode zu ergänzen, also das Exempel 1 wie 2 zu schreiben.

1)	2)
0,594	0,59444 . . .
0,7	0,77777 . . .
0,30065 . .	0,30065 . . .
	1,67287 . . .

Die letzte Stellenreihe $=4+7+5=16$ ist das Resultat für jede spätere Reihe, es mufste also die 1 zu jeder folgenden hinzugezählt werden, und die Periode fängt mit der Zahl 7 an.

Bei Brüchen ist die Einheit = 1 dividirt durch den Nenner. Die Addition von Brüchen gleicher Nenner besteht in der Addition der Zähler, deren Summe den Nenner eines Summanden erhält, z. B. $\frac{3}{8}+\frac{2}{8}+\frac{1}{8}=\frac{3+2+1}{8}=\frac{6}{8}$. Haben die Brüche verschiedene Nenner, so müssen dieselben auf einen gemeinschaftlichen Nenner (Generalnenner) gebracht werden. Es geschieht dies, indem man die kleinste Zahl sucht, in welche sämmtliche Nenner aufgehen, und jeden Zähler der Summanden so vielfach nimmt, als dessen gegebener Nenner geworden ist: z. B. $\frac{5}{7}+\frac{3}{8}+\frac{1}{4}$.

Die kleinste Zahl, in welche 7; 8 und 4 aufgehen, ist 56. Man hat demnach

$$\frac{5\cdot 8}{7\cdot 8}+\frac{3\cdot 7}{8\cdot 7}+\frac{1\cdot 14}{4\cdot 14}=\frac{40+21+14}{56}=\frac{75}{56}$$

7. Bei benannten Zahlen addirt man die Zahlen, die sich auf einerlei Gegenstand beziehen, also z. B. Pfennige mit Pfennigen, Groschen mit Groschen, Thaler mit Thalern; ebenso bei Centnern, Pfunden, Lothen u. s. w.

8. Bei allgemeinen Gröfsen ist die Summe der mit verschiedenen Buchstaben bezeichneten die mit + ausgedrückte Additionsforderung: $a+b+c$ bleibt als Summe $a+b+c$, $a+a$ ist $=2a$; $3b+7b=10b$. Zusammengesetzte Gröfsen werden mit ihren gleichen Buchstaben unter einander gestellt und addirt:

$$\begin{array}{rl} & a+\ 5b+6c+\ d \\ & 3a+\ 7b+\ c+3d \\ \hline \text{Summe} & 4a+12b+7c+4d \end{array}$$

Die Addition von Gröfsen mit entgegengesetzten Vorzeichen geschieht nach dem Begriff derselben, nämlich dafs deren gleiche Quantitäten sich gegenseitig aufheben, sich zu Null machen: $a-a=0$; $3C-3C=0$.

$$\begin{array}{rl} & -\ 7a+3b+5c-3a \\ & -\ 4a+2b-\ c+2a \\ \hline \text{Summe} & -11a+5b+4c-\ a \end{array}$$

Additionszeichen s. u. Addition. 1. In zusammengesetzten Buchstaben-Ausdrükken wird für die erste Gröfse, wenn sie *plus* ist, das Zeichen nicht gesetzt. Man schreibt nicht $+a-b$, sondern $a-b$.

Additiv ist eine Gröfse, wenn man sie dem Verlangen einer Aufgabe gemäfs zu einer Zahl addiren, d. h. diese letzte um die Summe der Einheiten, welche die additive Zahl enthält, vermehren soll. In den Ausdrücken

$$a+b;\ c-(a+b)$$

sind a und b additiv; aus dem zweiten Beispiel geht hervor, dafs additiv mit positiv nicht zu verwechseln ist.

Adhärenz, die Kraft, vermöge welcher zwei gleichartige oder ungleichartige Körper mit ihren Oberflächen sich anziehen, an einander haften. Z. B. zwischen zwei polirten Körpern, zwischen Wasser und Gefäfswandungen. (S. Adhäsion.)

Adhäsion. Die Wirkung der Adhärenz, Anziehung zweier gleichartiger oder ungleichartiger Körper bei gegenseitiger Berührung deren Oberflächen, oder Bestreben der auf den Oberflächen beider Körper befindlichen Massentheilchen, bei deren Berührung wechselseitig an einander haften zu bleiben.

Die A. ist darin von der Cohäsion, der Wirkung der Cohärenz, verschieden, dafs bei dieser sämmtliche Massentheilchen eines Körpers das Bestreben haben, wechselseitig an einander haften zu bleiben, und somit der mechanischen Zerstörung des Körpers entgegen zu wirken.

Die Reibung ist nicht A., sondern die Folge von dem gegenseitigen Ineinandergreifen der Hervorragungen des einen Körpers in die Vertiefungen des anderen, wodurch eine Verschiebung beider Körper längs deren Oberflächen erschwert wird. Beide Wirkungen, die Reibung und die A., wachsen mit dem Druck, den beide Körper auf einander ausüben. Für die Gröfse der Reibung bei gleich bleibendem Druck zweier Körper auf einander ist die Gröfse deren Berührungsflächen gleichgültig, während die A. dagegen mit derselben zunimmt, weil sie mit der Summe der zur Berührung kommenden, materiellen Theilchen, deren jedem eine gleich grofse Kraft der Adhärenz inne wohnt, wachsen mufs. Aus diesem letzten Grunde wächst auch die A. mit der Glätte der sich berührenden Körper-Oberfläche, während die Reibung mit dem Grade der Glätte sich vermindert.

Beide Wirkungen, die Reibung und die A., unterstützen sich gegenseitig zum Widerstande gegen das Verschieben der Körper längs deren Oberflächen: Rauhe Riemen über hölzernen Riemenscheiben bei Maschinen ziehen zum gröfsten Theil vermöge der Reibung; eine gröfsere Zugkraft haben glatte Riemen über eisernen mit möglichst sauber polirter Oberfläche versehenen Riemenscheiben vermöge der stärkeren Wirkung der Adhäsion zwischen Riemen und polirtem Eisen.

Wenn die sehr glatten ebenen Oberflächen zweier Körper über einander geschoben oder über einander gerieben werden, so kann zwischen mehreren einzelnen Flächen-Elementen die atmosphärische Luft fortgeschafft worden sein; die auf den Körper wirkende Atmosphäre äufsert sich dann mit ihrer ganzen Druckkraft auf diese Flächen-Elemente mit cc. 15 Pfund pro □Zoll Fläche und verstärkt dadurch die Wirkung der A. Bei der Art, wie die Riemenscheibe den Riemen in jedem Augenblick ergreift und herumführt, ist ein theilweises Fortquetschen der zwischen befindlichen Luft wohl denkbar. Dafs der Riemen wegen der convexen Scheiben-Oberfläche nicht von der Seite herabrutscht, liegt nicht in der A., sondern einzig in der Centrifugalkraft.

Die Zugkraft der Locomotive in den beiden Treibrädern beruht auf der durch gleitende Reibung verstärkten Wirkung der A. zwischen den Radbahnen und den Schienen, während bei deren Laufrädern und den Rädern aller übrigen Wagen die A. durch deren Wälzung über die Schienen

bedeutend vermindert wird. Man stellt sich dies wohl am überzeugendsten vor, indem man sich erstens einen Lastwagen nicht durch eine Locomotive, sondern durch eine andere horizontal angebrachte Kraft fortgezogen denkt, wobei also nur die geringe wälzende Reibung zwischen Rädern und Schienen zu überwinden ist; und zweitens, indem man einen so schweren Eisenbahnzug annimmt, dafs die Locomotive denselben nicht fortschaffen kann, in diesem Fall nämlich drehen die Treibräder sich auf derselben Stelle, und zwar schleifend auf den Schienen. Es ist mithin bei der fortschreitenden Bewegung der Locomotive in jedem Augenblick eine Schleifung zwischen den Bahnen der Treibräder und den Schienen im Beginnen.

Die Gröfse der A. zwischen zweien Körpern hangt auch ab von deren physikalischen Beschaffenheit: Weiche Stoffe, wie Blei, haben eine gröfsere A. als harte, wie Eisen. Man kann zwei Bleiplatten durch mäfsigen Druck so innig mit einander verbinden, dafs sie schwer wieder zu trennen sind.

Zwischenmittel vermindern und vermehren die A. Zwischen 2 sonst stark adhärirende polirte Metallflächen einen Bogen Papier gebracht, hebt die A. auf. Wasser zwischen Eisen vermindert gleichfalls dessen A. Eisenbahnzüge auf nassen Schienen werden verzögert, Glatteis auf Schienen hebt die A. ganz auf, Schmiermittel zur Verminderung der Reibung und der Abnutzung wirken vermöge der A. mit den reibenden Flächen. Flüssiger Leim auf Holzflächen gestrichen adhärirt bedeutend, beide Hölzer zusammengeschraubt, den Leim trocknen lassen, giebt noch diesem durch Cohäsion Festigkeit seiner einzelnen Theilchen unter sich, und die Hölzer sind nicht mehr zu trennen. Schmiere zwischen Zapfen und Lager ohne Drehung eintrocknen lassen, Versiegelung mit Siegellack u. s. w., geben dieselben Adhäsions-Erscheinungen.

Feste Körper adhäriren mit Flüssigkeiten, mit anderen nicht, man sagt: sie werden von denselben benetzt oder nicht.

Die Leinenfaser, Holz, Eisen, werden von Wasser benetzt, von Quecksilber nicht; Harze adhäriren mit Oel, mit Wasser nicht. Hierauf gründet sich die Adhäsions-Erscheinung, welche man Capillarität (Haarröhrchen-Anziehung) nennt: Wasser in sehr enge, oben und unten offene Glasröhrchen eingesogen, fliefst nicht heraus, es mufs mit Anwendung von äufserer Kraft, durch Stofs, oder heraus geblasen werden, weil die A. des Wassers gegen die Röhrenwandungen sowohl die Cohäsion der Wassertheilchen unter sich bei dem so geringen Querschnitt, als auch die Schwere derselben übersteigt. Auf dieser Erscheinung beruht das Aufsaugen von Oel, Brennspiritus in einen Docht, die gänzliche Durchnässung eines Waschschwamms, der nur unterhalb und zum geringen Theil im Wasser liegt, die Durchnässung von Holzkohlen, Ziegelmehl und anderer poröser aufgehäufter Körper, die blofs mit der untersten Schicht in Wasser liegen. Dachplatten aus Gufseisen leiten das Wasser, womit sie vom Regen benetzt werden, vermöge ihrer Porosität bis auf das innere Sparrwerk, und veranlassen so dessen Zerstörung. (Vergl. Anziehung, Cohäsion, Capillarität.)

Ad infinitum s. v. w. bis in's Unendliche. Z. B. $a + a^2 + a^3 + \ldots$ ad inf.

Aechter Bruch (eigentlicher Bruch). Ein Bruch, dessen Zähler kleiner ist als dessen Nenner, als $\frac{1}{5}, \frac{3}{4}, \frac{n}{n+m}$.

Aehnlich (∾) ist übereinstimmend in der Form.

1. Analytisch ähnlich sind gleichartige Ausdrücke, wenn deren gleichliegende Gröfsen in einerlei Verhältnifs stehen. Z. B. die Flächen- oder Planzahlen ab, cd, wenn $a:c = b:d$; die Körperzahlen abc und def, wenn $a:d = b:e = c:f$; die beiden gleichartigen Gleichungen

$$x^3 - ax^2 + bx - c = 0$$
$$y^3 - \alpha y^2 + \beta y - \gamma = 0$$

wenn $a:\alpha = b:\beta = c:\gamma$, und es haben die 3 Wurzeln der ersten Gleichung zu den 3 Wurzeln der zweiten Gleichung dasselbe Verhältnifs.

2. Geometrisch ähnlich sind Linien, wenn deren kleinste Theile in einerlei Verhältnifs und nach einerlei Ordnung genommen, einerlei Lage gegen einander haben. Daher sind alle geraden Linien einander und alle Kreislinien einander ähnlich. Kreisbogen sind einander ähnlich, wenn sie gleiche aliquote Theile ihrer vollständigen Kreislinien sind.

Alle Parabeln sind einander ähnlich, denn nimmt man in mehreren Parabeln nach einander die Parameter p, $2p$, $3p$ u. s. w. und die Abscissen von dem Scheitel aus zu p gehörig x_1; x_2; x_3; zu $2p$ gehörig $2x_1$; $2x_2$; $2x_3$; zu $3p$ gehörig $3x_1$; $3x_2$; $3x_3$ u. s. w., so erhält man aus der Gleichung $y^2 = px$ die dazu gehörigen Ordinaten für den Parameter p:

$y_1 = \sqrt{px_1}$; $y_2 = \sqrt{px_2}$; $y_3 = \sqrt{px_3}$ u. s. w.

für den Parameter $2p$

$$y' = \sqrt{2p \cdot 2x_1} = 2\sqrt{px_1} \text{ mithin } y' = 2y_1$$

$$y'' = \sqrt{2p \cdot 2x_2} = 2\sqrt{px_2} \text{ mithin } y'' = 2y_2$$

für den Parameter $3p$

$$y' = \sqrt{3p \cdot 3x_1} = 3\sqrt{px_1} \text{ mithin } y' = 3y_1$$

u. s. w.,

so dafs also die Ordinaten mit den Abscissen und mit den Parametern in einerlei Verhältnifs stehen.

Ellipsen sind ähnlich, wenn deren Axen einerlei Verhältnifs haben.

Geradlinige Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in eine Lage gebracht werden können, dafs je 2 Seiten ⫲ laufen; ihre gleichliegenden Seiten haben einerlei Verhältnifs.

Geradlinige Figuren sind ähnlich, wenn sie durch gleichliegende Diagonalen in Dreiecke zerlegt werden, von denen jedes Dreieck in der einen Figur dem gleichliegenden in der andern ähnlich ist.

Kreisflächen und reguläre Vielecke von gleich viel Seiten sind einander ähnlich, und ihre Flächenräume verhalten sich wie die Quadrate gleichliegender Seiten oder Diagonalen; ähnliche Ellipsenflächen verhalten sich wie die Quadrate der grofsen oder der kleinen Axen.

Körper sind ähnlich, wenn beliebig gleichgelegte Durchschnitts-Ebenen ähnliche Figuren geben; sie bilden ähnliche Körper-Abschnitte.

Alle Kugeln und alle regulären Körper von gleich viel Seitenflächen sind einander ähnlich.

Kegel sind ähnlich, wenn sie als Abschnitte eines von der Spitze aus unendlich weit fortgeführten Kegels betrachtet werden können, wobei die Durchschnitts-Ebenen ⫲ laufen.

Cylinder sind ähnlich, wenn ihre Axen sich wie ihre Durchmesser verhalten.

Prismen sind ähnlich, wenn ihre Grund-Ebenen ähnlich sind, und die gleichliegenden Seitenkanten mit den gleichliegenden Grundkanten in beiden einerlei Verhältnifs haben.

Aehnliche Dreiecke, Figuren, Gröfsen, Körper, Körper-Abschnitte s. u. ähnlich.

Aehnlich-gleich, eigentlich: ähnlich und gleich, congruent (≅) ist Uebereinstimmung in Gröfse und Form.

Aehnlichkeit ist Uebereinstimmung in der Form.

Aequal (gleich) ist Uebereinstimmung in der Quantität.

Aequator, Aequator des Himmels, Himmels-Aequator, Welt-Aequator. Ist für uns nicht wahrnehmbar, sondern nur scheinbar vorhanden. Unsere Erde nämlich dreht sich alle 24 Stunden einmal um ihre Axe von Westen nach Osten, und da jeder Punkt der Erdoberfläche uns still zu stehen scheint, so scheint uns, als ob die ganze Himmelskugel alle 24 Stunden um dieselbe Axe von Ost nach West sich bewegte. Es sei S die Sonne, E und E' seien die Endpunkte der grofsen Axe der Ekliptik, so dafs EE' circa 42 Millionen Meilen beträgt, s sei irgend ein Fixstern, so ist Beobachtungen zufolge $\angle sE'D = \angle sED$, mithin $\angle E'sS = 0$. Die Entfernung der Fixsterne von unserem Sonnensystem ist also so grofs, dafs ein Vorrücken der Erdaxe auf 42 Millionen Ml. Länge, deren Richtungen immer ⫲ zu einander bleiben (s. Aequator der Erde), unbemerkbar ist, und somit erscheint in allen Punkten der Ekliptik die Erdaxe in ihrer beiderseitigen Verlängerung bis in unendliche Ferne die stillstehende Weltaxe, desgleichen in jedem Punkte der Ekliptik die allseitige Verbreiterung des Erd-Aequators bis in's Unendliche der Welt-Aequator zu sein. Diese Kreisebene wird in 360° getheilt.

Fig. 33.



Von diesem Aequator oder dem Erd-Aequator aus, ist jedes Gestirn, wo es am Himmel sich auch befinde, 12 Stunden lang über und 12 Stunden lang unter dem Horizont, und jedes beschreibt einen vollen Kreis, von denen der des im Aeq. selbst befindlichen Gestirns als der gröfste erscheint. Daher der Name Aequator (Gleicher, Gleichmacher).

Jeder andere Planet hat eine Ekliptik von anderer Neigung gegen seinen Aeq., jeder andere Planet hat also eine andere scheinbare Weltaxe und einen anderen scheinbaren Welt-Aequator.

Die Lehre von der Attraction der Weltkörper unter einander ist zwar nur hypothetisch, allein sie stimmt mit allen

Beobachtungen und Erfahrungen für unser Sonnensystem haarscharf überein und ist somit für dieses als richtig begründet. Man mufs daher annehmen, dafs, wenn die gesammte Welt Bestand haben soll, die Sonne mit ihren Planeten und deren Trabanten eben so mit allen übrigen Sonnen des Weltalls (den Fixsternen) und den ihnen zugehörigen Systemen in Attractionsverhältnissen stehen und folglich um einander sich bewegen.

In neuerer Zeit hat man bei der jetzt so aufserordentlichen Schärfe der Beobachtungs-Instrumente auch wirklich fortschreitende Bewegungen der Sonne und einiger Fixsterne gefunden, zunächst also Orts-Veränderung unseres Sonnensystems, und es beträgt nach Bessel die relative Bewegung der Sonne und des 6. Sterns im Schwan täglich 834000 geogr. Ml. Wie viel unser Sonnensystem allein und der Stern im Schwan allein sich bewegt, also deren absolute Bewegung, ist noch nicht ermittelt, und man hat nur berechnet, dafs die Fortrückung des genannten Sterns in 700 Jahren etwa einen Grad ausmacht; ebenso ist der Stern nicht bekannt, um welchen als Sonne die planetarischen Bewegungen geschehen.

Der Raum, dieser einfache Begriff, ist als begrenzt undenkbar, er ist also unendlich, und da in jeder Raum-Abtheilung sich Weltkörper bewegen können und sich auch wohl bewegen werden, so ist die Anzahl der Sonnen des Weltalls wiederum eine unendliche. Demnach ist es wieder undenkbar, dafs eine einzige Sonne von Gröfse, welche die der übrigen übertrifft, still stände und das ganze Weltall um dieselbe sich bewegte; im Gegentheil ist anzunehmen, dafs sämmtliche Sonnensysteme gruppenweise um einander sich bewegen, so dafs eine einzige gröfste Sonne einer Gruppe als fester Punkt derselben durch eine Summe von um sich herum kreisenden Sonnensystemen vertreten wird, und dafs dies ganze System höherer Ordnung, z. B. der $n$ten wiederum mit anderen Systemen höherer Ordnung zu einem System der $n+1$ten Ordnung wird u. s. f.

Dieser Betrachtung zufolge wäre eine Weltaxe und ein Welt-Aequator nicht vorhanden.

Aequator der Erde. Die auf der Erdaxe normal befindliche und von beiden Polen gleich weit abstehende Kreislinie: Die durch den Kreis gedachte Ebene heifst die Aequator-Ebene; diese theilt die Erdkugel in zwei Hälften, in die nördliche Halbkugel mit dem Nordpol und in die südliche mit dem Südpol.

Der Erd-Aequator wird, wie jeder Kreis-Umfang, in 360° getheilt; die ganze Länge desselben erfährt man also, wenn man einen Grad genau gemessen hätte; allein es ist dies mit besonderen Schwierigkeiten verbunden, und daher kommt es, dafs die Angabe der Länge eines Grades im Aequator so verschieden angegeben wird. Man setzt die Länge des Aequators genau 5400 geogr. Meilen, einen Grad also = 15 geogr. Meilen; nun aber herrscht eben so grofse Verschiedenheit in der Angabe über die Länge der geogr. Meile.

Nach Picard's Messungen beträgt diese 3804 Toisen, die Toise = 1,949037 Meter, giebt 7414 Meter zu 3,186199 preufs. Fufs = 23622 preufs. Fufs.

Vega giebt sie an: 7420,158 Meter = 0,9850876 preufs. Ml. Dies sind 1970,1752 preufs. Ruthen = 23642,1 preufs. Fufs, so dafs die geogr. Meile um 29,8248 preufs. Ruthen oder 358 preusf. Fufs kleiner ist als die preufs. Meile.

Der Durchmesser des Aequators ist $\frac{5400}{\pi} = 1718,87$ geogr. Ml. und nach den letzten Angaben = 1275,4313 Myriameter = 1693,24 preufs. Ml.

Die Erde dreht sich um ihre Axe, und aufserdem noch um die Sonne; die erste vollständige Umdrehung vollbringt sie in 24 Stunden, die letztere in einem Jahr. Die Bahn um die Sonne (die Ekliptik), in der also der Erdmittelpunkt sich fortdauernd befindet, ist gegen den Aequator um etwa $23\frac{1}{2}$ Grad geneigt, sie durchschneidet diesen also in zwei entgegengesetzten Punkten und ist in zwei entgegengesetzten Punkten demselben am fernsten.

Es sei AB die beliebig erweiterte mittlere Durchschnittslinie der Ebene des Erdäquators (Q) einerlei mit der des Aequators, des Welt-Aequators, SW die mittlere Durchschnittslinie der Ekliptik (E), also $\angle AsW = 23\frac{1}{2}°$, so ist der Punkt s der Stand der Sonne, und S, W sind die Sonnenwenden (s. Absiden).

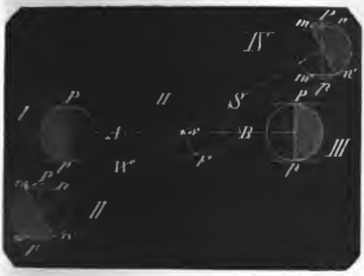
Denkt man das die Figur betrachtende Auge, welches jetzt normal auf die Linien AB und SW gerichtet ist, um den $\angle AsW$ seitwärts nach sF oder sH sich bewegt, so sieht man ungefähr den Q in der elliptischen Form $FAHB$ und die E wie $FSHW$; FH ist die Durchschnittslinie des Q mit der E; F der Frühlingspunkt, H der Herbstpunkt, S die Sommerwende, W die Winterwende, und s steht in demjenigen beider Brennpunkte, der E, dafs $Ss < Ws$.

Die Erde bewegt sich in der E von F

nach *S*, *H*, *W* bis wieder *F* innerhalb eines Jahres, während sie zugleich alle 24 Stunden sich selbst um ihre Axe dreht, die dabei immerwährend normal auf den *A* auf die Ebene *AHBF* gerichtet verbleibt, und Erdaxe und Erdäquator also immerwährend ⫲ mit sich selbst sich fortbewegen.

Diese Axendrehung der Erde geschieht

Fig. 34.



ferner der Art, daſs wenn man auf *SHW* etwa in *H* mit dem Gesicht nach *W* gerichtet, die Sonne zu Füſsen sich stehend denkt, die Erdkugel in der Gegend des Aequators so in die Hand nimmt, daſs der Nordpol zur Rechten fällt, und sie als Kegelkugel entläſst.

Die Jahreszeiten: Frühling, Sommer, Herbst, Winter, beginnen für die von uns bewohnte, die nördliche Halbkugel, wenn die Sonne in *F*, *S*, *H*, *W* uns zu stehen scheint; also der Frühling beginnt, wenn die Erde wirklich in den Herbstpunkt *H* tritt, wo dann die Sonne ihr gegenüber in *F* zu sein scheint: der Sommer, wenn die Erde in *W*, der Herbst, wenn sie in *F*, und der Winter, wenn die Erde von *F* kommend in *S* tritt.

Damit nun ein deutliches Bild von der Beleuchtung der Erde durch die Sonne in jedem Standpunkt, den sie in der *E* einnimmt, entstehe, denke man den *A* in seiner Ebene *FBHA* verbleibend, sich so weit drehend, daſs *F* in *B*, und *H* in *A* fällt, so ergiebt *SW* die Richtung der Sonnen-Strahlen auf die Erde, wenn diese in den Punkten *S* und *W* sich befindet, und *AB* die Richtung der Strahlen auf die Erde, wenn diese in den Punkten *F* und *H* ihren Ort hat; wenn, wie es der Wirklichkeit gemäſs ist, Axe und Aequator der Erde, diese in allen Punkten der *E* befindlich gedacht, immer ⫲ mit einander verbleiben, und wie dies in der Zeichnung, wo *P* den Nordpol und *p* den Südpol bedeutet, beobachtet ist.

Steht die Erde in dem Herbstpunkt *H*, so scheint die Sonne in dem Frühlingspunkt *F* zu stehen. Da *H* durch *A* vertreten wird, so hat die Erde den Stand *I*.

Die mit *AB* gezeichneten Parallelen zeigen die Grenzen zwischen der erleuchteten und der nicht erleuchteten Halbkugel, indem die Sonne, wegen ihrer groſsen Ferne, von *P* bis *p* nach einerlei Richtung ⫲ *AB* zu stehen scheint, und während der Drehung der Erde um *Pp* innerhalb 24 Stunden haben alle Punkte der Erdoberfläche 12 Stunden Tag und 12 Stunden Nacht. Es ist Aequinoctium.

Dieselbe Erscheinung findet statt, wenn die Erde von *H* über *W* nach Verlauf eines halben Jahres in den Frühlingspunkt *F* tritt, wo dann, da *F* durch *B* vertreten ist, die Erde den Stand *III* einnimmt. Aus diesem Grunde heiſsen die Punkte *F* und *H* auch die Aequinoctialpunkte.

Bewegt sich die Erde aus *H* nach *W* hin, so rückt sie allmählich aus dem Stand *I* in den Stand *II*, die beleuchtete Halbkugel erweitert sich immer mehr von *P* nach der Linken und vermindert sich um gleich viel fortdauernd von *p* nach der Rechten, die nördliche Halbkugel erhält immer mehr, die südliche immer weniger Beleuchtung; in dem Stande *II*, wo die Erde in *W* (in der Sonnenferne, dem Aphelium) steht, hat die Beleuchtung der nördlichen Halbkugel ihr Maximum, in der südlichen ihr Minimum erreicht; die mit der Richtung *sW* der Strahlen parallelen Linien tangiren die Erdoberfläche in *m* und *n'*; in dem Parallelkreis *mn* haben die Bewohner den Tag 24 Stunden lang, von dort bis zum Pol *P* geht die Sonne nicht mehr unter; von dem Kreise *m'n'* ab bis zum Südpol *p* ist Nacht.

Bewegt sich die Erde von *W* nach *F* hin, so rückt die beleuchtete Halbkugel wieder nach *P* rechts und nach *p* links, und wie von *I* bis *II* die Sonne den Bewohnern der nördlichen Halbkugel immer höher stieg, so scheint sie denselben jetzt immer mehr hinab zu sinken, der Parallelkreis *mn*, in welchem bei *II* der längste Tag 24 Stunden ist, und von wo aus bis zum Nordpol die Sonne nicht mehr untergeht, rückt immer mehr dem Nordpol *P* zu, so wie der Kreis *m'n'*, von wo aus bis zum Südpole *p* dauernde Nacht ist, diesem Südpol immer näher

rückt, bis endlich, wenn die Erde in den Frühlingspunkt *F* getreten ist, die Beleuchtung wie in der Stellung *III* geschieht; es ist Aequinoctium und der Herbst beginnt.

Von hier ab rückt die Erde von *F* nach *S* (Stellung *IV*), die Strahlen werden von Tag zu Tage schräger auf *Pp*, für die nördliche Halbkugel senkt sich die Sonne immer tiefer, für die südliche steigt sie immer höher, und dies Verhältnifs erreicht sein Maximum in Stellung *IV*, wenn die Erde in den Sommerpunkt *S* tritt, wo die Sonne im Winterpunkt *W* zu sein scheint, und für die nördliche Halbkugel der Winter wirklich anhebt. Jetzt ist von dem Parallelkreise *mn* bis zum Nordpol dauernde Nacht, von dem Kreise *m'n'* bis zum Südpol dauernder Tag.

Den Bewohnern der nördlichen Halbkugel scheint die Sonne von der Stellung *II* bis *IV*, indem die Erde von *W* über *F* nach *S* sich bewegt, fortdauernd zu sinken, von der Stellung *IV* bis *II* dieselbe fortdauernd zu steigen, in *W* und *S* scheint sie still zu stehen und sich zu wenden; daher heifsen die Punkte *S* und *W* die Sonnenstillstandspunkte, die Solstitialpunkte, auch die Wendepunkte, die Sonnenwenden, die Wenden; und zwar *W* der Sommerstillstandspunkt, das Sommersolstitium, der Sommerwendepunkt, die Sommersonnenwende, die Sommerwende; *S* der Winterstillstandspunkt, das Wintersolstitium, der Winterwendepunkt, die Wintersonnenwende, die Winterwende. Desgleichen heifsen die Punkte *F* und *H* die Aequinoctialpunkte, die Nachtgleichenpunkte, die Aequinoctien, die Nachtgleichen; und zwar *F* das Frühlings-Aequinoctium, die Frühlings-Nachtgleiche, und *H* das Herbst-Aequinoctium, die Herbst-Nachtgleiche.

Mit den Namen: Frühlings-, Sommer-, Herbst- und Winterpunkt würden viel entsprechender diejenigen ihnen entgegengesetzt liegenden Punkte bezeichnet werden, welche die Erde wirklich einnimmt. Allein man hat die von den alten Astronomen herrührenden Namen beibehalten, indem man bis zu Galilei's Zeiten nicht wufste, dafs die Erde um die Sonne sich dreht, sondern die Drehung der Sonne und des ganzen gestirnten Himmels um die Erde, wie es uns scheint, für Wahrheit nahm, wie dies schon in dem Artikel „Absteigendes Zeichen" angegeben worden, indem also die alten Astronomen mit den Namen: Frühlings-, Sommer-, Herbst- und Winterpunkt diejenigen Punkte der Himmelskugel bezeichneten, in welche beim Eintritt der jedesmaligen Jahreszeiten ihnen die Sonne wirklich rückte, uns aber jetzt zu rücken scheint.

Der Name Aequator, Gleicher, Gleichmacher rührt daher, dafs wenn die Sonne in *F* und *H*, also in der *E* und zugleich im *A* steht, aller Orten der Erde Tag und Nacht gleich ist, so wie alle Gestirne, vom *A* aus betrachtet, einen halben Tagekreis über und einen halben Tagekreis unter dem Horizont beschreiben, wie dies schon im vor. Art. angeführt worden ist.

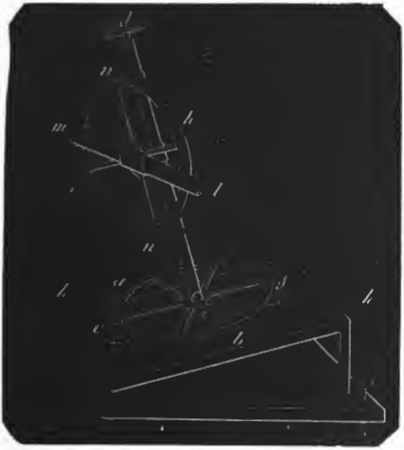
Aequator, magnetischer. Ist der von den beiden magnetischen Polen der Erde gleich weit abstehende und auf deren Verbindungslinie normal genommene Kreis, welcher den geogr. Aeq. in zwei Punkten schneidet. Die Magnetnadel steht in allen Punkten desselben horizontal, sie hat keine Inclination. (Vergl. Ablenkung und Abweichung der Magnetnadel.)

Aequatoreal. Ein astronomisches Instrument, welches die Abweichung eines Gestirns und zugleich dessen gerade Aufsteigung mifst. Skizze Fig. 35. erläutert das Princip und die Construction des übrigens ziemlich complicirten Instruments: *ab* ist ein in Grade und Minuten eingetheilter Kreis, an einer Axe *cd* normal und unverrückbar befestigt; *gk* ein zweiter, gleichfalls in Grade und Minuten getheilter Kreis, an der Axe *cd* unverrückbar der Art befestigt, dafs seine Ebene ‡ der Axe, also normal auf *ab* und ‡ mit der Theillinie *ef*, welche 0° und 180° auf *ab* zeigt. *lm* ist ein Fernrohr, ebenfalls an der Axe *cd*, jedoch drehbar befestigt, wobei aber die Axe des Fernrohrs immer ‡ der Kreisebene *gk* verbleibt. Um feinere Theilungen ablesen zu können, bewegt sich der Kreis *ab* um die tangirenden Nonien *e*, *f*; eben so ist die Theilung des Kreises *gk* mit Nonien *n*, *n* versehen.

Bezeichnet *hh* den Horizont, *cz* die Richtung nach dem Zenith der Sternwarte, so wird das Instrument so aufgestellt, dafs die Ebene des Kreises *ab* ‡ dem Welt-Aequator (woher *ab* der Aequatorealkreis heifst), also die Axe *cd* ‡ der Weltaxe ist, und dafs die Nullpunkte der Nonien *e* und *f* in den Meridian der Sternwarte kommen und darin verbleiben. Aufser diesen Nonien ist das ganze Instrument um die Axe *cd* drehbar.

Zur Beobachtung eines Gestirns wird das Instrument so gedreht, dafs die Axe des Fernrohrs in dessen Abweichungskreis fällt, hierauf diese Axe nach dem

Fig. 35.



Stern selbst gerichtet, das Instrument fixirt und die Theilung abgelesen. Der Aequatorealkreis giebt offenbar einen Bogen an, welcher zu der geraden Aufsteigung des Zeniths entweder zugezählt oder von derselben abgezogen werden mufs, um die gerade Aufsteigung des Gestirns zu erhalten, die Theilung des Kreises *gk* aber unmittelbar die Abweichung des Gestirns, woher der Kreis *gk* am A. der **Abweichungskreis** genannt wird.

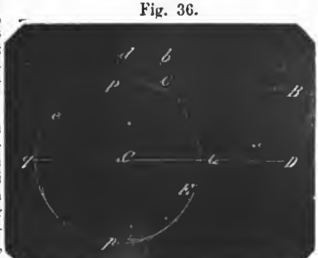
Aequatoreal - Horizontalparallaxe (in der nautischen Astronomie). Horizontalparallaxe ist der kleine Winkel, den ein im Horizont stehendes Gestirn, also bei dessen Auf- oder Untergang mit dem Beobachtungsort und dem Mittelpunkt der Erde bildet. Bezeichnet man die Entfernung des Gestirns von der Erde mit l, den Halbmesser der Erde mit r, den Winkel mit φ, so ist $tg\ \varphi = \frac{r}{l}$.

Unter A. versteht man nun die Horizontalparallaxe, wenn der Beobachtungsort im Aequator liegt, oder für jeden anderen Ort der Erdoberfläche, wenn man die Abplattung der Erde für Bestimmung des Winkels aufser Acht läfst und den Halbmesser der Erde auch dort gleich dem in der Aequator-Ebene setzt.

Berechnet man aber für einen aufserhalb des Aequators liegenden Ort dessen kleinere Entfernung r' vom Erdmittelpunkt aus der Abplattung der Pole $= \frac{1}{300}$ im Mittel, und der bekannten geographischen Breite des Orts und sucht φ aus $tg\ \varphi = \frac{r'}{l}$, so ist dieser $\angle\ \varphi$ die **Local - Horizontalparallaxe.**

Aequatorhöhe eines Orts der Erde. Ist die Höhe, in welcher der unendlich weit verlängert gedachte Erd-Aequator, also der Himmels-Aeq., wenn er sichtbar wäre, gesehen werden würde: also der $\angle\ BOD$, den der Horizont OD des Orts O mit der Richtung des Aeq. qQ, oder mit $OB \nparallel qQ$ bildet. Denn ein in CD unendlich weit gelegener Punkt wird von O aus in der Linie $OB \nparallel CD$ gesehen. Man hat das Maafs des $\angle\ BOD$ in einem Bogen des durch O genommenen Meridians, wenn man durch den Mittelpunkt C der Erdkugel die Linie CE dem

Fig. 36.



Horizont $OD \nparallel$ zieht. Die A. von O ist mithin = Bogen EQ. Die A. ergänzt die geographische Breite des Orts O (Bogen OQ), sowie die Polhöhe desselben Orts ($= \angle\ dOb$ = Bogen eP) zu 90°. Die Erdpole P, p haben keine A., weil ihre Horizonte mit dem Aeq. $\nparallel$ laufen, also mit diesem den $\angle$ = Null bilden. Im Aeq. selbst ist die A. = 90°. Berlin (alte Stern-

warte) hat 52° 31' 13" nördl. Breite, mithin die A. = 90° − 52° 31' 13" = 37° 28' 47". Ein in der Aequator-Ebene befindliches Gestirn würde also unter diesem ∠ mit dem Horizont von Berlin culminiren.

Aequilateral, gleichseitig, heifst:

1. Eine Figur. wenn alle ihre Seiten gleich lang sind.

2. Eine Hyperbel, wenn ihre conjugirten Axen gleich lang sind: Es sei *C* der Mittelpunkt der Hyperbeln zweier entgegengesetzten Kegelschnitte, deren Scheitel *S* und *S'* sind. so ist *SS'* die Haupt-Axe der Hyperbeln. Sind nun *AA* und *A'A'* deren Asymptoten, so sind die gleich grofsen Normalen *BB* und *B'B'* auf *SS'* deren Nebenaxen; sind *SS'* und *BB* einander gleich, so heifsen die Hyperbeln gleichseitig.

Fig. 37.



Aequilibrium, Gleichgewicht von Kräften, ist vorhanden, wenn sich ihre Wirkungen einander aufheben, wenn also dadurch, dafs sie auf einander wirken, dennoch ihr Zustand in Absicht auf Ruhe oder Bewegung nicht geändert wird. Man hat daher Gleichgewicht während der Ruhe, wenn das System der Kräfte, statt in Folge deren gegenseitigen Einwirkung auf einander sich zu bewegen, in Ruhe verbleibt. und Glgw. während der Bewegung, wenn das System der Kräfte in ihrer ursprünglichen Bewegung weder nach Richtung, noch nach Geschwindigkeit geändert wird.

Aequinoctialkreis s. v. w. Aequator.

Aequinoctialpunkte. Die beiden Punkte, in welchen der Aequator von der Ekliptik geschnitten wird. (Vergl. Aequator und Aeq. der Erde.) Beide Punkte theilen den Aequator wie die Ekliptik in zwei gleiche Theile.

Aequinoctialuhr. Ist als Sonnenuhr und unter den Sonnenuhren die einfachste Uhr, allein ihr Gebrauch hat manches Unbequeme. Die Stundenradien auf dem Zifferblatt um den Zeiger haben nämlich alle einerlei Bogenabstand von einander, und wie bei der Taschenuhr in 12, so wird die Kreisscheibe der A. in 24 gleiche Theile getheilt, welche die Stundenlinien geben; dann mufs aber das Zifferblatt in eine mit dem Aequator parallele Ebene gebracht werden, so dafs der senkrecht darauf befestigte Zeiger, ein schwacher Cylinder, ⫲ der Weltaxe steht, und der Schatten des Zeigers giebt die Tageszeit in der richtigen Stunde (wahre Sonnenzeit, nicht mittlere) an. Die Richtigkeit der gleichen Theilung, welche übrigens allen anderen ungleichen Theilungen senkrechter oder horizontaler oder festgestellt schiefer Sonnenuhrscheiben zu Grunde liegt, beruht darauf, dafs in der Aequator-Ebene die Sonne auf senkrechte Gegenstände wirklich Schatten wirft, die in gleichen Zeiten gleiche Winkel-Abstände von einander haben, weil der Aequator fortwährend ⫲ mit sich selbst verbleibt.

An den Tagen der Aequinoctien, den 21. März und 22. September, steht die Sonne im Aequator selbst, mithin wird das Zifferblatt nicht beschienen, und der Schatten des Zeigers ist nicht sichtbar; im Frühling und Sommer steht die Sonne nördlich, im Herbst und Winter südlich vom Aequator, in der ersteren Jahreshälfte wird also die eine Seite, in der zweiten die andere Seite der Zifferblattscheibe beschienen, beide Seiten sind daher einzutheilen und der Zeiger mufs auf beiden Seiten hervorragen.

Zum Aufstellen, wie eine Sonnenuhr mit z. B. senkrechter Scheibe, ist die A. also nicht tauglich, man hatte sie als Taschenuhr in Form eines Rädchens mit dünnen Speichen und breiterem Kranz, auf dessen innerer Fläche die Theilung fortgesetzt war, so dafs ein Theil des Zeigerschattens auf der Innenfläche die Stunden angab, die Sonne mochte nördlich oder südlich vom Aequator stehen; an einem Häkchen mit Bügel frei hangend, setzte sich die Radscheibe in die Aequator-Ebene, indem zugleich ein kleiner Compafs die Richtung des Meridians angab. Solch eine Uhr mufste also für einen Ort von anderer geogr. Breite anders aufgehängt werden, um richtig zu sein.

Aequinoctium. Die Zeit der Tag- und Nachtgleiche auf allen Punkten der Erde. (Vergl. Aequator der Erde.)

Aequivalent (Chemie), ein Begriff als Erfolg des durch unzählige Versuche bestätigten Gesetzes: „Wenn 2 Stoffe *A*, *B*, jeder einzeln mit einem dritten Stoff *C* sich so verbinden, dafs zu einer constanten Gewichtsmenge von *C*, *m* Gewichtstheile von *A* oder *n* Gewichtstheile von *B* treten, und jeder der beiden Stoffe *A* und *B* kann sich auch mit den Stoffen *D*, *E*, *F* . . . . verbinden, so geschehen die Verbindungen von *A* und *B* mit einer constanten Gewichtsmenge eines jeden dieser Stoffe in demselben Gewichtsverhältnifs *m* : *n*."

So z. B. verbinden sich mit

100 Th. Sauerstoff 488,857 Th. Kalium
oder auch 290,897 Th. Natrium.

Wenn man nun durch Versuch gefunden hat, daſs mit 80 Th. Schwefel 194,81 Th. Kalium sich verbinden, so hat man die Menge des Natriums, die sich mit 80 Th. Schwefel verbinden, nicht mehr nöthig, durch einen Versuch zu bestimmen, weil die Verbindung des Kaliums und des Natriums mit einer gleichen Menge Schwefel in dem Verhältniſs 488,857 : 290,897 geschieht, und man findet die Menge Natrium aus der Proportion:

$$488{,}857 : 290{,}897 = 194{,}81 : x$$

woraus $x = 115{,}92$ Th. Natrium für 80 Th. Schwefel.

Hat man eine Verbindung von 100 Sauerstoff + 290,897 Th. Natrium = 390,897 Th. Natron, und will das Natrium daraus durch Kalium ausscheiden, so hat man 488,857 Kalium dazu nöthig, es entsteht aus dem chemischen Proceſs 588,857 Kali; 290,897 Natrium werden ausgeschieden. Die angegebenen Mengen Kalium und Natrium vertreten sich also einander und man nennt daher beide gegenseitig Aequivalente, sowie 194,81 Kalium und 115,92 Natrium in obiger Verbindung mit Schwefel einander vertreten und gegenseitig Aequivalente sind.

Die Experimentalchemie wird also zum Theil durch eine rechnende Chemie ersetzt.

2. Hält man die obigen Angaben zusammen, nämlich 488,857 Theile Kalium verbinden sich mit 100 Th. Sauerstoff zu Kali; 194,81 Th. Kalium mit 80 Th. Schwefel zu Schwefel-Kalium, so kann man fragen, in welchem Verhältniſs Sauerstoff und Schwefel für beide Verbindungen mit Kalium zu Kali und Schwefel-Kalium sich gegenseitig ersetzen; man findet dies aus der Proportion:

$$194{,}81 : 488{,}857 = 80 : x$$

woraus $x = 200{,}75$ Th. Schwefel für 100 Th. Sauerstoff.

So wie nun die Zahlen

488,857 für Kalium
290,897 „ Natrium
100,000 „ Sauerstoff
200,75 „ Schwefel

zusammen gehören, so kann man für alle übrigen einfachen Stoffe Zahlen ermitteln, die sich den obigen anschlieſsen, indem man 100 Gewichtstheile als Aequivalent des Sauerstoffs zu Grunde legt.

Diese letzte Zahl ist nämlich auf Berzelius Vorschlag von den meisten Chemikern als Norm angenommen. Einige Chemiker nehmen den Wasserstoff und das Aequivalent desselben = 1 zur Norm, wonach dann der Sauerstoff das Aequivalent = 8 erhält.

Da das Gewicht eines zusammengesetzten Körpers = der Summe der Gewichte seiner Bestandtheile ist, so ist dessen Aequivalent auch = der Summe der Aequivalente seiner Bestandtheile.

Das Aequivalent des Kaliums ist 488,857
„ „ „ Sauerst. „ 100,000
das Aequivalent des Kali = 588,857

denn diese Gewichtsmenge des Kali ist erforderlich, damit das Kalium oder der Sauerstoff in ihm durch irgend einen dritten Körper und zwar mit der Gewichtsmenge, die dessen Aequivalent ausdrückt, abgeschieden werde.

3. Ein zweites äuſserst wichtiges Gesetz ist: Wenn zwei Stoffe, *A* und *B*, in verschiedenen Gewichtsverhältnissen zu mehreren verschiedenartigen Verbindungen sich vermischen, so gehören zu einer gleich bleibenden Menge des einen Stoffs *A* nur solche Mengen des Stoffs *B*, die in einfachem Verhältniſs mit einander stehen. Die Verbindungen nämlich sind $A+B$, $A+1\tfrac{1}{2}B$, $A+2B$, $A+2\tfrac{1}{2}B$ u. s. w., die Mengen von *B* in den höheren Verbindungsstufen sind vielfache der Menge *B* in der niedrigsten Verbindungsstufe. Es heiſst dies Gesetz daher das Gesetz der multiplen Proportionen.

So z. B. verbinden sich 200,75 Schwefel mit 100 Sauerstoff zu unterschwefliger Säure
„ 200 „ „ schwefliger Säure
„ 250 „ „ Unterschwefelsäure
„ 300 „ „ Schwefelsäure.

Hiernach wäre die erste Verbindung
1 Aeq. Schwef. + 1 Aeq. Sauerstoff
die zweite 1 „ „ + 2 „ „
„ dritte 1 „ „ + 2½ „ „
„ vierte 1 „ „ + 3 „ „

4. Die Entdeckung dieses Gesetzes, welches auch auf die Verbindungen zusammengesetzter Stoffe sich ausdehnt, verbunden mit dem erstgedachten Gesetz, war die Veranlassung der Entscheidung eines schon uralten Streits der Naturphilosophen, ob die Materie bis ins Unendliche theilbar sei oder nicht, und zwar dahin, daſs die Theilbarkeit eine Grenze habe; die kleinsten untheilbar gedachten Theilchen jedes Stoffes werden dessen Atome genannt, und da die (relativen) Gewichte der Aequivalente für jede absolute Gewichts- oder Volum-Menge der Stoffe gilt, so gelten sie auch für die Atome der Stoffe; diese haben also mit den Aequivalenten desselben Stoffs einerlei Gewichtsverhältniſs, die Aeq.

selbst können als die Atome gedacht werden, und man kann von den ebengedachten 4 Verbindungen statt Aeq. den Begriff Atom setzen mit Ausnahme bei der dritten Verbindung (1 : 2½), weil halbe Atome nicht existiren, und man mufs für diese Verbindung sagen: 2 Atome Schwefel verbinden sich mit 5 Atomen Sauerstoff zu Unterschwefelsäure.

Bei der gedachten ersten Verbiudung, 1 Aeq. Schwefel + 1 Aeq. Sauerstoff, ist das eine Aeq. Schwefel = einem Atom gesetzt; es giebt aber Gründe, nach welchen die Naturforscher auch bei Verbindungen von 1 : 1 das eine oder das andere Aeq. = zweien Atomen setzen. So z. B. verbinden sich 12,88 Wasserstoff mit 100 Sauerstoff zu Wasser, es sollte also das Gewicht des Wasserstoff-Atoms zu dem des Sauerstoff-Atoms = 12,88 : 100 sein, und gleichwohl setzt man das Atomgewicht des Wasserstoffs auf die Hälfte = 6,44. Die Naturforscher nämlich nehmen an, dafs die Atome der permanenten Gase einerlei Volum haben, dafs mithin die specifischen Gewichte der Gase zugleich das Verhältnifs deren Atomgewichte ausdrücken; da nun aber das spec. Gew. des Wasserstoffs zu dem des Sauerstoffs = 6,44 : 100 ist, so wird festgestellt, dafs 1 Aeq. Wasserstoff = 2 Atomen Wasserstoff ist.

Diese Schlüsse auch auf die nicht permanenten Gase ausgedehnt, wiewohl nachgewiesen ist, dafs die Annahme des gleichen Volums der Atome nur für permanente Gase Geltung haben kann, und noch mehrere indirecte Schlüsse haben für viele einfachen Stoffe das Aeq. = zweien Atomen gesetzt. Die folgende Tabelle, gröfstentheils aus Schubarth's technischer Chemie entnommen, giebt bei solchen Stoffen 2 Zahlen, die erste einfache Zahl ist das Atomgewicht, die zweite doppelte Zahl das Aeq. desselben Stoffs.

Tabelle

der Atomgewichte und Aequivalente der einfachen Grundstoffe.

Alumium	171,167	Brom	499,810
	342,334		999,620
Antimon	806,452	Cererium	572,8
	1612,904	Chlor	221,64
Arsenik	470,042		443,28
	940,084	Chrom	328,39
Barytium	856,880		656,78
Beryllium	87,124	Didym	620,0
	174,248	Eisen	350,527
Blei	1294,489		701,054
	2588,978	Fluor	117,717
Bor	136,204		235,434
Gold	1229,415	Rhodium	651,387
	2458,830		1302,774
Jod	792,996	Ruthenium	651,387
	1585,992		1302,774
Jridium	1233,500	Sauerstoff	100,000
Kadmium	696,770	Schwefel	200,75
Kalium	488,857		401,50
Kalcium	251,489	Silber	1349,66
Kiesel	277,312		2699,32
	554,624	Stickstoff	87,53
Kobalt	368,991		175,06
	737,982	Strontium	547,825
Kohlenstoff	75,12		1095,650
	150,24	Tantalum	1536,96
Kupfer	395,695		3073,92
	791,390	Tellurium	801,760
Lanthan	588,10		1603,520
Lithium	80,375	Thorium	744,900
Magnesium	154,49	Titanium	303,662
Mangan	345,890		607,324
	691,780	Uranium	740,512
Molybdän	598,525		1481,024
	1197,050	Vanadium	855,840
Natrium	290,897		1711,680
Nickel	369,765	Wasserstoff	6,44
	739,530		12,88
Osmium	1244,487	Wismuth	1330,377
Palladium	665,90		2660,754
Phosphor	196,143	Wolframium	1183,00
	392,286		2366,00
Platin	1233,50	Yttrium	402,51
	2467,00	Zink	406,591
Quecksilber	1265,823	Zinn	735,294
	2531,646	Zirkonium	420,200
			840,400

Ein Mehreres s. u. Atom.

Aërodynamik. Die Wissenschaft von den Gesetzen, nach welchen luftförmige, elastische (expansibel-flüssige) Körper in Ruhe verbleiben oder sich bewegen, je nachdem Kräfte unter gegebenen Bedingungen auf dieselben einwirken. Sie zerfällt daher in 2 Abtheilungen, in die Wissenschaft, welche lehrt, unter welchen Bedingungen Ruhe verbleibt, die Aërostatik, und die, welche lehrt, unter welchen Bewegung erfolgt, die Aëromechanik, Pneumatik.

Aërodynamische Gesetze.

1. Jeder luftförmige Körper hat Schwere, also Gewicht.

2. Kein luftförmiger Kp. hat eigenthümliche Dichtigkeit, er hat und behält fortdauernd das Bestreben, sich auszudehnen. Dies Bestreben heifst seine Elasticität, Expansivkraft, Spannkraft, Tension.

3. Jeder luftförmige Körper läfst sich durch mechanischen Druck zusammenpressen, geschieht dies, so übt er nach allen Richtungen einen gleich grofsen Gegendruck aus.

4. Luft in verschlossenem Gefäfs durch einen Druck P auf eine bewegliche Fläche von A □ Einheiten (□Fufs, □Zoll), also auf jede Flächen-Einheit mit dem Druck $\frac{P}{A}$ zusammengeprefst, übt auf jede Flächen-Einheit aller Gefäfswandungen einen Gegendruck aus $= \frac{P}{A}$

5. Die Spannkraft der Luft ad 4 ist mit deren dabei vermindertem Volumen in umgekehrtem Verhältnifs. Beträgt bei dem Druck $\frac{P}{A} = p$ das Volumen der Luftmenge $= v$, so ist bei einem Druck p' das Volumen $v' = \frac{p}{p'} \cdot v$ (Mariottesches Gesetz).

6. Jeder luftförmige Körper erleidet gleich grofse Einwirkung von der Wärme, und da er keine Cohäsionskraft besitzt, in gleichem Verhältnifs mit den Temperatur-Unterschieden. Luft von 0° C habe das Volumen $= 1$, so hat sie, der Erfahrung gemäfs, bei 100° C das Vol. $= 1 + 0{,}3666$; also bei 1° C das V. $= 1{,}003666$ und bei 1000° C das Vol. $1 + 3{,}666 = 4{,}666$.

Eingeschlossene Luft erhält also in Folge solches Ausdehnungsvermögens eine in gleichem Maafse veränderte Spannkraft: Es sei die Spannkraft eingeschlossener Luft bei 0° $C = p$, so ist dieselbe bei 100° $C = 1{,}3666 \times p$.

Das Gesetz ad 2 ist nicht erwiesen, eben so wenig, dafs (ad 6) ein luftförmiger Körper keine Cohäsion habe. Das Ausdehnungsbestreben beweis't sich nur bei der Luft, den Gasen und Dämpfen von derjenigen Dichtigkeit, wie sie uns bekannt sein können. Hätte die atmosphärische Luft z. B. keine specifische Dichtigkeit, sondern ein unbegrenztes Ausdehnungsbestreben, so würde die Atmosphäre der Erde bis in's Unendliche sich ausdehnen müssen; sie ist aber jedenfalls begrenzt, und die letzte Schicht der Erd-Atmosphäre hat dann die spec. Dichtigkeit der atmospärischen Luft. Luft von dieser Dichtigkeit hat denn also auch Cohäsion der Art, dafs eine, wenn auch nur geringe Kraft dazu gehört, um sie noch weiter auszudehnen.

Die unter der obersten Schicht befindliche zweite Schicht würde die natürliche Dichtigkeit der obersten haben, sie wird aber von dieser belastet, und erleidet nach dem Gesetz 2 eine dieser Belastung entsprechende Verdichtung, die dritte Schicht eine gröfsere Verdichtung durch die beiden obersten u. s. w., so dafs die der Erdrinde zunächst befindliche Luftschicht die dichteste aller über der Erdoberfläche befindlichen Luftschichten ist, und die nach dem Innern der Erde zu an Dichtigkeit immer zunehmen.

Aëromechanik s. u. Aerodynamik.

Aërometrie s. v. w. Aerodynamik.

Aërostatik. Ist die Lehre von dem Gleichgewicht der luftförmigen Körper (Luft, Gas, Dampf), unter sich und mit festen und flüssigen Körpern. (Vergl. Aërodynamik.)

Luftarten sind im Gleichgewicht, wenn jedes Theilchen derselben von allen Seiten einerlei Druck erhält; dies findet im Gleichgewicht während der Ruhe und während der Bewegung statt.

Erhält Luft von einer Seite einen gröfseren Druck, so wird die dem Druck zunächst ausgesetzte Luftschicht vermöge ihrer Elasticität comprimirt. Diese Compression verursacht wieder einen Druck auf die zunächst folgende Luftschicht, und diese Fortpflanzung der Wirkung von Schicht zu Schicht geschieht so lange, bis Gleichgewicht hergestellt, bis also einerlei Dichtigkeit aller Luftschichten hergestellt ist; können die Luftschichten ausweichen, so geschieht Bewegung.

Ein fester oder flüssiger Körper innerhalb in Gleichgewicht befindlicher Luft wird von allen Seiten gleich stark von derselben gedrückt; jeder Punkt seiner Oberfläche hat einen in gerader Linie durch den Schwerpunkt ihm gegenüber liegenden Punkt, der den gleichen entgegengesetzt gerichteten Druck empfängt, und somit heben sich alle Druckwirkungen der Luft auf den Körper einander auf, woher wir auch, in ruhender atmosphärischer Luft befindlich, keinen Druck derselben wahrnehmen. Körper, die in ruhender Luft sich bewegen, erfahren denselben Druck, als wenn sie ruheten, und die Luft bewegte sich mit derselben Geschwindigkeit ihnen entgegen.

Den eben betrachteten nicht wahrnehmbaren Druck einer Luft mifst man durch Säulen von Flüssigkeiten, deren Gewichte bekannt sind, als destillirtes Wasser, Quecksilber, absoluter oder bestimmt-gradiger Weingeist nach der Höhe dieser Säulen.

Eine oben und unten offene Glasröhre in Flüssigkeit getaucht, nimmt dieselbe bis zum Spiegel in sich auf, weil auf den Spiegel innerhalb und aufserhalb der Röhre der Luftdruck gleich ist; schliefst man auf einer Seite die Röhre, füllt dieselbe mit derselben Flüssigkeit, verschliefst sie, taucht das offene Ende ein, nimmt den Verschlufs fort, so fällt in der Röhre die Flüssigkeit nur bis auf einen Punkt, dafs das Gewicht der im Rohr verbleibenden Flüssigkeit dem Druck der Luft gegen

dieselbe das Gleichgewicht hält. So findet man, dafs die Atmosphäre auf die Erdoberfläche in der Höhe des Meeresspiegels einen Druck ausübt gleich dem Druck einer 32 Fufs hohen Wassermasse, einer 28 pariser Zoll hohen Quecksilbermasse, d. i. auf jeden preufs. □Zoll Grundfläche etwa 15 Pfund.

Hierauf gründet sich die Theorie und Construction des Barometers zur Messung des Drucks der atm. Luft; die der Manometer zur Wahrnehmung der Spannung von Dämpfen in Dampfkesseln.

Daher kommt es, dafs in einem hermetisch dichten Rohre das Wasser höchstens 32 Fufs hoch aufsteigen kann.

Unser Brunnen (Pumpe, Plumpe) ist ein aërostatischer Apparat (die Saugpumpe gehört nicht in die Hydrostatik, sondern in die A.): der an die Wandungen des Brunnenrohrs möglichst dicht anschliefsende Kolben wird auf mehrere Zoll tief hinabgesenkt, die leichte Ventilklappe öffnet sich, das unterhalb befindliche Wasser tritt über den Kolben; vom tiefsten Stande wieder in die Höhe gezogen, schliefst sich das Ventil, das Wasser wird mit aufgezogen, und fliefst aus der Tülle heraus. Während dieser Bewegung des Kolbens von unten nach oben entsteht in jedem Zeit-Augenblick die Absicht zu Bildung eines leeren Raums zwischen dem Kolben und dem im Rohr darunter befindlichen Wasser, aber der Druck der Luft auf den im Brunnenkessel befindlichen Wasserspiegel läfst es nicht dazu kommen, er treibt das Wasser in die Höhe, dem Kolben nach.

Die Feuerspritze ist eine hydrostatische Maschine (Druckpumpe), aber der Windkessel ein aërostatischer Apparat an derselben. Denn das in den Windkessel gepumpte Wasser steigt in die Höhe und verdichtet die atm. Luft in demselben so weit, dafs deren Druck der Strahlhöhe entspricht und den Strahl ununterbrochen entsendet.

Ein Luftball (auch Aërostat genannt) steigt mit seiner Belastung, wenn sein summarisches Gewicht geringer ist als die Differenz zwischen dem Gewicht der von dem Ball verdrängten atm. Luft und dem Gewicht der in dem Ball befindlichen leichteren Luft; und er steigt bis zu der Höhe, in welcher die atmosphärische Luft so viel dünner ist, dafs sein summarisches Gewicht jener Differenz gleich, wo also Gleichgewicht ist und der Ballon im schwimmenden Zustande sich befindet.

Aether. Bezeichnete schon bei den Griechen (αἰθήρ) eine dünne Luft, welche in den höheren Regionen die Erde umgiebt, und gilt noch bis heut bei vielen Naturforschern als eine äufserst feine Flüssigkeit, welche das ganze Weltall ausfüllt, während andre Naturforscher eine solche als nicht vorhanden behaupten.

Wenngleich nun der Gedanke: unermefsliche, ganz leere Räume, etwas dem Gefühl Widerstrebendes hat, so haben andererseits die gröfsten Männer, so Newton, Euler, Laplace, nachgewiesen, dafs die Planeten bei ihren Bewegungen um die Sonne, so lange wenigstens als es eine Astronomie giebt, keinen Widerstand erfahren haben, der aber doch statt haben müfste, wenn diese Weltkörper fortdauernd innerhalb eines stoffhaltigen Fluidums sich bewegten.

Denn wenn auch dem wieder entgegnet wird, dafs der Aether in Verhältnifs zu der Dichtigkeit der Weltkörper zu fein sei, als dafs ein störender Einflufs von ihm auf diese möglich werde, so kann ich mich von dem Gedanken nicht los machen, dafs nach Jahrtausenden der Einflufs doch wahrnehmbar werden mufste, und wenn nicht, dafs doch der Keim oder das Princip zu solchen Aenderungen gegeben wäre.

Hierzu kommt, dafs, wenn wirklicher Stoff von Weltkörpern durchlaufen wird, die Anziehung, welche auf jeden Elementartheil mit grofser Geschwindigkeit wirksam wäre, eine in irgend einer Zeit wahrnehmbare Vergröfserung jedes einzelnen Weltkörpers hervorbringen würde.

Wiewohl allen uralten Schöpfungsgeschichten ohne Ausnahme viel Dichterisches anlebt, so lehrt doch die Natur unseres Erdballs, dafs die Welt von Anfang nicht so war, wie sie jetzt ist, dafs Entwickelungsperioden statt hatten, und dafs man auf einen Schöpfungstag unseres Sonnensystems zurücksehen kann. Raum dazu war vorhanden: Aber das Material dazu? Nun, das mufs doch auch dagewesen sein, und da es als Welt nicht vorhanden war, so mufs es in Theilchen, in Keimchen, in Molekülen, in Atomen von Weltkörpern vorhanden gewesen sein, die in dem Raumtheil, welchen unser Sonnensystem jetzt einnimmt, von keinen Weltkörpern durchschnitten, also ungestört gleichgültig neben einander befindlich schwebten. Auf das Wort des Schöpfers: es Werde! zogen sich diese Elemente in dem Mittelpunkt des Raumtheils zusammen, verdichteten sich durch Selbstbelastung zu Dunst, zu Gas, welches bei Betrachtung des Mineralreichs unserer Erde nur glühend sein konnte (Gott schuf das Licht); durch überwiegende Centrifugalkraft bei einer jedenfalls mit der Anhäufung der Massen in oft excentrischer

Richtung hervorgebrachten Axendrehung wurden als Gase die Planeten ausgeworfen, diese im kalten Weltenraume abgekühlt, flüssig und fest. — Mir scheint der Gedanke, dafs unser Sonnensystem in absolut leerem Raume sich bewege, recht gut verträglich mit der grofsen schönen Schöpfung, und wenn damals von der Sonne auch Gase ausgeworfen wurden, die ihrer Beschaffenheit nach sich nicht zu Aërolithen verdichten konnten, so werden diese Kometen wohl ihren Weg, von wo aus sie gekommen sind, mit der Zeit wieder zurück finden, ohne gerade mit Enke einen sie in ihrer Bahn hindernden Aether annehmen zu müssen.

Aeufsere Glieder einer Proportion sind das erste (Anfangsglied) und das letzte Glied (Endglied).

In den Proportionen

$$a - b : c - d$$

$$A : B = C : D$$

sind a, d und A, D die äufseren Glieder, wogegen b, c und B, C innere Glieder genannt werden.

Aeufsere Polygonwinkel. Die ∠, welche durch Verlängerung der Seiten des Polygons mit den neben liegenden Seiten ge-

Fig. 38.



bildet werden. Werden sämmtliche Seiten eines P. nach einerlei Ordnung verlängert, so sind sämmtliche äufsere $\angle = 4R$. Hat das Vieleck convexe ∠, so werden deren äufsere ∠, welche innerhalb des P. fallen, negativ genommen. Z. B.

$$\alpha + \beta + \gamma - \delta + \varepsilon + \eta = 4R\angle.$$

Aeufsere Wechselwinkel s. u. Aeufsere Winkel.

Aeufsere Winkel. 1. 2 gerade Linien von einer dritten geschnitten, bilden 8 Winkel; die aufserhalb der beiden geschnittenen Linien: α, β, γ, δ, heifsen äufsere ∠, die innerhalb derselben liegenden, ε, η, ϑ, $\varkappa$, innere ∠. Die ∠ α und δ, wie β und γ, welche paarweise auf entgegengesetzten Seiten der schneidenden Linie liegen: äufsere Wechselwinkel.

Fig. 39.



2. S. v. w. Aufsenwinkel beim Dreieck. Wird eine Seite AB eines Drei-

Fig. 40.



ecks ABC verlängert, so heifst der dadurch entstandene ∠ CBD gewöhnlich Aufsenwinkel; dieser ist so grofs, als die beiden inneren ihm gegenüber liegenden ∠ A und C zusammengenommen.

Affinität, chemische Verwandtschaft. Ist diejenige Anziehungskraft, welche die Atome (s. Aequivalent, um dessentwillen auch dieser Art. hierher gehört) zweier verschiedener Körper so an einander verbindet, dafs aus beiden ein dritter entsteht, welcher von beiden ursprünglichen Körpern wesentlich verschieden ist. Die A. ist also für verschiedene Stoffe das, was die Cohäsion für jeden einzelnen derselben ist, die deren gleichartige Atome mit einander verbindet, und hat die A. beide Körper durch gleichmäfsige Vermengung deren Atome zu dem dritten umgewandelt, so tritt auch für diesen die Cohäsion ein und bewirkt die gegenseitige Anziehung dessen nun zusammengesetzten Atome.

Die Cohäsion zweier verschiedener Körper widersetzt sich demnach der A. und sie mufs deshalb vermindert werden. Die Natur thut dies durch mechanische Einwirkungen von selbst, wie z. B. bei der Bildung des Rostes am Eisen in feuchter Luft und durch Thau und Regen, indem Wassertheilchen in die auf der Oberfläche des Eisens befindlichen Poren eindringen, sich in Sauerstoff und Wasserstoff entmischen, wo nun die Atome des ersteren mit einigen Atomen des Eisens zu Eisenoxydhydrat werden. Einige feste Körper haben eine so starke Verwandtschaft zu einander, dafs sie schon in Pulverform, mit einander gemengt, wobei jedes Theilchen noch aus vielen Tausenden von Atomen besteht, sich chemisch verbinden, wie z. B. trockener Salmiak und trockener Kalk zu Ammoniak. Andere feste Stoffe

müssen flüssig gemacht, also entweder aufgelös't (Verbindungen auf nassem Wege) oder geschmolzen werden (Verbindungen auf trockenem Wege); noch andere verbinden sich nur in gasförmigem Zustande, bei welchem die Atome am weitesten aus einander liegen, und auch Gase verbinden sich erst in Glühhitze, wie Wasserstoff und Sauerstoff zu Wasserdampf, welcher zu tropfbarem Wasser abkühlt.

Verschiedene Körper haben entweder nur einerlei Verwandtschaft zu einander, wie Kohlenstoff mit Stickstoff sich nur zu dem Cyangas, und zwar in 2 Atomen Kohlenstoff mit 2 Atomen Stickstoff zu 1 Atom Cyangas verbinden; oder sie haben mehrere Verwandtschaftsgrade, wie die Verbindungen der Metalle mit Sauerstoff und mit Schwefel. So verbindet sich

1	At.	Mangan mit	1	At.	Sauerstoff zu Manganoxydul.
2	„	„ „	3	„	Sauerstoff zu Manganoxyd.
1	„	„ „	2	„	S. zu Mangansuperoxyd.
1	„	„ „	3	„	S. zu Mangansäure.
2	„	„ „	7	„	S. zu Uebermangansäure.

Die Ordnungen der Oxydation steigen mit der Menge Atome des Sauerstoffs, es ist demnach das Manganoxydul die niedrigste, die Uebermangansäure die höchste Oxydationsstufe. Bei den im Art. Aequivalent aufgeführten Schwefelungsstufen ist die unterschweflige Säure die niedrigste, die Schwefelsäure die höchste Schwefelungsstufe.

Endlich giebt es Stoffe, die sich in allen Verhältnissen mit einander verbinden, wie z. B. Salpetersäure mit Wasser. Solche Verbindungen gehören zu den schwächsten Verwandtschaftsgraden, und sind eben so leicht, in der Regel durch bloſses Abdampfen, wieder zu trennen.

Wenn zu einer Verbindung $A+B$ zweier Körper A und B ein dritter C hinzutritt, und A hat zu C gröſsere Verwandtschaft als zu B, so verläſst A den Stoff B, verbindet sich mit C zu $A+C$ und B wird ausgeschieden. $A+C$ heiſst das Product, B das Educt; man sagt auch, $A+B$ werde durch C zersetzt, und das Verhalten und den Vorgang zwischen A, B und C nennt man Wahlverwandtschaft. Z. B. Wird Kupferoxyd mit Wasserstoff in Berührung gebracht, so entsteht metallisches Kupfer und Wasser, denn Kupferoxyd besteht aus 2 Atomen Kupfer und 1 Atom Sauerstoff, dieser hat aber zum Wasserstoff gröſsere A., verläſst das Kupfer und verbindet sich in jedem einzelnen Atom mit 2 Atomen Wasserstoff zu Wasser.

Schwefelblei mit Chlor in Verbindung gebracht, giebt Chlorblei und Schwefel; ist nun mehr Chlor vorhanden, als das Blei aufnehmen kann, so geht der Ueberschuſs von Chlor noch die schwächere Verbindung mit Schwefel zu Chlorschwefel ein.

Wenn zwei Verbindungen $A+B$ und $C+D$ zusammentreffen, A und D haben aber gröſsere Verwandtschaft, sowohl wie A und B als wie C und D, so entsteht $A+D$ und $B+C$. Man nennt dies Doppelzersetzung und das Verhalten und den Vorgang zwischen den 4 Stoffen doppelte Wahlverwandtschaft. A sei Salpetersäure, B Baryt, also $A+B=$ salpetersaurer Baryt; C sei Schwefelsäure, D Natron, $C+D$ also schwefelsaures Natron, so entsteht schwefelsaurer Baryt $(C+D)$ und salpetersaures Natron $(A+D)$.

Wenn zu einem in der Verbindung $A+B$ befindlichen Stoff A ein dritter Stoff C gleiche oder geringere Verwandtschaft hat, wie B zu A, so ist C auf die Zersetzung von $A+B$ unwirksam; wird aber ein vierter Stoff D hinzugeführt, der eine stärkere Verwandtschaft zu der Verbindung $A+C$ hat als B zu A, so veranlaſst D die Verbindung von $A+C$ mit Ausscheidung von B, um mit $A+C$ zu $A+C+D$ sich verbinden zu können. Man nennt dies Verhalten und den Vorgang zwischen den 4 Stoffen: Vermittelnde oder praedisponirende Verwandtschaft. Es sei A Sauerstoff, B Kohlenstoff, also $A+B$ Kohlensäure, C Phosphor; da nun zum Sauerstoff der Kohlenstoff stärker verwandt ist als der Phosphor, so geschieht durch ihn keine Zersetzung. Bringt man aber eine Base, z. B. Kali hinzu, so hat diese zur Phosphorsäure stärkere Verwandtschaft als zur Kohlensäure, vermittelt daher die Verbindung von Phosphor mit Sauerstoff unter Abscheidung von Kohlenstoff zu Phosphorsäure, um sich mit dieser zu phosphorsaurem Kali zu verbinden.

Inwiefern die A. zweier Körper als die Wirkung der elektrischen Polarität deren Atome, indem der eine Körper positiv, der andere negativ elektrisch erscheint, betrachtet werden kann, wird vorbehalten.

Affirmativ, positiv ist jede Gröſse, wenn sie ohne Beziehung zu anderen ihr gleichartigen Gröſsen gegeben wird. Eben so sind mehrere gleichartige Gröſsen positiv, wenn sie in gleichartiger Beziehung zu einander genommen werden, und deren Positivität wird nicht bezeichnet und nicht

ausgesprochen, weil sie sich von selbst versteht.

Solche Gröfsen haben die Eigenschaft, dafs sie um diejenige ihnen gleichartige Quantität, welche ihnen hinzugefügt wird, vermehrt, und um diejenige, welche von ihnen fortgenommen wird, vermindert werden.

Kann aber mit Gröfsen der Begriff einer Richtung, also für Raum oder Zeit, verbunden werden, so giebt es gleichartige Gröfsen, welchen entgegengesetzte Richtungen zukommen, als z. B. der Weg nach rechts und nach links, die Wege vorwärts und rückwärts, die man sich auch für Geld denken kann, welches man entweder giebt oder empfängt. Solche Gröfsen zu einander hinzugefügt, vermindern sich gegenseitig, sie heben sich ganz oder zum Theil auf, und es mufs diese entgegengesetzte Bedeutung beider Gröfsen ausgesprochen und bezeichnet werden, sobald sie mit einander in Beziehung kommen. Die zuerst gegebene ist dann affirmativ oder positiv, die zweite negativ, beide heifsen in dieser Beziehung entgegengesetzte Gröfsen.

Soll die absolute Länge eines Weges angegeben werden und wird der Weg nach einerlei Richtung gemacht, so wird an die Positivität des Weges nicht gedacht, kommt aber ein rückwärts gemachter Weg in Rechnung, dann ist der Weg vorwärts positiv (+) und der Weg rückwärts negativ (−). Wird nach einem Vermögen gefragt, so kommen bei dem Zusammenzählen der einzelnen Posten etwaige Schulden als negativ in Rechnung; wird nach einer Schuldenmasse gefragt, so ist diese positiv, vorhandenes baares Geld oder Güter, die in Geldwerth ausgedrückt oder umgeändert werden können, sind negativ.

Ist der Weg vorwärts $= W$, der rückwärts $= w$, so ist der absolute Weg $W + (-w) = W - w$; ist $W = w$, so ist der absolute Weg = Null. Entgegengesetzte Gröfsen von gleichen Quantitäten heben sich also einander auf, sie werden zusammengenommen zu Null.

Afterkegel, uneigentliche Bezeichnung für Konoïd.

Afterkrystalle, Pseudomorphosen sind Krystalle, deren Form den krystallisirten Fossilien eigentlich nicht zukommen. Sie entstehen dadurch, dafs ein Fossil im flüssigen Zustande einen Krystall überzieht und denselben ganz oder theilweise durchdringt, also mechanisch, oder auch durch Chemismus, indem das krystallisirte Fossil entweder durch neu aufgenommene oder durch ausgeschiedene Bestandtheile chemisch geändert wird.

Afterkugel, uneigentliche Bezeichnung für Sphäroïd.

Aggregat. Eine aus mehreren Gliedern bestehende Zahlengröfse. Z. B. $ma + nb - pc$.

Aggregation. Die Addition von Aggregaten, die aus additiven und subtractiven Gliedern bestehen.

Aggregat-Zustand der Körper ist der Cohäsionszustand der einzelnen Theile desselben in 3 Hauptstadien. 1. Der Zustand der Starrheit, der erste A.; Körper dieses Zustandes heifsen feste Körper. 2. Der Zustand der Flüssigkeit, zweiter A.; Körper dieses Zustandes heifsen tropfbar flüssig. 3. Der Zustand der Luftförmigkeit, dritter A.; Körper dieses Zustandes heifsen luftförmig, expansibel flüssig, elastisch flüssig.

Die A. werden sämmtlich durch die Wärme bedingt, indem feste Körper durch Absorption von Wärme zu tropfbar flüssigen und diese durch Absorption von noch mehr Wärme zu elastisch flüssigen Körpern werden. (Eis, Wasser, Dampf.)

Aggregirende Theile einer Zahl sind deren Summanden, wenn man die Zahl als Summe betrachtet. Z. B. 4 und 5 sind die a. Th. der Zahl 9.

Akronyktischer Aufgang (ortus acronyctus) und Untergang (occasus acronyctus) eines Fixsterns gehören zu dem poetischen Auf- und Untergang der Gestirne bei den Alten. Der akr. Aufgang eines Gestirns findet statt, wenn der Stern mit dem Untergang der Sonne zugleich aufgeht; der akr. Untergang, wenn der Stern mit dem Untergang der Sonne zugleich untergeht. (Vergl. Auf- und Untergang, poetischer).

Algebra (arabischer Name, wie schon die Vorsilbe *Al*, der Artikel, anzeigt; wie Alchymie, deutsch die Chemie; Alcadi, der Kadi). Ist der höhere Theil der Arithmetik, die Lehre von der Auflösung der Gleichungen.

Algebraische Gleichung ist ein Ausdruck in Form zweier einander gleichgesetzter Werthe, in welchem eine oder mehrere unbekannte Zahlen mit bekannten auf verschiedene Art verbunden sind. Z. B.

$$1)\ 3x + 1 = 8$$

$$2)\ ax \mp b = c$$

In beiden Gleichungen bedeutet der Buchstabe x eine unbekannte Zahl, und die Auflösung der Gleichungen besteht darin, dafs diese Unbekannte aus den einzelnen Verbindungen (Verwickelungen)

mit den bekannten Zahlen entwickelt und durch diese ausgedrückt wird, welches geschehen ist, wenn die Unbekannte auf einer Seite des Gleichheitszeichens allein steht. Man erhält als Auflösung aus der ersten Gleichung $x = \frac{8 \mp 1}{3}$ d. h. entweder $\frac{7}{3}$ oder 3; aus der zweiten $x = \frac{c \pm b}{a}$

Sind die Bekannten in bestimmten Zahlen gegeben, wie in Gl. 1, so wird die Algebra von Mehreren numerisch genannt, zum Unterschiede von der symbolischen A., bei welcher in den Gleichungen, wie in Gl. 2, die Bekannten durch Buchstaben (allgemeine oder symbolische Zeichen) ausgedrückt werden, indem jeder Buchstab das Symbol einer bestimmten Zahl ist.

Befinden sich mehrere Unbekannte: x, y, z . . . ., in einer Gleichung, wie

$$x + y = a$$

so kann man keine derselben entwickeln; man erhält hier nämlich

$$x = a - y \text{ und } y = a - x$$

Es gehört also noch eine zweite Gleichung zwischen x und y dazu, in welche man den Werth von x in y ausgedrückt, oder den Werth von y in x ausgedrückt setzt, um beide Unbekannten x und y finden zu können.

Es sei diese zweite Gleichung

$$x - y = b$$

Setzt man hierein für x den Werth $a - y$, so erhält man die Gleichung

$$a - y - y = b; \text{ woraus } y = \frac{a-b}{2}$$

Setzt man in die zweite Gleichung für y den Werth $a - x$, so erhält man die Gl.

$$x - (a - x) = b; \text{ woraus } x = \frac{a+b}{2}$$

Hieraus erhellt, dafs eben so viele Gleichungen gegeben sein müssen, als für die Auflösung Unbekannte zu entwickeln sind. Sind weniger Gleichungen gegeben als Unbekannte, so bleiben deren Werthe unbestimmt; die Algebra, welche sich mit diesen beschäftigt, heifst daher unbestimmte, oder nach dem Erfinder deren Auflösung: Diophantische Analysis.

Algebraische Auflösung s. u. algebraische Geometrie.

Algebraische Curve. Eine Curve, deren Natur durch eine algebraische Gleichung zwischen Abscissen und Ordinaten gegeben ist, wie z. B. die Kegelschnittscurven; im Gegensatz von transcendenter Curve, für welche die Gleichung eine transcendente ist, wie z. B. die logarithmische Spirale.

Algebraische Formel. Formel ist der in allgemeinen Zeichen dargestellte Ausdruck, durch welchen erkannt wird, wie eine Gröfse aus anderen Gröfsen zusammengesetzt ist, als die Formel:

$$A = (a + b + c)(a + b - c)$$

für eine Gröfse A.

Algebraisch ist die Formel, wenn sie auf algebraischem Wege gefunden worden ist. Z. B.

Die Gleichung:

$$x^2 \pm ax \pm b = 0$$

giebt die Auflösung:

$$x = \mp \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 \mp b}$$

Diese Formel für x zeigt also den Werth von x in seiner Entwickelung aus den gegebenen bekannten Gröfsen und ist daher eine algebraische F. Da jede unreine quadratische Gleichung auf die Form der obigen Gl. zu bringen ist, so bildet die Formel für x zugleich eine Norm, nach welcher für bestimmt gegebene Fälle die nochmalige Entwickelung erspart werden kann.

Um z. B. die Gl. $x^2 + 6x = 27$ nicht auf algebraischem Wege entwickeln zu müssen, bringt man sie auf die obige Form, und schreibt

$$x^2 + 6x - 27 = 0$$

Mit Hülfe der Formel erhält man nun:

$$x = -\frac{6}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2 + 27}$$

mithin $x = -3 \pm 6$; d. h. $x =$ entweder -9 oder $+3$.

Algebraische Function. Ein algebraischer Ausdruck, durch welchen der Zusammenhang einer veränderlichen Gröfse (z. B. x) mit mehreren andern unveränderlichen Gröfsen (a, b, c . . . .) zu einer zweiten veränderlichen Gröfse gegeben wird. Z. B. in dem Ausdruck

$$ax + bx^2 + cx^3$$

ist jedes einzelne Glied eine Function der Veränderlichen x, und das dreigliedrige Aggregat

$$ax + bx^2 + cx^3 = y$$

bildet eine zweite Function (y) derselben Veränderlichen x.

Algebraisch heifst die F., wenn, wie hier der Zusammenhang durch einfache arithmetische Operationen entstanden, dargestellt wird, im Gegensatz von transcendenter F., bei welcher der Zusammenhang durch logarithmische und trigonometrische Zahlen gegeben ist, wie

$$\sin x + \sin^2 x + \sin^3 x$$
$$\log x + \log (x + a)$$

Die algebraischen F. sind rational wenn die veränderlichen Gröfsen nur mi

ganzen Exponenten vorkommen, wie $ax - bx^2 + cx^3$; irrational, wenn sie auch Bruchpotenzen enthalten, wie

$$a\sqrt{x} + bx + \sqrt{x^3}$$

Die rationalen algebraischen F. heifsen ganz, wenn die Veränderliche mit ganzen positiven Exponenten nicht im Nenner vorkommt, während solche, wo dies der Fall ist, als: $ax + \frac{b}{x} + cx^3$, gebrochen heifsen.

Die irrationalen algebraischen F. sind gesonderte (explicitae) oder ungesonderte (implicitae); bei ersteren ist die Function einer Gröfse mit dieser nirgend verbunden, bei letzteren findet solche Verbindung statt

$y = x + ax^2 + bx^3$ ist eine gesonderte Function
$y^2 = x^2 + axy + bx$ „ „ ungesonderte „

Algebraische Geometrie (rechnende G.) 1. Derjenige Theil der G., in welcher Raumgröfsen durch Rechnung bestimmt werden. Wie die elementare G. nur mit geraden Linien, Kreislinien und mit den aus diesen begrenzten Ebenen sich beschäftigt, so auch die a. G.

Jede gerade Linie wird in ihrer Gröfse durch eine Zahl angegeben, welche ausdrückt, wie viele Längen-Einheiten sie enthält. Die Längen-Einheit ist in verschiedenen Ländern verschieden (Fufs, Ruthe, Klafter, Mètre), ebenso deren Eintheilung in kleinere Längen (Zoll, Linie, Decimètre etc.)

Die Flächen-Einheit ist das Quadrat, dessen Seite die Längen-Einheit ist [Quadratfufs (□'), Quadratruthe (□°), Quadratmètre (□ᵐ)].

2. Der Berechnung der Linien und Flächen dienen die Lehren der Elementar-Geometrie zur Grundlage; der Fundamentalsatz dazu ist: Parallelogramme verhalten sich an Flächen-Inhalt wie die Producte deren Grundlinien und Höhen. Wird nun das zu berechnende # mit der Flächen-Einheit, d. h. mit dem Quadrat von der Grundlinie = 1 und der Höhe = 1 verglichen, und verwandelt man ersteres in das ihm gleiche Rectangel, so kann man die Richtigkeit des Satzes auch figürlich darstellen.

Hat das zu berechnende Rectangel *ABCD*

Fig. 41.



die Grundlinie $AB = a$ (z. B. 4 Fufs), die Höhe h (z. B. 3 Fufs), so entstehen mittelst Parallelen, die durch die Theilpunkte genommen werden, 12 Quadrate, von welchen jedes gleich der Flächen-Einheit ist, und die Gröfse des Rectangels beträgt $4' \times 3' = 12$ □Fufs.

3. Enthält die Länge oder die Höhe des Rectangels Bruchtheile der Längen-

Fig. 42.



Einheit, ist z. B. bei der Grundlinie $= 4'$ die Höhe $h = 3'\,5''$, so hat man $a \times b = 4' \times 3'\,5'' = 4' \times 3' + 4' \times 5''$.

$4' \times 3' = 12$ □' sind die 12 Quadrate zwischen *CD* und *EF*.

$$4' \times 5'' = 4' \times \frac{5'}{12} = 1\tfrac{2}{3} □'$$

Diese sind die 4 gleich grofsen Rectangel zwischen *AB* und *EF*, mithin das Rechteck $ABCD = (12 + 1\tfrac{2}{3})$ □' $= 13\tfrac{2}{3}$ □'.

Denkt man die Höhe *AE* in 5 gleiche Theile, also in Zolle getheilt, so erhält man in jedem der 4 Rectangel 5 Rectangel, von denen jedes die Grundlinie = 1 Fufs und die Höhe = 1 Zoll, jedes also = 1 Fufs × 1 Zoll zum Inhalt hat, mithin in Summa

$$5'' \times 4' = 20 \text{ (Fufs} \times \text{Zoll)}.$$

1 Fufs × Zoll ist aber

$$= \frac{1 \text{ Fufs} \times \text{Zoll}}{12} □' = \tfrac{1}{12} □'$$

daher 20 (Fufs × Zoll) $= \frac{20}{12}$ □' $= 1\tfrac{2}{3}$ □', so dafs also auch auf diese Weise gerechnet werden kann.

Denkt man noch jede deren Grundlinien in 12 Zolle getheilt und die Parallelen gezogen, so erhält man in jedem Rectangel 60 Quadrate, deren Seite = 1 Zoll ist, und von welchen $12 \times 12 = 144$ auf 1 □Fufs gehen, und in Summa $4 \times 12 \times 5 = 240$ solcher Quadrate = 1 □' 96 □''; und das ganze Rechteck *ABCD* enthält 13 □' 96 □'' $= 13\tfrac{96}{144}$ □' $= 13\tfrac{2}{3}$ □'.

Demgemäfs kann auch arithmetisch der Inhalt des Rectangels bestimmt werden. Multiplicire

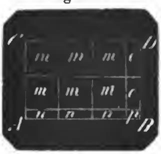
$$\begin{array}{rll} & 3'\,5'' & \\ & 4' & \\ \hline 3'\times 4' = & 12\square' & \\ 4'\times 5'' = & & 20\,(\text{Fufs}\times\text{Zoll}) \\ \hline & = 12\square' & 20\,(\text{Fufs}\times\text{Zoll}) \\ 20\,(\text{Fufs}\times\text{Zoll}) = & 1\square' & 8\,(\text{Fufs}\times\text{Zoll}) \\ 8\,(\text{Fufs}\times\text{Zoll}) = & \tfrac{8}{12} = \tfrac{2}{3}\square' = 8\times 12 = 96\square'' & \\ \hline \text{Rectangel} = 13\tfrac{2}{3}\square' = 13\square'\,96\square'' & & \end{array}$$

4. Enthält die Länge sowohl als die Höhe des Rectangels Bruchtheile der Längen-Einheit, ist z. B. $AB = a = 3'\,5''$; $AC = b = 2'\,2''$, so hat man

$$3'\,5'' \times 2'\,2'' = 3'\times 2' + 3'\times 2'' + 2'\times 5'' + 5''\times 2''$$

Das erste Glied des Products $3'\times 2' = 6\square'$ sind die 6 Quadrate m; das zweite Glied $3'\times 2''$ sind die 3 Rectangel n von $1'$ Grundlinie und $2''$ Höhe; das dritte Glied $2'\times 5''$ sind die beiden Rectangel o, jedes von $5''$ Grundlinie und $1'$ Höhe; das vierte Glied ist das Rectangel p von $5''$ Grundlinie und $2''$ Höhe.

Fig. 43.



Demgemäfs multiplicire

$$\begin{array}{rll} & 3'\,5'' & \\ & 2'\,2'' & \\ \hline 2'\times 3' = & 6\square' & \\ 2'\times 5'' = & & 10\,(\text{Fufs}\times\text{Zoll}) \\ 2''\times 3' = & & 6\,(\text{Fufs}\times\text{Zoll}) \\ & = 1\square'\,48\square'' & \\ 2''\times 5'' = & & 10\square'' \\ \hline \text{Rectangel} = 7\square'\,58\square'' & & \end{array}$$

Wem diese Rechnungsweise nicht zusagt (mir ist sie in den meisten Fällen am bequemsten), kann auch die Zolle als Brüche des Fufses in Rechnung bringen, wie im Beispiel ad 3 angegeben; als:

$$4'\times 3'\,5'' = 4'\times 3\tfrac{5}{12}{}' = 4'\cdot\frac{41'}{12} = \frac{41}{3}\square' = 13\tfrac{2}{3}\square'$$

Im Beispiel ad 4: $3'\,5'' \times 2'\,2'' = 3\tfrac{5}{12}{}' \times 2\tfrac{1}{6}{}' = \frac{41'}{12}\times\frac{13'}{6} = \frac{41\cdot 13}{12\cdot 6}\square' = \frac{533}{72}\square' = 7\frac{29}{72}\square' = 7\square'\,58\square''$.

5. Aus dem oben gedachten Satz (ad 2) folgt und die Elementar-Geometrie lehrt, dafs die Flächen-Inhalte von Dreiecken sich ebenfalls verhalten wie die Producte aus Grundlinie und Höhe, und dafs ferner der Flächen-Inhalt eines Dreiecks gefunden wird, wenn man die Grundlinie mit der Höhe multiplicirt und das Product durch 2 dividirt.

Die **algebraische Formel** für die Berechnung des Flächen-Inhalts F eines Dreiecks ist demnach

$$F = \tfrac{1}{2}\,a\cdot h$$

wo a dessen Grundlinie und h dessen Höhe ist. Da nun jede geradlinige Figur in Dreiecke zerlegbar ist, so kann bei gegebenem Maafsstab und geschehener Ausmessung der Seiten und Diagonalen jede gezeichnete geradlinige Figur berechnet werden.

6. Die Elementar-Geometrie lehrt, dafs der Flächen-Inhalt eines Kreises gleich ist einem Dreieck, dessen Grundlinie dem Umfang und dessen Höhe dem Halbmesser gleich ist. Bezeichnet man den Kreis-Umfang mit P, dessen Halbmesser mit R, so ist die algebraische Formel für den Inhalt F eines Kreises

$$F = \tfrac{1}{2}\,RP$$

ferner dafs der Durchmesser D des Kreises zu dessen Umfang sich verhält, wie 1 zu einer Irrationalzahl 3,1415926..., die mit π bezeichnet wird.

Nun ist

$$D = 2R, \text{ also } P = 2\cdot 3{,}1415\ldots R$$
$$F = \tfrac{1}{2}R\cdot 2\cdot 3{,}1415\ldots R = 3{,}14159\,R^2$$

man kann also bei gegebenem Halbmesser den Inhalt des Kreises und gegenseitig berechnen.

7. Die alg. G. dient noch aufserdem zu Auflösungen, welche bei Anwendung der Synthesis (geometrische Construction und Beweis) nur mit gröfserer Geistes-Anstrengung gelös't werden könnten:

Der bekannte Pythagorische Lehrsatz: (Euklid I. 47) In einem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat der Hypothenuse gleich der Summe der Quadrate beider Katheten, wird synthetisch erwiesen: Behandelt man den Satz als die Aufgabe: den Zusammenhang zwischen der Gröfse der Hypothenuse und der Katheten algebraisch zu finden, so könnte man z. B. folgender Art verfahren: In dem gegebenen rechtwinkligen Dreiecke AEH, dessen

Fig. 44.



Katheten mit a, b und die Hypothenuse mit c bezeichnet werden, verlängere man

die Katheten durch die Winkelspitzen und construire das Quadrat ($ABCD$) von $(a+b)$. Theilt man die übrigen beiden Seiten, wie Fig. 44 zeigt, in die Abschnitte a und b und verbindet die zunächst befindlichen Theilpunkte durch gerade Linien, so sind die 4 entstandenen Dreiecke congruent, also $\angle AEH = \angle CHF$; $\angle AHE + \angle AEH = R$; folglich $\angle AHE + \angle CHF = R$ und $\angle CHF = R$, da dies von allen übrigen 3 Winkeln des mittleren Vierecks gilt, so ist dies ein Quadrat und zwar das der Seite c.

Nun ist $\square ABCD = \square HEFG + 4 \triangle AHE$, oder algebraisch

$$(a+b)^2 = c^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2} = c^2 + 2ab$$

hieraus

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + 2ab &= c^2 + 2ab \\ 2ab &= \quad 2ab \\ \hline a^2 + b^2 \quad &= c^2 \end{aligned}$$

8. Noch eine zweite Aufgabe möge als Beispiel gelten: den Zusammenhang zwischen den 3 Seiten eines Dreiecks und einer der 3 Höhen desselben zu finden:

Fig. 45.



Bezeichnet in dem $\triangle ABC$, h die Höhe auf der Seite a, x die Projection der Seite b auf a, so hat man:

$$(h^2 =)\; c^2 - (a-x)^2 = b^2 - x^2, \text{ woraus}$$

$$x = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}$$

aus $h^2 = b^2 - x^2$ hat man nun

$$h^2 = b^2 - \left[\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}\right]^2$$

so dafs jede Höhe h eines Dreiecks berechnet werden kann, wenn dessen 3 Seiten a, b, c gegeben sind. Für die Rechnung mit Logarithmen ist die Formel für h unbequem. Mit Hülfe der Formel $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$ läfst sie sich umformen in

$$h^2 = \left(b + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}\right)\left(b - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}\right),$$

woraus

$$h^2 = \frac{(a+b)^2 - c^2}{2a} \cdot \frac{c^2 - (a-b)^2}{2a}$$

woraus wieder

$$h^2 = \frac{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}{4a^2}$$

und $h =$

$$\frac{1}{2a}\sqrt{[(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)]}$$

so dafs h mit Logarithmen ohne Unterbrechung berechnet werden kann. Nun ist es auch leicht, den Inhalt J des $\triangle$ aus den gegebenen 3 Seiten zu finden.

Denn $J = \frac{1}{2} ah$, folglich auch

$$J = \tfrac{1}{2} a \cdot \frac{1}{2a}\sqrt{[(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)]}$$

oder

$$J = \tfrac{1}{4}\sqrt{[(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)]}.$$

Aus der hier gezeigten algebraischen Behandlung der Geometrie sind für die verschiedenen Figuren der Geometrie eine Menge von Formeln entstanden, welche in den speciellen Artikeln: Dreieck, Achteck, Kreis etc. nachzusehen sind.

Algebraische Gleichung. Ist unter Algebra erklärt. Sie ist theils der analytischen Gl. entgegengesetzt, weil in dieser keine Unbekannte zu entwickeln ist als in der Gl.

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$$

theils der transcendenten Gl., in der die Unbekannten als Logarithmen, trigonometrische Zahlen, als Differenziale u. s. w. vorkommen, die alle algebraisch nicht zu entwickeln sind, als:

$$\sin x + \sin^2 x + \sin^3 x = nx$$
$$\log a + \log(a+x) + \log(a+2x) = a + mx$$
$$(ax + by)\partial x = (cx + dy)\partial y$$

2. Man hat algebr. Gleichungen mit einer und mit mehreren unbekannten Gröfsen. Da aus einer einzigen Gl. nur eine Unbekannte gefunden werden kann (s. Algebra), so heifst eine Gl., die mehrere unbekannte Gröfsen enthält, eine unbestimmte Gl., wie z. B.

$$xy^2 + xy = a$$

während eine Gl. mit nur einer Unbekannten eine bestimmte Gl. heifst, wie:

$$x^2 + ax + b = 0$$

Zur Auflösung einer Aufgabe mit mehreren (n) Unbekannten gehören auch n Gleichungen; sind diese vorhanden, so sind dieselben bestimmt und mit ihnen die Aufgabe; sind weniger Gl. vorhanden, so sind diese mit der Aufgabe unbestimmt.

3. Die Glieder der Aggregate, aus welchen eine Gl. zusammengesetzt ist, heifsen auch Glieder der Gleichung. In der Gl.:

$$ax + bxy + cxy^2 = dx^2 y + ex^3$$

sind ax, bxy, cxy^2, dx^2y, ex^3 Glieder der Gleichung.

Die auf jeder Seite des Gleichheitszeichens befindlichen Aggregate der Glieder heifsen die Theile der Gleichung.

4. Eine Gleichung heifst geordnet, wenn die Unbekannten nicht im Nenner vorkommen, und wenn die Glieder in absteigenden Potenzen der Unbekannten auf einander folgen.

Die ungeordnete Gl. $x + \frac{a}{x} = b$

ist geordnet in: $x^2 - bx + a = 0$

oder in: $x^2 - bx = -a$

Bei der zuerst beobachteten Ordnung sagt man: die Gl. sei auf Null reducirt, und man zieht im Allgemeinen diese Ordnung vor.

Folgende Gl. mit 2 Unbekannten

$$x^4 + x^3 y + x^2 y^2 + xy^3 + A = 0$$

ist nach x geordnet. Nach y geordnet ist sie wie folgt:

$$y^3 x + y^2 x^2 + yx^3 + x^4 + A = 0.$$

5. Gleichungen mit einer Unbekannten nennt man nach der höchsten Potenz, in welcher, nachdem sie geordnet ist, die Unbekannte vorkommt, Gleichungen vom ersten Grade oder einfache Gleichungen, als

1. $ax + b = 0$

Gleichungen vom 2ten Grade oder quadratische Gl., als

2. $x^2 + ax + b = 0$

Gleichungen vom 3ten Grade oder cubische Gl., als

3. $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$

Gleichungen vom 4ten Grade oder biquadratische Gl., als

4. $x^4 + ax^3 - bx^2 + cx + d = 0$

Kommt die höchste Potenz allein und ohne niedrigere Potenzen bei der Unbekannten vor, so heifst die Gl. eine reine Gl.; kommen niedrigere Potenzen vor, eine unreine oder zusammengesetzte Gl.

5. $x^2 + a = 0$

6. $x^3 + b = 0$

7. $x^4 + c = 0$

sind reine Gleichungen, die fünfte eine reine quadratische, die sechste eine reine cubische, die siebente eine reine biquadratische Gl.

Finden sich in einer Gl. sämmtliche Potenzen der Unbekannten vor, so heifst die Gl. vollständig, fehlen eine oder mehrere, so heifst sie unvollständig.

Die Gl. 1 bis 4 sind vollständige Gl.; eine unvollständige Gl. vom ersten Grade giebt es nicht, vom 2ten Grade wird sie eine reine quadratische Gl. (wie 5.)

$$x^3 + ax^2 + b = 0$$
$$x^4 + ax^3 + bx + c = 0$$

sind unvollständige Gl. vom 3. und 4. Grade.

Fehlt das bekannte Glied (die Unbekannte in der nullten Potenz), so läfst sich die Gleichung auf eine um Eins niedrigere Gl. reduciren. Als

$$x^5 + ax^4 + bx^2 + cx = 0 \text{ in}$$
$$x^4 + ax^3 + bx + c = 0.$$

6. Auflösung der algebraischen Gleichungen (vergl. Algebra). Diese geschieht, wenn man die Unbekannte durch bekannte Gröfsen ausdrückt, wenn also die Unbekannte allein auf einer Seite des Gleichheitszeichens steht und die andre Seite nur bekannte Gröfsen enthält, wie

$$x = A;\ y = B;\ z = C.$$

7. Auflösung der Gleichungen des ersten Grades mit nur einer Unbekannten.

Jede Gl. des 1. Grades mit einer Unbekannten läfst sich auf die Form bringen

$$x \pm a = 0$$

woraus dann die Auflösung dadurch geschieht, dafs man statt 0 die Bekannte a mit dem entgegengesetzten Vorzeichen auf die andere Seite schafft, und es ist

$$x = \mp a.$$

Beispiel 1. Die Gl. $ax + b = cx + d$ wird zunächst in die Form gebracht

$(a-c)x - (b-d) = 0$, hiernach in die Form

$$x - \frac{b-d}{a-c} = 0$$

woraus $$x = \frac{b-d}{a-c}$$

Beisp. 2. Die Gl. $\frac{ax}{b} = cx - d$ in die Form

$$x - \frac{bd}{bc-a} = 0$$

woraus $$x = \frac{bd}{bc-a}$$

Beisp. 3. Die Gl. $\frac{a+bx}{x} + c = \frac{d}{x}$ in die Form

$$x + \frac{a-d}{b+c} = 0$$

woraus $$x = \frac{d-a}{b+c}$$

8. Auflösung der Gleichungen des zweiten Grades mit einer Unbekannten.

Jede reine quadratische Gleichung ist in die Form zu bringen

$$x^2 \pm a = 0$$

woraus $$x = \sqrt{\mp a}.$$

Jede unreine quadratische Gleichung läfst sich in die Form bringen

$$x^2 \pm ax \pm b = 0.$$

Hieraus erhält man:

$$x^2 \pm ax = \mp b.$$

Für die Auflösung der Gl. kommt es nun darauf an, dafs die linke Seite ein

vollständiges Quadrat werde, und dies geschieht, wenn man $\left(\frac{a}{2}\right)^2$ hinzusetzt, indem dann $x^2 \pm ax + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(x \pm \frac{a}{2}\right)^2$ wird.

Zu der Gleichung $x^2 \pm ax = \mp b$ schreibe demnach $+\left(\frac{a}{2}\right)^2 = +\left(\frac{a}{2}\right)^2$

folglich $x^2 \pm ax + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \mp b$

oder $\left(x \pm \frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \mp b$

hieraus $x \pm \frac{a}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 \mp b}$

und $x = \mp \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 \mp b}$

Nach dieser Formel ist jede numerische quadratische Gl. aufzulösen (vergl. algebraische Formel).

Die quadratische Gleichung liefert 2 Werthe (Wurzeln der Gleichung) für die unbekannte Gröfse, nämlich:

$\mp \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 \mp b}$ und

$\mp \frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 \mp b}$

weil $(-A)^2 = (+A)^2 = +A^2$ ist.

9. Die 4 Formen einer quadratischen Gl. sind:

1. $x^2 + ax + b = 0;\ x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$

2. $x^2 - ax + b = 0;\ x = +\frac{a}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$

3. $x^2 + ax - b = 0;\ x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b}$

4. $x^2 - ax - b = 0;\ x = +\frac{a}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b}$

Die Wurzeln der beiden ersten Gl. sind einander gleich, aber entgegengesetzt; dasselbe findet mit den Wurzeln der beiden letzten Gl. statt.

Man kann also die 4 Formen auf folgende 2 reduciren:

5. $x^2 \pm ax + b = 0;\ x = \mp \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$

6. $x^2 \pm ax - b = 0;\ x = \mp \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b}$

10. Für den Fall, dafs $b > \left(\frac{a}{2}\right)^2$ enthält die Gl. 5. nur unmögliche Wurzeln, für $b < \left(\frac{a}{2}\right)^2$ enthält sie 2 mögliche Wurzeln, Gl. 6. enthält immer 2 mögliche Wurzeln.

11. Bezeichnet man die beiden Wurzeln jeder der Gl. 1 bis 4, No. 9, mit v und w, so hat man in Gl. 1

$v^2 + av + b = 0$ und

$w^2 + aw + b = 0$

Entwickelt man hieraus nach No. 27 a und b, so erhält man

$a = -(v + w)$

$b = +v \cdot w$

für Gl. 2 erhält man $a = +v + w;\ b = +vw$

„ „ 3 „ „ $a = -(v + w);\ b = -vw$

„ „ 4 „ „ $a = +v + w;\ b = -vw$

In jeder quadratischen Gleichung also ist der Coefficient (a) der einfachen Unbekannten (x) gleich der entgegengesetzten Summe beider Wurzeln, und die Bekannte (b) gleich dem positiven Product beider Wurzeln.

Setzt man die Werthe von a und b, durch v und w ausgedrückt, in jede der Gleichungen 1 bis 4, No. 9, so erhält man aus jeder derselben:

$x^2 - (v + w)x + vw = 0$; und hieraus

$(x - v)(x - w) = 0$

Es ist also mit der Auflösung der Gl. zugleich der Ausdruck, der die Gl. darstellt, in ein Product verwandelt.

12. Für die symbolischen Gl. 1 bis 4 No. 9, seien folgende numerische gesetzt.

1. $x^2 + 10x + 24 = 0$
2. $x^2 - 10x + 24 = 0$
3. $x^2 + 10x - 24 = 0$
4. $x^2 - 10x - 24 = 0$

Wurzeln 1. -4 und -6

„ 2. $+4$ „ $+6$

„ 3. $+2$ „ -12

„ 4. -2 „ $+12$

Producte:

1. $(x + 4)(x + 6) = x^2 + 10x + 24$
2. $(x - 4)(x - 6) = x^2 - 10x + 24$
3. $(x - 2)(x + 12) = x^2 + 10x - 24$
4. $(x + 2)(x - 12) = x^2 - 10x - 24$

In jeder geordneten Gl. ist das erste Glied positiv. In Gl. 1 enthalten die Glieder also 2 Folgen gleichnamiger Vorzeichen (++, ++), in Gl. 2 zwei Folgen ungleichnamiger Vorzeichen (+−, −+), in Gl. 3 eine Folge gleichnamiger und eine ungleichnamiger Vorzeichen (++, +−) eben so in Gl. 4 (+−, −−).

Jede quadratische Gl. hat so viele negative Wurzeln, als Folgen gleichnamiger, und so viele positive Wurzeln, als Folgen ungleichnamiger Vorzeichen.

13. Auflösung der Gleichungen des 3ten Grades mit einer Unbekannten.

Jede reine cubische Gl. ist in die Form zu bringen:

$$x^3 \pm a = 0$$

woraus $x = \sqrt[3]{\mp a}$

Jede unreine cubische Gl. läfst sich in die Form bringen:

$$x^3 \pm ax^2 \pm bx \pm c = 0$$

14. Die strenge Auflösung der cubischen Gleichungen hat mehr Schwierigkeiten, als die der quadratischen; bei numerischen Gl. kommt man in der Regel am leichtesten durch Probiren fort.

15. Wie die quadratische Gl. als aus 2 Factoren gebildet angesehen werden kann (No. 11), so jede cubische Gl. aus dreien, und es ist auch bei dieser jeder Factor die Differenz zwischen der Unbekannten und einer ihrer Wurzeln, wie bei der quadratischen; daher hat jede cubische Gleichung 3 Wurzeln.

Nennt man diese 3 Wurzeln u, v, w, so erhält man aus

$$(x-u)(x-v)(x-w)=0$$
$$x^3-(u+v+w)x^2+(uv+uw+vw)x - uvw=0$$

Der Coefficient des Quadrats der Unbekannten besteht also aus der negativen Summe der Wurzeln, der der einfachen Unbekannten aus der positiven Summe der Producte je zweier Wurzeln mit einander, und das bekannte Glied aus dem negativen Product sämmtlicher 3 Wurzeln.

Dieser Satz erleichtert das Aufsuchen der Wurzeln durch Probiren ungemein, wenn man das bekannte Glied in Factoren zerlegt, und diese einzeln auch wohl mit dem Coefficienten des Quadrats vergleicht. Aus der obigen Entwickelung des Products in eine viergliedrige Gröfse geht zugleich hervor, dafs wenn sämmtliche Coefficienten ganze Zahlen sind, auch sämmtliche 3 Wurzeln ganze Zahlen sein müssen, wenn nicht 2 von ihnen irrational werden.

16. Beispiele.

1. Beispiel. $x^3-9x^2+26x-24=0$ (Meier Hirsch, pag. 148). Wegen des negativen bekannten Gliedes (– 24) mufs nach No. 15 wenigstens eine Wurzel positiv sein, und diese soll aufgefunden werden.

Die Factoren von 24 sind 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24. Die leichteste Probe gewährt $x=1$; hierbei wird der Werth der Gl. $1-9+26+24=42$ statt 0; 1 ist also **keine Wurzel.**

Wegen der Zahl 9 $(=u+v+w)$ können nun die Factoren 6, 8, 12, 24 nicht Wurzeln sein, sondern nur 2, 3 und 4; probirt man den Factor 2, so giebt dieser

$$8-\ 36+\ 52-24=0$$

ferner 3 giebt: $27-\ 81+\ 78-24=0$

endlich 4 giebt: $64-144+104-24=0$

mithin sind die Wurzeln der Gl. $=2, 3$ und 4.

2. Beispiel. $x^3-8x^2+5x+14=0$ (Meier Hirsch, pag. 148). Factoren von 14 sind 1, 2, 7, 14.

Da 14 positiv ist, so mufs mindestens eine Wurzel negativ sein.

Die Probe $+1$ giebt $1-8+5+14=+12$

" " -1 " $-1-8-5+14=0$

mithin ist -1 eine Wurzel der Gleichung.

Anstatt noch ferner zu probiren, kann man die Gl. durch $x+1$ dividiren, man erhält:

$$x^2-9x+14=0$$

woraus, da $9=2+7$ und $14=2\times 7$, sofort zu übersehen, dafs die anderen beiden Wurzeln $+2$ und $+7$ sind.

3. Beispiel.

$x^3-49x-120=0$ (Meier Hirsch, p. 148). Hier fehlt das zweite Glied, und man ist auf das Bekannte beschränkt. Die Gl. kann wegen des Vorzeichens – der Bekannten lauter positive, aber auch 2 negative Wurzeln haben, jedenfalls mufs eine positiv sein.

Es mufs daher sofort ein Factor von 120 probirt werden, der im Cubus das 2te Glied übertrifft, also >7, weil $7^3-49\cdot 7$ erst $=0$ ist, und der Werth noch -120 bleiben würde. Der kleinste Factor von 120 also, welcher eine Wurzel der Gl. sein könnte, ist 8, und der Factor 8 giebt den Werth $=0$; eine Wurzel $=8$ ist gefunden. Nun aber müssen die beiden anderen Wurzeln negativ sein, weil jede positive Wurzel, die höher als 8, den Werth der Gl. gröfser als Null machen würde.

Dividirt man die Gl. durch $x-8$, so erhält man:

$$x^2+8x+15=0$$

woraus wieder, da $8=3+5$; $15=3\times 5$, die Wurzeln -3 und -5 durch den Augenschein hervorgehen.

4. Beispiel.

$$x^3-6x^2+19x-44=0$$

(Meier Hirsch, pag. 150).

Hier ist wiederum wenigstens eine Wurzel positiv. Die Factoren von 44 sind 1, 2, 4 und 11; 1 und 2 geben negative Werthe der Gl., für 4 erhält man den Werth der Gl. $=0$, und $+4$ ist eine Wurzel. Da der Coefficient 6 des zweiten Gliedes gar keinen Anhalt giebt, jeder Werth einer positiven Wurzel über 4 aber einen positiven Werth der Gl. liefern

würde, so dividire die Gl. wieder durch $x-4$; man erhält:

$$x^2-2x+11=0.$$

Hier ist der Werth der Wurzeln nicht sogleich zu übersehen, man findet nach No. 8:

$$x=+1\pm\sqrt{-10}$$

und die beiden andern (unmöglichen) Wurzeln =

$$1+\sqrt{-10} \text{ und } 1-\sqrt{-10}$$

Nimmt man die negative Summe der 3 Wurzeln, so erhält man den Coefficienten des Quadrats der Unbekannten

$$=-4-(1+\sqrt{-10})-(1-\sqrt{-10})=-6$$

Die positive Summe $=4\times(1+\sqrt{-10})$ $+4\times(1-\sqrt{-10})+(1+\sqrt{-10})(1-\sqrt{-10})$ giebt den Coefficienten der einfachen Unbekannten

$$=(+4+4\sqrt{-10})+(4-4\sqrt{-10})+11=19$$

und das negative Product $4\times(1+\sqrt{-10})$ $(1-\sqrt{-10})$ giebt die Bekannte

$$=4\times11=44.$$

17. Die cubischen Gleichungen können nur von folgenden Formen sein:

1. $x^3+ax^2+bx+c=0$
2. $x^3+ax^2+bx-c=0$
3. $x^3+ax^2-bx+c=0$
4. $x^3+ax^2-bx-c=0$
5. $x^3-ax^2+bx+c=0$
6. $x^3-ax^2+bx-c=0$
7. $x^3-ax^2-bx+c=0$
8. $x^3-ax^2-bx-c=0$

Sie entstehen aus den Producten (s. No. 15.) $(x\pm u)$ $(x\pm v)$ $(x\pm w)$ durch Abwechselung der Vorzeichen, und man überzeugt sich leicht, dafs auch bei den cubischen Gl., wie bei den quadratischen (s. No. 12) so viele negative Wurzeln als Folgen, und so viele positive Wurzeln als Abwechselungen der Vorzeichen statt haben, vorhanden sind.

Die beiden Producte

$(x+u)$ $(x\pm v)$ $(x\mp w)$, so wie
$(x-u)$ $(x\pm v)$ $(x\mp w)$

sprechen nur 2 Formen aus; und deshalb sind die obigen 8 Formen zusammen zu ziehen in folgende 6:

1. $x^3+ax^2+bx+c=0$
2. $x^3+ax^2\pm bx-c=0$
3. $x^3+ax^2-bx+c=0$
4. $x^3-ax^2\pm bx+c=0$
5. $x^3-ax\ +bx-c=0$
6. $x^3-ax\ -bx-c=0$

Die erste Form entsteht aus

$$(x+u)\ (x+v)\ (x+w)$$

Die fünfte Form entsteht aus

$$(x-u)\ (x-v)\ (x-w).$$

Die erste hat mithin mit der fünften gleich grofse, aber entgegengesetzte Wurzeln, die der ersten sind negativ, die der fünften positiv, wie auch Gleichung 1 drei Folgen und Gl. 5 drei Abwechselungen der Vorzeichen hat.

Die Wurzeln dieser beiden Formen sind also gleichnamig, die der übrigen ungleichnamig.

Die Wurzeln der Gl. 2 und 4 der beiden aus vieren zusammengezogenen Formen sind den oben gedachten Producten nach, woraus sie entstanden, einander gleich, aber entgegengesetzt; Gl. 2 hat 2 Folgen gleichnamiger und eine ungleichnamiger Vorzeichen, mithin 2 negative und eine positive Wurzel; Gl. 4 hat 2 Folgen ungleichnamiger und eine gleichnamiger Vorzeichen, mithin 2 positive und eine negative Wurzel.

Gl. 3 und 6 entstehen aus

$(x+u)$ $(x-v)$ $(x-w)$ und
$(x-u)$ $(x+v)$ $(x+w)$

Also auch bei diesen beiden sind die Wurzeln einander gleich und entgegengesetzt. Gl. 3 hat eine Folge und 2 Abwechselungen, Gl. 6 zwei Folgen und eine Abwechselung der Vorzeichen, mithin Gl. 3 eine negative und 2 positive, Gl. 6 eine positive und 2 negative Wurzeln, wie auch die obigen Factoren bezeugen.

18. Bei der quadratischen Gleichung können beide Wurzeln unmöglich sein (s. No. 10), bei der cubischen Gleichung ist immer eine Wurzel wenigstens möglich, die beiden anderen können möglich oder unmöglich sein. Denn wie die Beispiele 16 zeigen, giebt es keine numerische cubische Gleichung, in welcher das erste Glied x^3 nicht so grofs und nicht so klein genommen werden könnte, dafs der Werth der Gleichung im ersten Falle positiv und im zweiten Falle negativ wird, so dafs jedenfalls ein möglicher Werth zwischen beiden existirt, der den Werth der Gleichung zu Null macht. Für den Fall zweier unmöglichen Wurzeln hat das Gesetz über die Folgen der Vorzeichen keine Gültigkeit, und wenn man probiren will, um die eine mögliche Wurzel zu finden, so verfährt man nach Beispiel 4, No. 16, um auch die beiden unmöglichen zu erhalten.

19. Es erleichtert die Aufsuchung der Wurzel und ist zur streng wissenschaftlichen Auflösung der cubischen Gleichung unerläfslich, dafs das zweite Glied ax^2 fortgeschafft werde.

Hierfür setze man in die Gl.:

$$x^3+ax^2+bx+c=0$$

für x allgemein $y+\beta$, so entsteht:

$$(y+\beta)^3+a(y+\beta)^2+b(y+\beta)+c=0$$

entwickelt und geordnet:

$$y^3+(3\beta+a)y^2+(3\beta^2+2a\beta+b)y+\beta^3+a\beta^2+b\beta+c=0$$

$(3\beta+a)y^2$ wird nun $=0$ für $\beta=-\frac{a}{3}$

Diesen Werth in die Gleichung gesetzt, giebt:

$$y^3-\left(\frac{a^2}{3}-b\right)y+\left(\frac{2a^3}{27}-\frac{ab}{3}+c\right)=0$$

Eine cubische Gleichung mit fehlendem 2ten Gliede hat also eine der beiden Formen:

1) $x^3+bx\pm c=0$
2) $x^3-bx\pm c=0$

20. Um aus der Folge der gleichnamigen und ungleichnamigen Vorzeichen auf die Vorzeichen der Wurzeln schliefsen zu können, mufs das fehlende Glied mit ± 0 eingeführt werden.

Die Gl. 1 wird: $x^3\pm 0+bx\pm c=0$
für $+0$ und $+c$ erhält man 3 Folgen
für -0 und $+c$ „ „ 2 Wechsel und 1 Folge.

Aus diesem Widerspruch folgt, dafs 2 Wurzeln der Gl. unmöglich sind, denn die Gl. kann nicht 3 negative und zugleich 2 positive und eine negative Wurzel haben.

Die Gl. 2. wird $x^3\pm 0-bx\pm c=0$
Hier entstehen für $+0$ u. $+c$ und für -0 u. $+c$ } 1 Folge u. 2 Wechsel, u.
für $+0$ u. $-c$ und für -0 u. $-c$ } 2 Folgen und 1 Wechsel

mithin findet kein Widerspruch statt, und die Gleichung kann 3 mögliche Wurzeln liefern. Für diesen Fall giebt

$x^3-bx+c=0$, eine negative und 2 positive Wurzeln,

$x^3-bx-c=0$, eine positive und 2 negative Wurzeln,

pessen ungeachtet kann eine Gl. von der Form $x^3-bx\pm c=0$ auch 2 unmögliche Wurzeln haben.

21. **Entwickelung der Gleichungen No. 20 durch Auffindung einer möglichen Wurzel.**

Die Gl. $x^3\pm bx\pm c=0$ giebt

$$x^3=\mp(bx+c)$$

Man setze $x=y+z$

so ist $x^3=y^3+z^3+3y^2z+3yz^2$
$=y^3+z^3+3yz(y+z)$
$=y^3+z^3+3yzx$

setzt man nun $y^3+z^3=\mp c$
$3yz=\mp b$
also $y^3z^3=\mp\frac{b^3}{27}$

so erhält man (No. 29, C. I)

$$y=\mp\frac{c}{2}+\sqrt{\frac{c^2}{4}\pm\frac{b^3}{27}}$$

$$z=\mp\frac{c}{2}-\sqrt{\frac{c^2}{4}\pm\frac{b^3}{27}}$$

woraus

$$x=\sqrt[3]{\left[\mp\frac{c}{2}+\sqrt[2]{\frac{c^2}{4}\pm\frac{b^3}{27}}\right]}+\sqrt[3]{\left[\mp\frac{c}{2}-\sqrt[2]{\frac{c^2}{4}\pm\frac{b^3}{27}}\right]}$$

Diese Formel heifst von ihrem Erfinder die **Cardanische Formel.**

22. Die Gl. $x^3-bx\pm c=0$ liefert

$$x=\sqrt[3]{\left[\mp\frac{c}{2}+\sqrt[2]{\left(\frac{c^2}{4}-\frac{b^3}{27}\right)}\right]}+\sqrt[3]{\left[\mp\frac{c}{2}-\sqrt[2]{\left(\frac{c^2}{4}-\frac{b^3}{27}\right)}\right]}$$

Ist nun $\frac{b^3}{27}>\frac{c^2}{4}$ oder $4b^3>27c^2$, so ist die $\sqrt[2]{}$ unmöglich, und mit dieser auch x; letzteres aber nur der Form nach, es giebt Mittel, x in einer Reihe daraus zu entwickeln. Die Anwendung dieses Mittels ist aber weitläufig und somit die der Cardanischen Formel bedenklich.

Die Gl. $x^3+bx\pm c=0$ liefert

$$x=\sqrt[3]{\left[\mp\frac{c}{2}+\sqrt[2]{\left(\frac{c^2}{4}+\frac{b^3}{27}\right)}\right]}+\sqrt[3]{\left[\mp\frac{c}{2}-\sqrt[2]{\left(\frac{c^2}{4}+\frac{b^3}{27}\right)}\right]}$$

und läfst immer die Anwendung der Cardanischen Formel zu.

No. 16, **Beispiel 1.**

$$x^3-9x^2+26x-24=0$$

giebt nach No. 19 die Gl.: da $-\frac{a}{3}=+3$ ist

$$(y+3)^3-9(y+3)^2+26(y+3)-24=0$$

und aus der Entwickelung dieser oder unmittelbar nach der Formel:

$$y^3-\left(\frac{a^2}{3}-b\right)y+\left(\frac{2a^3}{27}-\frac{ab}{3}+c\right)=0$$

wo $a=9$; $b=26$; $c=24$ ist

$$y^3-y=0$$

Es kommt also hier nicht zur Anwendung der Cardanischen Formel; denn die Gl. mit y dividirt, giebt

$y^2-1=0$, woraus $y=\pm 1$

Nun ist $y+3=x$, also $\pm 1+3=x$
woraus $x=+2$ und $+4$

so dafs blofs durch die Fortschaffung des zweiten Gliedes sofort 2 Wurzeln gefunden worden.

No. 16, **Beispiel 2.**

$$x^3-8x^2+5x+14=0$$

Hier erhält man nach No. 19 $(y+\frac{8}{3})=x$ gesetzt

$$y^3 - \frac{49}{3}x - \frac{286}{27} = 0$$

Die Anwendung der Card. Formel ist also nicht möglich, da $4.\left(\frac{49}{3}\right)^3 > 27\left(\frac{286}{27}\right)^2$ ist, und es führt nach dem bisherigen Vortrag nur das Probiren zum Ziel, und zwar am leichtesten die Probe mit der ursprünglichen Gleichung.

No. 16, **Beispiel 3.**

$$x^3 - 49x - 120 = 0$$

Hier findet dasselbe statt, wie beim zweiten Beispiel.

No. 16, **Beispiel 4.**

$$x^3 - 6x^2 + 19x - 44 = 0$$

giebt nach No. 19

$$y^3 + 7y - 22 = 0$$

Für diese Gleichung ist die Anwendung der Card. Formel geeignet. Man erhält

$$y = \sqrt[3]{+11 + \sqrt[2]{121 + \frac{343}{27}}} + \sqrt[3]{+11 - \sqrt[2]{121 + \frac{343}{27}}}$$

$$= \sqrt[3]{+11 + \frac{19}{9}\sqrt{30}} + \sqrt[3]{+11 - \frac{19}{9}\sqrt{30}}$$

Die Wurzel ist hier also in einer irrationalen Gestalt gegeben; aus der Probe No. 16. ist aber die mögliche Wurzel rational $= 4$ gefunden; demnach mufs das Irrationale sich fortschaffen lassen; dies kann aber nicht anders sein, als wenn

$11 \pm \frac{19}{9}\sqrt{30}$ rationale Cubi sind.

Um die Nenner fortzuschaffen, multiplicire mit 27, so entsteht

$$297 \pm 57\sqrt{30}$$

Setze

$$(x \pm \sqrt{30})^3 = 297 \pm 57\sqrt{30}$$

so erhält man

$$x^3 \pm 3x^2\sqrt{30} + 90x \pm 30\sqrt{30} = 297 \pm 57\sqrt{30}$$

Das Rationale dem Rationalen, das Irrationale dem Irrationalen gleich gesetzt, giebt:

$$x^3 + 90x = 297$$
$$(3x^2 \pm 30)\sqrt{30} = \pm 57\sqrt{30}$$

Aus dieser letzten Gl. erhält man

$$x = \pm 3 \text{ und } \pm 3\sqrt{-1}$$

Für die rationale mögliche Wurzel ist nur $x = \pm 3$ in die obige Gl. $(x \pm \sqrt{30})^3 = 297 \pm 57\sqrt{30}$ zu setzen; man erhält zunächst

$$\pm 3 \pm \sqrt{30} = \sqrt[3]{297 \pm 57\sqrt{30}}$$

also $\frac{1}{3}(\pm 3\sqrt{30}) = \sqrt[3]{11 \pm \frac{19}{9}\sqrt{30}}$ und es ist mithin

$$\sqrt[3]{11 + \frac{19}{9}\sqrt{30}} = \tfrac{1}{3}(3 + \sqrt{30})$$

und

$$\sqrt[3]{11 - \frac{19}{9}\sqrt{30}} = \tfrac{1}{3}(3 - \sqrt{30})$$

also

$$y = \tfrac{1}{3} \times (3 + \sqrt{30}) + \tfrac{1}{3}(3 - \sqrt{30}) = 2$$

Nun ist aber $y + 2 = x$; mithin $x = 4$, wie die Probe No. 16 ergeben hat.

Es ist aus diesem Beispiel zu ersehen, dafs die Card. Formel, selbst in dem Fall, dafs sie unmittelbar eine mögliche Wurzel ergiebt, auf Schwierigkeiten oder Weitläufigkeiten führen kann, und dafs die Probe in den meisten Fällen vorzuziehen ist.

23. Um die Card. Formel nicht anwenden zu müssen und dennoch eine cub. Gl. streng auflösen zu können, giebt die Anwendung der trigonometrischen Functionen ein Mittel.

Cub. Gl., für welche die Card. F. eine mögliche Wurzel liefert, sind (s. No. 22)

a) von der Form $x^3 + bx \pm c = 0$ ohne Ausnahme

und b) von der Form $x^3 - bx \pm c = 0$, in welcher $27c^2 > 4b^3$

Für diese Fälle (a und b) soll die strenge Auflösung gezeigt werden.

A. **Für die Gl. von der Form**

$$x^3 + bx + c = 0$$

Man setze $x = r(tg\,\alpha - cot\,\alpha)$ (1)

wo r einen noch näher zu bestimmenden Halbmesser bedeutet; so hat man

$$x^3 = r^3(tg^3\alpha - 3tg^2\alpha \cdot cot\,\alpha + 3tg\,\alpha\,cot^2\alpha - cot^3\alpha)$$
$$= r^3(tg^3\alpha - cot^3\alpha) - 3r^3\,tg\,\alpha \cdot cot\,\alpha(tg\,\alpha - cot\,\alpha)$$

Da nun $tg\,\alpha \cdot cot\,\alpha = 1$ und $r\,(tg\,\alpha - cot\,\alpha) = x$, so erhält man

$$x^3 = r^3(tg^3\alpha - cot^3\alpha) - 3r^2 x$$

und geordnet

$$x^3 + 3r^2x - r^3(tg^3\alpha - cot^3\alpha) = 0$$

Um der oben gegebenen Form $x^3 + bx + c = 0$ zu entsprechen, schreibe nun

$$x^3 + 3r^2x + r^3(cot^3\alpha - tg^3\alpha) = 0 \quad (2)$$

und es ist $b = 3r^2$ (3)

$$c = r^3(cot^3\alpha - tg^3\alpha)$$

Aus 3 erhält man $r = \sqrt{\frac{b}{3}}$ (4)

Diesen Werth in die letzte Gl. gesetzt, giebt:

$$cot^3\alpha - tg^3\alpha = \sqrt{\frac{27c^2}{b^3}}$$

schreibt man hierzu $cot^3\alpha \cdot tg^3\alpha = 1$

so erhält man (nach No. 29, C. II)

$$\left.\begin{matrix} cot^3\alpha \\ tg^3\alpha \end{matrix}\right\} = \sqrt{\frac{27c^2}{4b^3}+1} \pm \sqrt{\frac{27c^2}{4b^3}} \qquad (5)$$

Betrachtet man $\sqrt{\frac{27c^2}{4b^3}}$ als Tangente eines $\angle\varphi$ so ist (6)

$\sqrt{\frac{27c^2}{4b^3}+1}$ die Secante desselben $\angle\varphi$ (7)

Und hat man $\left.\begin{matrix} cot^3\alpha \\ tg^3\alpha \end{matrix}\right\} = sec\,\varphi \pm tg\,\varphi$

$$= \pm\, tg\left(45^\circ \pm \frac{\varphi}{2}\right)$$

woraus $\left.\begin{matrix} cot\,\alpha \\ tg\,\alpha \end{matrix}\right\} = \sqrt[3]{tg\left(45^\circ \pm \frac{\varphi}{2}\right)}$ (8)

und $x = r(tg\,\alpha - cot\,\alpha)$

$$= (tg\,\alpha - cot\,\alpha)\sqrt{\frac{b}{3}} \qquad (9)$$

Ist mithin eine Gl. gegeben $x^3 + bx + c = 0$, so sucht man zuerst aus 6 den $\angle\varphi$, setzt diesen in Gl. 8, erhält $tg\,\alpha$ und $cot\,\alpha$; diese Werthe in 9 gesetzt, giebt x.

Beispiel. Gegeben (M. Hirsch, p. 147.) Gl. $x^3 + 12x + 63 = 0$

Die Card. Formel giebt $x = -3$; wie denn auch, dieser Werth eingesetzt: $(-3)^3 + 12\cdot(-3) + 63 = 0$ liefert.

Die Rechnung nach vorstehender Formel bei Einführung eines $\angle\varphi$ geschieht wie folgt:

Es ist $log(c)\,63 = 1,7993405$

also $log(c^2)\,63^2 = 3,5986810$

ferner $log\frac{27}{4} = log\,6,75 = 0,8293038$

also $log\left(\frac{27}{4}c^2\right) = log\frac{27}{4}63^2 = 4,4279848$

ferner ist $log\,(b^3)\,12^3 = log\,1728 \quad 3,2375437$

mithin nach 6: $log\,tg^2\varphi = 1,1904411$

und $log\,tg\,\varphi = 10,59522055 - 10$

Die Tafeln ergeben $\varphi = 75^\circ 45'$

woher $\frac{1}{2}\varphi = 37^\circ 52' 30''$

mithin $45 + \frac{1}{2}\varphi = 82^\circ 52' 30''$

und $45 - \frac{1}{2}\varphi = 7^\circ\ 7' 30''$

$log\,tg\,82^\circ 52' 30'' = 10,9030914 - 10$

$log\,tg\ \ 7^\circ\ 7' 30'' = 9,0969088 - 10$

Daher $log\sqrt[3]{tg\,82^\circ 52' 30''} = log\,cot\,\alpha = 10,3010305 - 10$

und $log\sqrt[3]{tg\,7^\circ 7' 30''} = log\,tg\,\alpha = 9,6989696 - 10$

Die Tafeln ergeben hieraus $cot\,\alpha = 2$

$tg\,\alpha = 0,5$

Nun ist also $tg\,\alpha - cot\,\alpha = 0,5 - 2 = -1,5$

und $\sqrt{\frac{b}{3}} = \sqrt{\frac{12}{3}} = 2$

daher nach Gl. 9: $x = 2 \times (-1,5) = -3$

$log\,cot\,\alpha$ ist gefunden 0,3010305

$log\,2$ ist in den Tafeln 0,3010300

Ersterer zu grofs 0,0000005

$log\,tg\,\alpha$ gegen $log\,0,5$ ist zu klein um 0,0000004

Diese kleinen Differenzen liegen in der Irrationalität der Logarithmen selbst und dafs die daraus entspringenden Differenzen in der obigen Reihe von Rechnungen summirt haben, wie denn auch $\angle\varphi$ nicht ganz genau ermittelt und angegeben worden ist.

Diese Auflösungsweise eignet sich aber ganz besonders für irrationale Wurzeln, welche immer nur näherungsweise angegeben werden können.

B. Für die Gl. von der Form $x^3 + bx - c = 0$

Setze wieder $x = r(tg\,\alpha - cot\,\alpha)$ (1)

so erhält man $x^3 + 3r^2x - r^3(tg^3\alpha - cot^3\alpha) = 0$ (2)

$c = r^3(tg^3\alpha - cot^3\alpha)$ (3)

$r = \sqrt{\frac{b}{3}}$ (4)

$tg^3\alpha - cot^3\alpha = \sqrt{\frac{27c^2}{b^3}}$

und $\left.\begin{matrix} tg^3\alpha \\ cot^3\alpha \end{matrix}\right\} = \sqrt{\frac{27c^2}{4b^3}+1} \pm \sqrt{\frac{27c^2}{4b^3}}$ (5)

$$= sec\,\varphi \pm tg\,\varphi = tg\left(45^\circ \pm \frac{\varphi}{2}\right) \quad (6, 7)$$

folglich $\left.\begin{matrix} tg\,\alpha \\ cot\,\alpha \end{matrix}\right\} = \sqrt[3]{tg\left(45^\circ \pm \frac{\varphi}{2}\right)}$ (8)

und $x = (tg\,\alpha - cot\,\alpha)\sqrt{\frac{b}{3}}$ (9)

Beispiel. No. 16 u. No. 22, Beisp. 4, hat die Gl.:

$$y^3 + 7y - 22 = 0$$

Die Card. F. führt auf einen irrationalen Ausdruck.

Man hat hier $log(c^2)\,22^2 = 2,6848454$

ferner $log\frac{27}{4} = log\,6,75 = 0,8293038$

daher $log\frac{27}{4}c^2 = 3,5141492$

ferner $log(b^3)\,7^3 = log\,343 = 2,5352941$

hieraus $log\,tg^2\varphi = 0,9788551$

daher $log\,tg\,\varphi = 10,48942755 - 10$

und $\varphi = 72^\circ\ 2' 47,8''$

daher $\frac{1}{2}\varphi = 36^\circ\ 1' 23,9''$

mithin $45^\circ + \frac{1}{2}\varphi = 81^\circ\ 1' 23,9''$

und $45^\circ - \frac{1}{2}\varphi = 8^\circ 58' 36,1''$

Es ist $log\,tg\,81^\circ 1' 23,9'' = 10,8014325 - 10$

und $log\,tg\ \ 8^\circ 58' 36,1'' = 9,1985675 - 10$

daher $log\sqrt[3]{tg\,81^\circ 1' 23,9''} = log\,tg\,\alpha = 10,2671442 - 10$

und $log\sqrt[3]{tg\,8^\circ 58' 36,1''} = log\,cot\,\alpha = 9,7328558 - 10$

Die Tafeln ergeben $tg\,\alpha = 1{,}849882$
und $cot\,\alpha = 0{,}540575$

mithin $tg\,\alpha - cot\,\alpha = 1{,}309307$

Nun ist $\log(tg\,\alpha - cot\,\alpha) = 0{,}11704152$

$\log r = \log \sqrt{\frac{7}{3}} = 0{,}18398835$

mithin $\log y = 0{,}30102987$
$\log 2 = 0{,}3010300$

mithin $y = 2$, wie in No. 22. berechnet worden.

C. Für die Gl. von der Form
$x^3 - bx + c = 0.$

Setze $x = r\,(tg\,\alpha + cot\,\alpha)$ (1)
so entsteht $x^3 - 3r^2x - r^3\,(tg^3\alpha + cot^3\alpha) = 0$

Um nun das 3. Glied positiv zu erhalten, setze

$$\alpha = (90 + \beta)$$

so ist $tg\,(90+\beta) = -\,tg\,(90-\beta)$
und $cot\,(90+\beta) = -\,cot\,(90-\beta)$
mithin erhält man die Gl. von verlangter Form:

$$x^3 - 3r^2x + r^3[tg^3(90-\beta) + cot^3(90-\beta)] = 0 \quad (2)$$

Man hat hier

$$c = r^3\,[tg^3(90-\beta) + cot^3(90-\beta)] \quad (3)$$

$$r = \sqrt{\frac{b}{3}} \quad (4)$$

und $tg^3(90-\beta) + cot^3(90-\beta) = \sqrt{\frac{27c^2}{b^3}}$

hierzu $tg^3(90-\beta) \times cot^3(90-\beta) = 1$

giebt nach No. 29, C. I.

$$\left.\begin{matrix} tg^3(90-\beta) \\ cot^3(90-\beta) \end{matrix}\right\} = \sqrt{\frac{27c^2}{4b^3}} \pm \sqrt{\frac{27c^2}{4b^3} - 1} \quad (5)$$

Betrachtet man $\sqrt{\frac{27c^2}{4b^3}}$ als Secante eines $\angle\varphi$ (6)

so ist $\sqrt{\frac{27c^2}{4b^3} - 1}$ die Tangente desselben $\angle\varphi$ (7)

Und man hat $\left.\begin{matrix} tg^3(90-\beta) \\ cot^3(90-\beta) \end{matrix}\right\} = sec\,\varphi \pm tg\,\varphi$

$$= tg\,(45° \pm \frac{\varphi}{2})$$

woraus $\left.\begin{matrix} tg\,(90-\beta) \\ cot\,(90-\beta) \end{matrix}\right\} = \sqrt[3]{tg(45° \pm \frac{\varphi}{2})}$ (8)

Nun ist $tg\,(90-\beta) = -\,tg\,\alpha$
und $cot\,(90-\beta) = -\,cot\,\alpha$
und $x = r\,(tg\,\alpha + cot\,\alpha)$

$$= (tg\,\alpha + cot\,\alpha)\sqrt{\frac{b}{3}} \quad (9)$$

Beispiel. Gegeben die Gl.:
$x^3 - \frac{15}{2}x + 290\tfrac{1}{2} = 0$ (M. Hirsch, p. 147).

Die Card. Formel liefert den irrationalen Ausdruck:

$$x = \sqrt[3]{\frac{-581 + \sqrt{337311}}{4}} + \sqrt[3]{\frac{-581 - \sqrt{337311}}{4}}$$

Dieser Ausdruck kann nur dann rational werden, wenn die Gröfse unter der $\sqrt[3]{\ }$, also wenn

$$\frac{-1162 \pm 2\sqrt{337311}}{8} = (-a \pm b\sqrt{c})^3 \text{ ist;}$$

337311 in Factoren zerlegt, giebt:
$3 \cdot 9 \cdot 13 \cdot 31^2$

also $-1162 \pm 2\sqrt{337311} = -1162 \pm 186\sqrt{39}$
Dies mufs also $=$ sein $(-a \pm b\sqrt{39})^3$ und die $\sqrt[3]{\ }$ ausgezogen, giebt:
$x = \tfrac{1}{2}(-7 + \sqrt{39}) + \tfrac{1}{2}(-7 - \sqrt{39}) = -7$

Die Card. F. giebt also auch in diesem Fall nicht unmittelbar ein brauchbares Resultat; es mufs dies erst umgeformt werden.

Verfährt man nach der trigonometrischen Formel, so rechne man:

$\log(c^2) = \log 290{,}5^2 = 4{,}9262922$
$\log \frac{27}{4} = \log 6{,}75 = 0{,}8293038$

$\log\left(\frac{27}{4}c^2\right) = 5{,}7555960$
$\log(b^3) = \log 7{,}5^3 = 2{,}6251839$

$\log \frac{27c^2}{4b^3} = \log sec^2\varphi = 3{,}1304121$

man hat nach den Tafeln
$sec^2\varphi = 1350{,}2437$
folglich $tg^2\varphi = 1349{,}2437$
Man findet $\log tg^2\varphi = 3{,}130090446$
hieraus $\log tg\,\varphi = 11{,}565045223 - 10$
Nun aus den Tafeln $\varphi = 88°\,26'\,26''$
also $\tfrac{1}{2}\varphi = 44°\,13'\,13''$
daher $45° + \tfrac{1}{2}\varphi = 89°\,13'\,13''$
und $45 - \tfrac{1}{2}\varphi = 0°\,46'\,47''$
$\log tg\ 89°\,13'\,13'' = \log tg^3(90°-\beta) = 11{,}86615645 - 10$
$\log tg\ 0°\,46'\,47'' = \log cot^3(90°-\beta) = 8{,}13384355 - 10$
hieraus $\log tg\,(90°-\beta) = 10{,}62205215 - 10$
und $\log cot\,(90°-\beta) = 9{,}37794785 - 10$
hieraus $tg\,(90°-\beta) = -\,tg\,\alpha = 4{,}18844$
und $cot\,(90°-\beta) = -\,cot\,\alpha = 0{,}23875$
mithin $tg\,\alpha + cot\,\alpha = -\ 4{,}42719$
$\log -(tg\,\alpha + cot\,\alpha) = 0{,}6461281$
$\log\left(r = \sqrt{\frac{15}{6}}\right) = 0{,}1989700$

$\log x = 0{,}8450981$
$\log 7$ ist $= 0{,}8450980$
mithin hat man $x = -7$.

D. Für die Gl. von der Form
$$x^3 - bx - c = 0$$
Man setze wie in *C*:
$$x = r(tg\,\alpha + cot\,\alpha)$$
so entsteht
$$x^3 - 3r^2x - r^3(tg^3\alpha + cot^3\alpha) = 0$$
Es ist $b = 3r^2$
$$c = r^3(tg^3\alpha + cot^3\alpha) = \sqrt{\frac{27c^2}{b^3}}$$
$$\left.\begin{matrix} tg^3\alpha \\ cot^3\alpha \end{matrix}\right\} = \sqrt{\frac{27c^2}{4b^3}} \pm \sqrt{\frac{27c^2}{4b^3} - 1}$$
$$= sec\,\varphi \pm tg\,\varphi = tg\left(45° \pm \frac{\varphi}{2}\right)$$
also $\left.\begin{matrix} tg\,\alpha \\ cot\,\alpha \end{matrix}\right\} = \sqrt[3]{tg\left(45° \pm \frac{\varphi}{2}\right)}$

und $x = r\,(tg\,\alpha + cot\,\alpha) = (tg\,\alpha + cot\,\alpha)\sqrt{\frac{b}{3}}$

24. Dafs die beiden letzten Gleichungsformen $x^3 - bx \pm c = 0$ den Character der Einschränkung haben, ersieht man aus $tg\,\varphi = \sqrt{\frac{27c^2}{4b^3} - 1}$ Denn da $tg\,\varphi$ immer >1, so mufs auch immer $\frac{27c^2}{4b^3} > 1$, also $27c^2 > 4b^3$ sein, wenn beide trig. Formeln Anwendung finden sollen.

Für die beiden Gl. von der Form $x^3 - bx \pm c = 0$, wenn $27c^2 < 4b^3$, wenn also die Card. Formel unmögliche Werthe für x liefert, hat man ebenfalls Auflösungen mit Hülfe trigonometrischer Functionen.

Es ist nämlich
$$sin\,3\alpha = 3\,sin\,\alpha - 4\,sin^3\alpha$$
woraus $sin^3\alpha - \frac{3}{4}sin\,\alpha + \frac{1}{4}sin\,3\alpha = 0$ (1)
also die Form $x^3 - bx + c = 0$

Die Sinus sind sämmtlich ächte Brüche, man hat daher, wie in No. 23, einen Radius r zu denken, welcher mit den trig. Functionen in Verbindung, einer gegebenen Gl. von x genügt. Also
$$r^3 sin^3\alpha - \frac{3}{4}r\,sin\,\alpha + \frac{1}{4}r\,sin\,3\alpha = 0$$
Demnach erhält man in 1 für
$$sin^3\alpha = \frac{x^3}{r^3} \text{ und } sin\,\alpha = \frac{x}{r}$$
und es wird aus Gl. I.
$$\frac{x^3}{r^3} - \frac{3}{4}\frac{x}{r} + \frac{1}{4}sin\,3\alpha = 0 \text{ oder geordnet}$$
$$x^3 - \tfrac{3}{4}r^2x + \tfrac{1}{4}r^3 sin\,3\alpha = 0 \qquad (2)$$
man hat also $b = \frac{3}{4}r^2$
und $c = \frac{1}{4}r^3 sin\,3\alpha$
$$\text{woraus } r = 2\sqrt{\frac{b}{3}} \qquad (3)$$
$$\text{und } sin\,3\alpha = \sqrt{\frac{27c^2}{4b^3}} \qquad (4)$$

Die Auflösung gewährt also nur mögliche Resultate, wenn $27c^2 < 4b^3$, weil $sin\,3\alpha$ immer <1 ist, wenn also die für Anwendung der Card. Formel entgegengesetzte Bedingung stattfindet.

Aus $sin\,3\alpha$ erhält man dann
$$x = r\,sin\,\alpha = 2\,sin\,\alpha\sqrt{\frac{b}{3}}$$

Ist eine Gleichung von der Form $x^3 - bx - c = 0$ gegeben, so nimmt man $sin\,3\alpha$ negativ, 3α gehört dann dem 3ten oder 4ten Quadranten an.

Beispiele.

No. 16, Beispiel 2:
$$x^3 - 8x^2 + 5x + 14 = 0$$
giebt No. 22:
$$y^3 - \frac{49}{3}y - \frac{286}{27} = 0$$
und die Card. Formel ist nicht anwendbar.

Hier ist
$$sin\,3\alpha = \sqrt{\frac{27\cdot\left(\frac{286}{27}\right)^2}{4\left(\frac{49}{3}\right)^3}} = \frac{143}{343}$$
$$log\,143 = 2{,}1553360$$
$$log\,343 = 2{,}5352941$$
$$log\,sin\,3\alpha = 9{,}6200419 - 10$$
woraus $3\alpha = 24°\,38'\,1''$

Da aber der Bogen 3α dem 3ten oder 4ten Quadrant angehört, so hat man für den 3ten Quadr.

$3\alpha = 180 + 24°\,38'\,1'' = 204°\,38'\,1''$
woraus $\alpha = 68°\,12'\,40\frac{1}{3}''$

und $y = 2\cdot\sqrt{\frac{49}{9}}\cdot sin\,\alpha = \frac{14}{3}sin\,\alpha$

Es ist nun $sin\,68°\,12'\,40\frac{1}{3}'' = 0{,}9285584$

also $y = \frac{14}{3}\cdot 0{,}9285584 = 4{,}33327$

Es ist (No. 22)
$$x = y + \frac{8}{3} = 4{,}33327 + 2{,}666\ldots. = 6{,}99993$$
oder $= 7$, wie No. 16 durch Probiren gefunden worden.

Eine zweite Wurzel läfst sich durch die Formel nicht finden, denn nimmt man 3α als dem 4ten Quadrant angehörig,

so ist $3\alpha = 360° - 24°\,38'\,1'' = 335°\,21'\,59''$
also $\alpha = 111°\,47'\,19\frac{2}{3}''$
und
$$sin\,111°\,47'\,19\tfrac{2}{3}'' = sin\,180° - 111°\,47'\,19\tfrac{2}{3}''$$
$$= sin\,68°\,12'\,40\tfrac{1}{3}''$$
wie für den 3ten Quadrant.

25. Es soll noch gezeigt werden, dafs die No. 23 und 24 gezeigte Anwendung der trigonometrischen Functionen zu Aufl. von cub. Gl. sich ganz besonders für irrationale Wurzeln eignet.

$x^3 - 12x - 132 = 0$ (Meier Hirsch, p. 155.) giebt die Näherungswerthe für x: (M. H. daselbst)

1) $w = 6$

2) $w' = \frac{47}{8} = 5{,}875$

3) $w'' = \frac{137615}{23436} = 5{,}871949$

Für diesen letzten w'' für x erhält man den Werth der Gl. $= + 0{,}00017$. Es ist hier $27c^2 > 4b^3$ und der Fall also für No. 23, *D* geeignet, und man hat:

$\log(c)\,132 = 2{,}1205739$

daher $\log(c^2)\,132^2 = 4{,}2411478$

$\log \frac{27}{4} = 0{,}8293038$

daher $\log\left(\frac{27}{4} c^2\right) = 5{,}0704516$

$\log(b^3)\,1728 = 3{,}2375437$

folgt $\log \frac{27c^2}{4b^3}$

$= \log \sec^2\varphi = 1{,}8329079$

Die Tafeln ergeben

$\sec^2\varphi = 68{,}0625$

mithin $tg^2\varphi = 67{,}0625$

$\log tg^2\varphi = 1{,}8264798$

daher $\log tg\,\varphi = 10{,}9132399 - 10$

Die Tafeln ergeben $\varphi = 83^\circ\ 2'\,16{,}56''$

daher $\frac{1}{2}\varphi = 41^\circ 31'\ 8{,}28''$

$45^\circ + \frac{1}{2}\varphi = 86^\circ 31'\ 8{,}28''$

$45^\circ - \frac{1}{2}\varphi = 3^\circ 28'\,51{,}72''$

$\log tg(45 + \frac{1}{2}\varphi) = 11{,}2158796644 - 10$

$\log tg(45 - \frac{1}{2}\varphi) = 8{,}7841203356 - 10$

hieraus $\log \sqrt[3]{tg(45 + \frac{\varphi}{2})}$

$= \log tg\,\alpha = 10{,}4052932215 - 10$

$\log \sqrt[3]{tg(45 - \frac{\varphi}{2})}$

$= \log \cot\alpha = 9{,}5947067785 - 10$

Die Tafeln ergeben $tg\,\alpha = 2{,}54268888$

$\cot\alpha = 0{,}39328443$

$tg\,\alpha + \cot\alpha = 2{,}93597331$

$$r = \sqrt{\frac{b}{3}} = 2$$

folglich $x = 5{,}87194662$

der Werth der Gl. $= - 0{,}000101$

26. Auflösung der Gleichungen vom vierten und von höheren Graden.

Wenn alle oder mehrere Wurzeln rational sind.

Diese sind, wenn sie numerisch sind, am leichtesten, und oft gar nicht anders als durch Probiren aufzulösen.

Weifs man von einer Gleichung, dafs sie rationale Wurzeln hat, so beachte für die Probe besonders das absolute Glied. Es hat nämlich jede Gl. so viele Wurzeln, als der höchste Exponent der Unbekannten Einheiten enthält.

$$x^5 - 3x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 9x + 27 = 0$$

(Meier Hirsch, pag. 150.)

hat 5 Wurzeln, deren Product $= 27$ ist.

Mit 1 versucht, giebt den Werth der Gl. $= +32$

mit -1 versucht, giebt denselben $+64$

mit 2 ist nicht zu versuchen, weil sämmtliche rationale mögliche Wurzeln ganze Zahlen sein müssen, und 2 kein Theiler von 27 ist.

Für $x = +3$ wird die Gl. $= 0$

mithin ist $+3$ eine Wurzel der Gl.

Man dividire dieselbe durch $(x-3)$, so erhält man eine Gl. vom vierten Grade; verfährt man dann wie mit der ursprünglichen Gl., so erhält man zum zweiten Mal die Wurzel 3, dividirt man wieder mit $x-3$, so erhält man die cubische Gl.

$$x^3 + 3x^2 + x + 3 = 0$$

Diese mufs eine mögliche, und zwar, weil alle Glieder positiv sind, eine negative Wurzel haben. Mit (-1) ist schon vergebens probirt; $x = -3$ entspricht der Gl., mit $x+3$ dividirt, entsteht

$$x^2 + 1 = 0$$

woraus $x = \pm\sqrt{-1}$

Die Wurzeln der gegebenen Gl. sind also

$$+3,\ +3,\ -3,\ +\sqrt{-1},\ -\sqrt{-1}$$

27. Erleichterungen beim Probiren.

Wenn das absolute Glied sehr grofs ist und viele Theiler hat, so kann das Probiren oft vergebens geschehen müssen; z. B.

$$x^5 - 4x^4 - 186x^3 + 916x^2 + 4673x - 17160 = 0$$

Die Bekannte 17160 hat

einfache	Factoren	1, 2, 2, 2, 3, 5, 11, 13
zweifache	„	4, 6, 10, 22, 26, 15, 33, 39, 55, 65, 143
dreifache	„	8, 12, 20, 44, 52, 30, 66, 78, 110, 130, 286
vierfache	„	24, 40, 88, 104, 60, 132, 156, 220, 260, 572
fünffache	„	120, 264, 312, 440, 520, 1144
sechsfache	„	1320, 1560, 3432
siebenfache	„	die Zahl 17160.

Wenn man also nicht zufällig recht bald eine richtige Wurzel trifft, so kann das Probiren langwierig werden.

Setzt man aber für $x = y + 1$ und $z - 1$, so erhält man zwei neue Gleichungen; in der ersten sind die Wurzeln, so weit diese ganze Zahlen sind, um $+1$ kleiner, und in der zweiten um $+1$ gröfser, als die Wurzeln der ursprünglichen Gleichung.

Setzt man nämlich in der Gl.

$$x^2 + ax + b = 0$$

für $x = y \pm 1$, so entsteht die Gl.

$$y^2 + (a \pm 2)y + b \pm a + 1 = 0$$

sind nun die Wurzeln der ersten Gl. n, m, so ist nach No. 11

$$a=-(m+n) \text{ und } b=m\cdot n$$

demnach die Wurzeln der zweiten Gl.

$$b\pm a+1=m\cdot n\mp(m+n)+1$$
$$=(m\mp1)(n\mp1)$$

woraus für quadratische Gleichungen zunächst das Gesetz erwiesen ist, und für Gl. aller Grade sich erweisen läfst.

Eben so ist zu ersehen, dafs man das absolute Glied, worauf allein es ankommt, erhält, indem man die einzelnen Glieder zusammen zählt, wenn man in die Gl. $x=\pm1$ setzt.

Für $y+1=x$ erhält man das absolute Glied in dem obigen Beispiel $=-11760$ für $y-1=x$ dasselbe $=-20736$

Die einfachen Factoren von 11760 sind: 2, 2, 2, 2, 3, 5, 7, 7
von 20736 sind: 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 9, 9

Von den Factoren der ursprünglichen Gl. geben nur folgende, $\pm$ genommen, um $+1$ vermindert, Factoren von 11760
+ 2, 3, 4, 5, 6, 8, 11, 13, 15, 22
− 1, 2, 3, 4, 5, 6, 11, 13, 15, 20, 39, 55

Von den Factoren der ursprünglichen Gl. geben folgende, um $+1$ vermehrt, Factoren von 20736
+ 2, 3, 5, 8, 11, 15, 143
− 1, 2, 3, 4, 5, 10, 13, 33, 55 65

In beiden Proben finden sich folgende übereinstimmende Factoren, welche also Wurzeln sein können:
+ 2, 3, 5, 8, 11, 15
− 2, 3, 4, 5, 13

und auf diese 11 Zahlen ist jetzt die Probe mit der ursprüglichen Gleichung eingeschränkt, 5 derselben sind Wurzeln, 6 derselben sind es nicht.

Man erhält den Werth der Gleichung:

$$\begin{aligned} \text{für } x&=+\ 2=-5670\\ x&=+\ 3=0\\ x&=+\ 5=+6480\\ x&=+\ 8=0\\ x&=+11=0\\ x&=+15=+188160\\ x&=-\ 2=-21450\\ x&=-\ 3=-18480\\ x&=-\ 4=-11340\\ x&=-\ 5=0\\ x&=-13=0 \end{aligned}$$

Man hat also für die gegebene Gleichung die Wurzeln

$$+3,\ +8,\ +11,\ -5,\ -13$$

und das Aggregat derselben entsteht aus dem Product:

$$(x-3)\ (x-8)\ (x-11)\ (x+5)\ (x+13)$$

28. **Auflösung höherer Gleichungen, wenn die Wurzeln irrational sind.**

A. Die Gleichung sei:

$$x^4+8x^2+16x-440=0$$

Durch Probiren suche eine Zahl, welche von einer wirklichen Wurzel der Gl. um weniger als eine Einheit verschieden ist. Man findet für $x=4$ den Werth der Gl. $+8$, so dafs die wirkliche Wurzel w etwas geringer als 4, aber mehr als 3 beträgt.

Setze nun $w=4-y$, so erhält man

$$(4-y)^4+8(4-y)^2+16(4-y)-440=0$$

Um die Gl. nach y zu ordnen, erhält man:

$$\begin{aligned} (4-y)^4&=256-256y+96y^2-16y^3+y^4\\ 8(4-y)^2&=128-\ \ 64y+\ 8y^2\\ 16(4-y)&=\ 64-\ \ 16y \end{aligned}$$

Da nun y ein nur kleiner Bruch ist, so kann man, um der Wurzel vorläufig näher zu kommen, die höheren Potenzen von y unberücksichtigt lassen, und dann erhält man:

$$448-336y-440=0$$

$$\text{woraus } y=\frac{8}{336}=\frac{1}{42}=0{,}02381$$

$$\text{mithin } x=4-0{,}02381=3{,}97619$$

Setzt man diesen Werth in die gegebene Gl., so findet man mit Hülfe der Logarithmen:

$$\begin{aligned} +\ \ x^4&=+249{,}9588\\ +\ 8x^2&=+126{,}4807\\ +16x\ &=+\ \ 63{,}6190\\ \hline &\ \ +440{,}0585 \end{aligned}$$

der Werth der Gl. also nur noch
+0,0585

B. Es ist mithin die Wurzel noch etwas geringer als 3,97619; will man dieselbe genauer bestimmen und man setzt wieder:

$$x=(3{,}97619-z)$$

so erhält man wieder bei blofser Berücksichtigung der einfachen Potenzen von z:

$$\begin{aligned} 4\times3{,}97619^3\times z&=251{,}4556\cdot z\\ 64\times3{,}97619\ \cdot z&=254{,}4762\cdot z\\ \text{hierzu}\quad &\ \ \ 16{,}0000\cdot z\\ \hline &\ \ 521{,}9318\cdot z \end{aligned}$$

Es ist also $440{,}0585-521{,}9318\cdot z-440=0$

$$\text{woraus } z=\frac{0{,}0585}{521{,}9318}$$

log	0,0585	= 0,7671559−2
log	521,9318	= 2,7176138
log des Quotienten		= 0,0495421−4
und der Quotient	z	= 0,000112
ab von		3,97619
giebt die nähere Wurzel		= 3,976078

Mit Hülfe der Logarithmen findet man:

$$\begin{aligned} x^4&=+\ 249{,}9306\\ 8x^2&=+\ 126{,}4736\\ 16x\ &=+\ \ \ 63{,}6172\\ \hline &\ \ \ 440{,}0214 \end{aligned}$$

mithin der Werth der Gleichung noch
+ 0,0214

C. Setzt man abermals

$$x = 3{,}976078 - w$$

so sieht man schon aus den bisher beobachteten Resultaten, dafs man wiederum auf einen noch positiven Werth der Gleichung kommt, dafs die Wurzel wiederum geringer ist als w, und dafs man sich der wirklichen Wurzel nur von einer Seite her nähert.

Man probire daher der Kürze wegen mit 3,976 um vielleicht einen negativen Werth der Wurzel zu erhalten, und man erhält:

$$\begin{aligned} 3{,}976^4 &= 249{,}91116 \\ 8\times 3{,}976^2 &= 126{,}46864 \\ 16\times 3{,}976 &= \underline{63{,}61600} \\ &+439{,}99580 \\ \text{hierzu} &\ \underline{-440{,}0000} \end{aligned}$$

giebt den Werth der Gleichung

$$-0{,}0042$$

D. Zum Vergleich der Werthe von x mit den Werthen der Gl. hat man nun:

für $x' = 3{,}976078$ den Werth $+0{,}0214\ (A)$
„ $x'' = 3{,}976000$ „ „ $-0{,}0042\ (A')$

Nun schliefse man nach der *Regula falsi*

wie $x' - x'' : A - A' = v - x'' : +0{,}0042$
wo v die richtige Wurzel bedeutet.

Man findet aus der Proportion:

$$\begin{aligned} 0{,}000078 : 0{,}0256 &= v - x'' : 0{,}0042 \\ v - x'' &= 0{,}0000128 \\ \text{und } v &= 3{,}9760128 \end{aligned}$$

probirt man diesen Werth mit Hülfe der Logarithmen, so erhält man:

$$\begin{aligned} x^4 &= 249{,}91436 \\ 8x^2 &= 126{,}46944 \\ 16x &= \underline{63{,}61620} \\ & 440{,}00000 \end{aligned}$$

und man ersieht, dafs die zuletzt ermittelte Wurzel auf 5 Decimalstellen des absoluten Gliedes genau stimmt.

E. Eine zweite Wurzel der Gleichung ist offenbar negativ und etwas gröfser als 4

für $x = -4$ erhält man den Werth der Gl. $= -120$

für $x = -5$ den Werth $= +305$

Wendet man sogleich die *Regula falsi* an und setzt die Proportion:

$$1 : d = 425 : 120$$

so erhält man d, nämlich die Zahl, welche zu -4 addirt werden mufs, um die richtige Wurzel der Gl. zu finden $= 0{,}28235$

und x näherungsweise $= -4{,}28235$

Eine Probe ergiebt mit Hülfe der Logarithmen:

$$\begin{aligned} (-4{,}28235)^4 &= +336{,}30146 \\ 8\times(-4{,}28235)^2 &= +146{,}7082 \\ 16\times(-4{,}28235) &= \qquad\qquad -68{,}5176 \\ \text{hierzu} & \qquad\qquad\quad \underline{-440} \\ \text{Werth der Gl.} &= 483{,}0096 - 508{,}5176 \\ &= -25{,}508 \end{aligned}$$

F. Wendet man, um den ersten Näherungswerth der Wurzel zu finden, die obige erste Vorschrift an, so erhält man

$$\begin{aligned} w &= -(4+y) \text{ gesetzt} \\ &+304\cdot y - 120 = 0 \\ \text{woraus } y &= 0{,}39474 \\ \text{und } w &= -4{,}39474 \end{aligned}$$

Dieser Werth probirt, giebt:

$$\begin{aligned} (-4{,}39474)^4 &= 373{,}0206 \\ 8\times(-4{,}39474)^2 &= 154{,}5099 \\ 16\times(-4{,}39474) &= \qquad\qquad -70{,}31584 \\ \text{hierzu} & \qquad\qquad\quad \underline{-440{,}00000} \\ \text{Werth der Gl.} &= +527{,}5305 - 510{,}31584 \\ &= +17{,}2147 \end{aligned}$$

G. Für fortgesetzte Anwendung der *Regula falsi* hat man nun:

für

$x' = -4{,}28235$ Werth der Gl. $-25{,}5080\ (A')$
$x'' = -4{,}39474$ „ „ „ $+17{,}2147\ (A'')$

$$x'' - x' : x'' - w = A'' - A' : A''; \text{ d. i.}$$

$$-0{,}11239 : x'' - w = 42{,}7227 : 17{,}2147$$

$$\text{woraus } x'' - w = \frac{17{,}2147 \times 0{,}11239}{42{,}7227} = 0{,}0452864$$

Es ist $x'' = 4{,}39474$

woraus $w = 4{,}3494536$

Dieser Werth probirt, giebt:

$$\begin{aligned} (-4{,}3494536)^4 &= +357{,}88135 \\ 8\times(-4{,}3494536)^2 &= +151{,}34204 \\ 16\times(-4{,}3494536) &= \qquad\qquad -69{,}59126 \\ \text{hierzu die Bekannte} & \qquad\qquad\quad -440 \\ \text{Werth der Gleichung} &= +509{,}22339 - 509{,}59126 \\ &= -0{,}36787 \end{aligned}$$

H. Für die abermalige Anwendung der *Regula falsi* hat man:

$x'' = -4{,}39474$ Werth $= +17{,}21470$
$x''' = -4{,}3494536$ „ $= -0{,}36787$
mithin $0{,}0452864 : v - x''' = 17{,}58257 : 0{,}36787$

$$\text{woraus } v - x''' = \frac{0{,}0452864 \times 0{,}36787}{17{,}58257} = 0{,}0009475$$

und $v = 4{,}3504011$

Dieser Werth probirt, giebt:

$$(-4{,}350401)^4 = +358{,}19309$$
$$8\times(-4{,}350401)^2 = +151{,}40790$$
$$16\times(-4{,}350401) = \qquad -69{,}606416$$
hierzu die Bekannte $\qquad -440$
$$\text{Werth der Gleichung} = +509{,}60099 - 509{,}60642$$
$$= -0{,}00543$$

I. Für eine nochmalige Anwendung der ***Regula falsi*** hat man 2 negative Werthe der Gleichung, welche nicht brauchbar sind, nämlich:

für $x^{III} = 4{,}3494536$ den Werth $-0{,}36787$
für $x^{IV} = 4{,}3504011$ den Werth $-0{,}00543$

und die wahre Wurzel ist um etwas gröſser als x^{IV}

Probirt man daher mit $-4{,}3505$, so erhält man:

$$(-4{,}3505)^4 = +358{,}22574$$
$$8\times(-4{,}3505)^2 = +151{,}41484$$
$$16\times(-4{,}3505) = \qquad -69{,}6080$$
hierzu die Bekannte $\qquad -440$
$$\text{Werth der Gleichung} = +509{,}64058 - 509{,}6080$$
$$= +0{,}03258$$

K. Zur Anwendung der ***Regula falsi*** hat man nun:

für $x^{IV} = -4{,}3504011$ den Werth der Gl. $= -0{,}00543$
für $x^{V} = -4{,}3505000$ „ „ „ „ $= +0{,}03258$

$$x^V - x^{IV} (= 0{,}0000989) : 0{,}03801 = x^{IV} + w : 0{,}00543$$

$$\text{woraus } x^{IV} + w = \frac{0{,}0000989 \times 0{,}00543}{0{,}03801} = 0{,}0000141286$$

und $w = 4{,}3504152$

mit diesem Werth probirt, erhält man:

$$(-w)^4 = +358{,}19772$$
$$8(-w)^2 = +151{,}40887$$
$$16(-w) = \qquad -69{,}6066432$$
hierzu die Bekannte $\qquad -440$
$$\text{Werth der Gleichung} = +509{,}60659 - 509{,}6066432$$
$$= +0{,}00005$$

L. Die beiden Wurzeln sind also sehr nahe

$$+3{,}9760128$$
$$\text{und } -4{,}3504152$$

Dividirt man die ursprügliche Gl. durch

$$x - 3{,}9760128$$

so erhält man die Gl.

$$x^3 + 3{,}9760128\,x^2 + 23{,}80868\,x$$
$$+110{,}663614 = 0$$

Dividirt man diese Gl. durch

$$x + 4{,}3504152$$

so erhält man die Gl.

$$x^2 - 0{,}3744024\,x + 25{,}437485 = 0$$

Diese Gleichung enthält 2 unmögliche Wurzeln.

29. **Auflösung der Gleichungen mit mehreren unbekannten Gröſsen.**

A. Wenn die Aufgabe bestimmt sein soll, so müssen eben so viel Gleichungen gegeben sein, als Unbekannte vorhanden sind (s. Algebra).

In jeder Gl. müssen wenigstens 2 Unbekannte vorhanden sein.

$$ax + b = c$$
$$dy + e = f$$

sind nicht Gl. mit mehreren Unbekannten, sondern jede ist eine Gl. mit einer Unbekannten. Dagegen

$$ax + by = c$$
$$dx - ey = f$$

sind 2 Gleichungen mit 2 unbekannten Gröſsen,

$$\text{sowie } ax + by = c$$
$$bx + dz = e$$
$$fy + gz = h$$

sind 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten.

B. Die Auflösung solcher Gleichungen geschieht, daſs man aus den gegebenen Gl. eben so viele andere ableitet, von denen jede nur *eine* der Unbekannten enthält, wonach man nach dem Vorigen (No. 7. bis 26.) verfährt.

Für die eben gedachte Ableitung von Gleichungen mit nur einer Unbekannten hat man 2 Haupt-Verfahren: die Elimination und die Substitution. Das erste Verfahren besteht darin, die gegebenen Gleichungen so mit einander zu verbinden, daſs eine oder mehrere Unbekannte ausgeschieden werden; das zweite darin, daſs man aus einer Gl. eine Un-

bekannte entwickelt, und den so erhaltenen Werth, in welchem noch eine oder mehrere Unbekannte sich befinden, in die übrigen Gl. einsetzt.

Beispiel 1.

Die Gleichungen:

$$x+y=a$$
$$x-y=b$$

lös't man am einfachsten durch Elimination auf, indem man einmal beide addirt, und hiernach die zweite von der ersten subtrahirt. Man erhält

durch Addition $2x=a+b$

durch Subtraction $2y=a-b$

mithin ist $x=\frac{a+b}{2}$

und $y=\frac{a-b}{2}$

Bei Anwendung der Substitution würde man aus der ersten Gl. x entwickeln. Man erhält

$$x=a-y$$

und diesen Werth in die zweite Gleichung für x einsetzen.

Man erhält aus Gl. 2

$$(a-y)-y=b$$

woraus $a-2y=b$

und $y=\frac{a-b}{2}$

Diesen Werth wieder in Gl. 1 substituirt, giebt:

$$x+\frac{a-b}{2}=a$$

woraus $x=a-\frac{a-b}{2}=\frac{a+b}{2}$

Beispiel 2.

Sind die Gleichungen gegeben:

1) $ax+by=c$

2) $dx+ey=f$

so multiplicire, um x zu eliminiren, Gl. 1 mit d und Gl. 2 mit a

Man erhält

1) $adx+bdy=cd$

2) $adx-aey=af$

I. minus II. giebt $bdy+aey=cd-af$

und hieraus: $y=\frac{-cd-af}{bd+ae}$

Eben so multiplicire Gl. 1 mit e und Gl. 2 mit b, um y zu eliminiren, wonach man x findet.

Dasselbe Verfahren beobachtet man bei 3 und mehreren Gleichungen mit 3 und mehreren unbekannten Gröfsen.

C. Für quadratische Gleichungen mit 2 unbekannten Gröfsen hat man folgende einfachsten Fälle:

I.

1) $x+y=a$

2) $xy=b$

1 quadrirt, giebt $x^2+2xy+y^2=a^2$

$4\times$ Gl. 2 „ $+4xy=4b$

1 minus 2 giebt $x^2-2xy+y^2=a^2-4b$

oder $x-y=\pm\sqrt{a^2-4b}$

hierzu 1 $x+y=a$

giebt nach *B* Beispiel 1

$$\left.\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right\}=\frac{a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}$$

II.

1) $x-y=a$

2) $xy=b$

wie I. 1) $x^2-2xy+y^2=a^2$

$4xy=4b$

$x+y=\pm\sqrt{a^2+4b}$

hierzu $x-y=a$

giebt $x=\frac{1}{2}(a\pm\sqrt{a^2+4b})$

und $y=\frac{1}{2}(-a\pm\sqrt{a^2+4b})$

III.

1) $x+y=a$

2) $x^2+y^2=b$

1 quadrirt 3) $x^2+2xy+y^2=a^2$

3 – 2 giebt 4) $2xy=a^2-b$

ferner 5) $4xy=2(a^2-b)$

$\sqrt{3-5}$ $x-y=\pm\sqrt{2b-a^2}$

hierzu $x+y=a$

giebt $\left.\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right\}=\frac{1}{2}(a\pm\sqrt{2b-a^2})$

IV.

$x-y=a$

$x^2+y^2=b$

ebenso wie III behandelt, giebt

$$x=\frac{1}{2}(a\pm\sqrt{2b-a^2})$$
$$y=\frac{1}{2}(-a\pm\sqrt{2b-a^2})$$

V.

1) $x^2+y^2=a$

2) $xy=b$

$2\times$ Gl. 2.: $2xy=2b$

mithin $x+y=\pm\sqrt{a+2b}$

$x-y=\pm\sqrt{a-2b}$

woraus $\left.\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right\}=\frac{1}{2}[\pm\sqrt{a+2b}\mp\sqrt{a-2b}]$

oder

$$\left.\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right\}=\frac{1}{2}[\mp\sqrt{a+2b}\pm\sqrt{a-2b}]$$

VI. Die Gleichungen

$$x+y=a$$
$$x^2-y^2=b$$

können nicht durch Elimination allein aufgelös't werden. Man substituire daher sogleich $x=a-y$ aus der ersten Gleichung in die zweite, so hat man

$$(a-y)^2-y^2=0$$

Diese geordnet und aufgelös't, giebt

$$y=\frac{a^2-b}{2a}$$

Diesen Werth in die erste Gl. substituirt, giebt

$$x + \frac{a^2 - b}{2a} = a$$

woraus $x = \dfrac{a^2 + b}{2a}$

Bei Auflösungen der Gleichungen vom zweiten Grade ist daher die nächste Aufgabe, zu beurtheilen, nach welchem Verfahren die Auflösung am leichtesten geschehen kann.

Bei Gleichungen vom dritten und von höheren Graden kann nur in wenigen Fällen eliminirt werden. Z. B.:

VII. 1) $x + y = a$
2) $x^3 + y^3 = b$

Gl. 1 cubirt, giebt

$$x^3 + 3xy(x + y) + y^3 = a^3$$

hiervon Gl. 3 giebt

$$3xy(x + y) = a^3 - b$$

woraus $xy = \dfrac{a^3 - b}{3a}$

Diese Gl. verbunden mit Gl. 1, führt zur Auflösung nach Beispiel 1.

Algebraische Gröfse ist jede Gröfse, die entweder algebraisch gefunden oder zu Ausführung algebraischer Operationen gegeben worden ist; im Gegensatz von transcendenten Gröfsen, als: logarithmischen, trigonometrischen Gröfsen, Differenzialen und Integralen.

Algebraische Zeichen sind die Zeichen, deren sich die Algebra bedient, sowohl um die Gröfsen, mit denen sie operirt, als auch die Art der Operation mit denselben symbolisch darzustellen.

Bekannte Gröfsen werden, wenn sie bestimmt sind, durch die Zahlzeichen, wenn sie unbestimmt sind, durch die Anfangsbuchstaben des Alphabets ausgedrückt (a, b, c .....), unbekannte durch die Endbuchstaben (z, y, x, w ....)

Gröfsen, die auf gleiche oder ähnliche Weise mit bekannten oder unbekannten verbunden werden, bezeichnet man der leichteren Uebersicht wegen mit denselben Buchstaben und strichelt dieselben. Als:

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \ldots\ldots$$
$$ax_,^n + bx_,^{n-1} + cx_,^{n-2} \quad \ldots\ldots$$
$$ax_{,,}^n + bx_{,,}^{n-1} + cx_{,,}^{n-2} \quad \ldots\ldots$$

u. s. w.

$$ax + by + cz = X$$
$$a'x + b'y + c'z = X'$$
$$a''x + b''y + c''z = X''$$

für die Operationen hat man die folgenden Zeichen:

für die Addition (+) als $a + b$
d. h. a zu b addirt,

für die Subtraction (−) als $a - b$
d. h. b von a subtrahirt,

für die Multiplication (×) oder ein Punkt (·);

auch stellt man die Gröfsen ohne Multiplicationszeichen neben einander, als:

$$a \times b = a \cdot b = ab$$

heifst a mit b multiplicirt.

Das Zeichen für die Division ist (:) oder

$$a : b = \frac{a}{b}, \text{ d. h. } a \text{ durch } b \text{ dividirt.}$$

Das Zeichen für das Potenziiren ist die Wurzel mit dem rechts oberhalb derselben in kleinerem Maafsstabe geschriebenen Exponenten. Als $a' = a$

$$a^2 = a \cdot a;\ a^3 = a \cdot a \cdot a$$

Ebenso a^n, a^{n-1} u. s. w.

Das Zeichen für das Extrahiren ist (√) (wegen seiner Aehnlichkeit mit dem r, *radix*) mit eingeschriebenem Exponenten vor die Potenz gestellt, als $\sqrt[2]{a}$ ist die Zahl, welche mit sich selbst multiplicirt a giebt, so dafs, wenn diese Zahl mit x bezeichnet wird, $x^2 = a$ ist. $\sqrt[3]{b}$ ist die Zahl (y), welche 3 Mal mit sich selbst multiplicirt b giebt, also $y^3 = b$. Eben so $\sqrt[m]{a}$; für $\sqrt[2]{a}$ schreibt man auch $\sqrt{a}$

Ein Aggregat von Gröfsen, welches bei irgend einer Operation als eine einfache Gröfse angesehen werden soll, wird in Klammern ( ), [ ], geschlossen. Z. B.

$$a + b \times c + d$$

heifst: multiplicire b mit c, und dieses addire zu den Gröfsen a und d.

$$(a + b) \times c + d$$

heifst: addire a zu b, multiplicire diese Summe mit c und addire dies Product zu d.

$$a + (b \times c) + d$$

Hier hat die Klammer gar keine Bedeutung, denn das Product $b \times c$ wird auch ohne die Klammer als einfache Gröfse behandelt

$$(a + b \times c) + d$$

Hier hat die Klammer ebenfalls keine Bedeutung, denn auch ohne dieselbe würde die in der Klammer befindliche Gröfse zu d addirt werden.

$$(a + b)(c + d)$$

heifst: addire a zu b, addire c zu d und multiplicire beide Summen mit einander.

$5 + 6 \times 2 + 7$ giebt 24
$(5 + 6) \times 2 + 7$ giebt 29
$(5 + 6) \times (2 + 7)$ giebt 99
$5 + 6 \times (2 + 7)$ giebt 59

$a + b : c$ schreibt man auch $a + \dfrac{b}{c}$

$(a + b) : c$ desgl. $\dfrac{a + b}{c}$

indem der Divisionsstrich die Klammer vertritt.

$\sqrt{a}+c$ schreibt man lieber $c+\sqrt{a}$ denn die erste Darstellung könnte als Schreibfehler für $\sqrt{a+c}$ angesehen werden. und $\sqrt{a+c}$ ist gleichbedeutend mit $\sqrt{(a+c)}$

$\sqrt{(a+b)}\,(c+d)$ heifst allerdings so viel, als $\sqrt{(a+b)\,(c+d)}$ man vermeidet aber jedenfalls Irrthümer, wenn man die zweite Schreibart wählt, besonders wenn man statt einer strengen Schreibart, wie $(c+d)\sqrt{a+b}$ die minder strenge $\sqrt{a+b}(c+d)$ sich angeeignet hat.

Die Algebra bedient sich noch mehrerer Zeichen, welche die Beziehung von Gröfsen zu einander ausdrücken und welche auch die Geometrie anwendet, als: das Gleichheitszeichen (=), z. B. $a=b$; d. h. a ist gleich b;

das Ungleichheitszeichen (>, <)

$a>b$ heifst: a ist gröfser als b, oder b ist kleiner als a,

$a<b$ heifst: a ist kleiner als b, oder b ist gröfser als a,

$a \gtrless b$ heifst: a und b sind einander ungleich; es wird jedoch unbestimmt gelassen, welche Gröfse von beiden die gröfsere oder die kleinere sei.

Das Zeichen 0 für Null, und ∞ für unendlich.

Alhidade (arabischer Name). Das an jedem Winkelmefs-Instrument befindliche Lineal, dessen vordere, mit den Diooptern oder der Axe des Fernrohrs in einerlei Ebene befindliche Kante um den Mittelpunkt des in Grade u. s. w. eingetheilten Kreisringes drehbar ist, so dafs die auf die Visirlinie fallende Theilung genau abgelesen werden kann.

Aliquoter Theil der Einheit oder einer Zahl ist ein Theil derselben, der mit einer ganzen Zahl multiplicirt dem Ganzen gleich wird. $\frac{2}{13}$ ist ein a. Th. von 2; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$ u. s. w. also Brüche, deren Zähler =1 ist, sind a. Th. der Einheit und jeder ganzen Zahl. Eben so ist $\frac{2}{7}$ von $\frac{6}{7}$ ein a. Th.

Allgemein ist die Eigenschaft des Inbegriffs einer Menge von Bestimmten einerlei Art.

Allgemein ist eine Aufgabe, wenn sie die Eigenschaft hat, alle nur möglichen bestimmten Aufgaben derselben Art in sich zu vereinigen.

Z. B. Eine Zahl a in 2 Theile zu theilen, dafs sich der eine Theil zum andern wie m zu n verhalte, ist die allgemeine Aufgabe für alle bestimmten Aufgaben derselben Art:

Also die Zahl 10 (oder 12, 13, 14, 15 u. s. w.) in 2 Theile zu theilen, dafs sich der eine Theil zum andern wie 1 : 2 (oder wie 5 : 7; oder wie 11 : 19 u. s. w.) verhalte.

Die Auflösung der allgemeinen Aufgabe ist: die Theile sind $\frac{m}{m+n}\cdot a$ und $\frac{n}{m+n}\cdot a$

Mit dieser allgemeinen Auflösung sind alle die nachstehenden bestimmten Aufgaben aufgelös't, wenn man die gegebene zu theilende Zahl für a und die Verhältnifszahlen der Theile für m und n setzt.

Als: 50 in 2 Theile zu theilen, die sich wie 3 : 2 verhalten.

Man erhält den einen Theil

$$\frac{3}{3+2}\cdot 50=30$$

den andern Theil $\frac{2}{3+2}\cdot 50=20$

Jede algebraische Formel (s. d.) ist die allgemeine Vorschrift zu einem Verfahren mit bestimmten Zahlen.

$$a^2-b^2=(a+b)\,(a-b)$$

zeigt, wie man die Differenz der Quadrate zweier Zahlen durch eine Multiplication finden kann. Z. B.

$$348^2-347^2=(348+347)\,(348-347)$$
$$=695\times 1=695$$
$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$$
$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+ab^2\pm b^3$$

sind Vorschriften, wonach eine zweigliedrige Gröfse durch Summirung zum Quadrat und zum Cubus erhoben werden kann. Der binomische Satz:

$$(a\pm b)^n=a^n\pm\frac{n}{1}\cdot a^{n-1}b$$
$$+\frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot a^{n-2}b^2\pm\ldots$$

ist eine noch allgemeinere Vorschrift, indem man aufser 2 und 3 noch alle höheren Zahlen für n setzen kann.

Moch allgemeiner als der binomische ist der polynomische Satz.

Dasselbe ist mit den Formeln der Geometrie. Jeder geometrische Satz ist ein allgemeiner und hat Geltung auf alle Linien oder Flächen oder Körper, auf die der Satz lautet. Z. B. der Satz: Dreiecke verhalten sich wie die Producte aus Grundlinie und Höhe — gilt für Dreiecke von allen nur möglichen bestimmten Dimensionen.

Die Coordinatengleichung für die Ellipse enthält das allgemeine Gesetz der Construction dieser Curve, die allgemeine Coordinatengleichung für sämmtliche Kegelschnitte ist noch allgemeiner, denn sie enthält aufserdem noch das Gesetz der Construction für den Kreis, die Parabel

und die Hyperbel, für alle möglichen bestimmten Parameter.

Allgemeine Gleichung, Literalgleichung. Eine Gleichung, in welcher die bekannten Gröfsen in Buchstaben gegeben sind.

Alligationsrechnung, Alligationsregel. Lehrt, von zweien zu mischenden Stoffen von gegebenen Werthen die Quantität eines jeden einzelnen Stoffs zu bestimmen, damit eine Mischung von gegebenem Mittelwerth der Einheit entstehe. Die Aufgabe ist:

Zwei Stoffe, A und B, deren Einheiten die Werthe m und n haben, so zu vermischen, dafs die Einheit der Mischung den zwischen m und n liegenden Werth k erhält.

Nennt man die Quantitäten der Stoffe zu dem Gemisch für die Gewichts- oder Raum-Einheit x und y, so ist der Werth des Gemisches $(x+y)k$

der Werth der einzelnen Stoffe

$$x \cdot m + y \cdot n$$

also $(x+y)k = xm + y \cdot n$

nun ist $x+y=1$, daher $y=1-x$

mithin erhält man

$$k = x \cdot m + (1-x)n$$

woraus x, die Quantität des Stoffs

$$A = \frac{k-n}{m-n}$$

und y, die Quantität des Stoffs

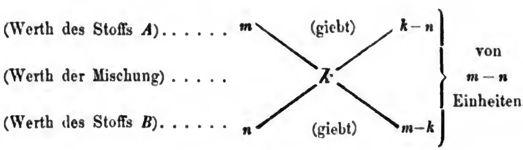
$$B = \frac{m-k}{m-n}$$

Soll die Quantität der Mischung P Einheiten enthalten, so hat man erforderlich

von dem Stoff $A = \frac{k-n}{m-n} P$ Einheiten

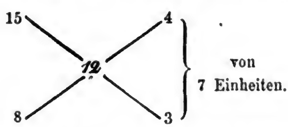
„ „ „ $B = \frac{m-k}{m-n} P$ Einheiten.

Man giebt demnach in einigen Rechenbüchern recht gute praktische Regeln, für welche man folgende bildliche Darstellung wählen könnte:



Beispiel. Es soll aus 15löthigem und 8löthigem Silber 12löthiges gemischt werden.

Man hat:



Zu jeden 7 Loth Mischung sind also 4 Loth 15löthiges und 3 Loth 8löthiges Silber erforderlich, und es sind dann

$4 \times 15 + 3 \times 8 = 7 \times 12 = 84$ (auf 7 Loth).

Alkoholometer. Ein Aräometer (s. d.) ausschliefslich zur Bestimmung der Dichtigkeit des Alkohol.

Almucantharat, Almucantharatskreis, Höhenkreis. Der auf der Himmelskugel durch einen Stern gelegte, mit dem Horizont des auf der Erdoberfläche befindlichen Standorts parallele Kreis, dessen Pole also das Zenith und das Nadir sind. Gestirne, die in demselben A. sich befinden, haben für den Standort einerlei Höhe und einerlei Scheitel-Abstand. Der Horizont des Orts ist der unterste A., Gestirne darin haben die Höhe = Null und den Scheitel-Abstand (Zenith-Distanz) = 90°.

Alternirende Function ist bei französischen Mathematikern jede Function mehrerer veränderlichen Gröfsen, in welcher man zwei beliebige derselben mit einander vertauschen kann, ohne dafs sich deren absoluter Werth ändert, wenngleich deren Vorzeichen geändert werden, als:

$$x - y = -(y - x); \; log\,x - log\,y$$
$$= -(log\,y - log\,x)$$
$$= log\,\frac{x}{y} = -(log\,\frac{y}{x}).$$

Altimeter, Höhenmesser. Jedes Instrument, mit welchem Höhen gemessen werden können.

Altimetrie, Höhenmefskunst.

Ambe. Jede Verbindung von je zwei Zahlen-Elementen: *ab, cd*, 1 · 2; 2 · 1 u. s. w. Die Bezeichnung Ambe ist jedoch vorzugsweise im Lotto gebräuchlich, in der Combinationslehre sagt man Binion.

Amorphe Körper (*μορφη* die Gestalt, *α* Verneinungssylbe), ungestaltete Körper, im Gegensatz von krystallisirten und krystallinischen Körpern. Erstere entstehen in der Natur durch Sedimente aus Flüssigkeiten, letztere beide, indem sie sich, wenn sie aus dem flüssigen Zustand in den festen übergehen, nach verschieden gelegenen geradlinigen Richtungen formiren.

Amphiscii (Zweischattige, eigentlich Amphiskii, von *σκια* der Schatten). Die Bewohner der heifsen Zone, weil ihr Mittagsschatten bald nördlich, bald südlich fällt; sie heifsen aber auch Ascii (Unschattige, Schattenlose), weil sie den Mittagsschatten der Sonne gröfstentheils unter den Füfsen haben.

Amplitude, in der nautischen Sprache s. v. w. Morgen- und Abendweite eines Gestirns (s. letztere).

Analogischer Beweis. Ist ein Beweis in Beziehung auf einen ihm vorangegangenen Beweis, der denselben Gegenstand nicht in seiner ganzen Allgemeinheit erfafst hat, indem nun der zweite den ersten erweitert oder vervollständigt. Wenn z. B. erwiesen worden, dafs in einem Vieleck von n Seiten (n eck) mit lauter hohlen Umfangswinkeln die Summe aller nach einerlei Richtung liegenden äufseren Winkel = 4 Rechten ist, und es wird dies Gesetz auch für n ecke mit erhabenen Umfangswinkeln erwiesen, so ist dieser zweite Beweis ein dem ersten a. B.

Analysis. Ist die Darstellung und Auflösung einer jeden allgemein gegebenen Rechnungs-Aufgabe. Statt der bestimmten Zahlen wendet sie allgemeine Zahlen an, welche in symbolischen Zeichen, in Buchstaben bestehen, von welchen jeder eine jede beliebige bestimmte Zahl vertritt.

Die A. zerfällt in 2 Haupttheile, in die niedere A. oder die A. des Endlichen, und in die höhere A. oder die A. des Unendlichen.

Die Darstellung und Auflösung der Elementar-Aufgaben, die Grundlage der gesammten A. lehrt die Buchstabenrechnung. Diese zerfällt in 3 Theile: 1) in die 4 Species mit einfachen Buchstabengröfsen, 2) in die 4 Species der Potenzen und Wurzeln von Buchstabengröfsen und 3) in die Entwickelung der Potenzen und Wurzeln in endliche und unendliche Reihen. Sie ist der erste Abschnitt der A., den zweiten Abschnitt bildet die Algebra (s. d.), den dritten und letzten Theil der niedern A. die Wissenschaft von den Functionen, d. h. von zusammengesetzten Gröfsen, deren Werthe von einer oder mehreren veränderlichen Gröfsen abhängig sind. So verschiedenartig solche Abhängigkeiten sind, so verschiedenartige Functionen giebt es.

$$-x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots \pm x^n$$

ist eine Gröfse in Form einer Reihe, deren Werth von der veränderlichen Gröfse x abhängig ist, und somit eine (algebraische) Function von x.

$\log x$; $\cos x$; sind Functionen von x, erstere eine logarithmische, letztere eine trigonometrische; beide transcendente Functionen.

Wenn man $-x$ durch $1+x$ dividirt, so erhält man die obige Reihe, also ist:

$$\frac{-x}{1+x} = -x + x^2 - x^3 + \ldots \ldots \pm x^n$$

Diese Entwickelung eines bestimmten analytischen Ausdrucks in eine unendliche Reihe lehrt die Buchstabenrechnung.

Ist aber die unendliche Reihe gegeben, und man soll dieselbe in einen endlichen Ausdruck verwandeln oder umformen, so reicht die Buchstabenrechnung nicht aus.

Man setze die Reihe:

$$-x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots \ldots \pm x^n = X$$

multiplicire diese Gleichung mit x, so erhält man:

$$-x^2 + x^3 - x^4 + \ldots \ldots \mp x^n = xX$$

addirt man die untere Reihe zur oberen, so erhält man:

$$-x = X + xX = (1+x)X$$

woraus $x = \dfrac{-x}{1+x}$

Es ist also der Unterschied der Buchstabenrechnung von der Rechnung mit algebraischen Functionen, dafs bei jener die Art der Entwickelung durch eine einfache Rechnungsart vorgeschrieben ist, während bei dieser eine Gleichung dargestellt und aufgelös't werden mufs. Dagegen ist auch zwischen der Behandlung der Functionen und der Algebra der Unterschied, dafs bei dieser aus den algebraischen Gleichungen unbekannte Gröfsen zu entwickeln sind, während bei jener keine Unbekannten gegeben werden, sondern in analytischen Gleichungen veränderliche Gröfsen, die umgeformt werden sollen.

Die A. des Unendlichen besteht aus 2 Theilen, aus der Differenzialrechnung und aus der Integralrechnung. Beide beschäftigen sich mit den Grenzwerthen und Grenzverhältnissen von Functionen, die mit den veränderlichen

Gröſsen, von welchen sie abhangen, als wirklich sich ändernd gedacht werden. Die Differenzialrechnung bestimmt die Grenzverhältnisse von Functionen, wenn diese gegeben sind, die Integralrechnung die Functionen aus gegebenen Grenzwerthen; beide Rechnungen verhalten sich zu einander wie das Potenziiren zum Radiciren.

Die ausführliche Betrachtung der A. des Unendlichen gehört hiernach in die Artikel: Differenzialrechnung und Integralrechnung. Um aber schon hier eine Anschauung von der Wichtigkeit der beiden Rechnungen zu geben, sollen folgende kurze Erläuterungen gegeben werden.

Man denke in und um einen Kreis reguläre Vielecke von gleich viel Seiten beschrieben, das innere hat einen kleineren, das äuſsere Vieleck einen gröſseren Inhalt als die Kreisfläche; durch einmalige und wiederholte Verdoppelung der Seiten beider Vielecke wird das äuſsere immer kleiner, das innere immer gröſser; allein wenngleich beide Vielecke der Kreisfläche sich auch immer mehr nähern, das äuſsere bleibt immer gröſser, das innere immer kleiner als dieselbe, und mithin ist die Gröſse der Kreisfläche der Grenzwerth zwischen beiden Vielecken, dem sich ihre Flächenräume beliebig nähern können.

Wenn man die Function von x,

$$y = \frac{a^n - x^n}{a - x}$$

durch wirkliche Division in eine Reihe entwickelt, so erhält man:

$$y = \frac{a^n - x^n}{a - x} = a^{n-1} + a^{n-2}x + a^{n-3}x^2 + \ldots\ldots x^{n-1}$$

Aus dieser Reihe ersieht man, daſs, wenn man x immer kleiner nimmt, die gesammten, x enthaltenden Glieder in Summe immer kleiner werden müssen, daſs sich also der Werth der Reihe oder der Werth von y dem Werth von a^{n-1} immer mehr nähert. Da nun bei beliebiger Abnahme von x der Werth von y dem Werth a^{n-1} beliebig sich nähern, nie aber geringer werden kann, als a^{n-1}, so ist a^{n-1} der Grenzwerth von y.

Je näher aber x dem a genommen wird, desto mehr nähert sich das zweite Glied $a^{n-2}x$ dem Werth a^{n-1}, das dritte Glied $a^{n-3}x^2$ eben demselben Werth a^{n-1} und so jedes der $n-1$ Glieder, welche x enthalten; es nähert sich also y immer mehr dem Werth $n \cdot a^{n-1}$; und da man die Annäherung von x an a beliebig fortsetzen, y also dem Werth na^{n-1} beliebig nahe kommen kann, ohne jemals dessen Werth zu übersteigen, so ist na^{n-1} ein zweiter Grenzwerth von y.

Es sei $y = x^3$.

Aendert sich x um $\triangle x$, so ändere sich y um $\triangle y$. Dann hat man:

$$y + \triangle y = (x + \triangle x)^3 = x^3 + 3x^2 \triangle x + 3x \triangle x^2 + \triangle x^3$$

hiervon $y \qquad = x^3$

bleibt $\triangle y = 3x^2 \triangle x + 3x \triangle x^2 + \triangle x^3$

Diese Gleichung zwischen den Werthen der Aenderungen von x und deren Function y ist also die Differenzengleichung zwischen beiden Functionen.

Um das Verhältniſs zu erkennen, in welchem die Aenderung der Function y zu der Aenderung der Veränderlichen x sich befindet, dividire die Gleichung durch $\triangle x$, so erhält man das Verhältniſs:

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = 3x^2 + 3x \triangle x + \triangle x^2$$

Man nennt ganz naturgemäſs dieses Verhältniſs den Differenzenquotient von y und x. Dieser ist, wie die drei Glieder zeigen, nicht nur abhängig von der gegebenen Veränderlichen x, sondern auch von deren Aenderung um $\triangle x$; nun ist aber die Gröſse $\triangle x$, um welche x in $x + \triangle x$ umgeändert worden, etwas ganz Beliebiges, Unbestimmtes, von welchem der Differenzenquotient befreit werden muſs, wenn er in bestimmter Relation zu den ursprünglichen Functionen sich befinden soll.

Als solcher ist er also $= 3x^2$.

Dieser, nur von der veränderlichen Gröſse abhängige Differenzenquotient, der für jede Function einer veränderlichen Gröſse bestimmt angegeben werden kann, heiſst Differenzial-Quotient, und wird allgemein ausgedrückt durch $\frac{\partial y}{\partial x}$, wo ∂y und ∂x die Differenziale von y und x heiſsen.

Aus dem Differenzenquotient

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = 3x^2 + 3x \triangle x + \triangle x^2$$

ersieht man zugleich, daſs man dem Werthe $3x^2$ immer näher kommt, je mehr man $\triangle x$ abnehmen läſst, so daſs der Differenzialquotient $3x^2$ der Grenzwerth des Differenzenquotienten ist.

Die Integralrechnung beschäftigt sich damit, die ursprünglichen Functionen aus gegebenen Differenzialen zu finden.

$$y = \int 3x^2 \cdot \partial x = x^3$$

d. h. das Integral y, dessen Differenzialquotient = ist $3x^2$ ist $= x^3$.

Analysis des Endlichen s. u. Analysis.

Analysis des Unendlichen s. u. Analysis.

Analytik. Ist die Analysis als Methode oder Verfahrungsweise bei Erfindung von neuen Sätzen und bei Auflösung von Aufgaben, sowohl für Zahlengröfsen, als auch für Raumgröfsen. Für die letzteren steht sie der Synthesis gegenüber, welche mit Hülfe geometrischer Constructionen und logischer Schlufsfolgen verfährt (s. die folgenden Art.)

Analytisch. Alles, was zur Analysis und der Analytik gehört.

Analytische Auflösung einer geometrischen Aufgabe ist die Construction einer algebraischen Formel gemäfs (lies zuerst: Analytische Geometrie).

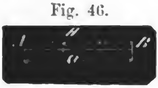
Beispiel:

Euklid, 2. Buch, Satz 11. Aufgabe: Eine gegebene gerade Linie AB so zu schneiden, dafs das unter der Ganzen und einem der beiden Abschnitte enthaltene Rectangel dem Quadrat des übrigen Abschnitts gleich sei.

Die im Euklid gegebene Auflösung und der Beweis deren Richtigkeit sind synthetisch.

Die analytische Auflösung dieser Aufgabe ist folgende: Die Linie AB sei $=a$, ein Theil BH derselben setze $=x$, so ist das Rectangel unter der Ganzen und einem der beiden Abschnitte entweder ax

Fig. 46.



oder $a(a-x)$. Das Quadrat des zweiten Abschnitts entweder $(a-x)^2$ oder x^2. Für die erste Bezeichnung erhält man die algebraische Gleichung:

$$ax = (a-x)^2$$

woraus $x^2 - 3ax + a^2 = 0$

und $x = \frac{a}{2}(3 - \sqrt{5})$

Für die zweite Bezeichnung erhält man die Gleichung:

$$a(a-x) = x^2$$

woraus $x^2 + ax - a^2 = 0$

und $x = \frac{a}{2}(-1 + \sqrt{5})$

Bis hierher ist die Auflösung algebraisch. Allein es soll die Theilung der Linie gefunden und diese Theilung einer algebraischen Formel gemäfs construirt werden. Demnach nehme man eine der beiden auf 0 reducirten Gleichungen. Z. B.

$$x^2 - 3ax + a^2 = 0$$

und schreibe für $x = \frac{a}{2}(3 - \sqrt{5})$

$$x = +\frac{3a}{2} - \sqrt{\left(\frac{3a}{2}\right)^2 - a^2}$$

so hat man in dem ersten Gliede die Linie $AB +$ der Hälfte derselben und in dem zweiten Gliede die Kathete des rechtwinkligen Dreiecks, dessen Hypothenuse das erste Glied $\frac{3}{2}a$ und dessen andere Kathete die Linie $a = AB$ ist.

Demnach hat man für die Construction folgende Vorschrift: Halbire die gegebene AB in C, verlängere AB nach einer Seite, nimm $BD = BC$, so ist $AD = \frac{3}{2}a$. Halbire AD in E, beschreibe über AD den Halbkreis AFD, beschreibe aus A mit AB den Bogen BF, so ist die gerade Linie von A nach $F = a$, folglich die Linie $DF = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - a^2}$. Beschreibt man nun aus D mit DF den Bogen FH, so ist $DH = DF$ und $AH = \frac{3}{2}a - \sqrt{\left(\frac{3a}{2}\right)^2 - a^2}$ folglich GH, das Rectangel $AB + AG = HI$ dem Quadrat von BH.

Fig. 47.



Legt man die zweite Gleichung der Construction zu Grunde, nämlich:

$$x^2 + ax - a^2 = 0$$

so erhält man:

$$x = -\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2}$$

Das zweite Glied ist die Hypothenuse des rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten a und $\frac{1}{2}a$ sind, das erste Glied die halbe Seite a.

Demnach hat man folgender Art zu construiren. Halbire AB in C, errichte in B das Loth $BD = BC$ auf AB, ziehe

AD, so ist $AD = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2}$. Beschreibe aus D den Bogen BE mit BD, so ist $DE = \frac{1}{2}a$ und $AE = -\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2}$.

Fig. 48.



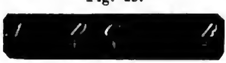
Beschreibt man nun den Bogen EH aus A mit AE, so ist H der Theilpunkt und das Quadrat über AH = dem Rectangel aus $AB = BF$ und BH. (S. analytische Geometrie.)

Analytischer Beweis. Ein Beweis, bei welchem man von der Schlufsfolge des Satzes ausgeht und Rückschlüsse macht, bis man auf einen vorher erwiesenen Satz kommt. Der a. B. dient besonders, um von der Richtigkeit von Behauptungen sich zu überzeugen. Der a. B. eines geometrischen Satzes geschieht mit Hülfe von analytischen Gleichungen.

Beispiel. Euklid, 2. Buch, Satz 9. Lehrsatz.

Wird eine gerade Linie AB bei C in gleiche und bei D in ungleiche Stücke geschnitten, so sind die beiden Quadrate

Fig. 49.



der ungleichen Stücke AD, DB doppelt so grofs, als die beiden Quadrate der Hälfte AC und des zwischen den Theilpunkten befindlichen Stücks CD.

Der Satz ist im Euklid synthetisch bewiesen. Gesetzt, man wollte sich von der Wahrheit des Satzes überzeugen, und scheute die Durchlesung des langen Euklidischen Beweises, so kann dies analytisch folgender Art geschehen.

Man bezeichne das Stück AD der Linie AB mit a, das Stück DB mit b, so hat man die Quadrate dieser ungleichen Stücke a^2 und b^2. Die ganze Linie ist nun $a+b$, deren Hälfte also $\frac{a+b}{2}$, das Quadrat derselben $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$, und beide Quadrate der Hälfte sind $= 2\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$. Nun ist noch das Quadrat des Stücks DC auszudrücken.

Es ist aber $AC = \frac{a+b}{2}$, $AD = a$, daher $DC = AC - AD = \frac{a+b}{2} - a = \frac{b-a}{2}$, das $\square$ von $DC = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2$ und das Doppelte desselben $= 2\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$

Ist nun der Satz richtig, so mufs folgende analytische Gleichung richtig sein.

$$a^2 + b^2 = 2\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

wie sich aus der Auflösung der Klammergröfsen auch ergiebt.

Analytische Formel. Ist eine Formel, welche eine Vorschrift enthält zur Entwickelung einer zusammengesetzten Gröfse in ihre Bestandtheile, als: in Summanden, Factoren, in eine endliche oder unendliche Reihe, als:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{2 \cdot 4a^3} - \frac{x^6}{2 \cdot 2 \cdot 4a^5} - \ldots - \frac{x^{2(n-1)}}{2^2(n-3) \cdot 4a^{2n-3}} \text{ oder auch}$$

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a - \frac{x^2}{2a} - \frac{1 \cdot x^4}{2 \cdot 4a^3} - \frac{1 \cdot 3x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6x^5} - \ldots - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-5)\, x^{2(n-1)}}{2[1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)]\, a^{2n-3}}$$

Analytische Geometrie ist derjenige Theil der Geometrie, welcher sich damit beschäftigt, aus algebraischen Entwickelungen geometrische Constructionen abzuleiten (vergl. analytische Auflösung).

I. Wenn jeder Buchstab in den nachstehenden Ausdrücken eine Linie bezeichnet, so sind die Elementar-Constructionen in folgenden Ausdrücken gegeben.

1) $a + b$

ist die Summe zweier gegebenen geraden Linien a und b, welche in eine Linie von

der Länge $(a+b)$ zusammengesetzt werden sollen.

Fig. 50.



2) $a-b$

ist die Differenz zweier gegebenen geraden Linien a und b; die zu construirende Linie soll deren Unterschied $(a-b)$ zur Länge erhalten.

Fig. 51.



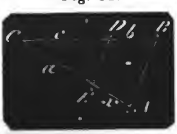
3) $\frac{a \times b}{c}$

ist die vierte geometrische Proportionale zwischen den gegebenen 3 Linien a, b und c. Nennt man diese x, so hat man

$$c:a=b:x$$

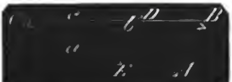
Man hat also für x folgende Construction. Zeichne einen beliebigen Winkel ACB, trage auf einem der Schenkel z. B. CB vom Scheitelpunkt aus die im

Fig. 52.



Nenner stehende Linie $c=CD$ ab, auf demselben Schenkel von dem Endpunkt D ab, wie Fig 52, oder ebenfalls vom Scheitelpunkt ab, wie Fig. 53: die Länge einer der beiden im Zähler stehenden

Fig. 53.



Linien z. B. b, Fig. 52 $=DB$, Fig. 53 $=CB$; dann auf dem anderen Schenkel CA vom Scheitelpunkt C ab, die zweite Linie a des Zählers $=CE$, ziehe die gerade Linie DE, und aus B die gerade Linie $BA \mp DE$, bis sie den Schenkel CA in A trifft oder schneidet, so ist EA in Fig. 52 oder CA in Fig. 53 $=x$, d. h. $=\frac{ab}{c}$

4) $\frac{a^2}{b}$

ist die dritte geometrische Proportionale zwischen b und a. Nennt man diese x, so hat man

$$b:a=a:x$$

Fig. 54.



Die Construction ist wie für 3. Man nimmt am einfachsten die Linien a und b vom Scheitelpunkt ab, fängt mit der Linie b des Nenners an, nimmt diese $=CB$, trägt a nach CD, beschreibt aus

Fig. 55.

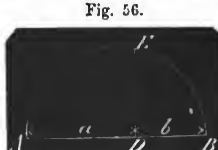


C den Bogen DE, so dafs auch $CE=a$ wird, zieht BE und aus D die Linie $DA \mp BE$, so ist $CA=x=\frac{a^2}{b}$

5) $\sqrt{a \cdot b}$

ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen den gegebenen Linien a und b. Zeichne eine gerade Linie AB, nimm

Fig. 56.



$AD=a$, $DB=b$, halbire AB in C, beschreibe aus C über AB einen Halbkreis, errichte in D auf AB das Loth DE, bis sie die Kreislinie schneidet, so ist

$$DE=\sqrt{ab}$$

Oder zeichne über die gröfsere $a=AB$ von beiden gegebenen Linien einen Halbkreis, nimm von einem der Endpunkte,

Fig. 57.



z. B. von A aus, $AD=b$, errichte bis zum Halbkreis das Loth DE, ziehe AE, so ist

$$AE=\sqrt{a \cdot b}$$

6) $\sqrt{a^2+b^2}$

ist die Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, in welchem a und b die Katheten sind. Zeichne also einen rechten $\angle ACB$, nimm $AC=a$, $CB=b$, so ist

$$AB=\sqrt{a^2+b^2}$$

Fig. 58.



7) $\sqrt{a^2-b^2}$

ist die Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, in welchem a die Hypothenuse und b die andere Kathete ist. Zeichne also

Fig. 59.



einen rechten $\angle ACB$, nimm auf einem Schenkel, z. B. CB von C aus, das Stück $CD=b$, schneide von D aus mit der Zirkelöffnung $=a$ den anderen Schenkel A in E, so ist

$$CE=\sqrt{a^2-b^2}$$

8) $\sqrt{a^2+b^2+2ac}$

ist die in einem stumpfwinkligen Dreieck dem stumpfen $\angle$ gegenüber liegende Seite, wenn a und b die beiden anderen Seiten und c die Projection von b auf a ist. Zeichne daher eine gerade Linie AD, nimm auf derselben AB gleich derjenigen von beiden Seiten a und b, welche in

Fig. 60.



dem dritten Gliede als Factor steht, hier also $=a$, und in deren Verlängerung BD = der Länge c, errichte in D auf AD ein Loth und schneide dasselbe von B aus mit der Zirkelöffnung der gegebenen zweiten Länge b in E, ziehe AE, so ist

$$AE=\sqrt{a^2+b^2+2ac}$$

9) $\sqrt{a^2+b^2-2ac}$

ist die einem spitzen $\angle$ gegenüber liegende Seite eines Dreiecks, in welchem a und b die beiden anderen Seiten desselben sind und c die Projection von b auf a

Fig. 61.



ist. Zeichne daher eine gerade Linie AB = derjenigen von beiden Seiten, welche in dem dritten Gliede als Factor steht, hier also $=a$, nimm darauf $AD=c$, errichte in D ein Loth auf AB, schneide dasselbe von A aus mit der Zirkelöffnung = der anderen Seite b in E, zeichne BE, so ist

$$BE=\sqrt{a^2+b^2-ac}$$

II. Die in der algebraischen Geometrie gefundenen Formeln für bestimmte Linien sind zur unmittelbaren Construction nicht geeignet.

Beispiel 1. Für die Diagonale eines Quadrats von der Seite a erhält man $a\sqrt{2}$

Soll construirt werden, so ist die Formel umzuändern. Schreibe

$$a\sqrt{2} = \sqrt{2a^2} = \sqrt{a^2 + a^2}$$

und es ist nun nach Formel 6 zu construiren.

Beispiel 2. Man erhält für die Seite des regulären Dreiecks im Kreise bei gegebenem Halbmesser r die Formel $r^2\sqrt{3}$ Schreibe

$$r^2\sqrt{3} = \sqrt{3r^2} = \sqrt{4r^2 - r^2} = \sqrt{(2r)^2 - r^2}$$

und man construirt nach Formel 7.

Beispiel 3. Man erhält für die Seite des regulären Fünfecks im Kreise, wenn der Halbmesser $= r$ gegeben ist, die Formel

$$r\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} \text{ Schreibe } \sqrt{r^2 \cdot \frac{5-\sqrt{5}}{2}}$$

$$= \sqrt{r \cdot \frac{5r - r\sqrt{5}}{2}} = \sqrt{r \cdot \frac{5r - \sqrt{5r^2}}{2}}$$

$$= \sqrt{r \cdot \left(\frac{5}{2} r - \tfrac{1}{2}\sqrt{(2r)^2 - r^2}\right)}$$

Nun ist $\frac{1}{2}\sqrt{(2r)^2 - r^2}$ (nach Beispiel 2) die halbe Seite des regulären Dreiecks. Diese abgezogen von $2\frac{1}{2} r$, giebt die Klammergröſse als Linie, wird diese $= p$ gesetzt, so hat man die Seite des Fünfecks $\sqrt{rp}$, also die mittlere geometrische Proportionale zwischen r und p, welche nach 5 construirt wird.

Analytische Gleichung. Ist die Gleichsetzung zweier algebraischer gleichen Ausdrücke von verschiedener Form. Man wendet sie an, um analytische Formeln (s. d.) zu entwickeln. Z. B.

$$\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{2}}$$

$$= \sqrt{\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{2}}\right)^2}$$

$$= \sqrt{a \pm 2\sqrt{\left(\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{2} \times \frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{2}\right)}}$$

$$= \sqrt{a \pm 2\sqrt{\frac{b^2}{4}}} = \sqrt{a \pm b}$$

Man hat also die Formel erhalten:

$$\sqrt{a \pm b} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{2}}$$

$$\pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{2}}$$

Analytische Mechanik ist der Theil der M., in welchem mit Hülfe der Analysis Sätze entwickelt und Aufgaben aufgelöst werden.

Analytische Methode ist das Verfahren, auf analytischem Wege Sätze zu finden und Aufgaben zu lösen, indem nämlich der Zusammenhang des Bekannten und Unbekannten oder Veränderlichen als Gleichung aufgestellt und dadurch entwickelt wird, daſs Unbekanntes und Veränderliches wie Bekanntes behandelt wird. Bei Auffindung oder Prüfung eines Satzes stellt man die Gleichung so auf, als wenn der Satz schon als wahr erwiesen wäre (s. analytischer Beweis). Bei Auflösung von Aufgaben stellt man die Gleichung auf, als wenn die Auflösung schon gefunden wäre (s. analytische Auflösung).

Analytische Trigonometrie. 1) Ist der Theil der Trigonometrie, welcher von der Entstehung der trigonometrischen Functionen durch geometrische Construction ganz absieht, welche aus denselben Formeln entwickelt und rechnungsweise mit denselben verfährt.

Um z. B. die Formel

$$\cot(2\alpha) = \frac{\cot^2\alpha - 1}{2\cot\alpha}$$

zu finden, kann man folgender Art synthetisch verfahren:

Fig. 62.



Man zeichne $\angle ECB = \angle ACB = \alpha$, beschreibe aus C mit dem Halbmesser $AC = 1$ den Bogen ABE, vollende den Quadrant ACD, errichte das Loth DG auf CD bis in die Richtung CB, verlängere CE bis F in DG, fälle das Loth GK auf die verlängerte CA, zeichne aus C mit CK den Quadrant KL, ziehe die mit DG Parallele LM bis in die verlängerte CB und fälle das Loth MH auf die verlängerte CK, so hat man

$$\angle\alpha = \angle GCK = \angle FCG = \angle FGC$$

daher $FG = FC$

da nun $\angle CDF = R$, also $\angle CFG$ stumpf ist, so ist

$$CG^2 = FG^2 + FC^2 + 2FG \cdot DF$$
$$= 2FG^2 + 2FG \cdot DF$$

oder

$$DG^2 + CD^2 = 2FG \cdot (FG + DF)$$
$$= 2FG \cdot DG$$
$$= 2(DG - DF) \cdot DG$$
$$= 2DG^2 - 2DF \cdot DG$$

also $CD^2 = DG^2 - 2DF \cdot DG$

oder $DG^2 - CD^2 = 2DF \cdot DG$ I

Es ist aber $CD : DG = CL : LM$
und da $CL = CK = DG$
auch $CD : DG = DG : LM$
oder $DG^2 = CD \cdot LM$

Diesen Werth in I gesetzt,
giebt $CD \cdot LM - CD^2 = 2DF \cdot DG$
oder $CD \cdot (LM - CD) = 2DF \cdot DG$
oder $2DG : LM - CD = CD : DF$ II

Nun ist $DG = cot\,\alpha$

$$LM = CL \cdot cot\,\alpha = CK \cdot cot\,\alpha = DG \cdot cot\,\alpha = cot\,\alpha \cdot cot\,\alpha = cot^2\alpha$$

$$CD = AC = 1$$

und $DF = cot(2\,\alpha)$

daher entsteht durch Substitution dieser Werthe in II die Proportion:

$$2\,cot\,\alpha : (cot^2\alpha - 1) = 1 : cot(2\,\alpha)$$

oder $cot(2\,\alpha) = \frac{cot^2\alpha - 1}{2\,cot\,\alpha}$

2) Analytisch verfährt man dagegen zur Auffindung derselben Formel etwa folgender Art:

Synthetisch erwiesen ist

$$sin(\alpha + \beta) = sin\,\alpha\,cos\,\beta + cos\,\alpha\,sin\,\beta$$

desgl. $cos(\alpha + \beta) = cos\,\alpha\,cos\,\beta - sin\,\alpha\,sin\,\beta$

Schreibt man in beiden Formeln α für β, so erhält man

$$sin\,2\alpha = 2\,sin\,\alpha\,cos\,\alpha$$
$$cos\,2\alpha = cos^2\alpha - sin^2\alpha$$

Dividirt man die untere Gleichung durch die obere, so erhält man

$$\frac{cos\,2\alpha}{sin\,2\alpha} = \frac{cos^2\alpha - sin^2\alpha}{2\,sin\,\alpha\,cos\,\alpha}$$

Dividirt man in dem Bruch zur Rechten des Gleichheitszeichens Zähler und Nenner durch $sin^2\alpha$, so erhält man

$$\frac{cos\,2\alpha}{sin\,2\alpha} = \frac{\frac{cos^2\alpha}{sin^2\alpha} - 1}{2\frac{cos\,\alpha}{sin\,\alpha}}$$

Nun ist aber synthetisch erwiesen

$$\frac{cos\,x}{sin\,x} = cot\,x$$

Mithin hat man

$$cot(2\,\alpha) = \frac{cot^2\alpha - 1}{2\,cot\,\alpha}$$

3) Aber auch wie bei der analytischen Geometrie kann man nach gegebenen Formeln construiren:

Z. B. es sind die beiden Winkel α, β und die Länge b gegeben, man soll die Linie $b\,sec\,\alpha\,cosec\,\beta$ zeichnen:

Zeichne $\angle ACB = \beta$, $\angle ACD = \alpha$, trage auf dem gemeinschaftlichen Schenkel AC vom Scheitel C aus das Stück $CA = b$ ab, errichte in A bis in die Richtung des zweiten Schenkels von α das Loth AD, und im Scheitel C ein Loth CE auf denselben Schenkel CA, zeichne aus C den Bogen DE, und ziehe aus E die mit AC parallele Linie EB bis in die Richtung

Fig. 63.



des zweiten Schenkels von β, so ist das dadurch abgeschnittene Stück desselben, nämlich BC die verlangte Linie $b\,sec\,\alpha\,cosec\,\beta$, denn es ist CD, also auch $CE = AC\,sec\,\alpha = b\,sec\,\alpha$, und $BC = CE\,cosec\,\beta = b\,sec\,\alpha\,cosec\,\beta$.

Hiermit ist zugleich die Aufgabe gelös't, die Linie $b\frac{sec\,\alpha}{sin\,\beta}$ zu zeichnen.

Anfangsglied ist das erste Glied einer Proportion oder einer Reihe.

Anfangspunkt der Abscissen und A. der Coordinaten s. u. Abscisse.

Angewandte Mathematik. Die Anwendung der reinen Mathematik auf die Natur.

Während die reine Mathematik in ihrem arithmetischen Theil die Einheit und die Vielheit, in ihrem geometrischen Theil die Ausdehnung im Raume zu Elementen aller ihrer Untersuchungen und Erkenntnisse hat, so sind für die a. M. ebenfalls zwei Elemente, auf welche die Erkenntnisse der reinen Mathematik übertragen werden: 1) Das Belebende und Bewegende der Natur, die Kraft, und 2) das Leidende, das Raum-Erfüllende, der Stoff, an welchem die Kräfte ihre Wirkungen ausüben.

Mehrere Kräfte gemeinschaftlich können so wirken, daſs ein System von Naturkörpern in dem Zustande verbleibt, als wenn die Kräfte nicht vorhanden wären, oder so, daſs das System den Zustand ändert. Im ersten Fall ist Gleichgewicht, im zweiten aufgehobenes Gleichgewicht. Die a. M. hat also 2 Haupttheile: die Erkenntniſs der Gesetze für Kräfte im Gleichgewicht, die Statik, und die für Kräfte bei aufgehobenem Gleichgewicht, die Mechanik.

Die Cohäsions-Verhältnisse des Stoffs scheiden die Naturkörper in 3 Aggregatzustände, in feste, tropfbar flüssige und

luftförmige Körper. Man hat also eine Statik fester Körper, die Geostatik, eine Statik tropfbar flüssiger Körper, die Hydrostatik, und eine Statik luftförmiger Körper, die Aërostatik, und desgleichen eine Geomechanik, eine Hydromechanik, Hydrodynamik oder Hydraulik und eine Aëromechanik, Aërometrie oder Pneumatik. Aufser den genannten Theilen der a. M., welche man mit dem gemeinschaftlichen Namen dynamische Wissenschaften benennt, hat man noch zur a. M. gehörig die Astronomie und die optischen Wissenschaften.

Angewandte Mechanik ist die Anwendung der reinen M. der Phoronomie auf die Bewegung der Naturkörper mit Rücksicht auf die Kräfte, welche deren Bewegung veranlassen.

Während die reine M. nur den Zusammenhang der Bewegung (Ortsänderung) eines materiellen Punkts in Beziehung auf den Raum, den er durchläuft (den Weg), und die Zeit (die Geschwindigkeit) betrachtet, kommt bei der a. M. noch die Vorstellung des Stoffs (der Materie) und der Summe der materiellen Theile eines Körpers (dessen Masse) zur Betrachtung hinzu.

Angriffspunkt, der Punkt an einem Hebel, wo die Kraft oder der Widerstand angebracht ist; ersterer heifst A. der Kraft, letzterer A. der Last.

Angulaire Befestigung. Die Befestigung eines Platzes der Art, dafs die äufseren, den Umrifs bildenden Wall-Linien aus lauter geraden unter Winkeln zusammenstofsenden Linien bestehen, im Gegensatz zu circulairer B., wo der Umrifs aus einer einzigen Kreislinie oder aus mit einander zusammenhangenden Kreisbogen besteht.

Anisometrisches Krystallisationssystem (ανισος ungleich und μετρον Ausdehnung). Das 4te System, das ein und einaxige System, bei welchem 3 unter einander gleichartige Axen unter rechten Winkeln sich schneiden.

Anlagen. Alle für fortificatorische Bauwerke auf dem Horizont zu nehmenden Abmessungen. Dossirungen der Aufsenflächen von Futtermauern, Brustwehren etc. werden nach dem Verhältnifs bestimmt, welches die abzulothende wagerechte Entfernung zwischen der Ober- und Unterkante der dossirten Fläche (die Breite der Dossirung) zur Höhe derselben hat. Beträgt bei einer 8 Fufs hohen Mauer die Breite der Dossirung 1 Fufs, so ist die Dossirung $\frac{1}{8}$; man sagt $\frac{1}{8}$ der Höhe zur Anlage, oder $\frac{1}{8}$ Anlage. Böschungen von 45° bei Erdwällen haben ganze Anlage.

Anlauf bei einer Brustwehr. Die von dem Bau-Horizont nach dem Banquet, dem Aufstellungsort der Vertheidiger schräg aufsteigende Fläche, wenn das Banquet über dem Horizont so hoch liegt, dafs es nicht erstiegen werden kann. Statt des A. werden auch Stufen angelegt.

Anliegende Seite in einer Figur ist in Beziehung auf einen Umfangswinkel derselben jede der beiden Seiten der Figur, welche die Schenkel des Winkels bilden; spricht man von beiden, einem Winkel anliegenden Seiten, so nennt man sie den Winkel einschliefsende Seiten.

Anliegender Winkel. 1) Der Umfangswinkel einer Figur in Beziehung auf eine Seite derselben, wenn diese Seite der Schenkel des Winkels ist; jede Seite einer Figur hat also zwei a. W., in einem Dreieck hat jede Seite zwei anliegende und einen gegenüberliegenden Winkel.

2) Verlängert man eine Seite *BC* eines Dreiecks *ABC*, so entsteht der Aufsen-

Fig. 64.



winkel *ACD*, dessen Nebenwinkel *ACB* heifst sein innerer a. W., die beiden anderen Winkel *ABC* und *BAC* seine inneren gegenüber liegenden Winkel.

3) Wenn 2 gerade Linien *AB*, *CD* von einer dritten geschnitten werden, so entstehen 8 Winkel, 4 innere und 4 äufsere

Fig. 65.



Winkel; jeder derselben heifst der a. W. seines Nebenwinkels; so ist β der innere

a. W. von α und von δ: γ ist der äufsere a. W. von δ und von α. (Vergl. Aeufsere Winkel, 1).

Anomalie (Ungleichmäfsigkeit, Ungleichförmigkeit in der Bewegung der Planeten um die Sonne) ist der augenblickliche Ort eines Planeten in seiner Bahn, in dem er sich wirklich befindet (wahre oder scheinbare A.), oder der Ort, in dem er sich befinden würde, wenn er regelmäfsig sich bewegte (mittlere A.). Beide Orte werden durch bestimmte Winkel angegeben, und diese Winkel die A. des Planeten genannt. Gesetzt, in *S* befinde sich die Sonne, *ABPD* sei die elliptische Bahn des Planeten um dieselbe, *AP* die Absidenlinie (s. d. u. Absiden),

Fig. 66.



P das Perihelium, *A* das Aphelium, in *B* befinde sich der Planet, so ist $\angle BSP$, der $\angle$ nämlich, den der Radius vector *BS* mit der Absidenlinie nach dem Perihelium hin bildet, die wahre oder scheinbare A. des Planeten für den Augenblick seines Standorts *B*.

Bewegt sich der Planet von *P* über *B*, *A*, *D* wieder nach *P*, so ist in *P* seine gröfste, in *A* seine geringste Geschwindigkeit, und die Zeit, welche er zu diesem Umlauf gebraucht, ist sein Jahr, und zwar sein siderisches, wenn der Punkt *P* als unverrückbar gedacht wird. Würde nun der Planet durch die Ellipse während derselben Zeit sich gleichförmig bewegen, so wäre sein Ort in demselben Augenblick, wo er in *B* wirklich sich befindet, zwischen *P* und *B*, etwa in *B'*, und der $\angle B'SP$ heifst die mittlere A. des Planeten, der Unterschied beider $\angle$, nämlich $\angle BSB'$ die Gleichung des Mittelpunkts, indem in der Astronomie unter Gleichung so viel wie Ausgleichung verstanden wird. Kennt man den Augenblick, in welchem der Durchgang des Planeten durch das Perihel stattgefunden hat, und die Länge des Jahres, so kann man für jeden Zeitaugenblick die mittlere A. finden, indem die Länge des Bogens *PB'* zur Länge der ganzen elliptischen Bahn sich verhält, wie die auf den Weg durch den Bogen *PB'* verflossene Zeit zu der des ganzen Jahres, und weil $\angle B'SP$ von dem Bogen *PB'* abhängig ist.

Um aus der gegebenen mittleren A. $= \angle PSB'$ die wahre A. $= \angle BSP$ zu finden (das Keppler'sche Problem) oder aus der wahren die mittlere A. zu finden (das umgekehrte Keppler'sche Problem), ist also die Reduction von Längen elliptischer Bogen auf Winkel erforderlich, und da es doch nur darauf ankommt, das Verhältnifs zu finden, in welchem die Zeit des Durchlaufs eines elliptischen Bogens zu dem der ganzen Ellipse steht, so erhält man diese einfacher, wenn man für die mittlere A. den excentrischen Kreis und dessen Bogen in Rechnung bringt.

Zeichnet man nämlich aus dem Mittelpunkt *C* der Ellipse mit der halben grofsen Axe den Kreis und denkt sich diesen excentrischen Kreis als von dem Planeten gleichförmig durchlaufen, so hat man, wenn *t* die Zeit bedeutet, in welcher der Planet von *P* wirklich nach *B* gekommen ist, *T* die Zeit des siderischen Jahres und *b* den Punkt in dem excentrischen Kreise, nach welchem von *P* aus der Planet in derselben Zeit *t* bei gleichförmiger Bewegung gekommen wäre:

$$t : T = \text{Bogen } bP : \pi AP = \angle bCP : 360^\circ$$

Aus diesem Grunde nennt man auch wohl, wenn *b* und *B* zusammen gehören, Bogen *Pb* oder $\angle PCb$ die mittlere A.

Desgleichen kann man den Sector *bCP* die mittlere A. nennen, wenn man ihn auf die Fläche des excentrischen Kreises $(K) = \pi \cdot CP^2$ als Einheit bezieht. Nach dem zweiten Keppler'schen Gesetz bewegt sich jeder Planet der Art, dafs in gleichen Zeiten von dem Radius vector gleich grofse elliptische Sectoren durchlaufen werden. Demnach ist auch der von *P* nach *B* von dem Radius vector durchlaufene Sector *BSP* die mittlere A., wenn man diesen auf die elliptische Ebene $(E) = \pi \cdot CP \cdot CD$ als Einheit bezieht.

Es ist also die mittlere A. $= \dfrac{\text{Bog. } PB'}{PBADP}$

$$= \frac{\text{Sect. } BSP}{\pi \cdot CP \cdot CD} \text{ oder } \frac{\text{Sect. } BSP}{E} = \frac{Pb}{\pi \cdot AP}$$

$$= \frac{\text{Sect. } bCP}{\pi \cdot CP^2} \text{ oder } \frac{\text{Sect. } bCP}{K} = \frac{\angle bCP}{360^\circ}$$

Die directe Auflösung der beiden gedachten Keppler'schen Probleme führt auf eine transcendente Gleichung. Man vermeidet dieselbe durch Einführung einer

Hülfsgröfse, der excentrischen Anomalie. Fällt man nämlich von dem wahren Ort B des Planeten das Loth BF auf die Absidenlinie, verlängert dieses, bis es die excentrische Kreislinie in b' trifft, zieht den Halbmesser $b'C$, so heifst $\angle b'CP$ die excentrische A. des Planeten.

Sämmtliche A. werden vom Perihel P ab bis 360° gezählt und gemessen.

Es sei nun wieder S die Sonne, B der Ort eines Planeten, mithin $\angle BSP$ die wahre A. Um aus dieser die mittlere A. zu finden, construire den excentrischen Kreis, fälle das Loth BF, verlängere es bis b', ziehe $b'C$, fälle die Normale SG auf $b'C$, nimm Bogen $b'b = SG$, so ist $\angle bCP$ die zu dem wahren Ort B des Planeten gehörende mittlere A.

Denn $\triangle b'CS = \frac{1}{2} b'C \times SG$

Sect $b'Cb = \frac{1}{2} b'C \times$ Bog. $b'b = \frac{1}{2} b'C \times SG$

mithin $\triangle b'CS =$ Sect. $b'Cb$

beide von Sect. $b'CP$ abgezogen, giebt

1) Sect. $b'SP =$ Sect. bCP

Bezeichnet man nun die Zeit des siderischen Jahres, in welchem der Planet die ganze Ellipse durchläuft, mit T, die Zeit, in welcher er den Bogen PB durchlaufen hat, mit t, so ist

2) $T : t = E :$ Sect. BSP

Es ist aber:

$K : E = CP : CD = Fb' : FB$

$CP : CD =$ Abschn. $b'FP$: Abschn. BFP
$= \triangle b'SF : \triangle BSF$

$CP : CD =$ Abschn. $b'FP + \triangle b'SF$: Abschn. $BFP + \triangle BSF$

3) $K : E =$ Sect. $b'SP$: Sect. BSP

mithin nach Gl. 1

$K : E =$ Sect. bCP : Sect. BSP

oder durch Umstellung

$K :$ Sect. $bCP = E$: Sect. BSP

mithin nach 2:

$T : t = K$: Sect. bCP

woraus hervorgeht, dafs $\angle bCP$ oder Sector bCP die mittlere A. ist.

Aus der wahren A. die mittlere A., oder die Auflösung des umgekehrten Keppler'schen Problems durch Zeichnung zu finden, hat keine Schwierigkeiten, dagegen kann das Keppler'sche Problem, die wahre A. aus der mittleren A. durch Zeichnung aufzulösen, nur näherungsweise geschehen. Wenn nämlich die Punkte b, P, S, C für die mittlere A. $= \angle bCP$ gegeben sind, so nimmt man statt des Bogens bb' dessen Sinus, der um so näher demselben kommt, je geringer die Excentricität der Bahn ist; man ziehe demnach bS und aus C die Linie $Cb' \ddagger bS$, so erhält man näherungsweise den Punkt b' und durch das Loth $b'F$ auch näherungsweise den Punkt B durch Zeichnung.

Um die wahre A. $= PB$ aus der mittleren A. $= Pb$ oder diese aus jener durch Rechnung zu finden, setze man $CP = Cb' = a$; $CD = b$; $CS = e$, so ist

$$Pb = Pb' - bb' = Pb' - SG$$

$$\text{oder I } Pb = Pb' - e \sin Pb'$$

Es ist ferner

$$SF = CF - CS = a \cos Pb' - e$$

und $SB^2 = BF^2 + SF^2 = BF^2 + (a \cos Pb' - e)^2$

und $CP : CD = b'F : BF$

oder $a : b = a \sin Pb' : BF$

woraus $BF = b \sin Pb'$

daher

$$SB^2 = b^2 \sin^2 Pb' + (a \cos Pb' - e)^2$$
$$= b^2 \sin^2 Pb' + a^2 \cos^2 Pb' + e^2 - 2ae \cos Pb'$$
$$= b^2 + (a^2 - b^2) \cos^2 Pb' - 2ae \cos Pb' + e^2$$

Zieht man SD, so ist diese $= CP = a$, daher

$CS^2 = e^2 = a^2 - b^2$ daher

$SB^2 = a^2 + e^2 \cos^2 Pb' - 2ae \cos Pb'$

folglich $SB = a - e \cos Pb'$

Nun ist $SF = SB \cos PSB$

$$\text{daher II } \cos PSB = \frac{SF}{SB} = \frac{a \cos Pb' - e}{a - e \cos Pb'}$$

und hieraus

$$\text{III } \cos Pb' = \frac{e + a \cos PSB}{a + e \cos PSB}$$

Wenn also die wahre A. $= \angle PSB$ gegeben ist, so findet man die excentrische A. $= Pb'$ aus Formel III, und aus dieser nach Formel I ganz genau die mittlere Pb, weil Bogen $bb' = SG = e \sin Pb'$ ist. Ist aber die mittlere A. $= Pb$ gegeben, so hat man durch Gleichung I Pb' aus Pb zu finden, eine transcendente Gleichung, bei welcher nur probirt werden kann; hat man Pb' möglichst nahe erhalten, so setze dessen Werth in Gl. II, woraus man dann unmittelbar die wahre A. $= PSB$ erhält.

Anomalistischer Monat. Die Zeit, in welcher der Mond von einer Erdnähe (Perigeum) oder einer Erdferne (Apogeum) bis zum Wiedereintritt in dieselbe einen Umlauf vollendet, er beträgt 27 Tg. 13 Std. 18 Min. 37,4 Sec.

Anomalistisches Jahr. Die Zeit, in welcher ein Planet von dem Eintritt in das Aphel oder Perihel bis zu dem nächstfolgenden seinen Umlauf vollendet. Das der Erde ist etwas gröfser als deren tropisches Jahr und beträgt 365 Tg. 6 Std. 14' 23''. Die Ursache dieser Vergröfserung liegt darin, dafs die Sonnennähe und die Sonnenferne nicht auf constanten Punkten der Erdbahn verbleiben, sondern jährlich um 11,8 Bogensecunden von Westen nach Osten fortrücken. Da nun zugleich die Nachtgleichen jährlich von Osten nach Westen um 50,1 Bogensecunden fortrücken, so entfernen sich Aphel und

Perihel jährlich um 61,9 Bogensecunden von den Nachtgleichen.

Anorthotypes Krystallisationssystem. (*Αν* Verneinung, *ορθος* gerade, *τυπος* Gestalt). Das 6te und letzte System, das ein und eingliedrige System, bei welchem 3 unter einander ungleichartige Axen schiefwinklig mit einander sich schneiden.

Ansetzen der Gleichungen. Ist die vermöge geistiger Thätigkeit vorgenommene Uebertragung einer in Worten gegebenen, den Gleichungen angehörigen Aufgabe in die mathematische Zeichensprache. Sie kann nicht wohl gelehrt werden, ist vielmehr das Ergebnifs des Urtheilsvermögens.

1. Beispiel. (Meier Hirsch, pag. 163, No. 5.)

Zwei Zahlen von solcher Beschaffenheit zu finden, dafs die eine m Mal so grofs als die andere und dafs ihre Summe $= a$ sei.

Es werden hier zwei Zahlen gesucht, beide sind also unbekannt; bezeichnet man die andere mit x, so ist die erste, als m Mal so grofs $= mx$, deren Summe ist $x + mx$, und die anzusetzende Gleichung ist

$$x + mx = a$$

woraus (s. algebraische Gleichung No. 7.) die andere $x = \frac{a}{1+m}$, die erste $mx = \frac{ma}{1+m}$

Bezeichnet man die erste mit x, so ist die andere, da die erste m Mal gröfser als jene ist, m Mal kleiner als die erste, also $\frac{x}{m}$, und man hat:

$$x + \frac{x}{m} = a, \text{ woraus}$$

die erste $x = \frac{ma}{1+m}$, die andere $\frac{a}{1+m}$

2. Beispiel. (Meier Hirsch, pag. 173, No. 54.)

Vor n Tagen ging ein Bote von hier ab, der täglich a Meilen macht; ihm wird ein anderer nachgeschickt, der täglich b Meilen macht; wie viele Tage wird der zweite brauchen, um den ersten einzuholen?

Der erste Bote hat bei n Tagen Vorsprung $a \cdot n$ Meilen voraus, als der andere ihm mit der offenbar gröfseren Geschwindigkeit b nachgesandt wird. Die Anzahl der Tage, welche dieser laufen mufs, um ihn einzuholen, d. h. um mit dem ersten in einem und demselben Punkt zusammenzutreffen, werde als die unbekannte Gröfse, nach welcher direct gefragt wird, mit x bezeichnet, so läuft der zweite schnellere Bote x Tage zu b Meilen, im Ganzen bx Meilen; der erste, welcher aufser den schon vorher gelaufenen n Tagen noch x Tage läuft, legt in diesen x Tagen zu a Meilen noch ax Meilen zurück und hat im Ganzen $an + ax$ Meilen gemacht; da aber beide Boten von einem und demselben Punkt ausgegangen sind und in einem und demselben Punkte zusammentreffen, so sind Beider Wege gleich lang. Mithin ist die anzusetzende Gl.

$$an + ax = bx$$

woraus die Auflösung $x = \frac{an}{b-a}$ Tage.

3. Beispiel. (Meier Hirsch, pag. 174, No. 59.)

Es sei der Ort, von welchem ein erster Courier ausgeht, um a Meilen mehr vorwärts gelegen; es sei ferner die Anzahl der Stunden, um welche er früher abreiste, $= b$; die Geschwindigkeit des ersten Couriers sei so grofs, dafs er in d Stunden c Meilen zurücklegt, und die Geschwindigkeit eines zweiten Couriers so grofs, dafs er in f Stunden e Meilen zurücklegt. In wie vielen Stunden nach der Abreise des zweiten Couriers werden sie zusammentreffen?

Die Anzahl der Stunden nach Abgang des zweiten Couriers, hier die fragliche Unbekannte werde mit x bezeichnet; da derselbe in f Stunden e Meilen zurücklegt, also in einer Stunde $\frac{e}{f}$ Meilen, so ist die Anzahl der von ihm überhaupt zurückgelegten Meilen $\frac{e}{f} x$. Der erste macht in d Stunden c Meilen, in einer Stunde also $\frac{c}{d}$ Meilen, folglich in jenen x Stunden, in welchen er mit dem ersten Courier zusammentrifft, $\frac{c}{d} x$ Meilen. Allein er ist b Stunden früher abgereist, hat also $(b + x)$ Stunden lang gereist, und in dieser Zeit also, d. h. in Summa, $\frac{c}{d}(b + x)$ Meilen zurückgelegt, wenn der zweite mit ihm zusammentrifft. Da nun ferner derselbe erste Courier von einem um a Meilen mehr vorwärts gelegenen Punkt abgereist ist, so ist der Weg des ersten um die Länge a kürzer, als der Weg des zweiten, d. h. wenn man zu dem summarischen Wege $\frac{c}{d}(b + x)$ des ersten Couriers noch den Weg a addirt, so erhält man den Weg $\frac{e}{f} x$ des zweiten Couriers. Die anzusetzende Gl. ist also

$$\frac{c}{d}(b+x)+a=\frac{e}{f}\cdot x$$

woraus als Auflösung $x=\frac{(ad+bc)f}{de-cf}$ gefunden wird.

4. Beispiel. (Meier Hirsch, pag. 179, No. 75.)

Zwei Bombardiere werfen aus einer Batterie verschiedene Bomben. Der erste hatte schon 36 Würfe gemacht, ehe der zweite zu werfen anfängt, und macht in eben der Zeit 8 Würfe, worin der zweite deren 7 macht; hingegen braucht der zweite zu 3 Würfen so viel Pulver, als der erste zu 4. Wie viel Würfe wird der zweite machen müssen, bis er so viel Pulver verbraucht hat als der erste?

Der zweite Bombardier soll wieder x Würfe machen müssen, bis er mit dem ersten gleich viel Pulver verbraucht hat. In derselben Zeit hat der erste $\frac{8}{7}x$ Würfe, im Ganzen also $(36+\frac{8}{7}x)$ Würfe gemacht, der erste aber verbraucht gegen den zweiten weniger Pulver zu einem Wurf und zwar in dem Verhältnifs wie 3 : 4, daher hat man die anzusetzende Gleichung:

$$3(36+\tfrac{8}{7}x)=4x$$

woraus $x=189$ Würfe.

5. Beispiel. (Meier Hirsch, pag. 185, No. 101.)

In einer zahlreichen Gesellschaft befanden sich anfangs drei Mal so viele Herren als Damen; später aber, als 8 Männer mit ihren Frauen weggingen, wurde das Verhältnifs der Anwesenden von beiden Geschlechtern noch ungleicher, es blieben nämlich gar noch fünf Mal so viel Herren als Damen. Aus wie vielen Personen von jedem Geschlecht bestand diese Gesellschaft anfangs?

Bezeichnet man die Anzahl der anfangs vorhandenen Damen mit x, so waren $3x$ Herren in der Gesellschaft. Als von diesen 8 Herren und 8 Damen fortgegangen waren, befanden sich noch dort $(3x-8)$ Herren und $(x-8)$ Damen, jene betrugen 5 Mal so viel als diese, und man hat die anzusetzende Gleichung:

$$3x-8=5(x-8)$$

woraus $x=16$.

Es waren also anfänglich 48 Herren und 16 Damen in der Gesellschaft.

6. Beispiel. (Meier Hirsch, pag. 189, No. 116.)

Jemand will eine goldene Uhr ausspielen, und macht zu dem Ende eine gewisse Anzahl Loose. Giebt er das Loos für 1 Thlr. 6 Gr., so verliert er 20 Thlr., weil ihm die Uhr mehr gekostet hat, als in diesem Falle einkommen würde; giebt er aber das Loos für 1 Thlr. 16 Gr., so gewinnt er 13 Thlr. 8 Gr. Wie viel hat ihm demnach die Uhr gekostet und wie viele Loose hat er ausgespielt?

Hier wird nach 2 Zahlen gefragt, nach dem Preis der Uhr und nach der Anzahl Loose. Setzt man letztere $=x$, so verliert er 20 Thlr., wenn er x Mal 1 Thlr. 6 Gr. $=1\frac{1}{4}x$ Thlr. einnimmt. Der Preis der Uhr ist mithin $1\frac{1}{4}x+20$ Thlr.; er gewinnt ferner 13 Thlr. 8 Gr. $=13\frac{1}{3}$ Thlr., wenn er x Mal 1 Thlr. 16 Gr. $=1\frac{2}{3}x$ Thlr. einnimmt, der Preis der Uhr ist also auch $=1\frac{2}{3}x-13\frac{1}{3}$; da die Uhr nur einerlei Preis hat, so ist der Ansatz der Gl.:

$$1\tfrac{1}{4}x+20=1\tfrac{2}{3}x-13\tfrac{1}{3}$$

woraus $x=80$, oder er hat 80 Loose gehabt.

Der Preis der Uhr ist nun $1\frac{1}{4}\times 80$ Thlr. $+20$ Thlr. oder $1\frac{2}{3}\times 80-13\frac{1}{3}$ Thlr. $=$ 120 Thlr.

Nennt man den Preis der Uhr x, so hat er 20 Thlr. weniger als x, also $x-20$ Thlr. eingenommen, wenn er jedes der Loose zu $1\frac{1}{4}$ Thlr. ausspielt; nennt man die Anzahl der Loose s, so ist seine Einnahme $1\frac{1}{4}s$, und man hat den einen Ansatz $x-20=1\frac{1}{4}\cdot s$.

Durch die zweite Bestimmung der Aufgabe erfährt man, dafs er $13\frac{1}{3}$ Thlr. mehr als x, also $x+13\frac{1}{3}$ Thlr. eingenommen hat, wenn er jedes der s Loose zu $1\frac{2}{3}$ Thlr. verkauft hätte, woraus der Ansatz $x+13\frac{1}{3}=1\frac{2}{3}\cdot s$. Man hat demnach 2 Gleichungen mit 2 unbekannten Gröfsen:

$$x-20=1\tfrac{1}{4}s$$
$$x+13\tfrac{1}{3}=1\tfrac{2}{3}s$$

Man erhält als Auflösung (s. algebraische Gleichungen, No. 29.) $x=120$ Thlr., $s=80$ Stück.

7. Beispiel. (Meier Hirsch, pag. 190, No. 120.)

Um alle meine Ausgaben bestreiten zu können, sagt Jemand, müfste ich ein jährliches Einkommen von 540 Thlrn. haben; hieran fehlt aber noch ein Beträchtliches. Wären meine Einkünfte $3\frac{1}{2}$ Mal so grofs, als sie wirklich sind, so würde ich nicht allein alle meine Ausgaben bestreiten können, sondern ich würde sogar noch jährlich so viel übrig behalten, als mir jetzt fehlt. Wie hoch belaufen sich die jährlichen Einkünfte dieses Mannes?

Setzt man seine Einnahme, nach der gefragt wird, $=x$, so hätte er bei dem $3\frac{1}{2}$fachen derselben, also bei $3\frac{1}{2}x$ Thlr., nicht nur die sämmtlichen, von ihm jährlich zu bestreitenden Ausgaben mit 540 Thlrn., sondern noch als Ueberschufs, was ihm jetzt fehlt; dieser Ueberschufs beträgt aber offenbar $540-x$ Thlr., und man hat die Gleichung:

$$3\tfrac{1}{2}x=540+540-x$$

woraus seine jährliche Einnahme $x = 240$ Thlr.

Setzt man dio Summe, welche ihm fehlt, $= x$, so ist seine Einnahme, da seine Gesammt-Ausgaben 540 Thlr. betragen, offenbar $= 540 - x$; wenn diese nun $3\frac{1}{2}$ Mal so grofs wäre, also wenn seine Einnahme $3\frac{1}{2} x (540 - x)$ betrüge, so würde er nicht nur sämmtliche Ausgaben mit 540 Thlrn. bestreiten können, sondern noch x übrig haben, d. h. er würde in Summa haben $540 + x$, und man hat die Gleichung:

$$3\frac{1}{2}(540 - x) = 540 + x$$

Man erhält das ihm fehlende $x = 300$ Thlr., so dafs diese, von 540 abgezogen, sein Einkommen $= 240$ Thlr. ergiebt.

8. Beispiel. (Meier Hirsch, pag. 191, No. 124.)

Es wollte Jemand ein Haus kaufen, und um das dazu erforderliche Capital aufzubringen, jedem seiner Schuldner eine gleiche Summe aufkündigen. Er versuchte zu dem Ende, ob es hinlänglich wäre, wenn er Jedem 250 Thlr aufkündigte; fand aber, dafs er alsdann 2000 Thlr. zu wenig erhalten würde. Er versuchte es daher mit 340 Thlrn.; dies brachte ihm aber 880 Thlr mehr, als er brauchte. Wie viel Schuldner hatte er? Wie grofs war das herbei zu schaffende Capital? Und wie viel mufs er jedem seiner Schuldner aufkündigen?

Setzt man hier die Anzahl seiner Schuldner $= x$, so hat er bei Einziehung von 250 Thlrn. von jedem, also bei $250 \cdot x$ Thlr. zum Hauskauf 2000 Thlr. zu wenig; das Haus soll also $250 \cdot x + 2000$ Thlr. kosten; bei Einziehung von $340 \cdot x$ Thlr. hat er 880 Thlr. mehr, als er zum Hauskauf nöthig hat. Das Haus soll also nach dieser zweiten Bestimmung $340 x - 880$ Thlr. kosten, folglich hat man die Gleichung:

$$250 x + 2000 = 340 x - 880$$

und die Auflösung ergiebt die Anzahl seiner Schuldner $x = 32$.

Der Preis des Hauses $= 250 \times 32 + 2000 = 340 \times 32 - 880 = 10000$ Thlr., und was er jedem der Schuldner aufzukündigen hat $\frac{10000}{32} = 312\frac{1}{2}$ Thlr.

Setzt man den Preis des Hauses x, so ist in dem ersten Fall die Summe, welche von sämmtlichen Schuldnern eingezogen wird, $= x - 2000$ Thlr., und da jeder derselben 250 Thlr. zahlt, so ist die Anzahl der Schuldner $= \frac{x - 2000}{250}$

Im zweiten Fall ist die eingezogene Summe $= x + 880$ Thlr. und die Anzahl der Schuldner nach dieser Bestimmung $= \frac{x + 880}{340}$. Mithin hat man die Gleichung:

$$\frac{x - 2000}{250} = \frac{x + 880}{340}$$

woraus:

Der Preis des Hauses $x = 10000$ Thlr., wonach nun die Anzahl der Schuldner und das, was von Jedem einzuziehen ist, um 10000 Thlr. zu geben, durch einfache Zahlenrechnung zu ermitteln ist.

9. Beispiel. (Meier Hirsch, pag. 195, No. 136.)

Zu einer Verlassenschaft, welche nach Abzug gerichtlicher Kosten sich auf 3139 Thlr. beläuft, melden sich drei Gläubiger, der eine mit einer Forderung von 2000, der andere von 2500 und der dritte von 3500 Thlrn. Da nun die Verlassenschaft nicht hinreicht, diese drei Gläubiger ganz zu befriedigen, und ihre Ansprüche auch überdies nicht gleich rechtskräftig sind, so soll, nach einem gerichtlichen Ausspruche, die Masse unter die Gläubiger nach dem Verhältnisse ihrer Forderungen vertheilt werden, jedoch soll, aus dem angeführten Grunde, der zweite 10 und der dritte 25 Procent über seinen Antheil erhalten. Wie viel wird demnach Jeder bekommen?

Das Verhältnifs, in welchem die Vertheilung der Verlassenschaft erfolgen soll, ist offenbar

$$2000 : \tfrac{11}{10} \cdot 2500 : \tfrac{5}{4} \cdot 3500$$

Bezeichnet man den Factor dieser Verhältnifszahlen mit x, so hat man die Gleichung:

$$(2000 + \tfrac{11}{10} \cdot 2500 + \tfrac{5}{4} \cdot 3500) \cdot x = 3139$$

woraus $x = \frac{43}{125}$

Der erste erhält demnach $\frac{43}{125} \cdot 2000$ Thlr. $= 688$ Thlr.
Der zweite „ „ $\frac{43}{125} \cdot \frac{11}{10} \cdot 2500$ Thlr. $= 946$ Thlr.
Der dritte „ „ $\frac{43}{125} \cdot \frac{5}{4} \cdot 3500$ „ $= 1505$ „
Summa 3139 Thlr.

10. Beispiel. (Meier Hirsch, pag. 199, No. 152.)

Ich hatte einmal eine Summe ungezählten Geldes vor mir liegen. Von dieser Summe nahm ich zuerst den dritten Theil weg und legte dafür 50 Thlr. zu. Einige Zeit nachher nahm ich von der so vermehrten Summe den vierten Theil weg und legte dafür wieder 70 Thlr. zu. Ich zählte hierauf mein Geld und fand 120 Thlr. Wie viel war es anfangs?

Die fragliche Summe werde mit x be-

zeichnet, von dieser wurde zuerst $\frac{1}{3}$ fortgenommen, also $\frac{1}{3}x$, es blieben mithin $\frac{2}{3}x$, hierzu wurden 50 Thlr. gelegt, die Summe war nun $\frac{2}{3}x+50$; von dieser wurde dann $\frac{1}{4}$ fortgenommen, es blieb mithin die Summe $\frac{3}{4}(\frac{2}{3}x+50)$; hierzu wurden 40 Thlr. gelegt, und nun betrug das Ganze 120 Thlr. Man hat demnach die Gleichung:

$$\frac{3}{4}(\frac{2}{3}x+50)+70=120$$

woraus x gefunden wird $=25$ Thlr.

11. **Beispiel.** (Meier Hirsch, pag. 203, No. 164.)

Ein General wollte sein Regiment in ein Quadrat stellen. Er versuchte es auf zwei Arten. Das erste Mal blieben ihm 39 Mann übrig; das zweite Mal, da er die Seite des Quadrats um einen Mann vergröfserte, fehlten ihm 50 Mann, um das Quadrat voll zu machen. Wie stark war das Regiment?

Die Seite des Quadrats, in welches er sein Regiment zuerst aufstellte, bezeichne man mit x, so standen in demselben x^2 Mann, und da 39 Mann übrig blieben, so war das Regiment (x^2+39) Mann stark. Um einen Mann die Seite des Quadrats vermehrt, wären in demselben $(x+1)^2$ Mann aufgestellt gewesen, wenn nicht 50 Mann gefehlt hätten, hiernach war das Regiment $[(x+1)^2-50]$ Mann stark; man hat also die Gleichung:

$$x^2+39=(x+1)^2-50$$

woraus $x=44$.

Das Regiment bestand also aus

$$44^2+39=45^2-50=1975 \text{ Mann.}$$

Wollte man hier die Anzahl der Mannschaft, wonach gefragt wird, mit x bezeichnen, so hätte man folgende Betrachtung: Zu dem ersten Quadrat wurde das Regiment weniger 39 verwendet; die Seite des Quadrats war also $\sqrt{x-39}$; zu dem zweiten Quadrat gehören $x+50$ Mann, dessen Seite also ist $\sqrt{x+50}$; die Seite des zweiten Quadrats ist um 1 gröfser, als die des ersten, mithin hätte man die Gleichung:

$$\sqrt{x-39}+1=\sqrt{x+50}$$

Die Auflösung ist hier offenbar weitläufiger: denn man mufs erst quadriren und erhält:

$$x-39+1+2\sqrt{x-39}=x+50$$

hieraus $\sqrt{x-39}=44$; und quadrirt

$$x-39=1936$$

woraus $x=1975$ Mann.

12. **Beispiel.** (Meier Hirsch, pag. 204, No. 168.)

Jemand hat vier Weinfässer von verschiedener Gröfse. Füllt er das zweite leere Fafs aus dem ersten vollen, so bleibt im ersten nur $\frac{4}{7}$ des Weins zurück; füllt er das dritte leere Fafs aus dem zweiten vollen, so bleibt im zweiten nur $\frac{1}{4}$ des Weines zurück; füllt er das vierte leere Fafs aus dem dritten vollen, so wird nur $\frac{9}{16}$ des vierten gefüllt; wollte er aber das dritte und vierte leere Fafs aus dem ersten vollen füllen, so würden nicht allein diese gefüllt, sondern es blieben ihm noch 15 Quart übrig. Wie viel Quart hält jedes von diesen vier Fässern?

Bezeichne den Inhalt des ersten Fasses mit x; füllt man das zweite leere aus dem vollen ersten, so bleiben in diesem $\frac{4}{7}x$, mithin enthält das zweite Fafs $\frac{3}{7}x$; füllt man aus dem vollen zweiten das dritte leere, so bleibt im zweiten $\frac{1}{4}$ der Füllung, also enthält das dritte Fafs $\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{7}x=\frac{9}{28}x$. Füllt man das vierte leere aus dem dritten vollen, so wird nur $\frac{9}{16}$ des vierten gefüllt, es enthält also das vierte Fafs $\frac{16}{9}\cdot\frac{9}{28}x=\frac{4}{7}x$. Wenn nun endlich aus dem Inhalt x des ersten Fasses das dritte und vierte in Summe mit $(\frac{9}{28}+\frac{4}{7})x=\frac{25}{28}x$ gefüllt wird, so bleiben 15 Quart übrig, daher hat man die Gleichung:

$$x=\frac{25}{28}x+15$$

woraus der Inhalt des 1. Fasses $= x=140$ Quart
des 2. „ $=\frac{3}{7}x=60$ „
des 3. „ $=\frac{9}{28}x=45$ „
des 4. „ $=\frac{4}{7}x=80$ „

13. **Beispiel.** (Meier Hirsch, pag. 219, No. 59.)

A, *B*, *C* kaufen Kaffee, Zucker und Thee zu denselben Preisen. *A* bezahlt 11 Thlr. 15 Gr. für $7\frac{1}{2}$ Pfund Kaffee, 3 Pfund Zucker und $2\frac{1}{4}$ Pfund Thee; *B* bezahlt 16 Thlr. 6 Gr. für 9 Pfund Kaffee, 7 Pfund Zucker und 3 Pfund Thee; *C* bezahlt 12 Thlr. 6 Gr. für 2 Pfund Kaffee, $5\frac{1}{2}$ Pfund Zucker und 4 Pfund Thee. Was kostet das Pfund von jedem?

Hier setze man den Preis des Kaffees x Gr., den des Zuckers y Gr. und den des Thees z Groschen, so hat man die 3 Gleichungen unmittelbar:

$$7\tfrac{1}{2}x+3y+2\tfrac{1}{4}z=11 \text{ Thlr. } 15 \text{ Gr.}$$
$$9x+7y+3z=16 \text{ Thlr. } 6 \text{ Gr.}$$
$$2x+5\tfrac{1}{2}y+4z=12 \text{ Thlr. } 6 \text{ Gr.}$$

woraus $x=18$ Gr., $y=12$ Gr. und $z=2$ Thlr. sich ergiebt.

14. **Beispiel.** (Meier Hirsch, pag. 224, No. 73.)

Eine gewisse Zahl wird mit drei Ziffern geschrieben, die in arithmetischer Proportion stehen. Wird diese Zahl mit der Summe ihrer Ziffern an sich (d. h. ohne auf den Werth zu sehen, welchen sie durch ihre Stellen erhalten) dividirt, so ist der Quotient 48, zieht man aber von dieser Zahl 198 ab, so erhält man eine Zahl, welche die nämlichen Ziffern als die gesuchte, aber in umgekehrter Ordnung enthält. Welche Zahl ist es?

Es seien die Ziffern der Zahl der Reihe nach x, y, z; x die Hunderter, y die Zehner, z die Einer; der Werth der Zahl ist also:

$$=100x+10y+z$$

Aus der ersten Bestimmung, dafs die Ziffern in arithmetischer Proportion stehen, hat man die Gleichung:

1) $x-y=y-z$

Die Summe der Ziffern ist $x+y+z$, der Quotient aus dieser Summe in die Zahl giebt die Gleichung:

2) $\dfrac{100x+10y+z}{x+y+z}=48$

Aus der dritten Bestimmung erhält man:

3) $100x+10y+z-198=x+10y+100z$

Man hat also hier 3 Gleichungen mit 3 unbekannten Gröfsen. Aus 1. erhält man:

4) $x=2y-z$

Diesen Werth von x in 2 gesetzt, giebt:

5) $2y=3z$

und Gleichung 3 in gleicher Verbindung mit Gleichung 4, ergiebt:

6) $y=z+1$

aus 5 und 6 erhält man:

$$z=2$$
$$y=3$$

und nun aus 4. $x=4$

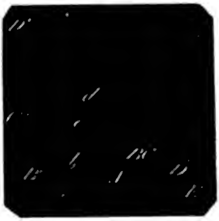
Die Zahl ist 432; die Summe deren Ziffern $=9$, $\frac{432}{9}$ giebt 48 und $432-198$ die Zahl 234.

Antarktisch, südlich; antarktischer Pol s. v. w. südlicher Pol u. s. w.

Ant-Evolute. Ist die Curve, welche entsteht, wenn man die von sämmtlichen Punkten einer Evolute nach der Evolvente gezogenen Krümmungshalbmesser durch diese verlängert, jede Verlängerung dem zugehörigen Krümmungshalbmesser gleich lang nimmt und deren Endpunkte durch eine Curve verbindet.

Ist $ABCDE$ eine Curve, wird um dieselbe eine biegsame mathematische Linie gedacht und diese unter steter Anspannung von derselben entfernt, so beschreibt der Endpunkt der biegsamen Linie die Curve $Abcd$. Es ist mithin $ABCDE$ eine Evolute, $Abcd$ ... die zu derselben gehörige Evolvente, Bb, Cc, Dd ... sind in der Reihenfolge die Krümmungshalbmesser der Evol-

Fig. 67.



vente, und diese durch b, c, d ... verlängert, $bB'=Bb$, $cC'=Cc$, $dD'=Dd$ genommen, giebt die zugehörige Ant-Evolute $AB'C'D'$ ...

Ant-hapsologarithmus s. u. Antilogarithmus.

Antikaustische Linie (Anticaustica) entsteht dadurch, dafs die Lichtstrahlen, die von einer krummen Linie zurückgeworfen werden und deren der Reihenfolge nach genommenen gegenseitigen Durchschnittspunkte die kaustische Linie (caustica, Brennlinie) bilden, durch die erstere zurückwerfende Linie hindurch um gleichviel verlängert werden, wonach die Endpunkte sämmtlicher Strahlverlängerungen die a. L. bilden. Die a. L. hat also zur Brennlinie dieselbe Beziehung, wie die Ant-Evolute zur Evolute.

Es sei $ABCDE$ eine krumme Linie, die Strahlen $a'A$, $b'B$ ..... fallen ‡ auf dieselbe, der Strahl $a'A$ treffe die Curve

Fig. 68.



in A unter rechten Winkeln und wird mithin in sich selbst zurückgeworfen, der Strahl $b'B$ wird nach Ba zurückgeworfen, so dafs $\angle ABa=\angle b'BC$, der Strahl $c'C$ nach Cb, so dafs $\angle BCb=\angle c'CD$ u. s. w.

und die Durchschnittspunkte a, b, c, d u. s. w. bilden unter der Voraussetzung, dafs die Strahlen $a'A$, $b'B$ ... sehr nahe zu einander liegen, die Caustica. Verlängert man nun aA bis A', so dafs $AA' = aA$, ebenso bB, cC, dD, so dafs $BB' = bB$, $CC' = cC$, $DD' = dD$ u. s. w., so liegen die Punkte A', B', C', D' ... in der Anti-Caustica.

Antilogarithmus ist die veraltete Bezeichnung verschiedener Begriffe.

1. Neper bezeichnete damit den Logarithmus eines Cosinus in Beziehung auf den in den Tafeln ihm gegenüber stehenden Logarithmus des Sinus desselben Winkels, wie Mercator den Logarithmus einer Cotangente Ant-hapsologarithmus in Beziehung auf den ihm in den Tafeln gegenüber stehenden Logarithmus der Tangente, welchen er hapsologarithmus (ἅπτειν, berühren) nannte.

2. Wallis versteht darunter Logarithmen, die in einer auf einander folgenden Reihe mit den zugehörigen Zahlen tabellarisch geordnet zusammengestellt werden. Etwa wie:

Logarithmus.	Zahl.
0001 . . .	100023027
0002 . . .	100046062
0003 . . .	100069102
0004 . . .	100092146
0005 . . .	100115196
0006 . . .	100138020
0007 . . .	100161311
0008 . . .	100184376
0009 . . .	100207448
0010 . . .	100230523

u. s. w.

Wollte man nun den Numerus des Logarithmus 1,2458 finden, so hätte man in den Tafeln aufzusuchen den $log = 2458$, man fände den Numerus: 176116485 und mithin für den $log = 1{,}2458$ den Numerus 17,6116485. Solche Antilogarithmische Tafeln sind nicht in Gebrauch gekommen.

3. Hutton erklärt nach dem Dictionnaire encyclopédique, wie Klügel behauptet, den A. als das Complement eines Sinus, einer Tangente oder einer Secante, d. h. als den Unterschied zwischen dem Logarithmus des Sinus totus und jedem der gedachten Logarithmen. So z. B. ist

$$\begin{aligned} \log \sin 40^\circ 23' &= 9{,}8115069 - 10 \\ \log \sin tot = \log 1 = 0 &= 10{,}0000000 - 10 \\ \hline \text{Antilog.} \sin 40^\circ 23' &= 0{,}1884931 \end{aligned}$$

Da $\log 1 - \log \sin x = \log \frac{1}{\sin x}$, so ist der Antilog. eines $\sin x =$ dem log der $cosec\ x$, desgl. der A. von $tg\ x =$ dem $\log \cot x$ und der A. von $\sec x =$ dem $\log \cos x$.

Nicht eine der genannten Bezeichnungen von A. und ein A. überhaupt nicht, ist noch in Gebrauch.

Antiparallele Linien sind 2 Paar gerade Linien, die von 2 anderen geraden Linien so geschnitten werden, dafs die entgegengesetzt liegenden Gegenwinkel einander gleich sind, während bei 2 parallelen geraden Linien, die von irgend einer dritten geraden geschnitten werden, die (auf derselben Seite der schneidenden Linie liegenden) Gegenwinkel einander gleich sind.

Fig. 69.



Werden die geraden Linien AB und CD von der dritten EF geschnitten, und ist $AB \parallel CD$, so ist $\angle \alpha = \angle \beta$. Sind aber AB und CD nicht $\parallel$ und man schneidet beide Linien durch eine zweite gerade Linie GH, so dafs $\alpha = \gamma$, so sind beide Paar Linien antiparallel, und da, wenn man beide Linien EF und GH bis zu ihrem Durchschnittspunkt K verlängert, $\angle K + \beta + \gamma = \angle K + \alpha + \delta$, auch $\angle \beta = \angle \delta$.

Ist EKG der Durchschnitt eines Kegels und bildet AB dessen Grundfläche, so heifst CD ein Wechselschnitt, und dessen Durchschnitts-Ebene bildet gleichfalls einen Kreis.

Antiparallelogramm s. v. w. Trapez, ein Viereck, in welchem 2 gegenüber liegende Seiten $\parallel$, die beiden anderen nicht $\parallel$ sind.

Antipoden (Gegenfüfsler), die Bewohner, welche unter entgegengesetzter Breite, d. h. die einen auf der nördlichen, die anderen auf der südlichen Halbkugel, und auf entgegengesetzten Seiten, d. h. die einen in der östlichen, die anderen in der westlichen Halbkugel, und in derselben Meridian-Ebene wohnen; sie haben entgegengesetzte Jahreszeiten und Tageszeiten.

Antiscii (Gegenschattige, eigentlich Antiskii, von σκιά der Schatten). Die Be-

wohner der gemäſsigten Zone, weil die der nördlichen ihren Sonnenschatten nach Norden, die der südlichen nach Süden, beide also entgegengesetzt gerichtete Schatten werfen. (Vergl. Amphiscii, Ascii.)

Antithesis hieſs früher die Versetzung eines Gliedes von der einen Seite einer Gleichung auf die andere Seite derselben mit entgegengesetztem Vorzeichen. Z. B. aus

$$x^2 + ax = b$$

wurde per antithesin

$$x^2 + ax - b = 0 .$$

Antoëci (Gegenwohner), die Bewohner, welche auf derselben Seite desselben Meridians und unter entgegengesetzten Breiten wohnen, sie haben gleiche Tageszeiten, aber entgegengesetzte Jahreszeiten. (Vergl. Antipoden.)

Anzahl, ist eine Menge von Einheiten, die durch eine bestimmte Zahl ausdrückbar ist oder gezählt werden kann.

Anziehende Kraft, die einer Masse beiwohnende Kraft, vermöge welcher eine andere Masse, ohne Einwirkung einer anderen Ursache, das Bestreben erhält, ihr näher zu kommen. Aus den wahrnehmbaren, in der Natur vorkommenden gegenseitigen Anziehungen von Massen, und da keine Wirkung ohne Ursache denkbar ist, muſs eine a. K. angenommen werden. (Vergl. Abstoſsende Kraft, Anziehung.)

Anziehung, das wahrnehmbare Bestreben der in der Natur befindlichen Massen, einander sich zu nähern, und als Wirkung die Aeuſserung einer nicht wahrnehmbaren, aber als nothwendig vorauszusetzenden Ursache, einer Kraft, die wir Anziehungskraft nennen.

Man hat A. in bemerkbarer und A. in unbemerkbarer Ferne; oder A. in der Entfernung und A. in der Berührung.

A. in der Entfernung; Attraction, das Bestreben der von einander entfernten Massen auf dem kürzesten Wege, also in gerader Linie zu einander hin sich zu bewegen. A. in der Berührung kommt in verschiedenen Erscheinungen vor:

a. Als Cohäsion, Wirkung der Cohärenz, das Bestreben der Massentheilchen eines Körpers, an einander haften zu bleiben, und das je nach der physikalischen Beschaffenheit des Körpers gröſser oder geringer ist (als bei festen, tropfbar flüssigen, luftförmigen Körpern).

b. Als Adhäsion (s. d.)

c. Als elektrische A. Entgegengesetzte Elektricitäten (elektrische Materien) haben das Bestreben, durch Strömung in einander überzugehen und sich auszugleichen, sich gegenseitig zu neutralisiren. Sind beide Fluida fern von einander, so entsteht eine gegenseitige Spannung zwischen beiden, und sind sie in einer dieser Ferne angemessenen Quantität vorhanden, so endigt diese Spannung in einen Uebersprung, wie bei der Elektrisirmaschine, dem Blitz, einer galvanischen Batterie. Hier ist also A. in der Ferne. Dennoch begreift man auch die elektrischen Erscheinungen durch Spannung und Ueberspringen unter die A. bei Berührung, weil das Bestreben zur Neutralisation, zu gegenseitiger Durchdringung die Ursache davon ist, die Körper aber, denen die Elektricität inwohnt, in einerlei Entfernung von einander bleiben, im Gegensatz zu Attraction.

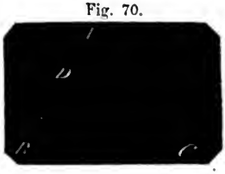
d. Als magnetische A. Auch diese hat, wie es scheint, eine A. in der Ferne. (Vergl. Abweichung der Magnetnadel.)

e. Als chemische A., das Bestreben verschiedener Körper, ihre unzertheilbaren, also auch undurchdringlichen Theilchen (Atome) in anderer Weise neben einander zu ordnen, wodurch ein dritter, den nun chemisch verbundenen Körpern ungleicher Körper entsteht. Also im Gegensatz zu Adhäsion, wo 2 heterogene Körper während ihrer Berührung dieselben bleiben. Man unterscheidet noch die auflösende A., das Bestreben verschiedener Körper, ihre Atome (oder vielmehr wohl ihre Moleküle, Massentheilchen, eine Summe von Atomen) neben einander zu ordnen, ohne daſs jeder von beiden aufhört zu sein, was er ist (z. B. Zucker und Wasser), also ein Gemenge zu bilden: wiewohl einige Chemiker diese Auflösung als einen schwachen Grad von Chemismus ansehen.

Anziehungskraft s. v. w. Anziehende Kraft.

Apagogischer Beweis (indirecter B.) Ein Beweis in der Form, daſs die Unrichtigkeit oder Unmöglichkeit des Gegentheils der Behauptung bewiesen wird, wonach der Schluſs zu folgern ist, daſs die Behauptung richtig oder nothwendig ist. Z. B. Euklid, 6. Satz, Lehrsatz:

Fig. 70.



Wenn in einem Triangel *ABC* zwei $\angle ABC$, *ACB* einander gleich sind, so sind auch die den gleichen Winkeln gegenüberliegenden Seiten *AC* und *AB* einander gleich.

Vorangegangen sind nur 2 Lehrsätze:

1) Satz 4. Wenn in zwei Triangeln zwei Seiten zweien Seiten, eine jede jeder für sich gleich sind, und ein Winkel einem Winkel gleich ist, der nämlich, den die gleichen Seiten einschliefsen: so ist auch die dritte Seite der dritten gleich; auch sind die Triangel selbst einander gleich; und von den übrigen Winkeln sind die, welche gleichen Seiten gegenüber liegen, ebenfalls einander gleich.

2) Satz 5. In jedem gleichschenkligen Triangel sind die Winkel an der Grundlinie einander gleich. Auch sind, wenn man die Schenkel verlängert, die Winkel unter der Grundlinie einander gleich.

Diese beiden vorangegangenen Lehrsätze und die bekannten voranstehenden Grundsätze können nur allein auf den Beweis des vorstehenden 6. Satzes angewendet werden, und Euklid giebt folgenden indirecten Beweis:

Wären *AC*, *AB* ungleich, so wäre eine davon gröfser, etwa *AB* (es mufs daher ein Theil von $AB = AC$ sein) es sei daher $BD = AC$. Ziehe *CD*. In den Triangeln *ABC*, *DBC* wäre demnach $BD = AC$, *BC* beiden gemein, und (die in beiden Triangeln von den wechselseitig gleichen Seiten eingeschlossenen Winkel) $DBC = ACB$; folglich (4. S.) $\triangle DBC = \triangle ABC$, welches unmöglich ist (weil etwas einem ihm kleineren oder einem ihm gröfseren nicht gleich sein kann). Demnach können *AC*, *AB* nicht ungleich sein und sind also gleich.

Der indirecte Beweis ist der schärfste, wenn eine Graduirung erlaubt ist, aller mathematischen Beweise, und er ist immer zulässig, wenn Umkehrungen von Sätzen zu erweisen sind, wie auch der vorstehende 6. Satz der umgekehrte 5. Satz ist.

Apertur. Die mittlere in dem Objectiv eines nicht achromatischen Fernrohrs für das Gesichtsfeld frei gelassene Oeffnung, indem der Rand des Glases rund herum mit einem undurchsichtigen Ringe, der Blendung versehen wird, damit die hier einfallenden farbigen und daher undeutlichen Lichtstrahlen zurückgehalten werden (s. achromatisch No. 1.)

Aphelium (Sonnenferne) s. u. Absiden.

Apogeum, die gröfste Entfernung des Mondes von der Erde, sie beträgt 63,6 Erdhalbmesser = 54664 Ml. Die kleinste Entfernung des Mondes von der Erde, das Perigeum beträgt 55,8 Erdhalbmesser = 47960 Ml.

Apollonische Parabel, heifst die aus dem Kegelschnitt entstehende P. zum

Fig. 71.



Unterschiede von der P. höherer Ordnung, weil Apollonius von Pergae das uns bekannte älteste Werk über Kegelschnitte geschrieben hat.

Führt man durch einen Punkt *F* des Kegelmantels eine Ebene $\neq$ der mit *F* in einerlei Axenebene liegenden Seite *AB*, so ist die durch den Mantel begrenzte Curve eine Parabel. Durch den Winkel *BAD* ist der ganze Kegel gegeben und durch die durch den Anfangspunkt *F* mit dem Durchmesser *BD* des Grundkreises parallele Linie *EF* zugleich die Parabel. Bezeichnet man die von *F* aus gemessenen Abscissen, wie *FI*, mit *x*, die zugehörigen normalen Ordinaten, wie *IG*, mit *y*, so findet man:

$$y^2 = 2\,EF \cdot \sin \tfrac{1}{2}\,BAD \times x$$

Die Constante $2\,EF \sin \frac{1}{2}\,BAD$, eine Linie, heifst der Parameter, wird gewöhnlich mit dem Buchstaben *p* bezeichnet, jede durch die Gleichung $y^2 = px$ gegebene Curve ist eine Parabel, und es gehören zu derselben unzählige Kegel und dazu gehörige Anfangspunkte *F*, je nachdem man *p* in verschiedene Factoren $2\,EF$ und $\sin \frac{1}{2}\,BAD$ zerlegt.

Die (rechtwinklige) Coordinatengleichung $y^2 = px$ hat man nun in eine ihr ähnliche allgemeinere umgeändert, nämlich in:

$$y^{m+n} = a^m \times x^n$$

nennt Curven, deren Formen solcher Coordinatengleichung entsprechen, Parabeln höherer Ordnung, und zum Unterschiede von solchen die P. einfacher Ordnungen auch die A. P.

Aporema (Ungewifsheit, Zweifel). Eine vielleicht lösbare, aber noch nicht zu lösen möglich gewesene mathematische Aufgabe.

Aporisma s. v. w. Aporēma.

Apothema, die gerade Linie von dem Mittelpunkt eines regulären Polygons normal auf eine Seite desselben.

Apotome (Ablösung, Trennung). Hiermit bezeichnet Euklid (10. B. 74. S.) die Differenz, welche entsteht, wenn man von einer Rationallinie eine andere, ihr blofs in Potenz commensurable Linie fortnimmt, und von der er (74. S.) beweist, dafs sie eine Irrationallinie ist. Hierbei ist zu bemerken, dafs Euklid nicht nur commensurable Linien, sondern auch solche Linien rational nennt, die zwar incommensurabel, aber in der Potenz (d. h. im Quadrat) commensurabel sind (10. Bd. 6. Erkl.), und dafs er unter irrationalen Linien nur solche versteht, die weder als Linien, noch in der Potenz commensurabel sind (10. Bd. 10. Erkl.)

Man nehme ein rechtwinkliges △, dessen Katheten die Linien $= 1$ sind, so ist die Hypothenuse ($= \sqrt{2}$) bei uns mit jeder Kathete ($= 1$) irrational, bei Euklid rational, weil das Quadrat $= 1$ der Kathete mit dem Quadrat $= 2$ der Hypothenuse commensurabel ist, eben so jede der Katheten $= 1$ und $= 2$ mit der Hypothenuse $= \sqrt{5}$. Bildet man aber aus den so erhaltenen Linien $= \sqrt{2}$ und $= \sqrt{5}$ ein Rechteck, $= \sqrt{2} \times \sqrt{5} = \sqrt{10}$, und construirt nach (2. B. 14. S.) das diesem gleiche Quadrat $= \sqrt{10}$, so ist die Seite $= \sqrt[4]{10}$ mit den Seiten $= 1$ und $= \sqrt{2}$ der zuerst betrachteten Quadrate irrational, weil auch deren Quadrate $= 1$ und 2 mit dem Quadrat $= \sqrt{10}$ incommensurabel sind.

Bezeichnet man mit b, c, d ... gerade, mit einander commensurable Linien, mit B, C, D ... Potenzen (Quadrate) von solchen geraden Linien, so dafs also A, B, C ebenfalls unter einander commensurabel sind; mit $\sqrt{B}$, $\sqrt{C}$, $\sqrt{D}$ ... Linien, die im Quadrat, aber nicht in der Länge commensurabel sind und mit A. eine Apotomē, so ist A. entweder von der Beschaffenheit $b - \sqrt{C}$ oder $\sqrt{B} - c$ oder $\sqrt{B} - \sqrt{C}$.

Euklid erklärt 6 Apotomen, in der Uebersetzung in einer nicht üblichen Sprech- und Bezeichnungsweise, welche das Studium erschwert, auch unleidlich macht. Es soll daher hier Erklärung 1 (nach dem 85. Satz) näher erläutert werden.

Erkl. 1. Eine Apotome, an die sich eine Linie fügt, so dafs die ganze, aus beiden bestehende Linie um das Quadrat einer ihr an Länge commensurablen Linie, über die angefügte potenzirt, heifst die e r s t e A., wenn solche ganze Linie einer angenommenen Rationallinie in Länge commensurabel ist.

Aus dem Schlufs des Satzes geht hervor, dafs die A. nur die erste der 3 Beschaffenheiten $b - \sqrt{C}$ haben kann, weil A *plus* einer angefügten Linie $\sqrt{C}$ eine ganze, in Länge commensurable Linie b geben soll. Dafs die ganze b über die angefügte $\sqrt{C}$ potenzirt, heifst: dafs folgendes Verhältnifs $b^2 : b^2 - C$, also das Quadrat der ganzen zu der Differenz der Quadrate der ganzen und der angefügten, gemeint wird, und dafs dieses Potenziren um das Quadrat einer ihr in Länge commensurablen Linie geschieht, heifst, dafs $b : \sqrt{b^2 - C} = d : e$ ist, also dafs die Seite $\sqrt{b^2 - C}$ eines der Differenz der Quadrate gleichen Quadrats eine mit b commensurable Linie giebt.

Bei der z w e i t e n A p o t o m e ist die angefügte (C) in Länge commensurabel, mithin $A = \sqrt{B} - c$ und für die Potenzirung
$$B : \sqrt{B - c^2} = d : e$$

Bei der d r i t t e n A p o t o m e ist weder die angefügte ($\sqrt{C}$), noch die ganze ($\sqrt{B}$) in Länge commensurabel, daher
$$A = \sqrt{B} - \sqrt{C}$$
und für die Potenzirung
$$\sqrt{B} : \sqrt{B - C} = d : e$$

Bei den übrigen 3 Apotomen soll die ganze Linie über die angefügte um das Quadrat einer in Länge i n c o m m e n s u r a b l e n Linie potenziren.

Bei der v i e r t e n A p o t o m e ist die ganze (b) in Länge commensurabel, also $A = b - \sqrt{C}$ und
$$b^2 : \sqrt{b^2 - C} = \sqrt{D} : \sqrt{E}$$

Bei der f ü n f t e n A p o t o m e ist die angefügte c in Länge commensurabel, daher $A = \sqrt{B} - c$ und
$$B : \sqrt{B - c^2} = \sqrt{D} : \sqrt{E}$$

Bei der s e c h s t e n A p o t o m e ist weder die ganze, noch die angefügte in Länge commensurabel, also $A = \sqrt{B} - \sqrt{C}$ und
$$B : \sqrt{B - C} = \sqrt{D} : \sqrt{E}$$

Apparat. 1) Ein stabiles Geräth; es unterscheidet sich von W e r k z e u g oder I n s t r u m e n t, dafs dieses ein n i c h t stabiles Geräth ist. G e r ä t h ist jeder Körper und jede zu einem Ganzen zusammengefügte Summe von Körpern, mit deren Hülfe der Mensch eine Thätigkeit ausübt. Das stabile Geräth, der A. unterscheidet sich von M a s c h i n e, dafs ersterer entweder selbst unthätig bleibt, oder wenn er selbstthätig ist, weder mechanische noch Ortsänderung von Körpern zu bürgerlich nutzbarem Zweck vollführt, während letztere durch Kräfte, welche auf dieselbe einwirken und in ihr zerlegt werden, selbst

zur Thätigkeit kommt, und zu bürgerlich nutzbarem Zweck Körper mechanisch oder deren Ort ändert. Aus diesem Grunde sollten die sogenannten astronomischen Maschinen, welche die Bewegung der Planeten um die Sonne figürlich darstellen, astr. Apparate genannt werden.

Zirkel, Kette, Stäbe sind Mefs-Instrumente; Mefstische, Astrolabien, Theodoliten sind Mefs-Apparate. Barometer, Thermometer, Lupen sind Beobachtungs-Instrumente; Calorimeter, Mikroskope Beobachtungs-Apparate. Die Adwood'sche Fallmaschine würde geeigneter Fall-Apparat genannt werden.

2) Eine Summe von Apparaten und Instrumenten, die zur praktischen Ausübung einer Wissenschaft gehören. Man hat mathematische, physikalische, chemikalische, astronomische, chirurgische etc. Apparate.

Appareille, Auffahrt, Rampe, bei einer Brustwehr die von dem Bau-Horizont nach der Geschützbank (Barbette) schräg aufsteigende Fläche. Sie hat mindestens 8 Fufs, höchstens in schlechtem Boden 12 Fufs Breite und eine Dossirung von mindestens der 6fachen Höhe zur Anlage (s. d.)

Applicate s. v. w. Ordinate (s. u. Abscisse), jedoch nur für Curven, aber für jede beliebige Abscissenlinie und unter beliebigem Winkel mit derselben.

Die Alten nannten (nach Apollonius) A. nur diejenigen Ordinaten einer Curve, welche ± mit einander zu beiden Seiten der Abscisse gleich grofs werden, also für Kegelschnitte, wenn die Abscisse ein Durchmesser, und für rechtwinklige A., wenn die Abscisse die Axe des Kegelschnitts ist.

Approximation s. v. w. Näherung, das Nahekommen an eine bestimmte Gröfse.

Einem Bruch $= \frac{298}{399}$ nähert man sich, wenn man für denselben $\frac{3}{4}$ setzt.

Der wirkliche Werth $\frac{298}{399}$ ist, in einen Decimalbruch ausgedrückt,	= 0,747686 ...
Der Näherungswerth $\frac{3}{4}$	0,750000
Die Annäherung ist geschehen auf	0,002313 ...

Approximationsformel, Näherungsformel, eine Formel, mit deren Anwendung man dem wirklichen Werth einer Gröfse nur nahe kommt, ohne ihn ganz zu erreichen. Z. B. die Formel für den Inhalt eines gleichschenkligen Dreiecks von der Grundlinie a und dem Schenkel b ist $I = \frac{1}{4}a\sqrt{(2b+a)(2b-a)}$ Ist nun a gegen b nur klein, so kann man das Dreieck als einen Kreisausschnitt betrachten, dessen Bogen die Länge a und dessen Radius $= b$ ist, und man hat $I = \frac{1}{2}ab$. Diese Formel wäre dann die Näherungsformel für den Inhalt des Dreiecks. Für $b = 30$ Fufs, $a = 8$ Fufs hat man

$$I = \tfrac{1}{4} \cdot 8\sqrt{68 \cdot 52} = 118{,}9335 \ \square'$$
$$\text{näherungsweise} = \tfrac{1}{2}8 \cdot 30 \ldots\ldots = 120{,}0000 \ \square'$$
$$\text{Die Annäherung ist geschehen auf} \quad 1{,}0665 \ \square'$$

Approximations-Werth, Näherungswerth, der durch Annäherung gewonnene Werth anstatt des wirklichen Werths einer Gröfse (s. d. vor. u. d. folg. Art.)

Approximativ (näherungsweise) findet man nur den Werth aller Irrationalzahlen, als $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{4}$ u. s. w., ferner die Werthe der transcendenten Zahlen, als aller briggischen Logarithmen mit Ausnahme der für die dekadischen Zahlen; die der trigonometrischen Zahlen mit wenigen Ausnahmen. Durch die Auflösung deren Werthe in Decimalbrüche oder in Kettenbrüche kann man jedoch einer solchen Zahl beliebig nahe kommen.

Z. B. die Ludolph'sche Zahl, das Verhältnifs der Peripherie eines Kreises ist (Vega logarithm. Tafeln) auf 140 Decimalstellen berechnet. Auf die ersten 8 Decimalstellen ist dieselbe 3,14159265 ...

Ein sehr brauchbarer Näherungswerth derselben ist 3,1416; durch Kettenbruch erhält man:

$\frac{22}{7} = 3{,}14258\ldots$; zu grofs um 0,00099

$\frac{333}{106} = 3{,}141509$; zu klein um 0,000083

$\frac{355}{113} = 3{,}1415929$; zu grofs um 0,000003

also eine für die Praxis sehr bedeutende Annäherung u. s. w.

Appuls, der Anstofs zum Durchgang eines Gestirns an ein vor dem Beobachtungs-Instrument angebrachtes Loth.

Apsiden, Schreibart auch für Absiden (s. d.)

Aptom. Das in der Mitte auf der Polygonseite einer bastionirten Verschanzung errichtete Perpendikel, nach welcher

als Hauptlinie (nächst der Polygonseite) die Bastion in Linien construirt (tracirt) wird. Ist das Polygon ein Viereck, so wird nach Vauban das A. $= \frac{1}{8}$, für ein Fünfeck $= \frac{1}{7}$, für ein Mehr als Fünfeck $= \frac{1}{6}$ der Polygonseite. (Kriegsw.)

Ist $GABH$ ein Theil des Umrisses eines Polygons, z. B. eines Sechsecks, AB eine der Polygonseiten, so ist CD das Aptom $= \frac{1}{6} AB$. Durch den Punkt D werden nun die geraden Defens- oder Streichlinien

Fig. 72.



AE und BF, von welchen $AI = BK = \frac{2}{7} AB$ die Facen, IF normal BF und KE normal AE die Flanken und EF die Courtine bestimmt. Die Winkel BAE und ABF zwischen der Polygonseite und den Streichlinien heifsen die abnehmenden Winkel (angles diminués).

Aräometer (von *αραιος*, dünn und *μετρειν*, messen). Ein mathematisch-physikalisches Instrument zur Bestimmung der Dichtigkeit oder des specifischen Gewichts einer tropfbaren Flüssigkeit, welches nicht nur für die Wissenschaft von Werth, sondern auch für die gesammte Technik von grofsem Nutzen ist.

Die Einrichtung und Construction des Instruments beruht auf dem hydrostatischen Gesetz, dafs ein in eine tropfbare Flüssigkeit eingetauchter specifisch leichterer fester Körper von der Flüssigkeit an Gewicht durch Einsenkung in dieselbe so viel verdrängt, als er selbst schwer ist, dafs also ein und derselbe Körper um so tiefer sich einsenkt, je dünner die Flüssigkeit ist, und um so weniger, je dichter sie ist.

Ein Instrument oder Apparat zur Bestimmung von Gewichten heifst allgemein eine Waage, und da das A. eingesenkt wird, so nennt man es auch Senkwaage. Das A. wird ferner nach jeder eigenthümlichen Flüssigkeit benannt, für deren Prüfung es ausschliefslich eingerichtet ist. So Alkalimeter für die Prüfung von Laugen, Alkoholometer für die des Weingeistes, Hydrometer für die des Wassers, Sacharometer für die einer Zuckerlösung, Bierwaage für die des Bieres, Salzspindel oder Solwaage für eine Sole.

Man hat dem Princip nach zweierlei A. Das Scalen-A., bei welchem das Gewicht des in die zu prüfende Flüssigkeit eingesenkten Körpers constant bleibt, und das Gewichts-A., bei welchem das Gewicht desselben variabel ist.

1. Scalen-Aräometer.

2. Wenn ein Körper von dem Gewicht P in eine Flüssigkeit F eingesenkt wird und er verdrängt ein Volumen V derselben, so hat dies Vol. V von F das Gewicht P, und die in anderen Flüssigkeiten F', F'', F''' ... verdrängten Vol. V', V'', V''' ... haben jede das Gewicht P. Bezieht man die Vol. V, V', V'' ... auf dieselbe Raum-Einheit (Kubikfufs, Kubikzoll u. s. w.) $= k$, und bezeichnet man die (absoluten) Gewichte von k für F, F', F'' ... mit g, g', g'' ... so hat man $Vg = V'g' = V''g'' = \ldots = P$ und hieraus $V : V' : V'' \ldots = \ldots g'' : g' : g$ d. h. die verdrängten Vol. der Flüssigkeiten verhalten sich umgekehrt wie deren absolute Gewichte von gleichem Volumen.

Denkt man sich unter der Flüssigkeit F von dem Vol. V destillirtes Wasser, so ist das Gewicht g eines Kubikfufses $k = 66$ preufs. Pfund; dieses Gewicht als Einheit gesetzt und die anderen absoluten Gewichte g', g'' ... mit demselben verglichen, giebt die specifischen Gewichte S', S'' ... der Flüssigkeiten F', F'' ..., nämlich $S' = \frac{g'}{g} = \frac{g' \, u}{66 \, u}$, $S'' = \frac{g'' \, u}{66 \, u} \ldots$

Die specifischen Gewichte S', S'' ... der Flüssigkeit verhalten sich also wie deren absolute Gewichte, und mithin

$$V : V' : V'' \ldots = \ldots S'' : S' : 1$$

3. Denkt man sich als A. einen Cylinder vom Querschnitt Q, der Länge L, dem Gewicht G, so ist die Tiefe L', um welche er sich in eine Flüssigkeit F von dem spec. Gew. S, also dem abs. Gew. Sg einsenkt,

$$L' = \frac{G}{Q \, Sg} \qquad (1)$$

Die Einsenkungstiefe ist also um so gröfser, nicht nur je geringer das spec. Gew. oder das abs. Gew. von F, sondern auch je gröfser G des A. und je kleiner Q, je gröfser also zugleich L des A. ist.

4. Ist das spec. Gew. des A. $= s$, so ist

$$G = Q \, Lg \cdot s$$

$$\text{daher } L' = \frac{Q \, Lg s}{Qg S} = L \cdot \frac{s}{S} \qquad (2)$$

Für einerlei Stoff bei prismati-

schen A. ist also die Einsenkungstiefe L' in irgend einer F vom Querschnitt des A. unabhängig; sie wächst nur mit der Länge L des A. und dem spec. Gew. dessen Stoffs.

Hat man Flüssigkeiten F von verschiedenen Dichtigkeiten zu prüfen, gehört zu F von der geringsten Dichtigkeit $S^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}$ die Einsenkungstiefe $l^{\frac{1}{n}}$, zu der von der gröfsten Dichtigkeit $S^n = n$ die Tiefe l^n, so theilt man die Länge $l^{\frac{1}{n}} - l^n$ als Scala in eine Anzahl Theile, versieht diese mit den auf einander folgenden Zahlen, und kann für jede F von zwischen liegender Dichtigkeit diese direct ablesen. Der Deutlichkeit und Genauigkeit wegen ist eine möglichst lange Scala, also eine möglichst grofse Differenz $l^{\frac{1}{n}} - l^n$ erwünscht.

Der aus physikalischen und chemischen Gründen zweckmäfsigste Stoff für ein A. ist Glas. Da dies aber schwerer als Wasser ist, so mufs es, wenn man spec. leichtere F als das Glas selbst damit prüfen will, hohl und unten geschlossen sein, damit innerhalb die bei Weitem leichtere Luft den gröfseren Theil des Volumens im A. ausmache. Man hat also das spec. Gew. s des A. in seinem Belieben, und mit dem möglich gröfsten s und dem möglich gröfsten L kann $l^{\frac{1}{n}} - l^1$ beliebig grofs erhalten werden.

5. Da die Einsenkungstiefe L' nie gröfser werden kann, als die Länge L des A., so **mufs $\frac{s}{S}$ ein ächter Bruch sein.**

Also $s < S^{\frac{1}{n}}$, d. h. kleiner als $\frac{1}{n}$ des spec. Gew. 1 des Wassers; und da diese Differenz nur äufserst gering zu sein braucht, so soll das spec. Gew. s des A. $= \frac{1}{n}$ als Grenzwerth genommen werden. Dann ist nach No. 4

$$L' = \frac{1}{n}\,\frac{L}{S}$$

$$\text{Für } S = \frac{1}{n} \text{ wird } L' = L$$

$$\text{,, } S = \frac{2}{n} \text{ ,, } L' = \tfrac{1}{2}L$$

$$\text{,, } S = \frac{3}{n} \text{ ,, } L' = \tfrac{1}{3}L$$

$$\text{Für } S = \frac{m}{n} \text{ wird } L' = \frac{1}{m}L$$

$$\text{,, } S = \frac{n}{n} = 1 \text{ ,, } L' = \frac{1}{n}L$$

$$\text{,, } S = \frac{2n}{n} = 2 \text{ ,, } L' = \frac{1}{2n}L$$

$$\text{,, } S = n \text{ ,, } L' = \frac{1}{n^2}L$$

Bei gleichen Abständen der spec. Gew. von Flüssigkeiten nehmen die Einsenkungstiefen also ungleichmäfsig ab.

Setzt man das geringste spec. Gew. der zu prüfenden $F = \frac{1}{4}$, also das des A. ebenfalls $= \frac{1}{4}$, die Länge L des A. $= 16''$, so hat man für

$S = \frac{1}{4}$,	$L = 16''$	Differenz $8''$
$S = \frac{1}{2}$,	$L = 8''$	
$S = \frac{3}{4}$,	$L = 5\frac{1}{3}''$	,, $2\frac{2}{3}''$
$S = 1$,	$L = 4''$	,, $1\frac{1}{3}''$
$S = 1\frac{1}{4}$,	$L = 3\frac{1}{5}''$	,, $\frac{4}{5}''$
$S = 1\frac{1}{2}$,	$L = 2\frac{2}{3}''$	,, $\frac{8}{15}''$
$S = 1\frac{3}{4}$,	$L = 2\frac{2}{7}''$	,, $\frac{8}{21}''$
$S = 2$,	$L = 2''$	,, $\frac{2}{7}''$
$S = 3$,	$L = 1\frac{1}{3}''$	,, $\frac{2}{3}''$
$S = 4$,	$L = 1''$	,, $\frac{1}{3}''$

Aus den Differenzen ersieht man, dafs die Abnahme der Einsenkungstiefen von den leichteren zu den schwereren F hin in einem sehr bedeutenden Verhältnifs geschieht.

6. Nimmt man einen Cylinder von dem Gew. P, taucht ihn in Wasser, markirt die Einsenkungstiefe l in der Höhe des Wasserspiegels, so hat das verdrängte Wasser das Gew. P. Bezeichnet man mit q den Querschnitt des Cylinders, so ist $qlg = P$.

Für eine F von doppelter Schwere des Wassers, also von dem abs. Gew. $2g$, würde für P das Vol. nur die Hälfte $= \frac{1}{2}lq$, also auch die Einsenkungstiefe nur die Hälfte $= \frac{1}{2}l$ betragen. Bezeichnet man daher die Wassermarke mit einer Zahl, z. B. 10, theilt die Tiefe l in 10 gleiche Theile, bezeichnet diese mit 9, 8, 7 . . . 1 nach abwärts, so verhalten sich die Einsenkungstiefen bis zu den Theilstrichs-Zahlen wie diese Zahlen und wie die verdrängten Wassermengen, also die Zahlen umgekehrt wie die abs. Gewichte und die Dichtigkeiten der F.

Das spec. Gew. des Wassers $= 1$ gesetzt, giebt eine F, in welcher das A. eingesunken ist, bis zum

Theilstrich	das Vol.	spec. Gew.	Differenzen der Gew.
1	= 0,1	= 10	5
2	= 0,2	= 5	1,66 . . .
3	= 0,3	= 3,33 . . .	0,83 . . .
4	= 0,4	= 2,5	0,5
5	= 0,5	= 2	0,33 . . .
6	= 0,6	= 1,66 . . .	0,23
7	= 0,7	= 1,43 . . .	0,18
8	= 0,8	= 1,25	0,14
9	= 0,9	= 1,11 . . .	0,11
10	= 1	= 1,00 . . .	

Aus den Differenzen ersieht man, wie aus 5, dafs Abtheilungen für **gleich weit abstehende** spec. Gewichte sehr ungleich und zwar von oben bei 10, nach unten bei 0 immer kürzer werden würden.

Taucht man dasselbe A. in eine F von dem halben spec. Gew., also dem absoluten $\frac{1}{2}g$, so hat das verdrängte Vol. der F wieder das Gew. P, es ist also $= 2gl$. Setzt man daher dieselbe gleiche Theilung nach oben fort, bezeichnet die Theilstriche mit 11, 12, 13 . . . 20 . . ., so verhalten sich die Einsenkungstiefen bis zu den Zahlen und die verdrängten Volumina wie die Zahlen, und die Gew. der F umgekehrt wie dieselben.

Es ist nämlich, wenn in eine F das A. eingesunken ist, bis zu dem

Theilstrich	das Vol.	das spec. Gew.	Differenz.
11	= 1,1	$= \frac{10}{11} = 0{,}909$ . . .	0,076
12	= 1,2	$= \frac{10}{12} = 0{,}833$ . . .	0,063
13	= 1,3	$= \frac{10}{13} = 0{,}770$	
. . .	. . .	. . .	
19	= 1,9	$= \frac{10}{19} = 0{,}526$	0,026
20	= 2,0	$= \frac{10}{20} = 0{,}500$	

Auch hier würden Abtheilungen für **gleich weit abstehende** Gewichtsverminderungen, wie ad 5 gezeigt, nach oben zu immer länger werden.

Man nennt A. mit **gleich weiten** Abtheilungen, weil sie das von denselben verdrängte Volumen einer F angeben, **Volumeter**.

7. Man sieht aus dem Vorigen, dafs bei dem Eintauchen des A. in schwere F wegen der so geringen Einsenkungstiefe das Instrument wenig stabil ist, schwer zu handhaben und die Ablesung der Tiefen unsicher ist. Geht man auf die Formel $L' = \frac{G}{QSg}$ (1, No. 3) zurück, so kann man ein möglichst grofses Gew. G des A. mit einem möglichst kleinen Q desselben dadurch vereinigen, dafs man das Vol. V^n des A., welches von der schwersten der zu untersuchenden F vom spec. Gew. $S^n = n$ verdrängt werden mufs, damit $nV^n g = G$ werde, aus einer gröfseren mit Quecksilber beschwerten Kugel bestehen läfst, und von dieser ab einen leichten, dünnen Cylinder fortsetzt.

Es sei G^n das Gew. dieser Kugel, V^n deren Vol., so ist das Gew. des Scalenrohrs $= G - G' = g^n$, dessen Länge sei l, dessen Querschnitt q, dessen spec. Gew.

$$s^n = \frac{g^n}{qlg} \tag{3}$$

Soll nun bei der F^n von dem spec. Gew. n nur die Kugel, bei der $F^{\frac{1}{m}}$ von dem spec. Gew. $\frac{1}{m}$ (als Grenzwerth) die ganze Länge l des Rohrs eintauchen, so hat man

$$n \cdot V^n \cdot g = G \tag{4}$$

$$\frac{1}{m}(V^n + ql) \cdot g = G \tag{5}$$

woraus

$$l = \frac{V^n}{q} \cdot \frac{n - \frac{1}{m}}{\frac{1}{m}} = (nm - 1) \cdot \frac{V^n}{q} \tag{6}$$

In eine F von dem spec. Gew.

$$S\frac{k}{m} = \frac{k}{m}$$

taucht das Rohr ein um die Tiefe l', so dafs

$$(V^n + ql')\frac{k}{m}g = G$$

$$= (V^n + ql)\frac{1}{m}g$$

$$\text{woraus } l' = \frac{1}{k}\,l - \frac{k-1}{k}\,\frac{V^n}{q}$$

für $k = m$, also für destillirtes Wasser hat man

$$l' = \frac{1}{m}\,l - \frac{m-1}{m}\cdot\frac{V^n}{q} \qquad (7)$$

8. Es sei r der Halbmesser der Röhre, zr der Halbmesser der Kugel, dann ist $q = r^2\pi$

$$V^n = \tfrac{4}{3}z^3r^3\pi, \text{ mithin}$$

$$\frac{V^n}{q} = \tfrac{4}{3}z^3\,r \qquad (8)$$

$$l = \tfrac{4}{3}(nm-1)z^3r$$

hieraus

$$nm = \tfrac{3}{4}\cdot\frac{l}{z^3\,r} + 1 \qquad (9)$$

je grösser l und je kleiner r, desto gröfser wird $n\cdot m$, desto gröfser ist der Abstand der geringsten und gröfsten Dichtigkeit zweier F, die man mit demselben A. prüfen kann.

Setzt man l, wie ad 5 = 16 Zoll, r mindestens $\frac{1}{4}$ Zoll, damit man deutliche Zahlen schreiben kann, so ist

$$n\cdot m = \frac{48}{z^3} + 1 \qquad (10)$$

Nimmt man $z = 1$, d. h. den Halbmesser der Kugel = dem der Röhre, so ist $n\cdot m = 49$, und man kann F von $S = 7$ bis zu $S = \frac{1}{7}$ mit demselben A. prüfen.

Die Einsenkungstiefe l' für destillirtes Wasser wäre nach 7, No. 7 = $3\frac{3}{4}$ Zoll, die obere übrige Länge $12\frac{1}{4}$ Zoll, so dafs leichtere F viel genauer zu bestimmen sind als schwere.

9. Man kann die Theorie des A. in Beziehung auf die in der Natur uns gegebenen tropfbar flüssigen Stoffe in engere Grenzen schliefsen:

Nach Schubarth's Tabellen hat unter allen dort aufgeführten tropfbaren Flüssigkeiten der Kohlenwasserstoff $H^4\,C^2$ das geringste spec. Gew. = 0,6270 mithin das geringste abs. Gew. = 0,627 × 66 ℔ = 41,382 ℔, und mit Ausnahme von Quecksilber das Chlor-Arsenik das gröfste spec. Gew. = 6,300 mithin das gröfste abs. Gew. 415,8 ℔.

Innerhalb dieser Grenzen, nämlich für spec. Gew. von 0,627 bis 6,300 mit der Differenz 5,673; und für absolute Gew. von 41,382 bis 415,800 ℔ mit der Differenz 374,418 ℔ hat man also nur nöthig, das A. zur Bestimmung der Dichtigkeit von Flüssigkeiten einzurichten.

10. Da die leichteste F von 0,627 noch mufs gemessen werden können, das A. also nicht bis zum obersten Grenzpunkt einsinken darf (übrigens ist dies nur theoretisch richtig, praktisch auszuführen jedoch noch nicht gelungen: ein Körper schwimmt entweder, d. h. er ist leichter als die F, oder er geht unter, d. h. er ist schwerer als die F. Einen festen Körper von solcher Beschaffenheit zu erzeugen, der als gleich spec. schwer mit F in jeder Tiefe von F ruhen bleibt, ist noch nicht möglich gewesen), so soll das geringste S für $F = \frac{1}{m} = 0{,}600$ festgesetzt werden; das gröfste $S = n$ bleibt 6,300.

Dann ist $m = \frac{10}{6}$

$n = 6{,}3$

also $nm = 10{,}5$

(aus 10, No. 8) $z^3 = \frac{48}{9{,}5} = 5\frac{1}{19}$

daher $z = 1{,}71$

Bei $\frac{1}{4}'' = 3'''$ Halbmesser oder $6'''$ Durchmesser der Scalenröhre, wird der Durchmesser der Kugel $= 10\frac{1}{4}'''$.

Und aus 6, No. 7 oder aus 8, No. 8:

$$\frac{V^n}{q} = 1\tfrac{13}{19}'' = 20{,}2'''$$

das Volumen der Kugel

$$V^n = \tfrac{4}{3}\cdot\left(\frac{5\frac{1}{8}}{12}\right)^3\cdot\pi \text{ cub.}'' = 0{,}3263 \text{ cub.}''$$

das Volumen des Rohrs

$q\cdot l = (\frac{1}{4})^2\pi\cdot 16$ = 3,1416 „

das Volumen des A. = 3,4679 cub.″

Das spec. Gew. des A. ist nach 5, No. 7 $= \frac{1}{m} = 0{,}6$; das Gew. des cub.″ Wasser $= g = 1\frac{2}{9}$ Loth, daher das Gew. G des A. = 2,5431 Loth.

Das Gew. der schwersten F von $S = 6{,}3$ welches von dem Vol. V^n der Kugel verdrängt wird,

$0{,}3263\cdot 6{,}3\cdot 1\frac{2}{9}$ Loth = 2,5125 Loth.

Der Mantel der Röhre ist

= 16 × 1,5708 = 25,1328 □″

der Umfang der Kugel

$= 4\left(\frac{5\frac{1}{8}}{12}\right)^2\pi =$ 2,2922 „

der Umfang des A. = 27,425 □″

Das Glas hat das spec. Gew. = 3;

1 cub.'' Glas wiegt also $3\frac{2}{3}$ Loth, daher die Stärke des Glases

$$=\frac{2{,}5431\cdot 12'''}{3\frac{2}{3}\cdot 27{,}425}=\tfrac{1}{3}'''$$

Die Kugel würde also bei der Stärke des Glases von $\frac{1}{3}'''$ keine Beschwerung durch Quecksilber etc. erleiden.

Die Einsenkungstiefe l' für Wasser ($S=1$) erhält man aus 7, No. 7, wenn man für

$\frac{V^n}{q}=20{,}2'''$ und für $m=\frac{10}{6}$ setzt:

$$l'=106{,}12'''=8''\ 10{,}12'''$$

so daſs für die Scala der leichteren F von $S=1$ bis $S=0{,}6$ die kleinere Länge 7'' 1,88''' sich ergiebt, während die schweren F von $S=1$ bis $S=6{,}3$ die gröſsere Länge zur Ablesung erhalten, aber auch in einem verhältniſsmäſsig viel gröſseren summarischen Abstande der S, so daſs dennoch diese S nicht so genau bestimmt werden als die oberen.

11. In einer F von dem spec. Gew. p taucht das Rohr ein um die Tiefe l', so daſs

$$(V^n+ql')p\cdot g=G=(V^n+ql)\frac{1}{m}g \qquad (11)$$

woraus

$$l'=\frac{l}{mp}-\frac{p-\frac{1}{m}}{p}\cdot\frac{V^n}{q} \qquad (12)$$

Die Werthe für die bekannten Gröſsen aus 10 eingesetzt, giebt:

$$l'=\frac{0{,}6\cdot 16''}{p}-\frac{p-0{,}6}{p}\cdot\frac{20{,}2''}{12}$$

Für $p=6{,}3$ wird $l'=0$, wie die Annahme, daſs das Maximum von $p=6{,}3$ betragen solle, es bedingt.

Für $p=5$ wird $l'=0{,}44''=5{,}28'''$; diese Länge ist für einen Abstand von 1,3 der S von F, also von 85,8 Pfund pro cub.' an abs. Gew. viel zu gering, es können so schwere F mit diesem A. nicht untersucht werden.

12. Verzichtet man also auf die Prüfung dieser schwersten F, so erhält man für eine F^n, wo n geringer ist, ein gröſseres V^n und gewinnt, wenn von diesem kleineren n die Scala anfängt, für F von geringerem summarischen Abstand an Schwere dieselbe Länge l der Scala.

Für das obige $l=16''$ und $r=\frac{1}{4}''$, also $q=\frac{1}{16}\pi=0{,}1963$ (wofür hier 0,2 □'' genommen werden soll) hat man aus 6, No. 7, wenn nach No. 10 $m=\frac{10}{6}$ verbleibt:

für $n=6{,}3$; $V^n=\frac{0{,}2\cdot 16}{9{,}5}=0{,}33\ldots$ cub.''

„ $n=4$; $V^n=\frac{0{,}2\cdot 16}{5\frac{2}{3}}=0{,}56\ldots$ „

„ $n=2$; $V^n=\frac{0{,}2\cdot 16}{3\frac{2}{3}}=0{,}87\ldots$ „

u. s. w.

Dasselbe günstige Ergebniſs für die Vermehrung von V^n findet statt, wenn man das spec. Gew. $\frac{1}{m}$ vermehrt, also m vermindert, und in noch höherem Maaſse, wenn zugleich n und m vermindert wird.

13. Diese Betrachtung führt offenbar auf die Anordnung, daſs man die leichteren F durch ein anderes A. miſst, als die schwereren.

Theilt man die Differenz $6{,}3-0{,}6=5{,}7$ der gröſsten und geringsten S aller F in 3 gleiche Theile, und nimmt ein A. nämlich ein

A' für F von $S=6{,}3$ bis 4,4; Differenz 1,9
A'' „ „ „ „ $=4{,}4$ „ 2,5; „ 1,9
A''' „ „ „ „ $=2{,}5$ „ 0,6; „ 1,9

so hat man für dieselben

$$l=16'',\ r=\tfrac{1}{4}''$$

Benennung		für A'	für A''	für A'''
$\frac{1}{m}$	=	4,4	2,5	0,6
n	=	6,3	4,4	2,5
$n\cdot m$	=	$\frac{63}{44}$	1,76	$\frac{25}{6}$
z^3	=	$\frac{2112}{19}$	$\frac{1200}{19}$	$\frac{288}{19}$
z	=	4,8082	3,9824	2,4748
$\frac{V^n}{q}$	=	$\frac{704}{19}=37\frac{1}{19}''$	$\frac{400}{19}=21\frac{1}{19}''$	$\frac{96}{19}=5\frac{1}{19}''$
q	=	0,19635 □''	0,19635 □''	0,19635 □''
V^n	=	7,2753 cub.''	4,1337 cub.''	0,9921 cub.''
ql	=	3,1416 cub.''	3,1416 cub.''	3,1416 cub.''
V^n+ql	=	10,4169 cub.''	7,2753 cub.''	4,1337 cub.''

Benennung		für A'	für A''	für A'''
G	=	56,0198 Loth	22,2301 Loth	3,0314 Loth
Umfang von V^n	=	18,1572 □''	12,4559 □''	4,8106 □''
„ der Röhre	=	25,1328 □''	25,1328 □''	25,1328 □''
„ des A.	=	43,2900 □''	37,5887 □''	29,9434 □''
erforderliche Glasstärke der Röhre	=	$\frac{1}{3}$ Linie	$\frac{1}{3}$ Linie	$\frac{1}{3}$ Linie
Gew. der Röhre ql	=	2,56 Loth	2,56 Loth	2,56 Loth
Gew. der Kugel V^n inclusive Quecksilberfüllung	=	53,46 Loth	19,67 Loth	0,47 Loth

Ist für ein A. das Minimum des spec. Gew. s einer F, welche geprüft werden kann, $= \frac{1}{m}$, so taucht dies A. in eine F von dem spec. Gew. p ein (s. 12, No. 11)

$$l' = \frac{l}{mp} - \frac{p - \frac{1}{m}}{p} \cdot \frac{V^n}{q} \qquad (13)$$

Die bekannten Gröfsen aus der obigen Tabelle eingesetzt, giebt:

$$\text{für das } A' : l' = \frac{704}{19}\left(\frac{63}{10p} - 1\right)$$

$$\text{für das } A'' : l' = \frac{400}{19}\left(\frac{44}{10p} - 1\right)$$

$$\text{für das } A''' : l' = \frac{96}{19}\left(\frac{25}{10p} - 1\right)$$

Für $p = 5$ war in dem A. No. 11 : $l' = 0{,}44''$ für das A' erhält man $l' = 9{,}628$ Zoll, woraus der bedeutende Unterschied zwischen beiden A. hervorgeht, wenn sehr schwere F geprüft werden sollen.

Für $p = 0{,}7$ erhält man bei dem A. No. 11 : $l' = 12{,}9''$; für $p = 0{,}6$ ist sie daselbst 16'', mithin für den obersten Abstand der spec. Gew. von 0,1 die Länge 3,1 Zoll.

Für das A''' erhält man $l' = 13''$; mithin den oberen Abstand 3'', also dieselbe Länge, wie bei jenem A., und man ersieht den Vortheil, den es hat, wenn man für F von nur kleinen Differenzen an Schwere ein A. construirt.

Die Einsenkungstiefen l' ergeben sich für F von dem spec. Gew. in den Abständen 0,1 wie folgt:

1. Bei dem A'

spec. Gew.	Eintauchungstiefe über V^n	Differenzen der Tiefe bei $s^n - s^m = 0{,}1$
6,3	$l' =$ 0,0000	
6,2	$l' =$ 0,5976	0,5976
6,1	$l' =$ 1,2148	0,6172
6,0	$l' =$ 1,8526	0,6378
5,9	$l' =$ 2,5120	0,6594
5,8	$l' =$ 3,1941	0,6822
5,7	$l' =$ 3,9002	0,7061
5,6	$l' =$ 4,6316	0,7313
5,5	$l' =$ 5,3895	0,7579
5,4	$l' =$ 6,1754	0,7859
5,3	$l' =$ 6,9911	0,8157
5,2	$l' =$ 7,8381	0,8470
5,1	$l' =$ 8,7183	0,8802
5,0	$l' =$ 9,6337	0,9154
4,9	$l' =$ 10,5865	0,9528
4,8	$l' =$ 11,5789	0,9924
4,7	$l' =$ 12,6137	1,0348
4,6	$l' =$ 13,6934	1,0797
4,5	$l' =$ 14,8210	1,1276
4,4	$l' =$ 16,0000	1,1790

2. Bei dem A''

spec. Gew.	Eintauchungstiefe über V^n	Differenzen der Tiefe bei $s^n - s^m = 0{,}1$
4,4	$l' =$ 0,00000	
4,3	$l' =$ 0,48960	0,48960
4,2	$l' =$ 1,00251	0,51291
4,1	$l' =$ 1,54044	0,53793
4,0	$l' =$ 2,10526	0,56482
3,9	$l' =$ 2,69906	0,59380
3,8	$l' =$ 3,32410	0,62504
3,7	$l' =$ 3,98293	0,65883
3,6	$l' =$ 4,67836	0,69543
3,5	$l' =$ 5,41353	0,73517

spec. Gew.	Eintauchungs-tiefe über V^n	Differenzen der Tiefe bei $s^n - s^m = 0,1$
		0,77842
3,4	$l' =$ 6,19195	
		0,82559
3,3	$l' =$ 7,01754	
		0,87720
3,2	$l' =$ 7,89474	
		0,93378
3,1	$l' =$ 8,82852	
		0,99604
3,0	$l' =$ 9,82456	
		1,06473
2,9	$l' =$ 10,88929	
		1,14078
2,8	$l' =$ 12,03007	
		1,22529
2,7	$l' =$ 13,25536	
		1,31954
2,6	$l' =$ 14,57490	
		1,42500
2,5	$l' =$ 16,00000	

3. Bei dem A'''

spec. Gew.	Eintauchungs-tiefe über V^n	Differenzen der Tiefe bei $s^n - s^m = 0,1$
2,5	$l' =$ 0,00000	
		0,21053
2,4	$l' =$ 0,21053	
		0,22883
2,3	$l' =$ 0,43936	
		0,24964
2,2	$l' =$ 0,68900	
		0,27341
2,1	$l' =$ 0,96241	
		0,30075
2,0	$l' =$ 1,26316	
		0,33241
1,9	$l' =$ 1,59557	
		0,36934
1,8	$l' =$ 1,96491	
		0,41280
1,7	$l' =$ 2,37771	
		0,46440
1,6	$l' =$ 2,84211	
		0,52631
1,5	$l' =$ 3,36842	
		0,60150
1,4	$l' =$ 3,96992	
		0,69405
1,3	$l' =$ 4,66397	
		0,80971
1,2	$l' =$ 5,47368	
		0,95694
1,1	$l' =$ 6,43062	
		1,14833
1,0	$l' =$ 7,57895	
		1,40351
0,9	$l' =$ 8,98246	
		1,75439
0,8	$l' =$ 10,73685	
		2,25563
0,7	$l' =$ 12,99248	
		3,00752
0,6	$l' =$ 16,00000	

14. Aus den Differenzenreihen der drei Tabellen ist zu ersehen, daſs die Theilungs-Unterschiede um so gleichförmiger sind, je schwerer, und um so ungleichförmiger, je leichter die abzuwägenden *F* sind.

Bei dem *A'* beträgt von den *S* 6,3 bis 6,2 die unterste Theilung 0,5976″ = 7⅛‴. Es ist diese Länge recht gut in 10 Theile zu theilen, um die *S* auf Hundertel anzugeben, und wenn man zugleich erwägt, daſs die folgende Theilung zwischen 6,2 und 6,1 nur 0,6172″ = 7,4‴ beträgt, so kann die Theilung, nachdem man den Theilstrich für das *S* = 6,25 festgestellt hat, in der oberen und in der unteren Hälfte zwischen 6,30 bis 6,25 und zwischen 6,25 bis 6,20 in gleichen Abständen geschehen.

Bei dem *A″* beträgt die unterste Theilung nur 0,4896″ = 5⅞‴, bei dem *A‴* dieselbe nur 0,2105″ = 2½‴ und hier würde also eine fernere Eintheilung zu Ablesung von Hunderteln zu klein ausfallen.

Sollten die 3 A. in No. 13 zu Normal-A. für alle *F* eingerichtet werden und hätten die untersten der leichteren *F* mit den untersten der schwersten *F* einerlei Anspruch auf Genauigkeit bei einerlei Differenz der *S*, so müſsten die *A'*; *A″*; *A‴* so viele gleich weit an *S* von einander abstehende *F* zu wägen erhalten, wie ungefähr das Verhältniſs 7⅛ : 5⅞ : 2½ = 172 : 141 : 60 angiebt, also 26,22 und 9, d. h.

A' die *F* der *S* von 6,3 bis 3,7	Differenz	2,6
A″ die *F* der *S* von 3,7 bis 1,5	„	2,2
A‴ die *F* der *S* von 1,5 bis 0,6	„	0,9
in Summa *S* von 6,3 bis 0,6	„	= 5,7

Die letzte Theilung würde dann in den 3 A. so ziemlich gleich und zwischen 2½‴ und 7⅛‴ betragen.

Allein man kann mit der Angabe auf Hundertel nicht wohl zufrieden sein, die *S* müssen bis auf Tausendtel sicher angegeben werden können, und daher sind mehr als 3 Normal-A. einzuführen.

Die schwerste *F* hat die	*S* = 6,300
die leichteste *F* nach No. 10 als Grenzwerth	*S* = 0,600
summarische Differenz	= 5,700

Nimmt man der Wichtigkeit des Gegenstandes wegen 10 Normal-A. als nothwendig, welche Tausendtel nachweisen sollen, so hat man 5700 Theilungen, und auf jedes A. im Mittel 570 Theilungen.

Der unterste Körper vom Volum V^n hat nicht nöthig, eine Kugel zu sein; er sei ein Gefäſs von dem Volum = *V*.

Die Scalenröhre soll zur bequemen Handhabung die Länge *l* = 10″ = 120‴ erhalten, als Cylinder 4‴ Durchmesser haben; dann ist ihr Querschnitt *q* = 12,5664 □‴ und ihr Volum *ql* = 1508 cub.‴

Das A. in F von der schwersten $S=n$ habe die Einsenkungstiefe $=0$; das in ihr von A. verdrängte Volum ist also $=V$

In der F von der leichtesten $S=m$ sei (als Grenzwerth) die Tiefe $=l=120'''$

Aus 10 und 11 hat man ferner:

$$nV=m(V+ql) \quad (1)$$

$$l=\left(\frac{n}{m}-1\right)\frac{V}{q} \quad (2)$$

$$\frac{n}{m}=\frac{lq}{V}+1 \quad (3)$$

$$V=\frac{m}{n-m}\cdot ql \quad (4)$$

$$\frac{V}{q}=\frac{m}{n-m}\cdot l \quad (5)$$

Die Einsenkungstiefe (l') für eine F von der $S=p$

$$l'=\frac{m}{p}l-\left(1-\frac{m}{p}\right)\frac{V}{q}=\frac{m}{p}\left(l+\frac{V}{q}\right)-\frac{V}{q}$$

$$=\frac{m}{n-m}\,l\left(\frac{n}{p}-1\right) \quad (6)$$

Will man in allen 10 A. die untersten Theilungen gleich grofs haben, und man schreibt deshalb für p den Werth $n-1$, dann erhält man für diese

$$l''=\frac{m}{(n-m)(n-1)}l=120\cdot\frac{m}{(n-m)(n-1)} \quad (7)$$

für das A. No. 1 ist $n=6300$; m unbekannt,

für das A. No. 10 ist $m=600$; n ist unbekannt.

Es entsteht eine quadratische diophantische Gleichung, es mufs probirt werden, und dies führt hier ohne die für jedes der 10 A. anzusetzende dioph. Gl. leichter zum Ziel.

15. Für die 10 Normal-A. mögen vorläufig folgende Bestimmungen gelten:

A. No. 1	wäge F	von	$S=6{,}300$	bis	$S=5{,}700$;	Differenz 0,600
A. No. 2	„ F	„	$S=5{,}700$	„	$S=5{,}110$	„ 0,590
A. No. 3	„ F	„	$S=5{,}110$	„	$S=4{,}530$	„ 0,580
A. No. 4	„ F	„	$S=4{,}530$	„	$S=3{,}960$	„ 0,570
A. No. 5	„ F	„	$S=3{,}960$	„	$S=3{,}390$	„ 0,570
A. No. 6	„ F	„	$S=3{,}390$	„	$S=2{,}820$	„ 0,570
A. No. 7	„ F	„	$S=2{,}820$	„	$S=2{,}250$	„ 0,570
A. No. 8	„ F	„	$S=2{,}250$	„	$S=1{,}690$	„ 0,560
A. No. 9	„ F	„	$S=1{,}690$	„	$S=1{,}140$	„ 0,550
A. No. 10	„ F	„	$S=1{,}140$	„	$S=0{,}600$	„ 0,540

Da aber die obersten S jedes A. die Grenzwerthe sind, d. h. bei welchen die A. gänzlich eintauchen, was, wie ad 10 aus einander gesetzt, praktisch nicht ausführbar ist, so würden die F der zunächst obersten S in jedem A. nicht abgewägt werden können, es müssen daher die S der F in den auf einander folgenden A. sich übergreifen, eine Nothwendigkeit, die bei den 3 A. in No. 13 unberücksichtigt gelassen worden ist. Dieses Uebergreifen soll um 25 Einheiten geschehen und die 10 Normal-A. würden dann abwägen

A. No. 1	wäge F	von	$S=6{,}300$	bis	$S=5{,}675$
A. No. 2	„ F	„	$S=5{,}700$	„	$S=5{,}085$
A. No. 3	„ F	„	$S=5{,}110$	„	$S=4{,}505$
A. No. 4	„ F	„	$S=4{,}530$	„	$S=3{,}935$
A. No. 5	„ F	„	$S=3{,}960$	„	$S=3{,}365$
A. No. 6	„ F	„	$S=3{,}390$	„	$S=2{,}795$
A. No. 7	„ F	„	$S=2{,}820$	„	$S=2{,}225$
A. No. 8	„ F	„	$S=2{,}250$	„	$S=1{,}665$
A. No. 9	„ F	„	$S=1{,}690$	„	$S=1{,}115$
A. No. 10	„ F	„	$S=1{,}140$	„	$S=0{,}600$

Fafst man 10 S in Summa mit 0,010 als eine Theilung zusammmen, so erhält man nach Formel 7 die untersten Theilungen für

$$\text{A. No. 1}=\frac{5{,}675\cdot 120}{0{,}625\cdot 629}=1{,}732$$

$$\text{A. No. 2}=\frac{5{,}085\cdot 120}{0{,}615\cdot 569}=1{,}744$$

$$\text{A. No. 3}=\frac{4{,}505\cdot 120}{0{,}605\cdot 510}=1{,}752$$

$$\text{A. No. 4}=\frac{3{,}935\cdot 120}{0{,}595\cdot 452}=1{,}756$$

$$\text{A. No. 5}=\frac{3{,}365\cdot 120}{0{,}595\cdot 395}=1{,}718$$

$$\text{A. No. 6}=\frac{2{,}795\cdot 120}{0{,}595\cdot 338}=1{,}668$$

$$\text{A. No. 7}=\frac{2{,}225\cdot 120}{0{,}595\cdot 281}=1{,}597$$

$$\text{A. No. 8}=\frac{1{,}665\cdot 120}{0{,}585\cdot 224}=1{,}525$$

$$\text{A. No. } 9 = \frac{1{,}115 \cdot 120}{0{,}575 \cdot 168} = 1{,}385$$

$$\text{A. No. } 10 = \frac{0{,}600 \cdot 120}{0{,}540 \cdot 113} = 1{,}180$$

Bei dem A. No. 1 wären demnach die F von den $S = 6{,}290$ bis 6,300 auf eine Länge von 1,732''' abzuwägen, bei dem A. No. 10 die F von den $S = 0{,}600$ bis 0,610 auf eine Länge von 1,18'''. Da nun schwere und leichte F einerlei Anspruch auf Genauigkeit haben, so ist im Folgenden die Differenz beider Längen durch Probiren vertheilt worden. Wenn dies nicht ganz genau geschehen ist, so liegt es nur darin, daſs ich mir zugleich die Aufgabe stellte, die obersten und untersten Einheiten in jedem A. durch 25 theilbar zu machen.

Demnach haben die 10 A. folgende Eigenschaften

Aräometer No.	gröſstes spec. Gew.	geringstes spec. Gew.	Summa der Einheiten	Grenzwerth bei 10'' Eintauchung	unterste Theilung Linien
1	6,300	5,650	650	5,625	1,60
2	5,650	5,000	650	4,975	1,57
3	5,000	4,375	625	4,350	1,61
4	4,375	3,750	625	3,725	1,60
5	3,750	3,150	600	3,125	1,60
6	3,150	2,575	575	2,550	1,62
7	2,575	2,025	550	2,000	1,63
8	2,025	1,500	525	1,475	1,60
9	1,500	1,025	475	1,000	1,61
10	1,025	0,625	400	0,600	1,67

Es sollen diese Normal-A. nun einzeln kurz näher erläutert werden:

Normal-Aräometer $l = 120'''$; $ql = 1508$ cub.'''

A. No.	$n =$	$m =$	$\frac{m}{n-m}$	V cub.'''	Gew. des A. Loth
1	6,300	5,625	$\frac{25}{3}$	$12566\frac{2}{3}$	56
2	5,650	4,975	$\frac{199}{27}$	$11114\frac{14}{27}$	$44\frac{1}{2}$
3	5,000	4,350	$\frac{87}{13}$	10092	31
4	4,375	3,725	$\frac{149}{26}$	8642	$26\frac{3}{4}$
5	3,750	3,125	5	7540	20
6	3,150	2,55	$\frac{17}{4}$	6409	$12\frac{1}{2}$
7	2,575	2,000	$\frac{80}{23}$	$5245\frac{5}{23}$	$9\frac{1}{2}$
8	2,025	1,475	$\frac{59}{22}$	$4044\frac{2}{11}$	$5\frac{3}{4}$
9	1,500	1,000	2	3016	$3\frac{1}{4}$
10	1,025	0,600	$\frac{24}{17}$	$2128\frac{16}{17}$	$1\frac{1}{2}$

A. No. 1. Einsenkungstiefe (für $S=p$)

$$l = 1000\left(\frac{6,3}{p} - 1\right)$$

		Differenz
Für $p = 6,300$ ist	$l = 0,0000$	
$= 6,290$ „	$l = 1,5895$	1,5895
$= 6,280$ „	$l = 3,1847$	1,5952
$= 6,270$ „	$l = 4,7847$	1,6000
. . . . .	. . . . .	
$= 5,680$ „	$l = 109,1549$	
$= 5,670$ „	$l = 111,1111$	1,9562
$= 5,660$ „	$l = 113,0742$	1,9631
$= 5,650$ „	$l = 115,0442$	1,9700
$= 5,625$ ist	$l = 120,0000$	4,9558

Die untersten Theilungen sind an Länge so wenig verschieden, dafs man, um Tausendtel abzulesen, jede derselben in 10 gleiche Theile theilen kann. Dies gilt, denke ich, auch für die obersten Theilungen; eine Länge der Scala von nahe 5‴ von der leichtesten F bis zum Grenzpunkt bleibt natürlich unbenutzt.

A. No. 2. Einsenkungstiefe (für $S=p$)

$$l = \frac{7960}{9}\left(\frac{5,65}{p} - 1\right)$$

		Differenz
Für $p = 5,650$ ist	$l = 0,0000$	
$= 5,640$ „	$l = 1,5681$	1,5681
$= 5,630$ „	$l = 3,1419$	1,5738
$= 5,620$ „	$l = 4,7212$	1,5793
. . . . .	. . . . .	
$= 5,030$ „	$l = 109,0170$	
$= 5,020$ „	$l = 110,9960$	1,9790
$= 5,010$ „	$l = 112,9829$	1,9869
$= 5,000$ „	$l = 114,9778$	1,9949
$= 4,975$ ist	$l = 120,0000$	5,0222

A. No. 3. Einsenkungstiefe (für $S=p$)

$$l = \frac{10440}{13}\left(\frac{5}{p} - 1\right)$$

		Differenz
Für $p = 5,000$ ist	$l = 0,0000$	
$= 4,990$ „	$l = 1,6094$	1,6094
$= 4,980$ „	$l = 3,2252$	1,6158
$= 4,970$ „	$l = 4,8475$	1,6223
. . . . .	. . . . .	
Für $p = 4,405$ ist	$l = 108,4746$	
$= 4,395$ „	$l = 110,5487$	2,0741
$= 4,385$ „	$l = 112,6322$	2,0835
$= 4,375$ „	$l = 114,7253$	2,0931
$= 4,350$ ist	$l = 120,0000$	5,2747

A. No. 4. Einsenkungstiefe (für $S=p$)

$$l = \frac{8940}{13}\left(\frac{4,375}{p} - 1\right)$$

		Differenz
Für $p = 4,375$ ist	$l = 0,0000$	
$= 4,365$ „	$l = 1,5755$	1,5755
$= 4,355$ „	$l = 3,1582$	1,5827
$= 4,345$ „	$l = 4,7482$	1,5900
. . . . .	. . . . .	
$= 3,780$ „	$l = 108,2479$	
$= 3,770$ „	$l = 110,3591$	2,1112
$= 3,760$ „	$l = 112,4816$	2,1225
$= 3,750$ „	$l = 114,6154$	2,1338
$= 3,725$ ist	$l = 120,0000$	5,3846

A. No. 5. Einsenkungstiefe (für $S=p$)

$$l = 600\left(\frac{3,75}{p} - 1\right)$$

		Differenz
Für $p = 3,750$ ist	$l = 0,0000$	
$= 3,740$ „	$l = 1,6043$	1,6043
$= 3,730$ „	$l = 3,2172$	1,6129
$= 3,720$ „	$l = 4,8387$	1,6215
. . . . .	. . . . .	
$= 3,180$ „	$l = 107,5472$	
$= 3,170$ „	$l = 109,7792$	2,2320
$= 3,160$ „	$l = 112,0253$	2,2461
$= 3,150$ „	$l = 114,2857$	2,2604
$= 3,125$ ist	$l = 120,0000$	5,7143

A. No. 6. Einsenkungstiefe (für $S=p$)

$$l = 510\left(\frac{3,15}{p} - 1\right)$$

		Differenz
Für $p = 3,150$ ist	$l = 0,0000$	
$= 3,140$ „	$l = 1,6242$	1,6242
$= 3,130$ „	$l = 3,2588$	1,6346
$= 3,120$ „	$l = 4,9038$	1,6450
. . . . .	. . . . .	

		Differenz
Für $p=2{,}605$	ist $l=106{,}6987$	
		2,3764
$=2{,}595$	„ $l=109{,}0751$	
		2,3949
$=2{,}585$	„ $l=111{,}4700$	
		2,4135
$=2{,}575$	„ $l=113{,}8835$	
		6,1165
$=2{,}550$	ist $l=120{,}0000$	

A. No. 7. Einsenkungstiefe (für $S=p$)

$$l=\frac{9600}{23}\left(\frac{2{,}575}{p}-1\right)$$

		Differenz
Für $p=2{,}575$	ist $l=$ 0,0000	
		1,6273
$=2{,}565$	„ $l=$ 1,6273	
		1,6400
$=2{,}555$	„ $l=$ 3,2673	
		1,6528
$=2{,}545$	„ $l=$ 4,9201	
. . . . .	. . . . .	
$=2{,}055$	„ $l=105{,}6173$	
		2,5575
$=2{,}045$	„ $l=108{,}1748$	
		2,5826
$=2{,}035$	„ $l=110{,}7574$	
		2,6081
$=2{,}025$	„ $l=113{,}3655$	
		6,6345
$=2{,}000$	ist $l=120{,}0000$	

A. No. 8. Einsenkungstiefe (für $S=p$)

$$l=\frac{3540}{11}\left(\frac{2{,}025}{p}-1\right)$$

		Differenz
Für $p=2{,}025$	ist $l=$ 0,0000	
		1,5971
$=2{,}015$	„ $l=$ 1,5971	
		1,6131
$=2{,}005$	„ $l=$ 3,2102	
		1,6292
$=1{,}995$	„ $l=$ 4,8394	
. . . . .	. . . . .	
$=1{,}530$	„ $l=104{,}1176$	
		2,8023
$=1{,}520$	„ $l=106{,}9199$	
		2,8393
$=1{,}510$	„ $l=109{,}7592$	
		2,8772
$=1{,}500$	„ $l=112{,}6364$	
		7,3636
$=1{,}475$	ist $l=120{,}0000$	

A. No. 9. Einsenkungstiefe (für $S=p$)

$$l=240\left(\frac{1{,}5}{p}-1\right)$$

		Differenz
Für $p=1{,}500$	ist $l=$ 0,0000	
		1,6107
$=1{,}490$	„ $l=$ 1,6107	
		1,6325
$=1{,}480$	„ $l=$ 3,2432	
		1,6548
$=1{,}470$	„ $l=$ 4,8980	
. . . . .	. . . . .	
Für $p=1{,}055$	ist $l=101{,}2322$	
		3,2654
$=1{,}045$	„ $l=104{,}4976$	
		3,3285
$=1{,}035$	„ $l=107{,}8261$	
		3,3934
$=1{,}025$	„ $l=111{,}2195$	
		8,7805
$=1{,}000$	ist $l=120{,}0000$	

A. No. 10. Einsenkungstiefe (für $S=p$)

$$l=\frac{2880}{17}\left(\frac{1{,}025}{p}-1\right)$$

		Differenz
Für $p=1{,}025$	ist $l=$ 0,0000	
		1,6691
$=1{,}015$	„ $l=$ 1,6691	
		1,7023
$=1{,}005$	„ $l=$ 3,3714	
		1,7365
$=0{,}995$	„ $l=$ 5,1079	
. . . . .	. . . . .	
$=0{,}655$	„ $l=$ 95,6982	
		4,1103
$=0{,}645$	„ $l=$ 99,8085	
		4,2397
$=0{,}635$	„ $l=104{,}0482$	
		4,3753
$=0{,}625$	„ $l=108{,}4235$	
		11,5765
$=0{,}600$	ist $l=120{,}0000$	

Es ist nun für die vorstehenden 10 Normal-A. Folgendes zu bemerken.

1) Die Länge der untersten Theilung wächst von dem A. No. 1, wo sie 1,5895‴ ist, bis zum A. No. 10 = 1,6691‴.

2) Die Längen-Differenz zwischen der ersten und zweiten Theilung wächst von dem A. No. 1 (1,5952 − 1,5895 = 0,0057‴) bis zum A. No. 10 (1,7023 − 1,6691 = 0,0332‴). Demnach kann man bei den ersten 8 A. die unterste Theilung in 10 gleiche Theile theilen; bei den folgenden A. ist der mittlere Theilstrich durch die Formel noch auszumitteln, und dann jede Hälfte in 5 gleiche Theile zu theilen.

3) Dasselbe findet auch bei den folgenden, von unten nach oben gerechneten Theilungen statt. Die obersten Theilungen können noch bei den ersten 4 A. in 10 gleiche Theile getheilt werden, bei den folgenden sind Zwischentheilungen durch die Formel zu bestimmen.

4) Die unbenutzte Länge des Scalenrohrs vom obersten Theilstrich bis zum Ende der Röhre wächst vom A. No. 1 (= 4,9558‴) bis zum A. No. 10 (= 11,5765‴). Dies ist zwar nicht so wesentlich; wenn man aber bei dem A. No. 10 und den ihm voranstehenden eine gröſsere Länge benutzen will, so hat man nur nöthig,

den Grenzwerth *m* für jeden derselben zu erhöhen, und man erhält dann für jedes A. durchweg längere Theilungen.

16. Die hier angeführten und untersuchten Normal-A. sollen nicht als so und nicht anders möglich festgestellt sein, sondern nur einen Anhalt geben dem Physiker und Techniker, welcher A. für *S* innerhalb bestimmter Grenzen verlangt, und dem Mechaniker, der sie anzufertigen hat. Die Fundamental-Abstände sind wohl in allen Fällen durch Probiren und Einsenkung in *F* von bestimmten *S* festzusetzen, wie solches auch bei den Thermometern geschieht.

17. Ein Scalen-A., welches als Normal-A. allgemeine Verbreitung hat, ist das Alkoholometer, welches für Käufer, Verkäufer und Steuer-Beamte von der gröfsten Wichtigkeit ist. Der absolute Alkohol hat, das Wasser = 1 gesetzt, das spec. Gew. 0,793. Zwischen dem Wasser und dem Alkohol ist also nur ein Unterschied von 0,207, ferner eignet sich ein Scalen-A. ganz besonders zur Prüfung des Alkohol, weil dessen Mischungen mit Wasser dem reinen Alkohol näher als dem Wasser liegen, weil man also im A. nur mit den oberen gröfseren Theil-Unterschieden zu thun hat, und die Gradigkeit des Alkohol um so genauer abgelesen wird, je mehr er der absoluten Reinheit sich nähert.

Der Gehalt des absoluten Alkohol in seiner Mischung mit Wasser wird nach Raumprocenten und nach Gewichtsprocenten angegeben. Abs. Alk. ist 100 procentig, 90% Alk. mit 10% Wasser in 100 Theilen ist 90 procentig, reines Wasser ist 0 procentig. Man hat also eine Scala von 100 Theil-Abständen; die Einsenkungstiefe für das spec. Gew. = 1 entspricht dem Theilstrich mit der Bezeichnung 0, die für das spec. Gew. 0,793 würde dem Theilstrich mit der Bezeichnung 100 entsprechen. Eine Reihe specifischer Gewichte von 0,793 bis 1 in Abständen von $\frac{1}{10}$ der Differenz = 0,207, also von 0,0207 gäben die Theilstrich-Bezeichnungen:

0,7930	die Zahl	100	0,8965	die Zahl	50
0,8137	„ „	90	0,9172	„ „	40
0,8344	„ „	80	0,9379	„ „	30
0,8551	„ „	70	0,9586	„ „	20
0,8758	„ „	60	0,9793	„ „	10

0,9793 + 0,0207 = 1 die Zahl 0

Die richtige Graduirung der Alkoholometer-Scala hängt aber noch von einem anderen Umstande ab, nämlich von der Contraction der Mischung, welche bei gleichen Theilen Wasser und Alkohol etwa $\frac{1}{28}$ beträgt, so dafs 30 Raumtheile Wasser mit 30 Raumtheilen Alkohol gemischt, nur 59 Raumtheile ausfüllen. Es hat der Alkohol nach angestellten Versuchen:

von	100%	das	spec.	Gew.	0,7930
„	90%	„	„	„	0,8225
„	80%	„	„	„	0,8470
„	70%	„	„	„	0,8704
„	60%	„	„	„	0,8948
„	50%	„	„	„	0,9173
„	40%	„	„	„	0,9391
„	30%	„	„	„	0,9578
„	20%	„	„	„	0,9712
„	10%	„	„	„	0,9830
„	0%	„	„	„	1,0000

Ein A. auf diese Angaben der spec. Gew. gegründet und abgetheilt, würde also ein Alkoholometer sein, welches die Procenthaltigkeit nach Gewichten angiebt, der Art, dafs 50 procentiger Spiritus aus einer Mischung von 50 Pfund Alkohol mit 50 Pfund Wasser besteht, und welcher mit 56 procentigem Spiritus einerlei ist, wenn die Procenthaltigkeit nach Räumen angegeben wird.

Eine Alkoholometer-Scala nach Gewichtsprocenten ist die von Richter.

In Preufsen ist die Messung nach Raumprocenten üblich und gesetzlich; die dafür eingeführte Scala ist die von Tralles. Nach dieser hat Spiritus:

von	0	Procent	das	spec.	Gew.	1,0000
„	10	„	„	„	„	0,9857
„	20	„	„	„	„	0,9751
„	30	„	„	„	„	0,9646
„	40	„	„	„	„	0,9510
„	50	„	„	„	„	0,9335
„	60	„	„	„	„	0,9126
„	70	„	„	„	„	0,8892
„	80	„	„	„	„	0,8631
„	90	„	„	„	„	0,8332
„	100	„	„	„	„	0,7930

Das Scalen-Aräometer von Beaumé s. u. Beaumé's Aräometer.

2. Gewichts-Aräometer.

1. Bei diesem ist das Gewicht des in die Flüssigkeit eingetauchten Körpers veränderlich.

Der Körper *A* habe bis zum Theilstrich *mm* das Volumen = *V* cub"; in die leichteste Flüssigkeit (*F*) von dem spec. Gew. (*S*) = 0,627 getaucht, mufs sein Gewicht, damit er genau bis zum Theilstrich *mm* einsinke, betragen

$$0{,}627 \times V \cdot g$$

wo *g* das Gew. eines cub" destillirten Wassers = $\frac{11}{9}$ Loth bedeutet. Die untere Kugel mufs also mit Schrot, Quecksilber u. dergl. so weit beschwert werden, dafs

dieses geringste Gew. des A. hergestellt wird.

Es sei das ajustirte Selbstgewicht des A. $=p$, so ist

$$p=0{,}627\cdot V\cdot g$$

In Wasser von $S=1$ getaucht, ist in die obere Schale ein Gew. p' hinzuzulegen, daſs

$$p+p'=V\cdot g$$

Man hat also

$$p:p+p'=0{,}627\cdot V\cdot g:V\cdot g$$
$$=0{,}627:1$$

also $p:p'=0{,}627:1-0{,}627$

woraus $p'=\frac{1-0{,}627}{0{,}627}\cdot p=0{,}595\cdot p$

Dies ist also das geringste Gewicht, welches für Wasser noch hinzuzufügen ist, wenn eine F von dem geringsten S mit demselben A. abgewägt werden soll. Setzt man S dieser $F=0{,}600$ statt 0,627, wie beim Scalen-A. geschehen, so hat man das geringste $p'=\frac{3}{5}p$. Allein es ist dies hier nicht nöthig, und man kann $p'=0{,}6\,p$ festsetzen, wobei das geringste $S=0{,}625$ ist.

2. Setzt man nun das Gewicht 1,6 p des A. für Wasser $=P$

so ist P (für $S=1$) $=V\cdot g$

P' (für $S=s$) $=V\cdot s\cdot g$

also $P:P'=1:s$

Nennt man das Gewicht, welches man für F von S abnehmen muſs, p'', so ist $P'=P-p''$, und man hat

$$P:P-p''=1:s$$

woraus $p''=(1-s)\,P$

Je gröſser das Gewicht p'', welches für einerlei S aus der Schale des A. fortgenommen werden muſs, desto genauer wird F in seinen S angegeben, und dies geschieht mit der Vermehrung von P.

Für $S=0{,}999$ ist $p''=0{,}001\,P$
„ $S=0{,}998$ „ $p''=0{,}002\,P$
„ $S=0{,}987$ „ $p''=0{,}003\,P$
u. s. w.

3. Nimmt man zu Ablesung der S in Unterschieden von 0,001 für jedes Tausendtel 1 preuſs. Grän $=\frac{1}{18}$ Loth $=0{,}811998$ Gramme, so hat man $P=1000$ Grän, d. h. das Selbstgewicht $p+$ der Summe $p'=0{,}6\cdot p$ der Gewichte für Wasser $=1{,}6p=1000$ Grän, woraus das Selbstgewicht p des A. $=625$ Grän, und die in die Schale zu legenden Gewichte 375 Grän.

Die Gewichte werden eingelegt
in 3 Stück, jedes zu 100 Grän
„ 6 „ „ „ 10 „
„ 15 „ „ „ 1 „

Das constante Volumen V bis zur Marke mm

$$=\frac{1000}{\frac{11}{9}\cdot 18}=\frac{500}{11}=45\tfrac{5}{11}\text{ cub}''$$

Das A. ist sehr leicht zu construiren, wenn man einen Körper, von der gezeichneten Form weniger als 625 Grän oder 34 Loth 13 Grän schwer, und mit dem Halse von dem Volumen etwas gröſser als $45\frac{5}{11}$ cub″ nimmt, 375 Grän in die Schale legt, ihn in destillirtes Wasser einsenkt, und die untere Kugel mit Schrotkörnchen belastet, bis das A. auf eine geeignete Tiefe einsinkt, die man markirt.

Taucht man nun das A. in eine leichtere F als Wasser und hat n Grän fortgenommen, wenn die Marke des A. in den F-Spiegel tritt, so hat man das spec. Gew. der $F=1-\frac{n}{1000}$

Z. B. es sind 168 Grän fortgenommen, so ist das spec. Gew. der

$$F=1-0{,}168=0{,}832$$

Denn ist bei einer F von dem spec. Gew. $=S$ das fortgenommene Gew. $=p''$ Grän, so ist das noch verbleibende Gew. des A. $=P'-p''=(1000-p'')$ Grän; das verdrängte Gew. der

$$F=V\cdot S\cdot g=\frac{1000}{\frac{11}{9}\cdot 18}\cdot S\cdot\frac{11}{19}\cdot 18\text{ Grän,}$$

beides gleich gesetzt, giebt:

$$1000-p''=1000\,S$$

woraus $S=1-\frac{p''}{1000}$

4. Setzt man in No. 2 $s>1$, so ist p'' das Gew., welches zugelegt werden muſs, und dann ist

$$P:P+p''=1:s$$

woraus $p''=(s-1)\,P$

Für $S=1{,}001$ ist $p''=0{,}001\,P$
$=1{,}002$ „ $p''=0{,}002\,P$
u. s. w.

Man hat also, wie ad 3, für jedes Tausendtel des spec. Gew. einer F mehr 1 Grän hinzuzulegen.

Für F von $S>1$ kann man die ad 3 gedachten zu $S=1$ gehörenden 375 Grän in 1 Stück $=375$ Grän schwer auswechseln, und aus einem zweiten Satz von Gewichten einen Vorrath bis zu 6,300 Grän enthaltend, alle übrigen schwereren F abwägen, oder auch ein zweites A. für F von $S=1$ bis $S=6{,}300$ nach demselben Princip, wie ad 3 gedacht, construiren.

Aräometrie. Die Wissenschaft von der Bestimmung der vergleichenden Dichtigkeiten tropfbar flüssiger Körper, von den dazu gehörenden Instrumenten, den Aräometern, deren Construction und Anwendung.

Arbeit, mechanische Arbeit. Ist die

von einer Kraft aus auf einen Körper übergehende **sichtbare** Wirkung. Die Wirkung wird sichtbar durch die Ortsänderung des Körpers; das Hindernifs, welches dieser Ortsänderung entgegen wirkte, ist der **Widerstand**, den die Kraft zu überwinden hatte. Eine Kraft, so gering, dafs sie einen bestimmten Widerstand nicht überwindet, so dafs also ungeachtet des Angriffs der Kraft der Körper in Ruhe bleibt, verrichtet keine A. Tritt nun noch eine Kraft hinzu, so dafs Bewegung, also A. erfolgt, so hat die zuerst angegriffene Kraft den Widerstand zu Gunsten der zweiten vermindert.

Wenn ein Balken fortgeschoben werden soll, wozu mehrere Menschenkräfte gehören, und ein einziger Mensch schiebt vergeblich daran, so arbeitet er **nicht**, er ruht sich entweder aus, oder es mangelt ihm an Einsicht. Erst wenn die erforderlichen Mannschaften mit einander angreifen, geschieht A.

Die Gröfse der A. bestimmt sich aus dem Product des Widerstandes mit dessen zurückgelegtem Wege; mithin ist die **Arbeits-Einheit** das Product einer Gewichts-Einheit mit einer Längen-Einheit (also 1 Pfund mal 1 Fufs = 1 Pfund-Fufs, 1 Kilogramm mal 1 Meter = 1 Kilg.-M.) Ein Rammbär, von 600 Pfund schwer, 4 Fufs hoch gehoben, giebt die A. = 2400 (Pf. Ffs.) Ein Lastwagen, 50 Ctr. schwer, der eine Reibung von $\frac{1}{16}$ verursacht, erfordert für einen Weg von 12 Meilen eine A. von 60 (Ctr.-Ml.)

Arbeitsmaschinen. Jede Arbeit, welche von Maschinen verrichtet wird, ist **Maschinen-Arbeit** und zugleich mechanische Arbeit. Man unterscheidet jedoch von den **Productionsmaschinen** die **Arbeitsm.** Jene sind der Art construirt, dafs sie Gegenstände der Industrie hervorbringen, d. h. dafs sie rohere Körper in Form und Wesen zu brauchbareren umändern, als Mehlmaschinen, Webe-, Strickmaschinen, Walzwerke u. s. w. Diese, die A., bewirken nur Ortsänderung von Körpern, ohne dieselben selbst zu ändern, als: Lastwagen, Pumpen, Feuerspritzen, Rammen.

Archimedische Aufgabe. Aus dem Gewichtsverlust einer Mischung von Gold und Silber (allgemein: zweier bekannten Stoffe) die Menge des Goldes und die des Silbers (allgemein: die Menge jedes einzelnen Stoffes) zu finden.

Ist der Gewichtsverlust von P℔ Mischung $=m$, der von P℔ Gold $=g$, der von P℔ Silber $=s$, so hat man die Menge des Goldes

$$=\frac{s-m}{s-g}\cdot P$$

die Menge des Silbers

$$=\frac{m-g}{s-g}\cdot P$$

Denn bezeichnet man das Gew. an Gold in der P℔ schweren Mischung mit x, so ist das Gew. an Silber darin $P-x$

Wiegen nun P℔ Gold in der Luft, im Wasser g℔ leichter, so wiegen x℔ Gold im Wasser $\frac{x}{P}g$℔ leichter; und eben so $(P-x)$℔ Silber im Wasser $\frac{P-x}{P}s$ leichter.

Der Gewichts-Verlust beider Stoffe in Summa mufs aber gleich sein dem Gewichts-Verlust deren Mischung (wenn nämlich die Summe der Volumen beider Stoffe gleich ist dem Volumen der Mischung) und es ist

$$\frac{x}{P}g+\frac{P-x}{P}s=m$$

$$\text{woraus } x=\frac{m-s}{g-s}P$$

oder vielmehr, da ein Stoff desto mehr im Wasser verliert, je specifisch leichter er ist, mithin

$$g<m<s$$

$$x=\frac{s-m}{s-g}\cdot P \text{ und}$$

$$P-x=\frac{m-g}{s-g}P$$

Der Name a. A. rührt daher, dafs Archimedes den Betrug eines Goldschmiedes entdeckte, indem er auf die obige Weise fand, dafs die Krone des Königs Hiero nicht aus reinem Golde bestehe, wie dieser befohlen hatte, sondern aus einer Mischung von Gold und Silber.

Archimedische Spirale. Eine von Konon erfundene und von Archimedes untersuchte Spirale.

Es sei φ ein Winkel oder Kreisbogen, $f\varphi$ eine Länge, welche mit dem Wachsthum von φ nach irgend einem Gesetz ebenfalls wächst. Zeichnet man nun um einen Punkt C in einerlei Ebene lauter gleiche Winkel (φ) ACB, BCD, DCE u. s. w. und trägt von C aus auf CB die Länge $f(\varphi)=Cb$, auf CD die Länge $f(2\varphi)=Cd$, auf CE die Länge $f(3\varphi)=Ce$ u. s. w., ferner wenn man wieder in die Richtung CA gekommen ist, auf CA die Länge $f(360^\circ)$, auf CB dann die Länge $f(360+\varphi)$ u. s. f. und verbindet die Endpunkte der abgesteckten Längen, so erhält man eine Spirale.

Die a. S. ist die einfachste, indem die Längen Cb, Cd, Ce, Cf ... bei gleichen

Winkel-Abständen wie die natürlich auf einander folgenden Zahlen sich verhalten. Ist also bei $\varphi = 360°$, d. h. bei einem

Fig. 73.



vollständigen Umlauf der Spirale CA die abzusteckende Länge und man beschreibt mit CA $(= r)$ einen Kreis, so ist für $\angle BCA = 45°$, $Cb = \frac{1}{8} r$; für $\angle DCA = 90°$, $Cd = \frac{1}{4} r$; $Cf = \frac{1}{2} r$; $Cg = \frac{3}{4} r$; $CA = r$; beim zweiten Umlauf $CH = 1\frac{1}{2} r$ u. s. w., und es kann auf diese Weise die Spirale mit 2, 3 und mehreren Windungen construirt werden, wobei die in einerlei Linie befindlichen Radii vectoren um den Halbmesser $= r$ von einander an Länge unterschieden sind, so dafs man, wenn die erste Windung aufgetragen worden, die 2te Windung, aus dieser die 3te u. s. w. erhält, indem man jeden Radius um die Linie $AC = r$ verlängert.

2. Es sei von dem festen Schenkel AC aus ein beliebiger $\angle ACE = \varphi$, der zugehörige Radius vector Ce der Spirale $= y$, so ist der Erklärung zufolge

$$r : y = 360° \text{ (oder } 2\pi) : \varphi$$

$$\text{also } y = \frac{r}{360°}\varphi = \frac{r}{2\pi}\varphi$$

für $\varphi = 360°$ wird $y = r$

„ $\varphi = 2 \cdot 360°$ „ $y = 2r$

„ $\varphi = n \cdot 360°$ „ $y = nr$

„ $\varphi' = n \cdot 360° + \varphi$ wird $y = \dfrac{n \cdot 360° + \varphi}{360°} r$

$$= \left(n + \frac{\varphi}{360°}\right) r$$

Setzt man $\dfrac{r}{360°} = A$, so hat $y = A\varphi$

$$\text{und } \frac{\partial y}{\partial \varphi} = A$$

3. Zieht man an einen beliebigen Punkt, z. B. an e der Spirale eine Tangente, und schneidet dieselbe durch eine in C auf die Ordinate Ce genommene Normale CK, so ist eK die Tangente an e und CK die zugehörige Subtangente.

Nun ist für Polar-Coordinaten die trigonometrische Tangente des Winkels KeC, den die Curventangente Ke mit der Ordinate Ce bildet, $= \dfrac{y}{\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)}$

und die Subtangente $CK = \dfrac{y^2}{\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)}$

mithin für die Spirale:

$$tg \angle KeC = \frac{y}{A} = \frac{A}{A}\varphi = \varphi$$

die Subtangente

$$CK = \frac{y^2}{A} = A\varphi^2 = y \cdot \frac{y}{A} = y\varphi$$

und hieraus die Tangente

$$eK = \sqrt{Ce^2 + CK^2} = y\sqrt{1 + \varphi^2}$$

Ist φ als Winkel in Graden ausgedrückt, so wird $\dfrac{\varphi}{180°}\pi$ dafür genommen, weil sich φ als Zahl auf den Halbmesser $= 1$ bezieht.

Für $\varphi = 90°$ ist $tg\, KeC = \frac{1}{2}\pi$
die Ordinate $y = \frac{1}{4} r$
die Subtangente $= \frac{1}{8}\pi r$
die Tangente $= \frac{1}{8} r\sqrt{4 + \pi^2}$

Für $\varphi = 180°$ ist
$tg\, KeC = \pi$; $y = \frac{1}{2} r$; Subtg. $= \frac{1}{2}\pi r$

für $\varphi = 360°$, nach dem ersten Umlauf:
$tg\, KeC = 2\pi$; $y = r$; Subtg. $= 2 \cdot \pi r$

nach dem 2ten Umlauf für $\varphi = 2 \cdot 360°$
$tg\, KeC = 4\pi$; $y = 2r$; Subtg. $= 8\pi \cdot r$

4. Zur Bestimmung der Länge eines Bogens der a. S. hat man die allgemeine Rectificationsformel

$$\partial s = \sqrt{y^2 \partial\varphi + \partial y^2}$$

also hier

$$\partial s = \sqrt{(A\varphi \cdot \partial\varphi)^2 + (A\,\partial\varphi)^2}$$

$$= A\,\partial\varphi\sqrt{\varphi^2 + 1} = \frac{r}{2\pi}\partial\varphi\sqrt{\varphi^2 + 1}$$

woraus

$$s = \int A\,\partial\varphi\sqrt{\varphi^2 + 1}$$

$$= \tfrac{1}{2} A\varphi\sqrt{\varphi^2 + 1}$$

$$+ \tfrac{1}{2} A\, logn\left(\sqrt{\varphi^2 + 1} + \varphi\right) + \text{Const.}$$

für $\varphi = 0$ wird $s = 0$

Setzt man also $\varphi = 0$, so erhält man

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{1} \times 0 + \tfrac{1}{2} A\, logn\sqrt{1} + C = 0$$

und da $logn\sqrt{1} = logn\ 1 = 0$, so ist $C = 0$ und vollständig

$$s = \frac{r}{4\pi}\left[\varphi\sqrt{\varphi^2 + 1} + ln\left(\sqrt{\varphi^2 + 1} + \varphi\right)\right]$$

5. Zur Bestimmung des von einer Ordinate abgeschnittenen Flächenraums der

z. B. hat man die allgemeine Quadraturformel:

$$\partial F_y = \tfrac{1}{2} y^2 \partial \varphi$$

woraus $F_y = \frac{1}{2}\int y^2 \partial \varphi + C$

Setzt man für $\partial\varphi$ seinen Werth $\frac{2\pi}{r}\partial y$

so ist $F_y = \frac{\pi}{r}\int y^2 \cdot \partial y + C$

oder setzt man für y seinen Werth $\varphi \frac{\partial y}{\partial \varphi}$

$$= \frac{r}{2\pi}\varphi$$

so ist $F_y = \frac{r^2}{8\pi^2}\int \varphi^2 \cdot \partial\varphi + C$

Man hat daher

$$F_y = \frac{\pi}{3r}y^3 + C = \frac{r^2}{24\pi^2}\varphi^3 + C$$

für $\varphi = 0$ wird $y = 0$ und $F_y = 0$, daher $C = 0$ und daher vollständig

$$F_y = \tfrac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{r}y^3 = \tfrac{1}{3}\cdot\frac{r^2}{8\pi^2}\varphi^3$$

für $\varphi = 360^\circ = 2\pi$ wird $y = r$ und

$$F_{2\pi} = \tfrac{1}{3}\pi r^2$$

Die spiralische Ebene bei einmaligem Umlauf ist daher = dem dritten Theil des mit dem Halbmesser r beschriebenen Kreises.

6. Nach No. 5 hat man für zusammengehörige z und ψ

$$F_z = \tfrac{1}{3}\frac{\pi}{r}z^3 = \tfrac{1}{3}\frac{r^2}{8\pi^2}\psi^3$$

daher für einen zwischen zweien Radien y und einen vorhergehenden z oder den zu ihnen gehörenden Winkeln φ und ψ belegenen Sector

$$F^z_y = \tfrac{1}{3}\frac{\pi}{r}(y^3 - z^3) = F^\psi_\varphi = \tfrac{1}{3}\frac{r^2}{8\pi^2}(\varphi^3 - \psi^3)$$

7. Nach No. 6 ist in dem ersten Umgang der Sector zwischen den Radien y und z

$$F^z_y = \tfrac{1}{3}\frac{\pi}{r}(y^3 - z^3) = \tfrac{1}{3}\frac{r^2}{8\pi^2}(\varphi^3 - \psi^3)$$

also für zwei Umgänge

$$F^{z+r}_{y+r} = \tfrac{1}{3}\frac{\pi}{r}[(y+r)^3 - (z+r)^3]$$

$$= \tfrac{1}{3}\frac{r^2}{8\pi^2}[(\varphi+2\pi)^3 - (\psi+2\pi)^3]$$

und die Differenz beider Sectoren, d. i. das Ringstück zwischen den Radien y und z und zwischen dem zweiten und ersten Umgang

$$= \pi(y-z)(y+z+r) = \tfrac{1}{4}\frac{r^2}{\pi}(\varphi-\psi)(\varphi+\psi+2\pi)$$

Für den vollständigen ersten Ring, nachdem also der Radius vector 2 Umläufe gemacht hat, ist $y = r$, $z = 0$, $\varphi = 2\pi$, $\psi = 0$
und man erhält den ersten Ring $= 2\pi r^2$
für den vollständigen zweiten Ring ist $y = 2r$, $z = r$, $\varphi = 4\pi$, $\psi = 2\pi$
und man erhält für den zweiten Ring $4\pi r^2$
für den vollständigen $n$ten Ring ist $y = nr$, $z = (n-1)r$, $\varphi = 2\cdot n\pi$, $\psi = 2(n-1)\pi$
und man erhält für den $n$ten Ring $2n\pi r^2$
für vollständige n Ringe in Summa ist $y = nr$, $z = 0$, $\varphi = 2n\pi$, $\psi = 0$
daher sämmtliche n Ringe $= n(n+1)\pi r^2$
hierzu der erste Umgang $= \frac{1}{3}\pi r^2$
giebt die ganze Fläche nebst n Ringen $[\frac{1}{3} + n(n-1)]\pi r^2$

Archimedische Wasserschnecke und **Wasserschraube.** Eine Wasserhebemaschine, deren schon Vitruv erwähnt und deren Erfindung man dem Archimedes zuschreibt. Sie besteht, so wie sie jetzt angewendet wird, aus einer Spindel, um welche schneckenförmig hervorragende Bretter oder Metallbleche so befestigt sind, dafs sie auf die ganze Länge der Spindel einen zusammenhangenden schneckenförmig gewundenen hohlen Raum um dieselbe bilden. Die äufsere Schneckenlinie der Windungen ist gleich weit von der Spindelaxe entfernt und mit einem Mantel umgeben. Ist dieser Mantel von Blechen oder Brettern an dem Umfang der Schneckengänge befestigt, so dafs derselbe einen geschlossenen Cylinder bildet, so heifst die Maschine Wasserschnecke; liegt der Mantel in einem geringen Spielraum um den Umfang der Gänge, ist er also von denselben abgesondert und unabhängig, so heifst die Maschine Wasserschraube.

Beide Maschinen, die Schnecke und die Schraube, werden schräg in das zu hebende Wasser (in ein Sammelbecken, in welches von Wiesen, Baugruben etc., die entwässert werden sollen, das Wasser zusammenfliefst), so gestellt, dafs die untere, die schöpfende Grundfläche zum Theil untertaucht, und die Spindel wird um ihre Axe fortdauernd gedreht, wonach das von der ersten Windung geschöpfte Wasser in die zweite, aus dieser in die dritte u. s. f. bis zum oberen Querschnitt gehoben und von diesem ausgegossen wird.

2. Fig. 74 sei eine Wasserschnecke mit ihrer ersten Windung *abdef* um die Spindel *cc* und zum Theil unter dem Wasserspiegel *WW* in verticaler Ansicht mit Hinfortnahme des Mantels.

Bei der mit vollen Linien gezeichneten Lage, die man aus Blech bestehend sich

denke, liegen die Punkte *a*, *d*, *f* in einerlei Vertical-Ebene, der Punkt *b* vor, der Punkt *e* hinter der Spindel. Die erste Windung bildet eine Kammer, und ist *gh* die durch den höchsten Punkt *g* des Schneckenumfangs gezogene Horizontale, so ist *hdg* der Querschnitt der Wassermenge, welche die Kammer in sich aufzunehmen vermag. (Das Wasser, welches zwischen *g* und dem oberen Spindelumfang zurückfliefst, vorläufig bei Seite gesetzt). Damit diese Wassermenge geschöpft werden könne, mufs die Schnecke so um die Spindel *cc* gedreht werden, dafs die oberen Punkte *a*, *f*, sowie der Punkt *e* nach hinten herabgehen, während die Punkte *g*, *b*, *d*, *h* vorn aufsteigen.

Das Blech bildet vorn eine scharfe

Fig. 74.



Kante *ac* vom Umfang der Schnecke bis zum Umfang der Spindel; hinter dieser Kante und mit derselben beginnt die Einflufsöffnung. Ist der Punkt bei solcher Drehung in *a'* gekommen, so hat die Schnecke die Lage *a'bd'ef'*; die Punkte *a'*, *d'*, *f'* liegen in einerlei Vertical-Ebene, der Punkt *b* liegt hinter, der Punkt *e* vor der Spindel, die Einflufsöffnung liegt vor *a'c''*, das Wasser des Sammelbeckens reicht bis gegen die Fläche *a'b*, aber da die Windung keine Kammer bildet, nicht weiter. So wie aber der Punkt *a'* nach vorn sich erhebt, wird eine Kammer gebildet, deren Busen sich nach links aufwärts immer mehr erweitert; und wenn *a'* um 90° sich gehoben hat und in *c* gekommen ist, so ist der hinter der Spindel liegende Punkt *b* um eben so viel, also nach vorn bis *b'* herabgegangen, der Punkt *d'* desgleichen nach hinterwärts bis *d''* herab, und der vor der Spindel liegende Punkt *e* vorn bis *e'* aufgestiegen, so dafs die Kammer die Form *cb'd''e'* annimmt. In dieser Lage ist also schon eine Wassermenge von dem Querschnitt *ch°b'* darin so befindlich, dafs sie nicht wieder hinausfliefsen kann, und bei der weiteren Umdrehung der Spindel wird auch noch die oberhalb *ch°* bis *MM* in die Kammer hineinreichende Wassermenge von der Schärfe *ac* abgeschnitten, und wenn der Punkt in *a* gekommen ist, befindet sich die anfangs gedachte Wassermenge *ghd* in der Kammer der ersten Windung.

3. Dreht sich nun die Spindel weiter herum und senken sich die Punkte *a*, *f* um 90° hinterwärts nach *c* und *f''*, so steigen die Punkte *b* und *d* vorn um 90° nach *b''*, *d''*, der Punkt *e* hinter der Spindel fällt nach *e''*, die erste Windung hat die Lage *cb''d''e''f'*, und die Wassermenge *ghd* ist in die Lage *g'h'e''* nach links aufwärts geschoben. Dreht sich die Spindel abermals um 90° herum, so fällt der hinterwärts liegende Punkt *c* nach *a'*, der Punkt *b''* fällt hinter die Spindel nach *b*, der vor der Spindel liegende Punkt *d''* steigt vorn nach *d'*, der Punkt *e''* steigt in den vor der Spindel liegenden Punkt *e*, der hinter der Spindel be-

findliche Punkt f' fällt nach f, der Punkt k'' fällt nach k hinter die Spindel herab, die Schnecke hat die Lage $a'bd'efk$ und die Wassermenge ghd ist wieder weiter links aufwärts in die Lage $g''h''f$ geschoben worden.

Jetzt befindet sich diese Wassermenge bereits in der Kammer der zweiten Windung, denn so wie die Spindel sich um ein Geringes weiter dreht, so wie der Punkt a' vorn aufsteigt, bildet sich die erste Kammer $cb'd'e'$ von Neuem, schöpft zum zweiten Mal eine Wassermenge ghd, welche die gezeichnete Lage erhält, so wie der Punkt a' bis in a sich erhoben hat, und während dieser Zeit hat die zuerst geschöpfte Wassermenge in der zweiten Windung die weiter links und weiter oben befindliche Lage $g'''h'''l$ erhalten.

Somit schöpft mit jedem Umgang der Spindel die erste Schneckenwindung die Wassermenge $ghd = M$, giebt dies M der zweiten Windung, diese ihr M der dritten u. s. f. bis zur obersten, welche bei jedem Umgang M ausgiefst. Sämmtliche M in den Windungen sind abgesondert von einander, und eben so wird jede M abgesondert ausgegossen.

4. Wird die Schnecke so weit in's Wasser gesenkt, dafs der Wasserspiegel, wo er deren Grundfläche schneidet, in g^0, mit den höchsten Punkten $g; g'; g''$ der Kammern in einerlei Ebene liegt, so werden die Kammern vollständig gefüllt. Steht der Wasserspiegel niedriger, so taucht die vordere Schärfe ac' früher aus dem Wasser und es wird weniger Wasser geschöpft, steht der Wasserspiegel höher, so läuft das über hg in die erste Kammer hineinreichende Wasser wieder heraus.

5. Bei der ad 3 betrachteten Thätigkeit der Schnecke zeigt sich, dafs zwischen je 2 benachbarten Windungen ein Raum von der Länge $gg''' = af =$ der Länge eines Schneckenganges wasserleer bleibt, und der auf diese Länge befindliche Theil der Maschine, eine mit zu bewegende todte Last bei einerlei dazu gehöriger Nutzlast M mufs möglichst vermindert werden.

Vermindert man die Länge af, d. h. giebt man dem Schneckengange weniger Steigung, so wird in gewissem Verhältnifs jeder Kammerraum und mit diesem die Nutzlast M vermindert; man hat aber ein zweckmäfsiges Mittel zur Vermehrung der Nutzlast, nämlich statt nur eines Schneckenganges zwei oder mehrere anzuordnen, die in gleichen Abständen und unabhängig von einander Wasser schöpfen.

Fängt daher ein Gang von a an und ein ihm congruenter zweiter von a', beide also in einem Abstande von 180°, so hat der Gang von a während eines Spindel-Umganges die Wassermenge M von gh nach $g''h'''$ gehoben, und der Gang von a' während derselben Bewegung ein gleiches M bis $h'g''$ gefördert. Es wird also in einerlei Zeit das doppelte M geschöpft, gehoben und ausgegossen, beide M sind und bleiben durch ihre Schneckenwandungen bis zum Ausgufs von einander getrennt.

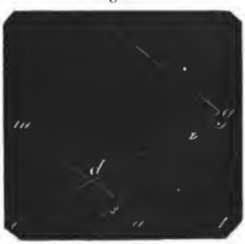
Je mehr von einander gleich weit abstehende congruente Schneckengänge um eine Spindel gelegt werden, desto mehr M werden in einerlei Zeit gefördert; durch 3 Gänge $3M$, durch n Gänge nM.

Bestehen die Schneckengänge aus Brettern, so setzt die nothwendige Stärke derselben der Anzahl Gänge eine Grenze, denn die Wandung vermindert den Raum der Kammern um ihre Stärke, 2 Gänge vermindern denselben also um das 2fache u. s. w. Es sind daher wo möglich die Gänge aus Blech zu fertigen, besonders bei permanenten Schöpfmühlen, z. B. für Wiesen-Entwässerung.

6. Die einzige Bedingung, dafs eine Schnecke Wasser schöpfe und hebe, ist nach dem Vorgetragenen, dafs jede Windung eine Kammer bilde, in welcher ein vorderer Punkt höher liegt, als ein anderer nachfolgender, und das Maximum an Wasser wird geschöpft, wenn unter übrigens gleichen Umständen der senkrechte Abstand zwischen dem höchsten und dem niedrigsten Punkt ein Maximum ist.

Bezeichnet man den Winkel, den die Spindelaxe mit dem Horizont bildet, den Standwinkel oder Neigungswinkel $= \angle mae$ mit β; ferner den Winkel, welchen

Fig. 75.



jedes Element des Schnecken-Umfangs mit der auf der Spindel normal gedachten Ebene bildet, den Steigungs- oder Windungswinkel mit α, so ist die Höhe af (Fig. 74) $= h$ einer Schnecken-

windung die Tangente von α, wenn der Umfang der Grundfläche $2 \cdot ac \cdot \pi = 2r\pi$ der Halbmesser ist. Also $h = 2\pi r \, tg \, \alpha$ und $\alpha = arc \cdot tg \frac{h}{2\pi r}$

Denkt man sich durch einen beliebigen Punkt des Schnecken - Umfangs eine Ebene, normal auf der Spindel, errichtet in diesem Punkt an dieser Ebene eine Tangente an dem Umfang, so bildet diese mit dem anliegenden Schnecken-Element den Steigungswinkel α.

Denkt man sich nun das Stück des Mantels zwischen den Kanten durch den niedrigsten Punkt d und den höchsten g abgewickelt, so bildet gd eine gerade Linie mit der Grundlinie ga unter dem $\angle dga = \alpha$, ist eaE die Horizontale, so ist $\angle mae = \beta$, und d kann nur niedriger als g sein, wenn gd die eE schneidet.

Dann ist

$$\angle gea = \angle gaE - \alpha$$

Es ist aber $\angle gaE = \angle 90^\circ - \beta$

daher $\angle gea = \angle 90^\circ - (\beta + \alpha)$ (1)

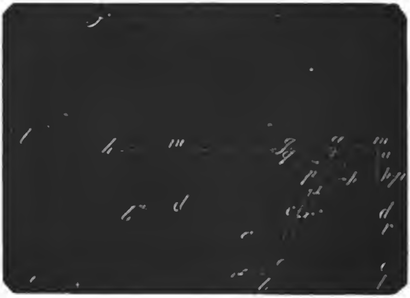
Es ist also die Grundbedingung, wenn die Schnecke Wasser schöpfen soll, dafs der Windungswinkel + dem Standwinkel $< 90^\circ$ sei. Für $\alpha + \beta = 90^\circ$ wird gd mit der Horizontalen $\ddagger$, und kein dem Punkt g nachfolgender liegt niedriger als er, es wird also keine Kammer gebildet; ist $\alpha + \beta > 90^\circ$, so liegt der dem Punkt g nachfolgende Punkt höher und das anstofsende Wasser wird zurückgeworfen.

Je geringer β genommen wird, desto länger wird die Schneckentrommel im Verhältnifs zur Hubhöhe, desto gröfser also die Nebenlast; je gröfser β bei einerlei α, desto flacher wird die Kammer, wie Fig. 74 nachweis't, wenn man sich die Trommel um c nach rechts aufwärts sich langsam drehen denkt, wo dann die waagerechten Linien gh immer kürzer werden und endlich am linken Spindel-Umfang die Punkte d und g sich zu Null vereinigen, so dafs also mit dem Wachsthum von β bei einerlei α die Nutzlast M immer geringer wird.

Je geringer α wird, desto näher rücken die Schneckengänge an einander, desto schmaler, aber auch desto tiefer werden die Kammern; je gröfser man α nimmt, desto länger, aber auch desto flacher werden die Kammern.

7. Ist g der höchste Punkt der Kammer, liegt derselbe also höher als jeder der ihm zu beiden Seiten beliebig nahe gedachten Punkte, so tangirt die horizontale, durch g gelegte Ebene mm' den Schnecken-Umfang in g. Desgleichen tangirt die

Fig. 76



durch d gelegte Horizontal-Ebene dd' den Schnecken-Umfang in d, wenn d der niedrigste Punkt der Kammer ist.

Um nun allgemein die Tiefe md der Kammer bei gegebenen α und β zu finden, sind die Punkte g und d ihrer Lage nach zu bestimmen.

Es sei für den Halbmesser $ac = r$, $ak = rx$ der Bogen des Grundkreises, zu welchem ein in a beginnender aufsteigender Theil ag der Schneckenlinie gehört, so ist die im Umfang der Schnecke $\ddagger$ der Spindel gezogene gerade Linie

$$kg = ak \cdot tg \, \alpha = rx \, tg \, \alpha$$

und da $\angle m'gk = \angle lbe = \beta$, so ist der senkrechte Abstand zwischen k und g

$$k'm' = rx \, tg \, \alpha \sin \beta$$

Ist kp normal ab, so ist kp horizontal, also $p'm' = k'm'$,

$$\angle qaf = \beta, \text{ folglich } \angle paq = 90^\circ - \beta$$

und der senkrechte Abstand zwischen a und p

$$p'a = ap \sin paq = ap \cos \beta = r(1 - \cos x) \cos \beta$$

mithin der senkrechte Abstand zwischen dem höchsten Punkt a der Grundfläche und einem höher liegenden Punkt g der Schneckenlinie

$$a'm' = rx \, tg \, \alpha \sin \beta - r(1 - \cos x) \cos \beta \quad (2)$$

der Punkt g ist nun offenbar der höchste Punkt für denjenigen Werth von x, für welchen $a'm'$ ein Maximum wird, wenn also

$$\frac{\partial (a'm')}{\partial x} = r \, tg \, \alpha \sin \beta - r \cos \beta \sin x = 0$$

woraus $\sin x = tg \, \alpha \, tg \, \beta$

Nimmt man ferner einen Bogen $ako = rx'$ für einen von g aus herabsteigenden Theil gd der Schneckenlinie,
so hat man $o'd' = rx'\, tg\,\alpha \sin\beta$
und $a'o' = r[1+\cos(180-x')]\cos\beta$
$= r(1-\cos x)\cos\beta$
mithin der senkrechte Abstand zwischen dem höchsten Punkt a der Grundfläche und einem tiefer liegenden Punkt d der Schneckenlinie

$$a'd' = r(1-\cos x')\cos\beta - rx'\, tg\,\alpha \sin\beta \quad (3)$$

und es wird der Punkt d offenbar der niedrigste Punkt für denjenigen Werth von x', für welchen $a'd'$ ein Maximum wird, wenn also

$$\frac{\partial(a'd')}{\partial x} = r\sin x'\cos\beta - r\, tg\,\alpha \sin\beta = 0$$

woraus $\sin x' = tg\,\alpha \cdot tg\,\beta$

Mithin ist $\sin x = \sin x'$, x liegt im ersten, x' im zweiten Quadrant,

$$x' = 180^\circ - x = \pi - x \quad (4)$$

und $\sin x = \sin x' = tg\,\alpha \cdot tg\,\beta$ (5)

Die Tiefe der Kammer ist $a'm' + a'd' = md = -r\, tg\,\alpha \sin\beta (x'-x) + r\cos\beta(\cos x - \cos x')$ oder

$$md = -r\, tg\,\alpha \sin\beta(\pi - 2x) + 2r\cos\beta\cos x \quad (6)$$

Für gegebene α und β haben also x, x' und md ganz bestimmte Werthe. Man kann aus α und β auch x geometrisch construiren:

Es sei lb die unterste Kante des Schnecken-Umfangs, $\angle ebl = \beta$, ba der Durchmesser des Grundkreises, zeichne

Fig. 77.



den Halbkreis, errichte den senkrechten Halbmesser CA, schneide ba durch AB unter dem $\angle CAB = \beta$, errichte in B ein Loth BD auf bB, schneide dieses durch CD unter dem $\angle DCB = \alpha$, ziehe $Dk \nparallel ba$, so ist $\angle kca = x$.

Denn $CB = r\, tg\,\beta$, $BD = CB\, tg\,\alpha = r\, tg\,\beta \cdot tg\,\alpha = kp = r\sin kca$; folglich ist $\angle kca = x$.

8. Es sei v der Punkt in der Peripherie des Grundkreises ab, welcher dem zweiten höchsten Punkt, also dem Endpunkt h der Kammer entspricht, Bogen $aov = rx''$, so ist, wie $gk = rx\, tg\,\alpha$, auch $hv = rx''\, tg\,\alpha$
wie $k'm' = rx\, tg\,\alpha \sin\beta$,
auch $v'm' = rx''\, tg\,\alpha \sin\beta$,
und wie $k'b' = r(1+\cos x)\cos\beta$,
auch $v'b' = r(1+\cos x'')\cos\beta$.

Da nun h und g von der Horizontalen eb' einerlei Abstand $m'b'$ haben,
so ist $k'm' + k'b' = v'm' + v'b'$
oder $rx\, tg\,\alpha \sin\beta + r(1+\cos x)\cos\beta$
$= rx''\, tg\,\alpha \sin\beta + r(1+\cos x'')\cos\beta$
oder $x\, tg\,\alpha\, tg\,\beta + \cos x = x''\, tg\,\alpha\, tg\,\beta + \cos x''$
schreibt man $180^\circ \pm y$, oder $\pi \pm y$ für x'', so erhält man

$$\cos y \mp tg\,\alpha\, tg\,\beta\, y = tg\,\alpha\, tg\,\beta(\pi - x) - \cos x \quad (7)$$

Da nun für die gegebenen α und β $x = arc \sin tg\,\alpha\, tg\,\beta$, also ein bestimmter Werth ist, so ist auch y ein ganz bestimmter Werth, und zwar gilt $x'' > \pi$,
also $\cos y + tg\,\alpha\, tg\,\beta \cdot y$
wenn sich $tg\,\alpha\, tg\,\beta(\pi - x) - \cos x > 1$ ergiebt und $x'' < \pi$
wenn $tg\,\alpha\, tg\,\beta(\pi - x) - \cos x < 1$ ist.

Die Länge L der Kammer, im Umfang gemessen, ist die Linie $gdb''h$, und diese ist offenbar = Bogen $kobv \cdot sec\,\alpha$, also

$$L = r(x'' - x)\, sec\,\alpha \quad (8)$$

9. Bis hierher ist bei der Wasserschnecke nur der Querschnitt gdh der von einer Windung geschöpften Wassermenge M, deren Tiefe md und deren Länge $gdh = L$ im Umfang betrachtet worden, nicht aber M selbst.

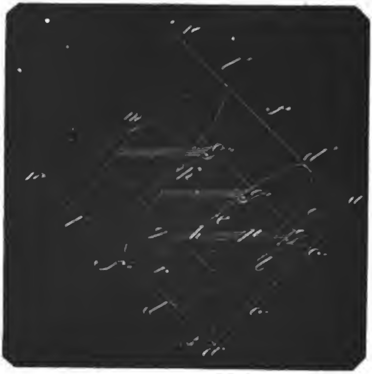
Fig. 78 zeigt den Durchschnitt einer Schnecke, wie Fig. 74, aber von gröſserem β und kleinerem α. Gleiche Buchstaben mit denen in Fig. 74 bezeichnen dieselben Gegenstände, nur daſs hier nicht der höchste Punkt des Schnecken-Umfangs, sondern der der Spindel mit g bezeichnet ist, weil über diesen das geschöpfte Wasser bei der Drehung doch wieder ausflieſst.

Hinter der Kante ac' beginnt die Einström-Oeffnung von der Höhe ac'; hat die Schnecke nur einen Gang, so ist deren Breite af, und diese zugleich die Breite der wasserhaltenden Windung. Erhebt sich ac' von unten nach oben, so tritt das Wasser, soweit die Höhe des Wasserspiegels es gestattet, bis gegen die Fläche fkl, allein das geschöpfte Wasser flieſst oberhalb der Kante g wieder zurück, und es bleibt nur das Wasser bis zur Oberfläche gh darin.

Es ist also eine breite Windung unvortheilhaft, und man schränkt diese ein, theils durch ein kleineres α, theils durch 2 oder mehrere Gänge statt eines einzigen.

So z. B. ist hier noch ein zweiter, von a' ausgehender Gang $a'd'f'l'n'$ gezeichnet, die erste Wasserkammer wird also durch die beiden Flächen $abde$ und $d'ef'k$ begrenzt; durch die eingeschobene Fläche ist die Wassermenge der ersten Kammer nicht vermindert, denn bei nur einer Windung würde die Fläche lm deren

Fig. 78.



Grenze sein, bis wohin aber der Wasserspiegel gh nicht reicht.

10. Eytelwein giebt in seiner Hydraulik, pag. 361 (§. 262) u. f., die Theorie des Effects der Wasserschnecke, aber er sagt selbst, pag. 368, es sei zu beklagen, dafs man nicht in's Grofse gehende Versuche habe. Diese Theorie ist kurz folgende:

Die Einström-Oeffnung $agg'd'$ hat die Breite $ad'=a$, die Höhe $ag=b$, also den Querschnitt ab. Der Schwerpunkt sei o, so ist von der in der ersten Kammer befindlichen Wassermenge vom Querschnitt ab die centrische Linie $oprq$; in p trifft sie die Horizontale pg, mithin ist der wasserhaltende Bogen die Linie prq, weil von p das Wasser über g abströmt und folglich die Wassermenge $M=prq\times ab$.

Hierbei ist Folgendes zu bemerken: Denkt man sich durch p eine Normale zwischen die Flächen abd und def, so liegt über hp ein Wasserdreieck, welches noch ausfliefst, welches also zu viel gerechnet ist, dafür aber unter pg ein ihm ziemlich gleiches, welches zu wenig gerechnet worden, und deshalb ist die Annahme für die Länge des wasserhaltenden Bogens annäherungsweise ganz richtig. Stellt man sich aber vor, dafs nur ein Schneckengang vorhanden sei, so ist $af=a$, ac' bleibt b, der Schwerpunkt rückt in die Linie $d'g'$, der tiefste Punkt der centrischen Linie liegt in der Mitte zwischen f und h, der wasserhaltende Bogen wird also äufserst kurz; rückt f weiter hinauf, wird a gröfser, so wird der wasserhaltende Bogen zu Null, also auch $M=$ Null, und gleichwohl wird die Wassermenge M von dem Querschnitt ghd geschöpft und gehoben. Die nach Eytelwein theoretisch ermittelte M kommt also der wirklich geförderten am nächsten, je schmaler die Windungen sind, und es ist daher zu erklären, dafs die Theorie mit den, pag. 370—372 seiner Hydraulik angegebenen Resultaten aus Versuchen so nahe übereinstimmt, indem die Schnecke bei 5,94" Durchmesser eine Windungsweite ad' von nur 1,15" und die Höhe $ac'=1{,}62"$ hatte.

Nach Eytelwein hat man, unter der Bedingung, dafs der Wasserspiegel bis zum Normalpunkt (g° Fig. 74) reicht,

$$M = fR(\lambda - \sigma - \delta)\sec\alpha$$

hier ist $f=a\cdot b$ (Fig. 74 $ad'\times ac$)

R = dem Halbmesser bis zur centrischen Linie

λ = Bogen $akov = x''$ für den Halbmesser $=1$ (Fig. 76)

σ = Bogen $ko (= x - x)$ desgl.

δ = Bogen $ak (= x = arc\sin tg\,\alpha\cdot tg\,\beta)$ desgl.

Es ist $\lambda = 3{,}1416 - \sin\delta + \sqrt{(2 + 2B + \sin^2\delta - 6{,}283\sin\delta)}$

hierin

$$B = \cos\delta - \frac{b\cos\delta}{2R} - \frac{a\,tg\,\beta}{2R} + \delta\sin\delta$$

$$\sigma = \tfrac{1}{2}\pi + \omega - \delta$$

ω findet man aus $\sin\omega = \dfrac{\frac{1}{2}\pi\sin\delta - B}{1-\sin\delta}$

11. Es ist schon ad 4 bemerkt, dafs der Wasserspiegel bis zu dem Normalpunkt g° Fig. 74 reichen mufs, wenn die gröfstmögliche M gefördert werden soll. Die Einflufsöffnung befindet sich ganz unter Wasser, so wie sie aber hervortaucht, dringt die Luft darüber in die Kammer, und es wird bei jeder Umdrehung auch das aërostatische Gleichgewicht hergestellt.

Bringt man die Schnecke so tief unter Wasser, dafs die Einflufsöffnung auch bei ihrer höchsten Lage aus dem Wasser nicht reicht, schöpft sie also nicht auch Luft, so ist die erste Windung ganz voll Wasser, dies rückt bei abermaliger Umdrehung zum Theil in die zweite Windung und folglich entsteht ein luftleerer Raum. Vermöge des Drucks der äufseren Atmosphäre wird also das Wasser gewaltsam durch die Einflufsöffnung in die

unterste Windung getrieben. Aber auch von den obersten Windungen aus äufsert sich derselbe Luftdruck, die oberen Windungen erfahren oberhalb des Wasserspiegels Luftverdünnungen, das Wasser wird also am Aufsteigen gehindert, und es geschehen wiederholt gewaltsame Luft-Ausgleichungen mit Geräusch und Unterbrechung im Betrieb.

12. Die Wasserschnecke ist eine vorzügliche Wasserhebemaschine für mittlere Förderungshöhen; bei grofsen Höhen wird die Spindel besonders wegen der nothwendigen schrägen Lage verhältnifsmäfsig zu lang und mufs der Länge angemessen stark sein, wiewohl die Schneckengänge nebst Mantel sehr bedeutend zur Stabilität gegen Einbiegung beitragen, desgleichen wird die zu drehende Last: Schneckenkörper plus Wasser-Inhalt, besonders bei mehreren Gängen zu grofs. Bei mittlerer Förderungshöhe mufs aber nur reines Wasser gehoben werden dürfen; Kraut, Schlick u. dergl. verstopfen die Gänge und diese können nur gereinigt werden, indem man den Mantel theilweise losbricht. Für krautiges Wasser und bei Versandungen ist die Wasserschraube vorzuziehn, weil deren Schneckengänge zu Tage liegen und leicht zu reinigen sind.

Die Schraube ohne Mantel liegt mit möglichst geringem Spielraum in einem

Fig. 79.



festen, gemauerten oder gezimmerten Mantel, Trog genannt, der von der Höhe der Schneckenaxe ab eine senkrechte Fortsetzung der Wandungen erhält.

Die Schnecke fördert Wasser, sie mag noch so langsam umgedreht werden, die Schraube dagegen nicht. Es giebt eine Geschwindigkeit derselben, bei welcher das geschöpfte Wasser durch den Spielraum zwischen Umfang und Mantel gänzlich zurückfliefst. Diese effectlose Geschwindigkeit vermindert sich mit der Höhe des Spielraums, der Glätte der Schneckengänge nebst Spindel und der Rauhigkeit der Manteloberfläche. Die Geschwindigkeit der Schraube mufs also gröfser sein, als das eben gedachte Minimum, dagegen kann sie auch so gesteigert werden, dafs die Centrifugalkraft des Wassers plus der Reibung der Wassertheilchen gegen den Mantel dem Bestreben zum Abflufs durch den Spielraum das Gleichgewicht hält, so dafs der darin befindliche Wasserring unbeweglich bleibt und das geschöpfte Wasser wirklich gehoben und ausgegossen wird. Steigert man diese Normalgeschwindigkeit, so kommt auch ein Theil des äufseren Wasserringes mit zum Ausgufs.

Arcus, Bogen, Kreisbogen. Ein Theil des Umfangs eines Kreises. Die Hälfte des Kreisumfangs heifst Halbkreis, der vierte Theil Viertelkreis oder Quadrant; der sechste Theil Sextant, der achte Theil Octant.

Gleiche Bogen eines Kreises gehören zu gleichen Centriwinkeln, ungleiche Bogen desselben Kreises verhalten sich wie deren zugehörige Centriwinkel.

Beschreibt man 2 reguläre Vielecke von gleich viel Seiten, das eine in einem Kreis, das andere um denselben, so wird der Kreisumfang (die Peripherie) von den Umfängen beider Vielecke eingeschlossen, und mit wiederholter Verdoppelung der Seiten beider Vielecke kommen deren Umfänge dem des Kreises an Länge immer näher, so dafs die Peripherie den Grenzwerth der Umfänge beider Vielecke bildet (vergl. Analysis, pag. 66.)

2. Die Elementar-Geometrie lehrt, die Umfänge beider Vielecke von bestimmter Seitenzahl durch den Halbmesser des zugehörigen Kreises auszudrücken. So steht im Art. Achtundvierzigeck (pag. 27) die Seite des in einem Kreise vom Halbmesser r beschriebenen 48ecks

$$s = 0{,}1308062 \times r$$

dessen Umfang ist also

$$48 \cdot 0{,}1308062 \times r = 6{,}2786976 \cdot r$$

Die Seite des um den Kreis vom Halbmesser r beschriebenen 48ecks

$$S = 0{,}1310870 \times r$$

dessen Umfang ist also

$$48 \cdot 0{,}1310870 \cdot r = 6{,}2921760 \cdot r$$

Es ist also die Länge der Peripherie offenbar zwischen $6{,}278\ldots r$ und $6{,}292\ldots r$ begriffen.

Da alle regulären Vielecke von gleich viel Seiten und alle Kreise einander ähnlich sind, so verhalten sich deren Umfänge wie die dazu gehörigen Kreishalbmesser oder Kreisdurchmesser, mithin haben jene Umfänge mit den Kreisdurchmessern ein constantes Verhältnifs; und die abstracte Zahl, welche den Kreisumfang als Vielfaches vom Durchmesser (d) angiebt, wird in der Mathematik mit dem griechischen Buchstab π bezeichnet.

Es ist nun

$$s = 3{,}1393488 \cdot d$$
$$S = 3{,}1460880 \cdot d$$

Die Zahl π liegt also zwischen 3,139... und 3,146...

Die Elementar-Geometrie lehrt ferner, aus dem Umfang eines zum Durchmesser d gehörenden n seitigen reg. Vielecks (reg. Necks) den Umfang des zu demselben Durchm. d gehörenden $2N$ecks zu finden. Der Umfang des $2N$ecks im Kreise wird gröfser, der des $2N$ecks um den Kreis kleiner; durch wiederholte Verdoppelung, also von dem 48eck zum 96eck, von diesem zum 192eck u. s. f. erhält man die Grenzen von π immer enger, und ergiebt sich so auf elementarem synthetischen Wege die Zahl π bis zu beliebiger Annäherung.

3. Die Zahl π ist irrational, es ist ein commensurables Verhältnifs zwischen dem Durchmesser und der Peripherie eines Kreises nicht vorhanden. In Vega's Sammlung mathematischer Tafeln (1849) pag. 839 ist π auf 140 Decimalstellen angegeben; in solcher Ausdehnung wird π nirgend gebraucht. Auf 15 Decimalstellen ist

$$\pi = 3{,}14159\ 26535\ 89793 \quad (1)$$
$$\log br\, \pi = 0{,}49714\ 98726\ 94134 \quad (2)$$
$$\log n\, \pi = 1{,}14472\ 98858\ 49400 \quad (3)$$
$$\log br\, (\log n\, \pi) = 0{,}05870\ 30212$$

4. Der Umfang des Kreises wird in 360 Grade (360°) getheilt, jeder Grad hat 60 Minuten (60'), jede Minute hat 60 Secunden (60").

Der Kreisumfang hat demnach 360°
= 21600'
= 1296000"

Diese Bogenmaafse sind zugleich die Maafse der den Bogen zugehörigen Centriwinkel.

In der Trigonometrie und der Analysis wird jede Kreisfunction auf den Radius = der Einheit ($r = 1$) bezogen.

Demnach hat der **Kreisumfang**
im Winkelmaafs 360°
im Bogen(längen)maafs

$$2\pi = 6{,}28318\ 53072 \quad (4)$$
$$\log br = 0{,}79817\ 98734$$

der **Halbkreis**
im Winkelmaafs 180°
im Bogenmaafs $= \pi = 3{,}14159\ 26536$

$$\log br = 0{,}49714\ 98727$$

der **Quadrant**
im Winkelmaafs 90°
im Bogenmaafs $= \frac{1}{2}\pi = 1{,}57079\ 63268$

$$\log br = 0{,}19611\ 98719$$

5. Die trigonometrischen Tafeln geben die Bogen in Winkelmaafs an, die trigonometrischen Functionen aber als Längen für den Halbmesser = 1. Vega, pag. 315, hat z. B.: $\sin 9°20' = 0{,}1621779$

D. h. Wenn man in einem Kreise vom Halbmesser = 1 den Sinus eines Centriwinkels von 9°20 zeichnet, so hat dieser Sinus eine Länge von 0,1621779

Hat der Radius 1000 Fufs Länge, so hat der Sinus die Länge = 162,1779 Fufs.

Im Vega, pag. 268, steht:

$$\log \sin 9°20' = 9{,}2099917$$
d. h. $$\log 0{,}1621779 = 9{,}2099917 - 10$$
$$= 0{,}2099917 - 1$$

Ist nun die Länge eines Bogens gegeben, soll z. B. $tg\, \frac{3}{2} x$ gefunden werden, wo x eine Länge ist, und findet man $x = 1{,}7325$ so hat man $tg\, \frac{3}{2} \cdot 1{,}7325 = tg\, 2{,}59875$

Um diese Tangente in den Tafeln zu finden, mufs erst der Centri∠ (y) ermittelt werden, welcher der Bogenlänge 2,59875 entspricht.

Nun ist $\pi : 2{,}59875 = 180° : y$

$$\text{daher } y = \frac{2{,}59875}{3{,}141952\ldots} \times 180°$$

$\log 180$	$= 2{,}2552725$
$\log\ 2{,}59875$	$= 0{,}4147645$
Summa	$= 2{,}6700370$
$\log \pi$	$= 0{,}4971499$
$\log y$	$= 2{,}1728871$

In den Tafeln findet man hieraus

$$y = 148{,}8974°$$
$$= 148°53'\ 50\tfrac{2}{3}"$$

Nun ist $tg\ 148°\ 53'\ 50\frac{2}{3}"$
$$= - tg\,(180° - 148°\ 53'\ 50\tfrac{2}{3}")$$
$$= - tg\ 31°\ 6\ 9\tfrac{1}{3}"$$
welche in den Tafeln angegeben ist.

6. Es kommt häufig vor, dafs trigonometrische Linien in Bogen statt in Winkeln angegeben werden, und um den Berechnungen für Verwandlung von Bogenmaafs in Winkelmaafs zu entgehen, hat man Hülfstafeln wie in Vega, pag. 304.

Folgende Tafel ist gegen die Vega'sche dahin abgekürzt, dafs die Grade, Minuten und Secunden nur von 1 bis 10 vollständig, von 10 ab aber nur von 10 zu 10 angegeben sind.

Tafel der Bogenlängen für den Halbmesser = 1 mit den zugehörigen Centriwinkeln.

Centriwinkel	für Grade	für Minuten	für Secunden
1	0,0174532925	0,0002908882	0,0000048481
2	0,0349065850	0,0005817764	0,0000096963
3	0,0523598776	0,0008726646	0,0000145444
4	0,0698131701	0,0011635528	0,0000193926
5	0,0872664626	0,0014544410	0,0000242407
6	0,1047197551	0,0017453293	0,0000290888
7	0,1221730476	0,0020362175	0,0000339370
8	0,1396263402	0,0023271057	0,0000387851
9	0,1570796327	0,0026179939	0,0000436332
10	0,1745329252	0,0029088821	0,0000484814
20	0,3490658504	0,0058177642	0,0000969627
30	0,5235987756	0,0087266463	0,0001454441
40	0,6981317008	0,0116355284	0,0001939255
50	0,8726646260	0,0145444104	0,0002424068
60	1,0471975512	0,0174532925	0,0002908882

Centriwinkel	für Grade	Centriwinkel	für Grade	Centriwinkel	für Grade
70	1,2217304764	170	2,9670597284	270	4,7123889804
80	1,3962634016	180	3,1415926536	280	4,8869219056
90	1,5707963268	190	3,3161255788	290	5,0614548308
100	1,7453292520	200	3,4906585040	300	5,2359877560
110	1,9198621772	210	3,6651914292	310	5,4105206812
120	2,0943951024	220	3,8397243544	320	5,5850536064
130	2,2689280276	230	4,0142572796	330	5,7595865316
140	2,4434609528	240	4,1887902048	340	5,9341194568
150	2,6179938780	250	4,3633231300	350	6,1086523820
160	2,7925268032	260	4,5378560552	360	6,2831853072

Man findet in der vorstehenden Hülfstafel, dafs die gegebene Bogenlänge 2,59875 zwischen 140° und 150° liegt.

140° entspricht dem Bog.	= 2,44346	09528
der gegebene Bog.	= 2,59875	
Rest	= 0,15528	90472
8° entspricht dem Bog.	= 0,13962	63402
Rest	= 0,01566	27070
50′ entspricht dem Bog.	= 0,01454	44104
Rest	= 0,00111	82966
3′ entspricht dem Bog.	= 0,00087	26646
Rest	= 0,00024	56320
50″ entspricht dem Bog.	= 0,00024	24068
Rest	= 0,00000	32252
1″ entspricht dem Bog.	= 0,00000	48481

mithin $y = 148° \, 53' \, 50\frac{2}{3}''$

7. Ist für den Halbmesser = 1 die Länge einer trigonometrischen Linie = x, und bezeichnet α den dazu gehörigen Bogen oder Centriwinkel, so drückt man den Bogen durch die trig. Linie folgender Art aus:

$(\alpha =) \, arc \sin x$ oder $arc(\sin = x)$
wenn $x = \sin \alpha$

$(\alpha =) \, arc \cos x$ oder $arc(\cos = x)$
wenn $x = \cos \alpha$

$(\alpha =) \, arc \, tg \, x$ oder $arc(tg = x)$
wenn $x = tg \, \alpha$

$(\alpha =) \, arc \cot x$ oder $arc(\cot = x)$
wenn $x = \cot \alpha$

$(\alpha =) \, arc \sec x$ oder $arc(\sec = x)$
wenn $x = \sec \alpha$

$(\alpha =) \, arc \, cosec \, x$ oder $arc(cosec = x)$
wenn $x = cosec \, \alpha$

$(\alpha =) \, arc \, sinvers \, x$ oder $arc(sinv = x)$
wenn $x = sinv \, \alpha$

$(\alpha =) \, arc \, cosvers \, x$ oder $arc(cosv = x)$
wenn $x = cosv \, \alpha$

8. So wichtig es für die Berechnung der trig. Linien ist, diese als Function des Bogens in eine Reihe nach fortlaufenden Potenzen des Bogens zu berechnen, eben so wichtig ist die Entwickelung des Bogens als Function einer trig. Linie in eine Reihe nach den fortlaufenden Potenzen dieser Linie.

Diese Reihen-Entwickelungen sollen hier geschehen, und zwar durch Entwickelung der Differenziale des Bogens in Reihen nach fortlaufenden Potenzen der Urveränderlichen und darauf folgender Anwendung der Maklaurin'schen Reihe zur Entwickelung der Function selbst in eine Reihe.

9. Entwickelung des Bogens ($y = arc\ sin\ x$) in eine Reihe nach fortlaufenden Potenzen des $sin = x$.

Die Differenzialrechnung lehrt, dafs

$$\partial(arc\ sin\ x) = \sqrt{\frac{1}{1-x^2}}\,\partial x$$

Um nun die übrigen Differenziale der Function leichter und für die Maklaurinsche Reihe leicht brauchbar aufzufinden, ist dies Differenzial in eine Reihe zu entwickeln.

Man setze demnach

$$\sqrt{\frac{1}{1-x^2}} = A + Bx^2 + Cx^4 + Dx^6 + Ex^8 + Fx^{10} + Gx^{12} + \ldots\ldots$$

wo A, B, C u. s. w. constante, aber noch unbekannte Coefficienten sind.

Diese Gleichung quadrirt und auf Null reducirt (s. pag. 48, No. 4), giebt

$$\begin{aligned}0 = {} & A^2 - 1 + (2AB - A^2)x^2 \\ & + (B^2 + 2AC - 2AB)x^4 + \\ & (2BC + 2AD - 2AC - B^2)x^6 + \\ & (C^2 + 2BD + 2AE - 2BC - 2AD)x^8 + \\ & (2CD + 2BE + 2AF - C^2 - 2BD - 2AE)x^{10} + \\ & (D^2 + 2CE + 2BF + 2AG - 2CD - 2BE \\ & - 2AF)x^{12} \ldots\ldots\end{aligned}$$

Da x jeden beliebigen reellen Werth haben kann, so ist die Gleichung nur möglich, wenn $A^2 - 1 = 0$ ist, und daher ist

$$1)\ A = 1$$

Es ist mithin die Gleichung nun

$$0 = (2AB - A^2)x^2 + (B^2 + 2AC - 2AB)x^4 + \ldots$$

Diese Gleichung durch x^2 dividirt, giebt

$$0 = 2AB - A^2 + (B^2 + 2AC - 2AB)x^2 + \ldots$$

und aus dem eben angeführten Grunde kann diese Gl. nur bestehen, wenn

$$2AB + A^2 = 0$$

Hierin $A = 1$ gesetzt, giebt

$$2)\ B = \tfrac{1}{2}$$

Die Gleichung ist nun

$$0 = (B^2 + 2AC - 2AB)x^2 + \ldots.$$

Diese durch x^2 dividirt, giebt

$$0 = B^2 + 2AC - 2AB + (2BD + 2AD - 2AC - B^2)x^2 + \ldots.$$

folglich $B^2 + 2AC - 2AB = 0$

Es ist hiernach klar, dafs die obige auf 0 reducirte Gleichung nur unter der Bedingung möglich ist, dafs jeder der einzelnen Coefficienten $= 0$ ist. Wie nun A und B gefunden sind, erhält man ferner

$$C = \tfrac{3}{8}$$
$$D = \tfrac{5}{16}$$
$$E = \tfrac{35}{128}$$
$$F = \tfrac{63}{256}$$
$$G = \tfrac{231}{1024}$$

und es ist demnach

$$\partial(arc\ sin\ x) = \sqrt{\frac{1}{1-x^2}}$$
$$= 1 + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{3}{8}x^4 + \tfrac{5}{16}x^6 + \tfrac{35}{128}x^8 + \tfrac{63}{256}x^{10} + \tfrac{231}{1024}x^{12} + \ldots.$$

Nun ist es leicht, die folgenden Differenziale von $arc\ sin\ x$ zu finden. Man erhält sogleich:

$$\partial^2(arc\ sin\ x) = +x + \frac{3}{2}x^3 + \frac{3\cdot5}{8}x^5 + \frac{35}{16}x^7 + \frac{5\cdot63}{128}x^9 + \frac{3\cdot231}{256}x^{11}$$

$$\partial^3(arc\ sin\ x) = +1 + \frac{3\cdot3}{2}x^2 + \frac{5\cdot15}{8}x^4 + \frac{7\cdot35}{16}x^6 + \frac{9\cdot315}{128}x^8 + \frac{11\cdot693}{256}x^{10}$$

$$\partial^4(arc\ sin\ x) = +9x + \frac{75}{2}x^3 + \frac{3\cdot245}{8}x^5 + \frac{2835}{16}x^7 + \frac{5\cdot7623}{128}x^9$$

$$\partial^5(arc\ sin\ x) = +9 + \frac{3\cdot75}{2}x^2 + \frac{5\cdot735}{8}x^4 + \frac{7\cdot2835}{16}x^6 + \frac{9\cdot38115}{128}x^8$$

$$\partial^6(arc\ sin\ x) = +225x + \frac{3675}{2}x^3 + \frac{3\cdot19845}{8}x^5 + \frac{343035}{16}x^7$$

$$\partial^7(arc\ sin\ x) = +225 + \frac{3\cdot3675}{2}x^2 + \frac{5\cdot59535}{8}x^4 + \frac{7\cdot343035}{16}x^6$$

$$\partial^8(arc\ sin\ x) = +11025x + \frac{297675}{2}x^3 + \frac{3\cdot2401245}{8}x^5$$

$$\partial^9(arc\ sin\ x) = +11025 + \frac{3\cdot297675}{2}x^2 + \frac{5\cdot7203735}{8}x^4$$

$$\partial^{10}(arc\ sin\ x) = +893025x + \frac{36018675}{2}x^3$$

$$\partial^{11}(arc\ sin\ x) = +893025 + \frac{3\cdot36018675}{2}x^2$$

$$\partial^{12}(arc\ sin\ x) = +108056025x$$

$$\partial^{13}(arc\ sin\ x) = +108056025$$

Bedeutet f den Werth einer Function fx von x, welcher entsteht, wenn man $x=0$ setzt; desgl. $\partial^1 f$; $\partial^2 f$; $\partial^3 f \ldots \partial^n f$ die Werthe des ersten, zweiten .... $n$ten Differenzials der Function fx, in jedem $x=0$ gesetzt, dann hat man die (Maklaurin'sche) Reihe

$$fx = f + \frac{x}{1}\partial^1 f + \frac{x^2}{1\cdot 2}\partial^2 f + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}\partial^3 f + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\partial^4 f + \ldots \frac{x^n}{(1\ldots n)}\partial^n f$$

Hier ist

$$fx = arc\,sin\,x$$

wird der *Sinus* $=0$, so wird auch der Bogen $=0$, mithin $f=0$

Aus den obigen Reihen ersieht man, daſs, wenn überall $x=0$ gesetzt wird

$$\begin{array}{ll} \partial^1 f = +1 & \partial^7 f = +225 \\ \partial^2 f = \ \ 0 & \partial^8 f = \ \ 0 \\ \partial^3 f = +1 & \partial^9 f = +11025 \\ \partial^4 f = \ \ 0 & \partial^{10} f = \ \ 0 \\ \partial^5 f = +9 & \partial^{11} f = +893025 \\ \partial^6 f = \ \ 0 & \partial^{12} f = \ \ 0 \\ & \partial^{13} f = +108056025 \end{array}$$

Die Maklaurin'sche Reihe ergiebt also

$$arc\,sin\,x = 0 + 1\cdot\frac{x}{1} \pm 0\cdot\frac{x^2}{1\cdot 2} + 1\cdot\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} \pm 0\cdot\frac{x^4}{1\ldots 4} + 9\cdot\frac{x^5}{1\ldots 5} \pm 0\cdot\frac{x^6}{1\ldots 6} + 225\cdot\frac{x^7}{1\ldots 7} \pm 0\cdot\frac{x^8}{1\ldots 8} + 11025\cdot\frac{x^9}{1\ldots 9} \pm 0\cdot\frac{x^{10}}{1\ldots 10} + 893025\cdot\frac{x^{11}}{1\ldots 11} \pm 0\cdot\frac{x^{12}}{1\ldots 12} + 108056025\cdot\frac{x^{13}}{1\ldots 13} \pm \ldots$$

oder

$$arc\,sin\,x = x + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{9x^5}{1\cdot 2\ldots 5} + \frac{225x^7}{1\cdot 2\ldots 7} + \frac{11025\,x^9}{1\cdot 2\ldots 9} + \frac{893025\,x^{11}}{1\cdot 2\ldots 11} + \frac{108056025\,x^{13}}{1\cdot 2\ldots 13} + \ldots$$

Betrachtet man die Entstehung der Zähler-Coefficienten aus den auf einander vorgenommenen Differenzirungen, so läſst sich leicht ein Gesetz ableiten, nach welchem die Reihe fortschreitet:

Es ist sodann

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} = \frac{1}{2\cdot 3}$$

$$\frac{9}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = \frac{3}{2\cdot 4\cdot 5}$$

$$\frac{225}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} = \frac{3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}$$

$$\frac{11025}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9} = \frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 9}$$

$$\frac{893025}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11} = \frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 11}$$

$$\frac{108056025}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 11\cdot 12\cdot 13} = \frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12\cdot 13}$$

mithin

$$arc\,sin\,x = x + \frac{1\cdot x^3}{2\cdot 3} + \frac{3\cdot x^5}{2\cdot 4\cdot 5} + \frac{3\cdot 5\cdot x^7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7} + \frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot x^9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 9} + \frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot x^{11}}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 11} + \frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11\cdot x^{13}}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12\cdot 13} + \ldots$$

Das allgemeine ($n$te) Glied ist:

$$\frac{3\cdot 5\cdot 7\ldots(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n-2)}\cdot\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$$

Bezeichnet man den Bogen mit α, so ist $x = sin\,\alpha$, und man kann die Reihe auch schreiben

$$\alpha = sin\,\alpha + \frac{1\cdot sin^3\alpha}{2\cdot 3} + \frac{3\ sin^5\alpha}{2\cdot 4\cdot 5} + \frac{3\cdot 5\ sin^7\alpha}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7} + \ldots$$

10. Entwickelung des Bogens ($y = arc\,cos\,x$) in eine Reihe nach fortlaufenden Potenzen des $cos = x$.

Es ist

$$\frac{\partial\ arc\,cos\,x}{\Delta x} = -\sqrt{\frac{1}{1-x^2}}$$

also = dem negativen Differenzial von $arc\,sin\,x$. Nun ist nach No. 9

$$\sqrt{\frac{1}{1-x^2}} = 1 + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{3}{8}x^4 + \tfrac{5}{16}x^6 + \tfrac{35}{128}x^8 + \ldots$$

folglich

$$-\sqrt{\frac{1}{1-x^2}} = -1 - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{3}{8}x^4 - \tfrac{5}{16}x^6 - \tfrac{35}{128}x^8$$

und es wird die Rechnung wie in No. 9 durchgeführt:

$\partial^1 f = -1$	$\partial^6 f = 0$
$\partial^2 f = 0$	$\partial^7 f = -225$
$\partial^3 f = -1$	$\partial^8 f = 0$
$\partial^4 f = 0$	$\partial^9 f = -11025$
$\partial^5 f = -9$	$\partial^{10} f = 0$

u. s. w.

Um f, d. h. $arc\cos x$, wenn $x=0$ gesetzt wird, zu bestimmen, weifs man, dafs zu dem $\cos = 0$ der Quadrant, also $\frac{\pi}{2}$ gehört. Es ist nun nach der Maklaurin'schen Reihe

$$arc\cos x = \frac{\pi}{2} - \left(1 \cdot \frac{x}{1} + 0 + 1 \cdot \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + 0 + 9 \cdot \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + 0 + 225 \cdot \frac{x^7}{1 \ldots 7} + \ldots\right)$$

Also

$$arc\cos x = \frac{\pi}{2} - arc\sin x$$

$$= \frac{\pi}{2} - \left[x + \frac{1 \cdot x^3}{2\ 3} + \frac{3\ x^5}{2\ 4\ 5} + \frac{3 \cdot 5\ x^7}{2 \cdot 4\ 6 \cdot 7} + \ldots\right]$$

Bezeichnet man den Bogen mit α, so kann man die Reihe auch schreiben:

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \left[\cos\alpha + \frac{1 \cdot \cos^3\alpha}{2\ 3} + \frac{3 \cdot \cos^5\alpha}{2\ 4\ 5} + \ldots\right]$$

wo das allgemeine Glied der Klammergröfse ist

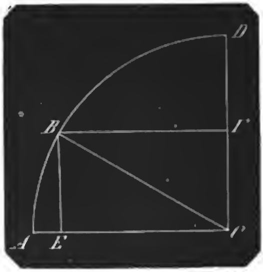
$$\frac{3\ 5\ 7 \ldots (2n-3)}{2 \cdot 4\ 6 \ldots (2n-2)} \cdot \frac{\cos^{2n-1}\alpha}{2n-1}$$

Dies Resultat für $arc\cos x$ ist auch aus rein geometrischen Betrachtungen zu entnehmen.

Denn ist ABD ein Quadrant, $AB=\alpha$, $BD=\beta$, so ist

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$$

Fig. 80.



Es sei nun

$$\beta = f(\sin\beta) = f(BF) \text{ so ist}$$
$$\beta = f(CE) \ = f(\cos\alpha)$$

hieraus folgt

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha = f(\cos\alpha)$$

mithin

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta = \frac{\pi}{2} - f(\cos\alpha)$$

Ein Kreisbogen ist also $= \frac{\pi}{2}$ minus derjenigen Function von seinem *cosinus*, welche allein den Bogen ausdrückt, wenn statt des *cos* der *sinus* des Bogens als urvariabel angesehen wird.

11. Entwickelung des Bogens ($y = arc\,tg\,x$) in eine Reihe nach fortlaufenden Potenzen der $tg = x$.

Es ist

$$\frac{\partial\, arc\,tg\,x}{\partial x} = \frac{1}{1+x^2}$$

Entwickelt man diesen Ausdruck durch wirkliche Division von $(1+x^2)$ in 1 in eine Reihe, so erhält man

$\partial^1\ arc\,tg\,x =$	$1 - x^2$	$+x^4$	$-x^6$	$+x^8$	$-x^{10}$	$+x^{12}$
$\partial^2\ arc\,tg\,x =$	$-2x$	$+4x^3$	$-6x^5$	$+8x^7$	$-10x^9$	$+12x^{11}$
$\partial^3\ arc\,tg\,x =$	-2	$+3\ 4x^2$	$-5 \cdot 6x^4$	$+7 \cdot 8x^6$	$-9 \cdot 10x^8$	$+11 \cdot 12x^{10}$
$\partial^4\ arc\,tg\,x =$		$+24x$	$-4 \cdot 30x^3$	$+6 \cdot 56x^5$	$-8 \cdot 90x^7$	$+10 \cdot 132x^9$
$\partial^5\ arc\,tg\,x =$		$+24$	$-3 \cdot 120x^2$	$+5 \cdot 336x^4$	$-7 \cdot 720x^6$	$+9 \cdot 1320x^8$
$\partial^6\ arc\,tg\,x =$			$-2 \cdot 360x$	$+4 \cdot 1680x^3$	$-6 \cdot 5040x^5$	$+8 \cdot 11880x^7$
$\partial^7\ arc\,tg\,x =$			-720	$+3 \cdot 6720x^2$	$-5 \cdot 30240x^4$	$+7 \cdot 95040x^6$
$\partial^8\ arc\,tg\,x =$				$+2 \cdot 20160x$	$-4 \cdot 151200x^3$	$+6 \cdot 665280x^5$
$\partial^9\ arc\,tg\,x =$				$+40320$	$-3 \cdot 604800x^2$	$+5 \cdot 3991680x^4$
$\partial^{10}\ arc\,tg\,x =$					$-2 \cdot 1814400x$	$+4 \cdot 19958400x^3$
$\partial^{11}\ arc\,tg\,x =$					-3628800	$+3 \cdot 79833600x^2$
$\partial^{12}\ arc\,tg\,x =$						$+2 \cdot 239500800x$
$\partial^{13}\ arc\,tg\,x =$						$+479001600$

Bezeichnet wie in No. 9, $f = arc\,tg\,x$ für $x=0$ so ist $f=0$, weil mit der Taugente auch der zugehörige Bogen = Null wird.

Nach der vorstehenden Reihe ist

$$\begin{array}{ll} \partial^1 f = +1 & \partial^7 f = -720 \\ \partial^2 f = 0 & \partial^8 f = 0 \\ \partial^3 f = -2 & \partial^9 f = +40320 \\ \partial^4 f = 0 & \partial^{10} f = 0 \\ \partial^5 f = +24 & \partial^{11} f = -3628800 \\ \partial^6 f = 0 & \partial^{12} f = 0 \\ & \partial^{13} f = +479001600 \end{array}$$

Daher nach der Maklaurin'schen Reihe

$$arc(tg = x) = \frac{x}{1}\cdot(+1) + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot(-2) + \frac{x^5}{1\ldots 5}\cdot(+24) + \frac{x^7}{1\ldots 7}\cdot(-720) + \frac{x^9}{1\ldots 9}\cdot(+40320) + \frac{x^{11}}{1\ldots 11}\cdot(-3628800) + \frac{x^{13}}{1\ldots 13}\cdot(+479001600)$$

und geordnet

$$arc(tg\,x) = x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7 + \tfrac{1}{9}x^9 - \tfrac{1}{11}x^{11} + \tfrac{1}{13}x^{13}$$

Um einen möglichst nahen Werth für $arc\,tg\,x$ zu erhalten, müssen eine grofse Menge von Gliedern der Reihe berechnet werden, weil die Vorzeichen abwechseln.

Hat man aber eine Gröfse S in einer Reihe von der Form

$$S = ax - bx^2 + cx^3 - dx^4 + \ldots$$

setzt darin $x = \frac{y}{1-y} = y + y^2 + y^3 + y^4 + \ldots$

so erhält man

$$S = ay + (a-b)y^2 + (a-2b+c)y^3 + (a-3b+3c-d)y^4 + (a-4b+6c-4d+e)y^5 \ldots$$

wo, wie man sieht, die Coefficienten die des Binoms sind. Drückt man y durch x wieder aus, so hat man

$$S = a\cdot\frac{x}{1+x} + (a-b)\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + (a-2b+c)\left(\frac{x}{1+x}\right)^3 + \ldots$$

also lauter positive und schnell convergirende Glieder.

Man kann die Reihe für $arc\,tg\,x$ in die eben aufgeführte Form bringen, wenn man schreibt

$$arc\,tg\,x = \frac{1}{x}\left[x^2 - \tfrac{1}{3}x^4 + \tfrac{1}{5}x^6 - \tfrac{1}{7}x^8 + \tfrac{1}{9}x^{10} - \ldots\right]$$

Setzt man nun $x^2 = \frac{y}{1-y}$ und bemerkt,

dafs hier $a = 1$, $b = \frac{1}{3}$, $c = \frac{1}{5}$, $d = \frac{1}{7}$, $e = \frac{1}{9}$, $f = \frac{1}{11}$

so erhält man

$$arc\,tg\,x = \frac{1}{x}\left[y + \tfrac{2}{3}y^2 + \tfrac{8}{15}y^3 + \tfrac{16}{35}y^4 + \tfrac{128}{315}y^5 + \tfrac{256}{693}y^6\right]$$

Setzt man für y seinen Werth $\frac{x^2}{1+x^2}$ so hat man, wenn man zugleich für ein gesetzliches Fortschreiten der Reihe die Entstehung der Coefficienten berücksichtigt:

$$arc\,tg\,x = \frac{x}{1+x^2}\left[1 + \tfrac{2}{3}\frac{x^2}{1+x^2} + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^2 + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^3 + \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^4 + \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^5 + \ldots\right]$$

eine sehr schnell convergirende Reihe.

Das allgemeine Glied der Klammergröfse ist

$$\frac{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2(n-1)}{3\cdot 5\cdot 7\ldots(2n-1)}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^{n-1}$$

Bezeichnet man den Bogen mit α, x mit $tg\,\alpha$, so wird die obige Formel

$$\alpha = \frac{tg\,\alpha}{1+tg^2\alpha}\left[1 + \tfrac{2}{3}\frac{tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha} + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\left(\frac{tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}\right)^2 + \ldots\right]$$

12. Entwickelung des Bogens ($y = arc\,cot\,x$) in eine Reihe nach fortlaufenden Potenzen der $cot = x$.

Es ist

$$\frac{\partial\, arc\,cot\,x}{\Delta x} = -\frac{1}{1+x^2}$$

also nach No. 11

$$= -\frac{\partial\, arc\,tg\,x}{\Delta x}$$

Die höheren Differenziale von $arc\,cot\,x$ sind daher ebenfalls gleich den negativen von $arc\,tg\,x$, und dieselben für $x=0$ liefern die gleichen, aber entgegengesetzten Coefficienten. Statt $f=0$ wird hier $f=\frac{\pi}{2}$, weil zu der $cot=0$ der Quadrant als Bogen gehört. Man hat also

$$arc\,cot\,x = \frac{\pi}{2} - x + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{5}x^5 + \tfrac{1}{7}x^7 - \ldots$$

$$= \frac{\pi}{2} - (x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7 + \ldots)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{x}{1+x^2}\left[1 + \tfrac{2}{3}\frac{x^2}{1+x^2} + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^2 + \ldots\right]$$

oder den Bogen mit α, x mit $cot\,\alpha$ bezeichnet

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{cot\,\alpha}{1+cot^2\alpha}\left[1 + \tfrac{2}{3}\frac{cot^2\alpha}{1+cot^2\alpha} + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\left(\frac{cot^2\alpha}{1+cot^2\alpha}\right)^2 + \ldots\right]$$

Dies Resultat erhält man auch durch folgende einfache Betrachtung:

Ist $x = tg\,\alpha$ die Urveränderliche, so sei

$$\alpha = f\,cot\,\alpha$$

dann ist auch $\frac{\pi}{2} - \alpha = f\left(cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right)$

$$= f(tg\,\alpha)$$

oder $\alpha = \frac{\pi}{2} - f(tg\,\alpha)$

da nun $\alpha = f(cot\,\alpha)$

so ist $\alpha = f\,(cot\,\alpha) = \frac{\pi}{2} - f\,(tg\,\alpha)$

Ein Kreisbogen ist also = dem Quadrant weniger derjenigen Function seiner Cotangente, welche allein denselben Bogen ausdrückt, wenn statt der Cotangente die Tangente als urveränderlich genommen wird.

13. Entwickelung des Bogens ($y = arc\,sec\,x$) in eine Reihe nach fortlaufenden Potenzen der $sec = x$.

Schreibt man in die Formel No. 10 für $arc\,cos\,\alpha$ statt $cos\,\alpha$ den ihm gleichen Werth $\frac{1}{sec\,\alpha}$, so erhält man

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \left[\frac{1}{sec\,\alpha} + \frac{1}{2\cdot 3}\cdot\frac{1}{sec^3\alpha} + \frac{3}{2\cdot 4\cdot 5}\cdot\frac{1}{sec^5\alpha} + \ldots\right]$$

oder

$$arc\,(sec = x) = \frac{\pi}{2} - \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{2\cdot 3\,x^3} + \frac{3}{2\cdot 4\cdot 5\,x^5} + \ldots\right]$$

14. Entwickelung des Bogens ($y = arc\,cosec\,x$) in eine Reihe nach fortlaufenden Potenzen der *Cosecante* $= x$.

Schreibt man in die Formel No. 9 für $arc\,sin\,\alpha$ statt $sin\,\alpha$ den ihm gleichen Werth $\frac{1}{cosec\,\alpha}$, so erhält man:

$$\alpha = \frac{1}{cosec\,\alpha} + \frac{1}{2\cdot 3\,cosec^3\alpha} + \frac{3}{2\cdot 4\cdot 5\,cosec^5\alpha} + \ldots$$

oder

$$arc\,cosec\,x = \frac{1}{x} + \frac{1}{2\cdot 3\,x^3} + \frac{3}{2\cdot 4\cdot 5\,x^5} + \ldots$$

15. Entwickelung des Bogens ($y = arc\,sinv\,x$) in eine Reihe nach fortlaufenden Potenzen des *sinus versus* $= x$.

Schreibt man in die Formel No. 10 für $arc\,cos\,\alpha$ statt $cos\,\alpha$ den ihm gleichen Werth $1 - sinv\,\alpha$, so erhält man:

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \left[(1 - sinv\,\alpha) + \frac{(1 - sinv\,\alpha)^3}{2\cdot 3} + \frac{3\,(1 - sinv\,\alpha)^5}{2\cdot 4\cdot 5} + \ldots\right]$$

oder

$$arc\,(sinv = x) = \frac{\pi}{2} - \left[(1 - x) + \frac{(1 - x)^3}{2\cdot 3} + \frac{3\,(1 - x)^5}{2\cdot 4\cdot 5} + \ldots\right]$$

16. Entwickelung des Bogens ($y = arc\,cosv\,x$) in eine Reihe nach fortlaufenden Potenzen des *cosinus versus* $= x$.

Schreibt man in die Formel No. 9 für $arc\,sin\,\alpha$ statt $sin\,\alpha$ den ihm gleichen Werth $1 - cosv\,\alpha$, so erhält man:

$$\alpha = (1 - cosv\,\alpha) + \frac{(1 - cosv\,\alpha)^3}{2\cdot 3} + \frac{3\,(1 - cosv\,\alpha)}{2\cdot 4\cdot 5} + \ldots$$

oder

$$arc\,(cosv\,x) = (1 - x) + \frac{(1 - x)^3}{2\cdot 3} + \frac{3\,(1 - x)^5}{2\cdot 4\cdot 5} + \ldots$$

17. Es ist No. 2 der elementaren Weise gedacht worden, auf welche man zu dem Werthe von π kommen kann. Die vorstehend entwickelten Reihen liefern π auf analytischem und schnellerem Wege.

A. Legt man die Formel No. 9 zu Grunde

$$arc\,sin\,x = x + \frac{1\cdot x^3}{2\cdot 3} + \frac{3\,x^5}{2\cdot 4\cdot 5} + \frac{3\cdot 5\cdot x^7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7} + \ldots$$

so hat man nach Lehren der Geometrie $arc\,30^\circ$ für $sin = \frac{1}{2}$; es ist aber $arc\,30^\circ = \frac{1}{6}\pi$,

daher

$$\frac{\pi}{6} = \tfrac{1}{2} + \frac{(\frac{1}{2})^3}{2\cdot 3} + \frac{3\cdot(\frac{1}{2})^5}{2\cdot 4\cdot 5} + \frac{3\cdot 5\,(\frac{1}{2})^7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7} + \ldots$$

$$\begin{aligned} \pi &= 6\cdot\tfrac{1}{2} &&= 3{,}0 \\ &+ 6\cdot\tfrac{1}{48} &&= 0{,}125 \\ &+ 6\cdot\frac{3}{1280} &&= 0{,}0140625 \\ &+ 6\cdot\frac{5}{14336} &&= 0{,}0020926339\ldots \\ &+ 6\cdot\frac{35}{589824} &&= 0{,}0003560384\ldots \\ & && \ 3{,}1415111723\ldots \end{aligned}$$

Man sieht hieraus, dafs jeder Summand eine Decimalstelle richtig giebt, jedoch ist auf diese Weise die Berechnung auf eine gröfsere Anzahl Decimalen immer noch langwierig. Man verschafft sich aber einige Erleichterung, wenn man die Reihe für π folgend schreibt:

$$\pi = 6\left[\tfrac{1}{2} + \frac{2}{2\cdot3\cdot4^2} + \frac{2\cdot3}{2\cdot4\cdot5\cdot8^2} + \frac{2\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot7\cdot16^2} + \frac{2\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot9\cdot32^2} + \ldots\right]$$

und nun bemerkt, dafs das berechnete $n$te Glied der Klammergröfse nur mit $\frac{(2n-1)^2}{8n(2n+1)}$ zu multipliciren ist, um das $(n+1)$te Glied zu geben.

Demnach ist

das 2te Glied $= \frac{1}{24}$ × dem 1sten Gl.
„ 3te „ $= \frac{9}{80}$ × dem 2ten „
„ 4te „ $= \frac{25}{168}$ × dem 3ten „
„ 5te „ $= \frac{49}{288}$ × dem 4ten „
u. s. w.

B. Legt man die Formel No. 11 zu Grunde

$$arc\, tg\, x = \frac{x}{1+x^2}\left[1 + \tfrac{2}{3}\frac{x^2}{1+x^2} + \frac{2\cdot4}{3\cdot5}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^2 + \ldots\right]$$

so hat man für den Bogen $= 45^0 = \frac{1}{4}\pi$ die $tg = x = 1$; daher

$$\frac{\pi}{4} = \tfrac{1}{2}\left[1 + \tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{1}{2} + \tfrac{8}{15}\cdot\tfrac{1}{4} + \ldots\right]$$

oder transformirt

$$\pi = 2\left[1 + \tfrac{1}{3} + \frac{1\cdot2}{3\cdot5} + \frac{1\cdot2\cdot3}{3\cdot5\cdot7} + \ldots\right]$$

Diese Reihe ist nicht so convergent als die vorige, allein sie ist leichter zu berechnen; denn man hat nur nöthig, das gefundene $n$te Glied mit $\frac{n}{2n+1}$ zu multipliciren, um das $n+1$ste zu erhalten.

Das 1ste Glied ist 2×1 = 2,0
das 2te Glied $= \frac{1}{3}$ × dem 1sten = 0,6666666
„ 3te „ $= \frac{2}{5}$ × dem 2ten = 0,2666666
„ 4te „ $= \frac{3}{7}$ × dem 3ten = 0,1142857
„ 5te „ $= \frac{4}{9}$ × dem 4ten = 0,0507936
„ 6te „ $= \frac{5}{11}$ × dem 5ten = 0,0230880
„ 7te „ $= \frac{6}{13}$ × dem 6ten = 0,0106560
„ 8te „ $= \frac{7}{15}$ × dem 7ten = 0,0049730
= 3,1371295
u. s. w.

18. Folgende 4 Formeln, durch welche der Bogen als Function einer trigonometrischen Linie in eine logarithmische Function derselben Linie ausgedrückt wird, setze ich deshalb her, weil solche unter diesem Artikel gesucht werden könnte; deren Begründung und Anwendung wird vorbehalten.

$$\text{I.}\quad Arc\, tg\, (fx) = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\, logn\, \frac{1 + fx\sqrt{-1}}{1 - fx\sqrt{-1}} + \text{Const.}$$

$$\text{II.}\quad Arc\, tg\, \frac{fx}{\sqrt{-1}} = Arc\, tg\,(-fx\sqrt{-1}) = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\, ln\, \frac{1+fx}{1-fx} + \text{Const.}$$

$$\text{III.}\quad Arc\, tg\, \frac{2fx}{1-(fx)^2} = \frac{1}{\sqrt{-1}}\, ln\, \frac{1 + fx\sqrt{-1}}{1 - fx\sqrt{-1}} + \text{Const.}$$

$$\text{IV.}\quad Arc\, tg\, \frac{2fx}{[1+(fx)^2]\sqrt{-1}} = \frac{1}{\sqrt{-1}}\, ln\, \frac{1+fx}{1-fx} + \text{Const.}$$

Argument. Gleichbedeutend mit unveränderliche Gröfse in Beziehung auf eine von ihr abhängige Function.

Daher heifst auch in den mathematischen Tafeln die Zahl, deren Werthe der Reihenfolge nach aufgeführt sind und für welche die zugehörigen Werthe einer bestimmten Function gefunden werden, das A. der Tafel.

In einer Logarithmentafel: $log\, x, log\,(x+1)$ ist x das A.

In der Astronomie heifst A. der Bogen, von dessen Werth ein anderer Bogen oder eine Zeitperiode abhängt. So sind das A. der Aberration des Lichts bei einem Planeten die Abstände der Erde von demselben in der Opposition, der Conjunction und in den beiden Quadraturen. Das A. der Breite eines Planeten ist die Länge der von ihm beschriebenen Bahn, vom aufsteigenden Knoten ab gemessen, beide Bögen für einen augenblicklichen Standort desselben.

Arithmetik. Die Disciplin der Mathematik, welche sich mit den Vielfachen von Gröfsen jeglicher Art beschäftigt, ohne auf das Wesen dieser Gröfsen als Einheiten Rücksicht zu nehmen. Sie beschäftigt sich also ausschliefslich mit den Zahlen, und lehrt, wie unter gegebenen Bedingungen die Vielfachen aus den Einfachen und anderen Vielfachen und diese aus jenen entstehen; beides geschieht durch Vermehrung, Verminderung, Vereinigung, Absonderung, überhaupt durch Aenderung von Zahlen; die Regeln und Gesetze dafür lehrt die theoretische A., die Ausübung derselben ist die Rechenkunst.

Die Zahlen sind entweder bestimmt (zählbar, die mit Ziffern geschriebenen Zahlen, welche im bürgerlichen Leben

ausschliefslich Zahlen genannt werden) oder unbestimmt, in Buchstaben ausgedrückt. Die Rechnung mit den ersteren heifst Zahlenrechnung, die bürgerliche Rechenkunst oder schlechtweg die Rechenkunst; die Rechnung mit Buchstaben die Buchstabenrechnung. Diese entwickelt die Gesetze für richtige und geschickte Ausübung der Rechenkunst, sie lehrt und begründet das Verfahren beim Ausziehen der Quadrat- und Kubikwurzel, die Anwendung der Proportionen für die einfache und zusammengesetzte Regel de tri, die Gesellschaftsrechnung, die Kettenrechnung u. s. w., sie lehrt den Gebrauch der Logarithmen und bildet somit die Theorie der bürgerlichen Rechenkunst.

Die Buchstabenrechnung ist aber zugleich der elementare Theil der Analysis. Der Artikel „Analysis" zeigt, dafs die Analysis Alles, was an allgemeinen Rechnungs-Aufgaben nur gegeben werden kann, umfafst und die Buchstabenrechnung und die Algebra mit einschliefst. Demnach wäre Arithmetik gleichbedeutend mit Analysis und deren Anwendungen auf das bürgerliche Leben.

Unter Analysis versteht man ziemlich allgemein das Umformen von allgemeinen Zahlen-Ausdrücken, und da auch die Buchstabenrechnung dies thut und die Algebra (s. d.), um aus den Bekannten die unbekannten Gröfsen zu finden, Umformungen vornehmen mufs, so wird die Buchstabenrechnung, sowie die Algebra in die Analysis mit inbegriffen. Für diesen Fall aber ist die Definition von Analysis als Wissenschaft von den Umformungen allgemeiner Zahlengröfsen sowohl für die Abtheilung der Buchstabenrechnung, als Theorie der bürgerlichen Rechenkunst, wie auch ganz besonders für die Algebra in Betreff ihres Zwecks, der Auffindung von Unbekannten aus Bekannten, ungenügend, sie mufs umfassender, allgemeiner gegeben werden, und es ist dies in dem Art.: Analysis geschehen.

Aus den Artikeln: „Algebraische und analytische Formel, Gleichung, Geometrie" etc. geht schon ein wesentlicher Unterschied zwischen je zweien gleichnamigen Gegenständen hervor und so ist auch ein wesentlicher Unterschied zwischen Algebra und Analysis.

In folgenden beiden Aufgaben

$$x^2 + ax + b = 0$$

und

$$x = 1 + 2 + 3 + 4 \ldots . + n$$

sollen die Unbekannten x aus Bekannten gefunden werden. Die Auflösung der ersten Aufgabe lehrt die Algebra, die der zweiten die Analysis.

Der Artikel: „Algebraische Gleichung" zeigt die Umformungen, welche geschehen müssen, damit die x von den a und b getrennt und durch diese ausgedrückt werde. Die Analysis zeigt, dafs die Summe des ersten und n ten gleich der des 2ten und $(n-1)$ ten, gleich der des 3ten und $(n-2)$ ten Gliedes u. s. w. ist, oder sie schreibt die Reihe in umgekehrter Ordnung unter die erste und addirt

nämlich
$$\begin{aligned} x &= 1 + 2 + 3 + \ldots . (n-1) + n \\ x &= n + n - 1 + n - 3 + \ldots . 2 + 1 \\ \hline 2x &= (n+1) + (n+1) + \ldots . + (n+1) \end{aligned}$$

Die doppelte x ist also gleich der Summe von n Gliedern, von denen jedes $= n + 1$ ist,

mithin ist $2x = n(n+1)$
und $x = \frac{1}{2} n (n+1)$

Man mufs hier erkennen, dafs beide Auflösungen durch Umformungen geschehen, allein auch den wesentlichen Unterschied, dafs bei der ersten Aufgabe die Unbekannte x eine ganz selbstständige Zahl ist, die mit den eben so selbstständigen Zahlen a und b in der hier eigenthümlichen Verbindung steht, während bei der zweiten Aufgabe die Unbekannte x, die Summe der gegebenen Reihe in den Bekannten selbst liegt, oder während sie an den Bekannten selbst haftet, und dies ist aufser dem Charakter der Veränderlichkeit der gegebenen Gröfsen (hier der Werth von n) der Grundcharakter von Function, mit welcher sich ausschliefslich die Analysis beschäftigt.

Es gehört somit die Algebra nicht zur Analysis, sie ist eine von der Analysis wesentlich verschiedene Abtheilung der Arithmetik.

Aber auch die Buchstabenrechnung ist in ihren 4 Species, im Potenziren und Radiciren nicht Analysis: Auch die Entwickelung eines Bruchs in eine unendliche Reihe durch Division ist nicht Analysis, sondern nur eine consequent durchgeführte Division, als

$$\frac{a}{a+b} = 1 - \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} - \frac{b^3}{a^3} + \ldots .$$

indem ich a als Divisor genommen habe. Ist dagegen die unendliche Reihe gegeben, und es soll deren endlicher Werth bestimmt werden, so müssen Umformungen geschehen, die aufserhalb der vier Species liegen. Art. Analysis, pag. 65, ist ein Beispiel gegeben, ein zweites sei diese Reihe; man setze

$$1 - \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} - \frac{b^3}{a^3} + \frac{b^4}{a^4} - \ldots = S$$

so ist

$$-\frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} - \frac{b^3}{a^3} + \frac{b^4}{a^4} - \ldots = S - 1$$

in der zweiten Reihe den gemeinschaftlichen Factor $-\frac{b}{a}$ vorangestellt, giebt

$$-\frac{b}{a}\left(1 - \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} - \frac{b^3}{a^3} + \ldots\right) = S - 1$$

Die Klammergröfse ist die gegebene Reihe $= S$, folglich hat man

$$-\frac{b}{a} S = S - 1$$

woraus $S + \frac{b}{a} S = \left(1 + \frac{b}{a}\right) S$

und $S = \dfrac{1}{1 + \frac{b}{a}} = \dfrac{a}{a + b}$

Auch die Entwickelung einer unendlichen Reihe durch consequentes Radiciren gehört nicht zur Analysis, sondern nur zur Buchstabenrechnung.

Demnach ist die Arithmetik, unter Festhaltung des vorn an aufgestellten Begriffs, einzutheilen:

1) In die Buchstabenrechnung mit deren Anwendung auf die bürgerliche Rechenkunst.
2) In die Algebra.
3) In die Analysis, welche in 2 Theile, in die niedere und die höhere, oder in die A. des Endlichen und in die A. des Unendlichen zerfällt.

Arithmetisches Complement eines Logarithmus ist seine Ergänzung zur Einheit. Z. B. *log* 2 ist $= 0{,}3010300$; sein a. C. also $1 - 0{,}3010300 = 0{,}6989700$

$$\log 2000 = 3{,}3010300;$$

sein a. C. $= 0{,}6989700 - 3$.

Auch nennt man a. C. die Ergänzung des Log. zu 10. So z. B. das a. C. von $3{,}3010300 = 6{,}6989700$

$$\log \tfrac{17}{25} = 0{,}8325089 - 1$$

$$\log \tfrac{25}{17} = \log \frac{1}{\frac{17}{25}} = 0 - \log \tfrac{17}{25} = 0{,}1674911$$

Die Mantissen beider Logarithmen haben sich gegenseitig zu ihrem a. C.; beide addirt, geben $= 1$; beide Log. addirt, geben $= 0$.

Denn da $\frac{17}{25} \times \frac{25}{17} = 1$, so mufs auch

$$\log\left(\tfrac{17}{25} \times \tfrac{25}{17}\right) = \log 1 = 0 \text{ sein.}$$

Die Logarithmen der trigonometrischen Linien sind für einen Radius von 10000 Millionen genommen, und man hat bei jedem die Charakteristik -10 hinzuzufügen, um diesen für den Halbmesser $= 1$ zu erhalten.

Es ist $\cot\alpha = \dfrac{1}{tg\,\alpha}$ mithin findet man in den Tafeln die Log. der Tangenten und Cotangenten als ihre a. C. zu 20. Die Log. von Secante und Cosecante sind im Vega nicht aufgeführt. Da aber

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \text{ und } \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$$

so hat man z. B. $\sec 22^\circ 30'$ aus

$$\log\cos 22^\circ 30' = 9{,}9656153 - 10$$
$$\log\sec 22^\circ 30' = 10{,}0343847 - 10$$

nämlich $\log\sec\alpha =$ dem a. C. von $\log\cos\alpha$ und eben so ist $\log\operatorname{cosec}\alpha =$ dem a. C. von $\log\sin\alpha$

Arithmetisches Dreieck. Die Zusammenstellung der Binomial-Coefficienten in Figur eines Dreiecks von $(a+b)^0$ bis $(a+b)^n$, wo n eine beliebige Zahl ist.

$$(a+b)^0 = 1$$
$$(a+b)^1 = 1 \cdot a + 1 \cdot b$$
$$(a+b)^2 = 1 \cdot a^2 + 2\,ab + 1 \cdot b^2$$
$$(a+b)^3 = 1 \cdot a^3 + 3\,a^2 b + 3\,ab^2 + 1 \cdot b^3$$

u. s. w.

Ein arithmetisches Dreieck ist demnach

1
1·1
1·2·1
1·3·3·1
1·4·6·4·1
1·5·10·10·5·1
u. s. w.

Arithmetische Gröfse. Eine bestimmte oder unbestimmte Anzahl von Einheiten, auch die Einheit selbst; ist also mit Zahl gleichbedeutend.

Arithmetisches Mittel von Gröfsen ist deren Summe dividirt durch die Anzahl der Gröfsen.

Das a. M. von a und b ist $\frac{1}{2}(a+b)$, von $a, b, c, d = \frac{1}{4}(a+b+c+d)$.

Die Gröfsen mögen gleichnamig oder ungleichnamig sein. Z. B. das a. M. von $+a$, $-b$, $+c$ ist $\frac{1}{3}(a-b+c)$.

Das a. M. zweier Gröfsen bildet mit denselben eine stetige arithmetische Proportion.

Denn es ist $a - \dfrac{a+b}{2} = \dfrac{a+b}{2} - b$

nämlich $a + b = 2 \cdot \dfrac{a+b}{2}$

Das a. M. von 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 ist

$$= \frac{55}{10} = 5\tfrac{1}{2}$$

Das a. M. zwischen zwei Zahlen ist immer gröfser als deren geometrisches Mittel, d. h.

$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$$

oder $a+b>2\sqrt{ab}$

denn für $a=b$ ist $\frac{a+b}{2}=a$ und $\sqrt{ab}=a$

Es kann also nur von ungleichen Zahlen die Rede sein.

Ist nun $a>b$
so ist $a-b>0$
also auch $(a-b)^2>0$
oder $a^2-2ab+b^2>0$
$4ab=4ab$
daher $a^2+2ab+b^2>4ab$
oder $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2>ab$
oder $\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$ (Vergl. Arithmetische Proportion).

Arithmetische Progression s. v. w. Arithmetische Reihe.

Arithmetische Proportion. Proportion ist die Gleichheit zweier Verhältnisse, also a. P. die zweier arithmetischen Verhältnisse.

2 verhält sich arithmetisch zu 3 wie 5 zu 6, denn es sind die arithmetischen Unterschiede zwischen 2, 3 und zwischen 5, 6 einander gleich, = 1.

Man schreibt dies in a. P.

$$2-3=5-6$$

und man hat $2+6=3+5$
überhaupt in jeder a. P.

$$A-B=a-b$$

ist $A+b=B+a$

d. h. die Summe der beiden äufseren Glieder (A, b) ist gleich der Summe der beiden inneren Glieder (B, a).

Hieraus geht unmittelbar hervor, dafs man die Glieder einer jeden a. P. beliebig verstellen kann, ohne dafs die Gleichheit der Verhältnisse gestört, also ohne dafs die Richtigkeit der P. aufgehoben wird, wenn nur die zusammengehörigen Glieder gleichnamig bleiben.

Also wenn $A-B=a-b$
so ist auch $A-a=B-b$

$$B-A=b-a$$
$$B-b=A-a$$
$$a-A=b-B$$
$$a-b=A-B$$
$$b-B=a-A$$
$$b-a=B-A$$

Sind die beiden inneren Glieder oder die beiden äufseren einander gleich,

wie $A-C=C-D$
oder $D-E=E-D$

so heifst die P. eine stetige a. P. und das gleiche Glied die mittlere arithmetische Proportionale oder das arithmetische Mittel der beiden ungleichen Gröfsen.

Es ist aus $A-C=C-D$
sogleich $2C=A+D$
und $C=\frac{1}{2}(A+D)$

und die P. ist zu verstellen wie

$$D-C=C-A$$
$$C-A=D-C$$
$$C-D=A-C$$

Arithmetische Reihe (arithmetische Progression).

1) Unter Reihe (Progression) versteht man eine Zusammenstellung, eine Folge von Zahlen, von denen jede folgende aus der ihr unmittelbar voranstehenden nach einerlei Gesetz hervorgeht. Wird zu einer jeden voranstehenden Zahl eine bestimmte Zahl addirt (eine negative Zahl als positiv subtrahirt), um die ihr zunächst folgende zu geben, so ist die R. eine arithmetische R.; wird jede voranstehende Zahl mit einer bestimmten Zahl multiplicirt, um die ihr zunächst folgende zu geben, so ist die R. eine geometrische R.

$$1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6$$

ist eine a. R., denn es wird zu jeder Zahl die Zahl 1 addirt, um die nachfolgende zu erhalten.

$$1\cdot2\cdot4\cdot8\cdot16\ldots.n$$

ist eine geometrische R., weil man jede Zahl erhält, wenn man die ihr vorangehende mit 2 multiplicirt.

Die Zahlen heifsen Glieder der Reihe, links fängt die R. an mit dem ersten Gliede, das folgende ist das zweite Glied u. s. f.; 6 und n sind die Endglieder.

Das erste Glied hat die Stellenzahl 1, das zweite die Stellenzahl 2, das $m$te die Stellenzahl m.

2. Sind die Unterschiede je zweier benachbarten Glieder einer a. R. gleich, wie in dem obigen Beispiel, so ist die R. eine a. R. der ersten Ordnung, oder schlechtweg eine a. R.

Sind die Unterschiede ungleich und bilden dieselben wiederum eine a. R., in welcher die Unterschiede gleich sind, so ist die R. eine a. R. der zweiten Ordnung,

wie die Reihe	$1\cdot4\cdot9\cdot16\cdot25\ldots$
denn sie giebt die Unterschiede	$3\cdot5\cdot7\cdot9$
und diese die gleichen Unterschiede	$2\cdot2\cdot2$

Eine a. R. der dritten Ordnung ist eine R., wenn die dritte Reihe der Unterschiede gleiche Zahlen liefert, überhaupt eine R. der $m$ten Ordnung, deren $m$te Differenzen-Reihe aus gleichen Zahlen besteht. Sämmtliche a. R. von der

zweiten Ordnung an heifsen a. R. höherer Ordnung.

3. Arithmetische Reihen erster Ordnung.

Es sei das erste Glied einer Reihe $=a$, dessen Unterschied von dem zweiten Gliede $=d$, so ist das zweite Glied $=a+d$, und da dieses von dem folgenden dritten ebenfalls um d unterschieden ist, das dritte Glied $=a+2d$, also allgemein das $n$te Glied, das allgemeine Glied

$$=a+(n-1)d$$

und die Reihe ist

$$a\cdot a+d\cdot a+2d\cdot a+3d \ldots\ldots a+(n-1)d$$

Ist d additiv, so ist die R. wachsend, steigend, zunehmend; ist d subtractiv, so ist die R. fallend, abnehmend. Die zunehmende R.

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & & n \\ 3\cdot & 7\cdot & 11\cdot & 15\cdot & 19 & \ldots\ldots & 3+(n-1)4 \end{matrix}$$

von dem Unterschied $=4$ hat das allgemeine Glied

$$3+(n-1)4=4n-1$$

also das fünfte Glied ist $=4\cdot 5-1=19$; das zehnte $=4\cdot 10-1=39$

Die abnehmende R.

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & & n \\ 20\cdot & 17\cdot & 14\cdot & 11 & \ldots\ldots & 20-(n-1)3 \end{matrix}$$

von dem Unterschied -3 hat das allgemeine Glied $20-(n-1)3=23-3n$; das vierte Glied ist $23-3\cdot 4=11$, das zehnte Glied $=23-3\cdot 10=-7$

4. Setzt man bei dem ersten Gliede a der R. die Differenz $=\pm d$, so kann die R. von a aus nach beiden Richtungen bis in's Unendliche gehend gedacht werden, nach der einen Richtung wird die R. zunehmend, nach der anderen abnehmend. Das beiden R. gemeinschaftliche erste Glied wird besonders: Anfangsglied (0 als Stellenzahl) genannt.

$$a\mp(n-1)d \ldots\ldots a\mp 2d\cdot a\mp d\cdot a\cdot a\pm d\cdot a\pm 2d\cdot a\pm 3d\ldots\ldots a\pm(n-1)d$$

Ist eine numerische R. zu schreiben, z. B. von dem Anfangsgliede 4 und der Differenz 3, so hat man

$$\begin{matrix} -n \ldots\ldots & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \ldots\ldots & n \\ 4-n\cdot 3 \ldots & -5\cdot & -2\cdot & 1\cdot & 4\cdot & 7\cdot & 10\cdot & 13 \ldots & 4+n\cdot 3 \end{matrix}$$

und es ist zu bemerken, dafs jedes beliebige Glied als Anfangsglied angesehen werden kann.

5. Nimmt man von einer R.

$$a\cdot a\pm d\cdot a\pm 2d$$

u. s. w. die Glieder der geraden Stellenzahlen, also das 2te, 4te, ... $n\cdot 2$te Glied heraus, so behält man eine R., deren Differenz $=\pm 2d$ ist.

Z. B. von der R.:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots\ldots & 2n & 2n+1 \\ 2\cdot & 4\cdot & 6\cdot & 8\cdot & 10 & \ldots\ldots & 4n\cdot & 4n+2 \end{matrix}$$

Die Glieder der geraden Stellenzahlen fortgenommen, läfst die R.:

$$2\cdot 6\cdot 10\cdot 14 \ldots\ldots 4n+2$$

deren Differenz $=4$ ist; bei der ursprünglichen R. ist $d=2$.

Desgleichen kann man immer 2 auf einander folgende Glieder fortnehmen und das 3te stehen lassen oder allgemein n Glieder fortnehmen und das $n+1$te stehen lassen; man behält sodann eine R. von den Stellenzahlen der ursprünglichen: $1\cdot n+1\cdot 2n+1\cdot 3n+1\ldots mn+1$; und diese R. hat die Differenz nd.

Eben so lassen sich in eine R. beliebig viele Glieder einschalten. Schaltet man in die R.

$1\cdot 7\cdot 13\cdot 19 \ldots\ldots$ von der Differenz $=6$ nur 1 Glied ein, so erhält man die R.: $1\cdot 4\cdot 7\cdot 10\cdot 13\cdot 16\cdot 19 \ldots\ldots$ von der Differenz $=3$ und in diese 2 Glieder eingeschaltet, die R. der natürlich auf einander folgenden Zahlen.

Jede 3 auf einander folgende Glieder einer a. R. bilden eine stetige arithmetische Proportion; hat man also zwischen a und $a+d$ ein Glied einzuschalten, so ist dies

$$\frac{2a+d}{2}=a+\tfrac{1}{2}d$$

hat man 2 Glieder einzuschalten, so hat man das erste $a+\frac{1}{3}d$, das zweite $a+\frac{2}{3}d$; für n einzuschaltende Glieder ist die Differenz d in $n+1$ Theile zu theilen und die R. zu schreiben:

$$a\cdot a+1\frac{d}{n+1}\cdot a+2\frac{d}{n+1}\cdot a+3\frac{d}{n+1}$$

Das $n+1$ste Glied wird

$$a+(n+1)\frac{d}{n+1}=a+d$$

6. Schreibt man unter eine R. dieselbe R. in umgekehrter Ordnung und summirt die Glieder, so erhält man eine Summe von n Gliedern, die alle gleich sind, als

$$\begin{array}{l} a\cdot a+d\cdot a+2d \ldots\ldots a+(n-3)d\cdot a+(n-2)d\cdot a+(n-1)d \\ a+(n-1)d\cdot a+(n-2)d\cdot a+(n-3)d \ldots\ldots a+2d\cdot a+d\cdot a \\ \hline \end{array}$$

und zwar hat man jedes Glied $=2a+(n-1)d$

Da nun n Glieder vorhanden sind, so ist deren Summe $n\cdot[2a+(n-1)d]$, und da diese Summe die doppelte Summe der Glieder der einfachen R. ist, so hat man die einfache Summe der ersten n Glieder einer a. R. oder

$$s=\tfrac{1}{2}n[2a+(n-1)d]$$

Z. B. in der Summe der natürlich auf einander folgenden Zahlen von 1 bis 100 ist $a=1$; $d=1$; $n=100$; man erhält:

$$S=\tfrac{1}{2}100[2+99\cdot 1]=50\cdot 101=5050$$

Bezeichnet man das $n$te Glied einer R. mit u, so ist $u=a+(n-1)d$

$$s=\tfrac{1}{2}n[2a+(n-1)d]$$
$$s=\tfrac{1}{2}n(a+u)$$

7. Von den 5 Zahlen a, d, u, n, s können immer 2 gefunden werden, wenn 3 gegeben sind, und es ist nicht schwer, aus den obigen dreien die übrigen 17 Gleichungen für die Auffindung zweier beliebiger Unbekannten zu entwickeln, weshalb ich nur die Resultate hier her setze:

1) $u=a+(n-1)d$

2) $u=-\frac{d}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}d^2+a(a-d)+2ds}$

3) $u=2\cdot\frac{s}{n}-a$

4) $u=\frac{s}{n}+\frac{n-1}{2}d$

5) $s=\frac{1}{2}n[2a+(n-1)d]$

6) $s=\frac{(u+a)(u+d-a)}{2d}$

7) $s=\frac{1}{2}n(a+u)$

8) $s=\frac{n}{2}[2u-(n-1)d]$

9) $a=u-(n-1)d$

10) $a=\frac{d}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}d^2+u(u+d)-2ds}$

11) $a=\frac{s}{n}-\frac{1}{2}(n-1)d$

12) $a=\frac{2s}{n}-u$

13) $n=\frac{u-a}{d}+1$

14) $n=\frac{1}{2d}\left[-2a+d\pm\sqrt{(2a-d)^2+8ds}\right]$

15) $n=\frac{2s}{a+u}$

16) $n=\frac{1}{2d}\left[2u+d\pm\sqrt{(2u+d)^2-8ds}\right]$

17) $d=\frac{u-a}{n-1}$

18) $d=\frac{(u+a)(u-a)}{2s-(u+a)}$

19) $d=\frac{2(nu-s)}{n(n-1)}$

20) $d=\frac{2(s-an)}{n(n-1)}$

In Betreff der doppelten Vorzeichen der $\sqrt{\ }$ in den 4 Ausdrücken No. 2, 10, 14 und 16 ist Folgendes durch Beispiele zu erläutern. Man denke sich die R.:

$\ldots . -15\cdot-10\cdot-5\cdot 0\cdot+5+10+15 \ldots .$

Hier ist $d=5$

Wenn $a=-50$
$n=+16$

genommen wird, so ist die R. gegeben in:

$$\begin{matrix} 1 & 2 \ldots\ldots 10 & 11 & 12 \ldots\ldots 16 \\ -50-45 & -5 & \pm 0 & +5 \quad\quad +25 \end{matrix} \qquad (A)$$

Aus No. 1 erhält man $u=+25$
aus No. 5 „ „ $s=-200$

Für gegeben: $d=+5$; $a=-50$ und $s=-200$ erhält man aus No. 2: $u=-\frac{5}{2}\pm\frac{55}{2}=+25$ und -30

$u=+25$ entspricht der obigen R. (A)

Für $u=-30$, hierzu $a=-50$ und $d=+5$ giebt aus No. 13: $n=5$ also die R.:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -50 & -45 & -40 & -35 & -30 \end{matrix} \qquad (B)$$

welche ebenfalls $s=-200$ liefert.

Für gegeben: $d=5$; $u=25$; $s=-200$ erhält man aus No. 10: $a=+\frac{5}{2}\pm\frac{105}{2}$

$=+55$ und -50

$a=-50$ entspricht der R. (A)

Für $a=+55$, hierzu $d=+5$, $u=25$ erhält man aus No. 13: $n=-5$

Die R. ist also

$$\begin{matrix} -5 & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 25\cdot & 30\cdot & 35\cdot & 40\cdot & 45\cdot & 50\cdot & 55 \end{matrix} \qquad (C)$$

Die Summe ist freilich eine andere als -200, und es ist von vorn herein zu ersehen, dafs bei den gegebenen Gröfsen: $a=-50$, $d=+5$ und $s=-200$ das positive Vorzeichen der $\sqrt{\ }$ nur aus der Form entspringt, für das Beispiel aber nicht pafst. Die Summe beträgt 280. Setzt man diese für s in No. 10, so mufs zugleich a mit u vertauscht werden, und man erhält

$u=+\frac{5}{2}\pm\frac{45}{2}=+25$ und -20

$u=+25$ entspricht wieder der R. (C);
$u=-20$ erfordert $n=16$ Glieder; n als Stellenzahl $=-14$.

Die Summe dieser R., wenn man $a=-20$; $u=55$ und $n=+16$ setzt, erhält man aus No. 7:

$s=+280$, wie sie in (C) wirklich ist.

Setzt man für die R. (A) $d=5$; $a=-50$; $s=-200$, so erhält man aus No. 14: $n=+16$ und $+5$

Der erste Werth $+16$ entspricht der R. (A), der zweite $+5$ der R. (B).

Setzt man für die R. (A) $d=+5$; $u=+25$; $s=-200$ und sucht n, so erhält man aus No. 16:

$$n=\frac{55\pm 105}{10}=+16 \text{ und } -5$$

Der Werth $+16$ entspricht der R. (A), der zweite Werth liefert die R.:

$$\begin{matrix} -5 & -4 & -3 & -2 & -1 & \pm 0 & +1 \\ -80 & -75 & -70 & -65 & -60 & -55 & -50 \end{matrix}$$

deren Summe ist $=-455$ anstatt der gegebenen -200.

8. Die Anwendung der beiden Gleichungen No. 10 und No. 16 mufs also mit einiger Vorsicht geschehen. Diese Gleichungen sind unvermeidlich, wenn

aus der gegebenen Differenz $=d$, dem $n$ten Gliede $=u$ und der Summe s sämmtlicher Glieder das erste Glied a und die Anzahl n der Glieder gefunden werden sollen.

Es sei gegeben $d=2$; $u=100$; $s=2550$

Man findet aus No. 10:

$$a=1\pm 1=+2 \text{ und } 0$$

aus No. 16:

$$n=\tfrac{1}{4}(202\pm 2)=+51 \text{ und } +50$$

Sämmtliche 4 Resultate sind richtig:

$a=+2$ und $n=+50$ entspricht der R.:

$$2\cdot 4\cdot 6\ldots .100$$

$a=0$ und $n=+51$ entspricht der R.:

$$0, 2\cdot 4\cdot 6\ldots .100$$

Auch in den Beispielen für die R. (A) bis (C) hat man $\pm\sqrt{}$ in No. 10 correspondirend mit $\mp\sqrt{}$ in No. 16, und dies ist allgemein der Fall:

Denn aus Gleichung 1

$$u=a+(n-1)d \qquad \text{(D)}$$

$$\text{folgt } n=\frac{u}{d}+1-\frac{a}{d} \qquad \text{(E)}$$

$$\text{und } a=\frac{d}{2}+u+\frac{d}{2}-nd \qquad \text{(F)}$$

Ist nun $a>\frac{d}{2}$ also (No. 10) $a=\frac{d}{2}+\sqrt{}$

so ist nach F: $u+\frac{d}{2}-nd>0$

oder $u+\frac{d}{2}>nd$

oder $\frac{u}{d}+\frac{1}{2}>n$, d. h. (No. 16)

$$n=\left(\frac{u}{d}+\frac{1}{2}\right)-\sqrt{}$$

Ist $a<\frac{d}{2}$ mithin (No. 10) $a=+\frac{d}{2}-\sqrt{}$

so ist gegenseitig (No. 16) $n=\frac{u}{d}+\frac{1}{2}+\sqrt{}$

9. **Arithmetische Reihen höherer Ordnung.**

Bei einer R. der $n$ten Ordnung besteht nach No. 2 die $n$te Differenzenreihe aus lauter gleichen Zahlen. Es sei diese Differenz $=d$.

Für eine R. der ersten Ordnung sei:

das erste Glied $=A$

so ist das zweite „ $=A+d$

dritte „ $=A+2d$

. . . .

$n$te „ $=A+(n-1)d$

Jede R. der ersten Ordnung mufs von dieser allgemeinen Form sein. **Für eine allgemeine R. der 2ten Ordnung** mufs die vorstehende allgemeine R. der ersten Ordnung als die erste Differenzenreihe betrachtet werden. Es sei das 1te Glied dieser R. $=B$, so ist dieses 1te Glied $B+$ jenem 1ten Gliede $=A$, das 2te Glied dieser R. $=B+A$; überhaupt das $n$te Glied der R. zweiter Ordnung + dem $n$ten Gliede der R. 1ter Ordnung = dem $(n+1)$ten Gliede der 2ten Ordnung. Und im Allgemeinen hat man (nach No. 2) jedes $n$te Glied einer R. der $m$ten Ordnung + dem $n$ten Gliede der R. $(m+1)$ter Ordnung = dem $(n+1)$ten Gliede der R. $(m+1)$ter Ordnung.

Demnach hat man in der R. der 2ten Ordnung

deren 1. Glied $=B$

also das 2. „ $=B+A$

„ 3. „ $=B+2A+d$

„ 4. „ $=B+3A+3d$

„ 5. „ $=B+4A+6d$

. . . .

„ n. „ $=B+(n-1)A$
$+[1+2+3\ldots+(n-2)]d$
$=B+(n-1)A$
$+\frac{(n-1)\ (n-2)}{1.\quad 2}d$

Jede R. der 2ten Ordnung mufs von dieser allgemeinen Form sein.

Für eine allgemeine R. der 3ten Ordnung mufs die vorstehende allgemeine R. der 2ten Ordnung als die erste Differenzenreihe betrachtet werden.

Es sei deren

1. Glied $=C$

so ist deren 2. „ $=C+B$

3. „ $=C+2B+A$

4. „ $=C+3B+3A+d$

5. „ $=C+4B+6A+4d$

6. „ $=C+5B+10A+10d$

. . . .

n. „ $=C+(n-1)B$
$+\frac{(n-1)\ (n-2)}{1.\quad 2}A$
$+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\quad 2.\quad 3}d$

Für eine allgemeine R. der $m$ten Ordnung

sei deren 1. Glied $=M$

so ist „ 2. „ $=M+L$

„ 3. „ $=M+2L+K$

u. s. w.

deren n. Glied $=M$
$+(n-1)L$
$+\frac{(n-1)\ (n-2)}{1.\quad 2}K$
$+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\quad 2.\quad 3}J$

u. s. w.

$$+\frac{(n-1)(n-2)\ldots .(n+1-m)}{1.\quad 2.\quad \ldots .\quad m-1}A$$
$$+\frac{(n-1)(n-2)\ldots .(n-m)}{1.\quad 2.\quad \ldots .\quad m}d$$

10. Geordnete Zusammenstellung der Reihen höherer Ordnung.

Ordnung	1. Glied	2. Glied	3. Glied	4. Glied	5. Glied	u. s. w.
0	d	d	d	d	d	
1	A	$A+d$	$A+2d$	$A+3d$	$A+4d$	
2	B	$B+A$	$B+2A+d$	$B+3A+3d$	$B+4A+6d$	
3	C	$C+B$	$C+2B+A$	$C+3B+3A+d$	$C+4B+6A+4d$	
4	D	$D+C$	$D+2C+B$	$D+3C+3B+A$	$D+4C+6B+A+d$	
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	
m	M	$M+L$	$M+2L+K$	$M+3L+3K+J$	$M+4L+6K+4J+H$	

Ordnung	$n$tes Glied
0	d
1	$A+\frac{n-1}{1}d$
2	$B+\frac{n-1}{1}A+\frac{(n-1)\ (n-2)}{1.\ \ 2}d$
3	$C+\frac{n-1}{1}B+\frac{(n-1)\ (n-2)}{1.\ \ 2}A+\frac{(n-1)\ (n-2)\ (n-3)}{1.\ \ 2.\ \ 3}d$
4	$D+\frac{n-1}{1}C+\frac{(n-1)\ (n-2)}{1.\ \ 2}B+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ \ 2.\ \ 3}A+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.\ \ 2.\ \ 3.\ \ 4}d$
. . .	. . .
m	$M+\frac{n-1}{1}L+\frac{(n-1)\ (n-2)}{1.\ \ 2}K+\ldots\frac{(n-1)\ldots(n+1-m)}{1\ldots\ldots(m-1)}A+\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-m)}{1.\ \ 2\ldots\ldots m}d$

Hiermit ist die Bildung von Reihen höherer Ordnung allgemein angegeben. Als Beispiel soll das einfachste folgen, nämlich wenn $d=1$ und $A=B=C=\ldots.1$ ist.

Ordnung	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	1	2	4	7	11	16	22	29	37
3	1	2	4	8	15	26	42	64	93
4	1	2	4	8	16	31	57	99	163
5	1	2	4	8	16	32	63	120	219
6	1	2	4	8	16	32	64	127	247
7	1	2	4	8	16	32	64	128	255

11. Aus der Betrachtung dieser einzelnen R. scheint hervorzugehen, dafs jede geometrische R. von n Gliedern zugleich eine a. R. der $(n-1)$ten Ordnung sei, und dies ist wirklich so. Nämlich in der allgemeinen geometrischen R.:

$$a \quad ae \quad ae^2 \quad ae^3 \quad ae^4 \ldots\ldots ae^n$$

ist die erste Differenzenreihe

$$a(e-1) \quad ae(e-1) \quad ae^2(e-1) \quad ae^3(e-1) \ldots\ldots ae^{n-1}(e-1)$$

die zweite

$$a(e-1)^2 \quad ae(e-1)^2 \quad ae^2(e-1)^2 \quad ae^3(e-1)^2 \ldots\ldots ae^{n-2}(e-1)^2$$

die dritte

$$a(e-1)^3 \quad ae(e-1)^3 \quad ae^2(e-1)^3 \quad ae^3(e-1)^3 \ldots\ldots ae^{n-3}(e-1)^3$$

die $m$te

$$a(e-1)^m \quad ae(e-1)^m \quad ae^2(e-1)^m + \ldots\ldots ae^{n-m}(e-1)^m$$

Nimmt man nun in einer beliebigen Differenzenreihe das erste Glied constant, also gleich jedem der übrigen Glieder, so erhält man aus den ersten beiden Gliedern der geometrischen R. bei constantem $a(e-1)$ die a. R. erster Ordnung:

$$\begin{array}{cccc} a & ae & a(2e-1) & a(3e-2)\ldots\ldots \\ a(e-1) & a(e-1) & a(e-1) & \end{array}$$

Bei constantem $a(e-1)^2$ aus den 3 ersten Gliedern der geometr. R. die a. R. zweiter Ordnung:

$$\begin{array}{cccc} a & ae & ae^2 & a[3e^2-3e+1]\ldots \\ a(e-1) & ae(e-1) & a(e-1)(2e-1) & \\ a(e-1)^2 & a(e-1)^2 & & \end{array}$$

Bei constantem $a(e-1)^3$ aus den 4 ersten Gliedern der geometr. R. die a. R. dritter Ordnung:

$$\begin{array}{ccccc} a & ae & ae^2 & ae^3 & a[4e^3-6e^2+4e-1]\ldots\ldots \\ a(e-1) & ae(e-1) & ae^2(e-1) & a(e-1)(3e^2-3e+1) & \\ a(e-1)^2 & ae(e-1)^2 & a(e-1)^2(2e-1) & & \\ a(e-1)^3 & a(e-1)^3 & \ldots\ldots & & \end{array}$$

Bei constantem $a(e-1)^4$ aus den 5 ersten Gliedern der geometr. R. die a. R. der vierten Ordnung:

$$\begin{array}{cccccc} a & ae & ae^2 & ae^3 & ae^4 & a(5e^4-10e^3+10e^2-5e+1) \\ a(e-1) & ae(e-1) & ae^2(e-1) & ae^3(e-1) & a(e-1)(4e^3-6e^2+4e-1) & \\ a(e-1)^2 & ae(e-1)^2 & ae^2(e-1)^2 & a(e-1)^2(3e^2-3e+1) & & \\ a(e-1)^3 & ae(e-1)^3 & a(e-1)^3(2e-1) & & & \\ a(e-1)^4 & a(e-1)^4 & & & & \end{array}$$

u. s. w.

12. Aus der geordneten Zusammenstellung No. 10 gehen folgende Gesetze hervor:

A. Eine Reihe der $n$ten Ordnung ist vollständig gegeben, wenn die ersten $n+1$ Glieder der R. gegeben sind; sind weniger gegeben, so ist die R. unbestimmt, weil erst das $(n+1)$te Glied die Differenz d der $n$ten Differenzenreihe enthält. Aus dem 2ten Gliede minus dem ersten erhält man das erste Glied der ersten Differenzenreihe, aus dem dritten minus dem zweiten das erste Glied der zweiten Differenzenreihe, aus dem $n$ten minus dem $(n-1)$ten das erste Glied der $(n-1)$ten Differenzenreihe und endlich aus dem $(n+1)$ten Gliede minus dem $n$ten das gleich bleibende Glied der $n$ten Differenzenreihe.

Z. B. die Reihe der 5ten Ordnung

1 2 5 13 33 81....

ist durch diese 6 ersten Glieder gegeben, denn es ist:

$$\begin{array}{rcl} E = 1 & \text{woraus} & E=1 \\ D+E = 2 & " & D=1 \\ C+2D+E = 5 & " & C=2 \\ B+3C+3D+E=13 & " & B=3 \\ A+4B+6C+4D+E=33 & " & A=4 \\ d+5A+10B+10C+5D+E=81 & " & d=5 \end{array}$$

Man entwickelt am einfachsten die Fortsetzung der Reihe durch wirkliche Bildung der Differenzenreihen und spätere Addition, indem man neben die unterste Differenz d ein zweites d setzt, und sagt: $5+9=14$, $14+16=30$ u. s. w., wo man dann das folgende Glied 187 der Reihe erhält. Also:

1 2 5 13 33 81 | 187....

1 3 8 20 48 | 106

2 5 12 28 | 58

3 7 16 | 30

4 9 | 14

5 | 5

Vergl. No. 13 und No. 18.

B. Ist eine R. der $n$ten Ordnung gegeben, so läfst sich aus derselben eine R. der $(n+1)$ten Ordnung bilden; man hat nur nöthig, das erste Glied derselben zu wählen.

C. Die $m$te Differenzenreihe einer R. der $n$ten Ordnung ist eine R. der $(n-m)$ten Ordnung; und jede R. der $m$ten Ordnung ist zu betrachten als die $(n-m)$te Differenzenreihe einer R. der $n$ten Ordnung. Z. B. die R. der 3. Ordnung (No. 10) ist von der R. der 4. Ordnung die $(4-3=1)$te Differenzenreihe.

13. Jedes Glied einer a. R. der $m$ten

Ordnung hat die Form des in eine R. entwickelten Binoms der $(n-1)$ten Potenz, wo in jedem Gliede der R. n die Stellenzahl dieses Gliedes bedeutet.

Es ist nämlich

$$(x+y)^{n-1} = 1 \cdot x^{n-1} + \frac{n-1}{1} x^{n-2} y + \frac{(n-1)(n-2)}{1.\ \ 2} x^{n-3} y^2$$
$$+ \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ \ 2.\ \ 3} x^{n-4} y^3 + \ldots + \frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-m)}{1.\ \ 2.\ \ldots\ m} x^{n-m-1} y^m$$

Ist nun

M das erste Glied der R. $m$ter Ordnung
L „ „ „ deren ersten Differenzenreihe
K „ „ „ „ zweiten „
. . . .
B „ „ „ „ $(m-2)$ten „
A „ „ „ „ $(m-1)$ten „
d „ gleichbleibende Glied deren $m$ten Differenzenreihe

so schreibe man

M für x^{n-1} mit dem Coefficient $=1$

L „ $x^{n-2}y$ „ „ „ $\frac{(n-1)(n-2)}{1.\ \ 2}$

K „ $x^{n-3}y^2$ „ „ „ $\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ \ 2.\ \ 3}$

. . . .

B „ $x^{n+1-m}y^{m-2}$ mit dem Coefficient $\frac{(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n+2-m)}{1.\ \ 2.\ \ldots\ldots\ (m-2)}$

A „ $x^{n-m}y^{m-1}$ „ „ „ $\frac{(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n+1-m)}{1.\ \ 2.\ \ldots\ldots\ (m-1)}$

d „ $x^{n-m-1}y^m$ „ „ „ $\frac{(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-m)}{1.\ \ 2.\ \ldots\ldots(m-1)\cdot m}$

Ferner hat in einer Reihe der $m$ten Ordnung:

das 1. Glied 1 Summand M
„ 2. „ 2 Summanden M, L
„ 3. „ 3 „ M, L, K
. . . .
„ $(m-1)$. „ $(m-1)$ „ $M, L, K \ldots C, B$
„ m. „ m „ $M, L, K \ldots C, B, A$
„ $(m+1)$. „ $(m+1)$ „ $M, L, K \ldots C, B, A, d$

und alle folgenden Glieder bestehen aus $m+1$ Summanden, wenn die R. eine R. der $m$ten Ordnung ist.

Man hat also für jedes Glied einer R.

der 1. Ordnung die Summe $A + \frac{n-1}{1} d$

„ 2. „ „ „ $B + (n-1)A + \frac{(n-1)(n-2)}{1.\ \ 2} d$

„ 3. „ „ „ $C + (n-1)B + \frac{(n-1)(n-2)}{1.\ \ 2} A + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ \ 2.\ \ 3} d$

u. s. w., wo für jedes Glied n dessen Stellenzahl bedeutet.

Beispiele.

1. Für eine R. der 1. Ordnung sei $A=2$; $d=3$; so ist

das 1. Glied $= A + \frac{1-1}{1} d = A + 0 \cdot d = A = 2$

„ 2. „ $= A + \frac{2-1}{1} d = A + 1 \cdot d = 2+3 = 5$

„ 3. „ $= A + \frac{3-1}{1} d = A + 2 \cdot d = 2+6 = 8$

. . . .

„ 24. „ $= A + \frac{24-1}{1} d = A + 23 \cdot d = 2 + 23 \cdot 3 = 71$

2. Für eine R. der 2. Ordnung sei $B=1$; $A=3$; $d=2$; so ist

das 1. Glied $= B+0\cdot A+\frac{0\cdot(-1)}{1.\ 2}d=B=1$

„ 2. „ $= B+\frac{2-1}{1}A+\frac{(2-1)0}{1.\ 2}d=B+A=1+3=4$

„ 3. „ $= B+\frac{3-1}{1}A+\frac{(3-1)(2-1)}{1.\ 2}d=B+2A+d=9$

„ 4. „ $= B+3\cdot A+\frac{3\cdot 2}{1\cdot 2}d=B+3A+3d=16$

„ 5. „ $= B+4\cdot A+\frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}d=B+4A+6d=25$

3. Für eine R. der 3. Ordnung sei $C=1$; $B=7$; $A=12$; $d=6$; so ist

das 1. Glied $= C+0\cdot B+0\cdot A+0\cdot d=C=1$

„ 2. „ $= C+1\cdot B+0\cdot A+0\cdot d=C+B=8$

„ 3. „ $= C+2\cdot B+\frac{2\cdot 1}{1\cdot 2}A+0\cdot d=C+2B+A=27$

„ 4. „ $= C+3\cdot B+\frac{3\cdot 2}{1\cdot 2}A+\frac{3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3}d=C+3B+3A+d=64$

4. Für eine R. der 5. Ordnung sei (die R. ad 12, A) $E=1$; $D=1$; $C=2$; $B=3$; $A=4$; $d=5$; so hat man

das 1. Glied $= E+0\cdot D+0\cdot C+0\cdot B+0\cdot A+0\cdot d=E=1$

„ 2. „ $= E+1\cdot D+0\cdot C+0\cdot B+0\cdot A+0\cdot d=E+D=2$

„ 3. „ $= E+2\cdot D+\frac{3\cdot 2}{1\cdot 2}C+0\cdot B+0\cdot A+0\cdot d=E+2D+C=5$

„ 4. „ $= E+3\cdot D+\frac{3\cdot 2}{1\cdot 2}C+\frac{3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3}B+0\cdot A+0\cdot d=E+3D+3C+B=13$

„ 5. „ $= E+4\cdot D+\frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}C+\frac{4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3}B+\frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}A+0\cdot d=E+4D+6C$
$+4B+A=33$

„ 6. „ $= E+5\cdot D+\frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}C+\frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}B+\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}A+\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}d=E$
$+5D+10C+10B+5A+d=81$

um das 7. Glied zu finden, hat man nicht, wie ad 12, A geschehen, die Differenzenreihen zu bilden:

es ist $= E+6D+15C+20B+15A+6d=187$
(Vergl. No. 18).

14. Wenn die ersten Glieder $X, W, V \ldots A, d$ einer R. von der $x$ten Ordnung und deren x Differenzenreihen gegeben sind, so kann man jedes Glied jeder beliebigen Differenzenreihe ausdrücken.

Allgemein ist das $n$te Glied der $(x-p)$ten Differenzenreihe

$$= P+\frac{n-1}{1}O+\frac{(n-1)(n-2)}{1.\ 2}N+\ldots.$$
$$\frac{(n+1)\ldots(n+1-p)}{1\ \ldots\ (p-1)}A+\frac{(n-1)\ldots(n-p)}{1\ \ldots\ p}\cdot d$$

Beispiel. Bei der ad 12, A gegebenen R. der 5. Ordnung ist

$d=5$; $A=4$; $B=3$; $C=2$; $D=1$; $E=1$

Man findet das 4te Glied der 3ten Differenzenreihe, wenn man

$x-p=5-p=3$, also $p=2$, $P=B$ u. s. w. setzt.

$$B+\frac{4-1}{1}A+\frac{(4-1)(4-2)}{1.\ 2}\cdot d$$
$$= 3+3\cdot 4+3\cdot 5=30$$

15. Nach dem Vorstehenden sind die Glieder einer a. R. höherer Ordnung zu finden, wenn deren erstes Glied und die ersten Glieder deren Differenzenreihen gegeben sind; jetzt sollen die Glieder der R. gegeben werden.

Bezeichnet man die auf einander folgenden Glieder einer a. R. der $m$ten Ordnung mit $a\cdot b\cdot c\cdot d\cdot e\ldots.$ so erhält man die erste Differenzenreihe

$-a+b,\ -b+c,\ -c+d,\ -d+e$ u. s. w.

die 2te Differenzenreihe

$a-2b+c,\ b-2c+d,\ c-2d+e\ldots.$

die 3te Differenzenreihe

$-a+3b-3c+d,\ -b+3c-3d+e\ldots.$

die 4te Differenzenreihe
$+a-4b+6c-4d+e\ldots.$
die 5te Differenzenreihe
$-a+5b-10c+10d-5e+f\ldots.$
die 6te Differenzenreihe
$+a-6b+15c-20d+15e-6f+g\ldots.$

Es sind diese Differenzen die Formen der entwickelten Binomen,

nämlich die 1. Differenzenreihe von $(-x+y)^1=-x+y$
2. „ „ $(-x+y)^2=+x^2-2xy+y^2$
3. „ „ $(-x+y)^3=-x^3+3x^2y-3xy^2+y^3$
u. s. w.

Setzt man für die $n$te Differenzenreihe analog:

$$\text{das 1. Glied } \mp a\pm nb\mp\frac{n\cdot(n-1)}{1.\ 2}c\pm\ldots.+\frac{n\cdot(n-1)}{1.\ 2}t-nu+v$$

$$\text{„ 2. „ } \mp b\pm nc\mp\frac{n\cdot(n-1)}{1.\ 2}d\pm\ldots.+\frac{n\cdot(n-1)}{1.\ 2}u-nv+w$$

und zieht das erste Glied vom zweiten ab, so erhält man das erste Glied der $(n+1)$ten Differenzenreihe mit

$$\pm a\mp(n+1)b\pm\frac{(n+1)n}{1.\ 2}c\mp\frac{(n+1)n(n-1)}{1.\ 2.\ 3}d\pm\ldots.+\frac{(n+1)n}{1.\ 2}u-(n+1)v+w$$

Die Coefficienten sind aber offenbar die des Binoms zur $(n+1)$ten Potenz und zwar, wenn n ungerade ist, für ein gerades $n+1$, und wenn n gerade ist, für ein ungerades $n+1$; woher das Gesetz allgemein erwiesen ist.

16. Es sei $a\cdot b\cdot c\cdot d\cdot e\ldots.$ eine R. der 1. Ordnung,

und ist $b-a=D$
so ist auch $c-b=D$
also $a-2b+c=D-D=0$
eben so $b-2c+d=0$
u. s. w.

$a{\cdot}b{\cdot}c{\cdot}d\ldots.$ sei eine R. 2. Ordnung
$a'\,b'\,c'\,d'$ deren 1ste Differenzenreihe
$d''\,d''\,d''$ „ 2te „
so ist $a'-2b'+c'=0$
also $(b-a)-2(c-b)+d-c=0$
woraus $a-3b+3c-d=0$
und eben so $b-3c+3d-e=0$ u. s. w.

Fährt man mit diesen Operationen fort, so findet man für eine R. der 3. Ordnung
$a-4b+6c-4d+e=0$
so dafs das Gesetz wieder nach den Binomial-Coefficienten sich feststellt, wie sich nachweisen läfst. Denn es sei eine R. der $(m-1)$ten Ordnung:
$a'\cdot b'\cdot c'\cdot d'\ldots.u'\cdot v'\cdot w'$
und es ist

$$a'-mb'+\frac{m\,(m-1)}{1.\ 2}c'-\ldots.$$
$$\pm\frac{m\,(m-1)}{1.\ 2}u'\mp m\cdot v'\pm w'=0$$

so sei die zugehörige R. der $m$ten Ordnung
$a\cdot b\cdot c\ldots.v\cdot w\cdot x$
und man hat
$a'=b-a;\ b'=c-b;\ c'=d-c\ldots.$
$w'=x-w$

$$\text{Daher } (b-a)-m\,(c-b)+\frac{m\cdot(m-1)}{1.\ 2}(d-c)-\ldots.\mp m(w-v)\pm(x-w)=0$$

$$\text{woraus } -a+(m+1)\,b-\left(m+\frac{m\cdot(m-1)}{1.\ 2}\right)c+\ldots.\pm\left(m+\frac{m\,(m-1)}{1.\ 2}\right)v\mp(m+1)\,w\pm x=0$$

und zusammengezogen und die Zeichen vertauscht:

$$a-(m+1)\,b+\frac{(m+1)\,m}{1.\ 2}c-\ldots.\mp\frac{(m+1)\,m}{1.\ 2}v\pm(m+1)\,w\mp x=0$$

eine R. offenbar mit den Binomial-Coefficienten der $(m+1)$ten Potenz, womit das Gesetz allgemein erwiesen ist.

Man hat demnach für eine R.
der 1. Ordnung $a-2b+\ c=0$
„ 2. „ $a-3b+3c-d=0$
„ 3. „ $a-4b+6c-4d+e=0$
„ n. „ $a-(n+1)b+\dfrac{(n+1)n}{1.\ 2}c-\dfrac{(n-1)n(n-1)}{1.\ 2.\ 3}d+\ldots.$

17. Ist $a{\cdot}b{\cdot}c{\cdot}d{\cdot}e{\cdot}f\ldots.$ eine a. R. der 1. Ordnung,

so ist $a-2b+c=0$
und auch $b-2c+d=0$
hieraus durch Subtraction $a-3b+3c-d=0$

In der R. 1. Ordnung liegt also zugleich das Gesetz für eine R. der 2. Ordnung.

Da nun auch $b-3c+3d-e=0$
so hat man ebenfalls $a-4b+6c-4d+d=0$
mithin auch das Gesetz der R. 3. Ordnung.

Ueberhaupt liegt in einer R. der $m$ten Ordnung zugleich das Gesetz einer Reihe der $(m+1)$ten Ordnung.

18. Aus No. 16 erhält man für eine R. der

1. Ordnung $c=2b-a$
2. " $d=3c-3b+a$
3. " $e=4d-6c+4b-a$

m. " $x=(m+1)w-\frac{(m+1)m}{1.\ 2}v+\frac{(m-1)m(n-1)}{1.\ 2.\ 3}u-\ldots\pm a$

Man kann demnach eine R. der $m$ten Ordnung bei den gegebenen ersten $m+1$ Gliedern erweitern:

Beisp. 1 (s. Tabelle No. 10). Betrachtet man die Glieder

1·2·4 als die ersten 3 Glieder einer R. der 2. Ordnung, so erhält man das 4te

$$d=3\cdot4-3\cdot2+1=7$$

1·2·4·8 als die ersten 4 Glieder einer R. der 3. Ordnung

$$e=4\cdot8-6\cdot4+4\cdot2-1=15$$

1·2·4·8·16 als die ersten 5 Glieder einer R. der 4. Ordnung

$$f=5\cdot16-10\cdot8+10\cdot4-5\cdot2+1=31$$

1·2·4·8·16·32 als die ersten 6 Glieder einer R. der 5. Ordnung

$$g=6\cdot32-15\cdot16+20\cdot8-15\cdot4+6\cdot2-1=63$$

1·2·4·8·16·32·64 als die ersten 7 Glieder einer R. der 6. Ordnung

$$h=7\cdot64-21\cdot32+35\cdot16-35\cdot8+21\cdot4-7\cdot2+1=127$$

1·2·4·8·16·32·64·128 als die ersten 8 Glieder einer R. der 7. Ordnung

$$k=8\cdot128-28\cdot64+56\cdot32-70\cdot16+56\cdot8-28\cdot4+8\cdot2-1=255$$

Beispiel 2 (No. 12, A) Die ersten 6 Glieder der R. der 5. Ordnung sind

1·2·5·13·33·81

Man findet das 7. Glied

$$x=6\cdot81-15\cdot33+20\cdot13-15\cdot5+6\cdot2-1=187$$

19. Bezeichnet man die Glieder einer a. R. mit

	$a\ \ b\ \ c\ \ d\ \ldots\ z$
die 1. Differenzenreihe	$a_1\ b_1\ c_1\ d_1\ \ldots\ y_1$
" 2. "	$a_2\ b_2\ c_2\ d_2\ \ldots\ x_2$
" 3. "	$a_3\ b_3\ c_3\ d_3\ \ldots\ w_3$
. . . .	. . . .
" m. "	$a_m\ a_m\ a_m\ a_m\ \ldots$

so hat man

$a=a$	$a_1=a_1$	$a_2=a_2$	$a_{m-1}=a_{m-1}$
$b=a+a_1$	$b_1=a_1+a_2$	$b_2=a_2+a_3$	$b_{m-1}=a_{m-1}+a_m$
$c=b+b_1$	$c_1=b_1+b_2$	$c_2=b_2+b_3$	$c_{m-1}=b_{m-1}+a_m$
$d=c+c_1$	$d_1=c_1+c_2$	$d_2=c_2+c_3$	$d_{m-1}=c_{m-1}+a_m$
. . . .	. . . .	. . . .	. . . .
$z=y+y_1$	$y_1=x_1+x_2$	$x_2=w_2+w_3$	$n_{m-1}=m_{m-1}+a_m$

Hieraus folgt durch allmähliche Substitution:

1. Glied $a=a$
2. " $b=a+a_1$
3. " $c=a+2a_1+a_2$
4. " $d=a+3a_1+3a_2+a_3$
5. " $e=a+4a_1+6a_2+4a_3+a_4$

. . . .

n. " $z=a+\frac{n-1}{1}a_1+\frac{(n-1)(n-2)}{1.\ 2}a_2+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3}a_3+\ldots$

Es ist hiermit jedes Glied einer höheren a. R. in eine R. entwickelt, die aus den ersten Gliedern der R. und deren Differenzenreihen der Reihenfolge nach fortschreitet, und deren Coefficienten wieder die Binomial-Coefficienten sind, wie schon aus No. 10 hervorgeht.

20. Die Formel No. 19 für jedes Glied einer R. höherer Ordnung führt zu dem Verfahren, Reihen höherer Ord. zu summiren: Bildet man nämlich aus einer zu summirenden R. der $m$ten Ordnung von n Gliedern eine R. der $(m+1)$ten Ordnung, als:

Stellenzahl	1 2 3 4 .... n $n+1$
$m$te Ordn.	$a\ \ b\ \ c\ \ d\ \ldots\ x$
$(m+1)$te Ordn.	$a'\ b'\ c'\ d'\ \ldots\ w'\ x'$

wo das erste Glied a' beliebig ist, so sind die ersten und bekannten Glieder der auf einander folgenden Differenzenreihen hier

$a;\ a_1\ a_2\ a_3\ \ldots\ a_m$

so ist $a=b'-a'$, also $b'=a'+a$

$b=c'-b'$, " $c'=b'+b=a'+a+b$

$c=d'-c'$, " $d'=a'+a+b+c$

. . . .

$x=x'-w'$, " $x'=a'+a+b+c+\ldots+w+x$

Man hat demnach das $(n+1)$te Glied x' der Reihe $(m+1)$ter Ordnung = dem willkürlich gewählten ersten Gliede a' + der verlangten Summe der ersten n Glieder einer gegebenen R. $m$ter Ordnung.

Nun ist nach obiger Formel, $n+1$ für n gesetzt,

$$x' = a' + \frac{n}{1}a + \frac{n\cdot(n-1)}{1.\ 2}a_1 + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1.\ 2.\ 3}a_2 + \dots$$

und wenn man für a' Null setzt,

$$x' = S = \frac{n}{1}a + \frac{n\cdot(n-1)}{1.\ 2}a_1 + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1.\ 2.\ 3}a_2 + \dots$$

Beispiele. Die No. 10 tabellarisch geordneten 9 ersten Glieder der Reihen der 1. bis 7. Ordnung summirt, geben

der 1. Ordnung: $S = \frac{9}{1}\cdot 1 + \frac{9\cdot 8}{1\cdot 2}\cdot 1 = 45$

„ 2. „ $S = \frac{9}{1}\cdot 1 + \frac{9\cdot 8}{1\cdot 2}\cdot 1 + \frac{9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 1 = 129$

„ 3. „ $S = \frac{9}{1}\cdot 1 + \frac{9\cdot 8}{1\cdot 2}\cdot 1 + \frac{9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 1 + \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot 1 = 255$

„ 4. „ $S = 9 + 36 + 84 + 126 + \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 381$

„ 5. „ $S = 9 + 36 + 84 + 126 + 126 + \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\cdot 1 = 565$

„ 6. „ $S = 9 + 36 + 84 + 126 + 126 + 84 + \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}\cdot 1 = 601$

„ 7. „ $S = 9 + 36 + 84 + 126 + 126 + 84 + 36 + \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8} = 610$

Die ad 12 geschriebene Reihe der 5. Ordnung hat die Summe der ersten 7 Glieder:

$$S = 7\cdot 1 + \frac{7\cdot 6}{1\cdot 2}\cdot 1 + \frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 2 + \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot 3 + \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cdot 4 + \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\cdot 5 = 322$$

Arithmetische Scala. In jedem Zahlensystem die mit 1 beginnende geometrische Reihe, nach welcher jede Ziffer einer Zahl von der Einerstelle ab in den auf einander folgenden Stellen ihrem Werth nach fortschreitet. Beim dekadischen System ist es die Reihe 1·10·100·1000...., beim dyadischen System die Reihe 1·2·4·8...., beim triadischen System d. R. 1·3·9·27.... u. s. w. In jedem Zahlensystem kann die gröſste Ziffer nur so viele Einheiten enthalten, als das 2te Glied der ihm zugehörigen Scala weniger Eins. Bei dem dyadischen System ist dies = 1; hier ist 10 = zwei; 11 ist = drei; 100 ist = vier. In dem triadischen System ist die gröſste Ziffer = 2; 10 ist = drei; 11 ist = vier; 12 ist = fünf; 20 ist = sechs; 21 ist = sieben; 22 ist = acht; 100 ist = neun u. s. w.

Arithmetisches Verhältniſs zweier Zahlen ist gleichbedeutend mit deren Unterschied. Das a. V. zwischen 10 und 7 ist = 3; man schreibt 10 − 7; früher 10 ÷ 7. Vergl. arithmetische Proportion.

Arithmetische Zeichen sind die Zeichen für arithmetische Operationen. Sie sind das Zeichen für die Addition, die Subtraction, die Multiplication, die Division, das Potenziren und das Radiciren. S. d. unter algebraische Zeichen.

Arktisch s. v. w. nördlich. Der Name kommt von αρχτος, der Bär, indem zugleich zwei nahe dem Nordpol befindliche Sternbilder diesen Namen führen. Die arktische Zone ist daher gleichbedeutend mit nördlicher Polarzone, arktischer Pol mit Nordpol.

Armillarsphäre, Ringkugel. Ein Instrument, dessen sich die alten Astronomen zu Beobachtungen bedienten, und das auch noch bis zu der Zeit, in welcher die Fernröhre verbessert worden, in Gebrauch war. Die A. stellt die Himmelskugel vor, jedoch nicht mit den Sternen, sondern nur mit den von den Astronomen

Fig. 81.



eingeführten ideellen Eintheilungs-Kreisen, welche hier durch Metallringe versinnlicht werden, und die man in eine Lage bringt, dafs sie mit denen an der wirklichen Himmelshohlkugel # laufen. Der in Grade eingetheilte Kreis *abd* ist bis zu dem inneren Endkreis der Theilung ein starker Ring, in welchem die A. drehbar befestigt ist, und zwar in den Punkten *P*, *p* mittelst einer durchgehenden Axe *Pp*, welche die Welt-Axe mit dem Nordpol *P* und dem Südpol *p* vorstellt. Der unterhalb der an *abd* befindlichen Theilung sichtbare Kreisring *kk* gehört schon zu der drehbaren Kugel, wie der normal mit ihm verbundene Ring *k'k'*. Da beide durch die Pole gehen, so repräsentiren sie die beiden Koluren der Nachtgleichen und der Sonnenwendepunkte, und der mittlere, normal auf die Axe *Pp* und die Koluren befestigte Ring *qq* bedeutet den Aequator. Der breitere Ring *e*, die Ekliptik, unter $23\frac{1}{2}°$ gegen *qq* geneigt, trifft mit *qq* und *k'k'* in den Punkten *f* und *h* zusammen; es ist demnach *f* der Frühlingspunkt, *h* der Herbstpunkt, *k'k'* der Kolur der Nachtgleichen und *kk* der Kolur der Solstitialpunkte. Von den mit *qq* parallelen Ringen sind die beiden näheren die Wendekreise, die entfernteren die Polarkreise, erstere tangiren *ee* in den Solstitien, die zugleich in den Ring *kk* fallen, letztere tangiren die ebenfalls in *kk* liegenden Pole der Ekliptik *ee*. Nach Entdeckung des Copernicanischen Systems wurde auf die Mitte der Axe noch eine Erdkugel mit darauf gezeichneten Meridianen und Parallelkreisen angebracht.

Der Ring *AB* hat mit dem Fufs *D* Zusammenhang zu einem festen Gestell, die 3 Einschnitte bei *A*, *B*, *D* liegen genau in der auf dem Kranz *AB* normalen Ebene, und der äufsere feste Ring *abd* der A. pafst genau in dieselben und kann darin gedreht werden.

Das Gestell zum Gebrauch der A. wird so befestigt, dafs der Kranz *AB* genau horizontal liegt. und der Ring *abd* genau in den Meridian des Aufstellungspunktes fällt.

Aus der bekannten geographischen Breite oder der Polhöhe des Orts ist mit Hülfe der Gradtheilung der Ring *abd* so zu drehen, dafs das Zenith *z* mit dem des Orts übereinstimmt. Bei dieser Lage der A. sind die Welt-Axe *Pp*, Aequator *qq*, die Parallelkreise und die Ekliptik *e* mit den gleichnamigen wirklich #.

Denkt man sich nun noch einen Kreisring um die Axe *Pp* drehbar befestigt, versieht diesen mit Diоptern zum Visiren und dreht den Ring bis in die Richtung eines Gestirns, so giebt die Durchschnittslinie des Kreises mit der A. den Abstand des Sterns vom Meridian (das Azimuth), die Aufsteigung gegen den Aequator und die entsprechenden Bogen des Kreises die Höhe und die Abweichung desselben.

Ist der Kreis um die Pole der Ekliptik drehbar, so erhält man Länge und Breite des Gestirns. Mit diesem letzteren Kreis nach der Sonne visirt, und die A. so weit um *Pp* gedreht, bis der Ring *ee* mit seiner Ebene in die Visirlinie fällt, gab die augenblickliche Lage der Sonne in der Ekliptik und dieser gegen das Zenith. Stand die Sonne zugleich im Aequator, in *f* oder in *h*, so fiel der Schatten der einen Hälfte von *e* genau auf die andere Hälfte. In diesem Augenblick die A. um *Pp* gedreht, so dafs *f* oder *h* in die Visirlinie kam, ergab die Lage des Frühlingspunkts und des Herbstpunkts gegen den Meridian des Orts zu einer bestimmten Stunde, so dafs dieselben mit Hülfe des bei *P* angebrachten Stundenkreises zu jeder anderen Zeit auf der A. wieder aufgefunden werden konnte.

Auf der Ekliptik *ee* wurden die Planeten und der Thierkreis verzeichnet, woher auch die gröfsere Breite desselben erforderlich war; auch Sonne und Mond wurden durch kleine Kugeln an Bügeln befestigt, welche drehbar befestigt waren; der für die Sonne um die Pole der Ekliptik *ee*, der für den Mond um etwa 5° von denselben entfernt.

Ascension, Aufsteigung, bestimmt mit der gegebenen Abweichung (s. d.) den Ort eines Gestirns. Es sei *S* ein Gestirn,

Fig. 82.



welches in dem Parallelkreise *Kk* um die Erde sich zu bewegen scheint, *Qq* der Aequator, *Pp* die Weltaxe, also *pSAP* der

zu *S* gehörende Abweichungskreis (s. d.) und *SA* die Abweichung von *S*. Diese Abweichung, der Bogen *AS*, giebt die Höhe des Parallelkreises *Kk* über dem Aequator an; wird nun noch der Bogen *FA* vom Frühlingspunkt *F* bis zum Abweichungskreise von *S* gegeben, so ist die Lage des Sterns vollkommen bestimmt, und dieser Bogen *FA*, von *F* aus nach *A* in der Richtung von Abend nach Morgen gemessen, und der bis zu 360° angegeben wird, heifst die Rectascension, gerade Aufsteigung von *S*.

Der Name kommt daher, dafs für die Bewohner des Aequators alle Gestirne in vollen Halbkreisen sich sichtbar am Himmel bewegen, dafs sie also beim Aufgange senkrecht oder gerade aufsteigen. Bedeutet der Abweichungskreis *pSAP* zugleich den Horizont für einen Ort des Aequators vom Zenith *q*, so geht der Stern *S* auf, wenn er von *K* aus in den Punkt *S* des Horizonts tritt; mit diesem Stern tritt aber auch der ganze Abweichungsbogen *SA* in den Horizont, der Punkt *A* des Aequators steigt also mit *S* zugleich auf und zwar gerade auf.

Für irgend einen anderen aufserhalb des Aequators belegenen Ort *o* der Erdoberfläche, dessen Zenith *z* ist, sei *Hh* der Horizont, so geht der Stern *S* ebenfalls in dem Punkt *S* für diesen Ort *o* auf; der Punkt *A* des Aequators ist aber für denselben Ort schon längst aufgegangen. Befände sich dagegen in dem Punkt *A'*, dem Durchschnittspunkt des Horizonts *Hh* mit dem Aequator *Qq*, ein Gestirn, so würde dieses mit dem Gestirn *S* zugleich sichtbar werden; daher ist für den Ort *o* die Aufsteigung *FA'*, und zwar eine schiefe Aufsteigung des Sterns *S*. Der Unterschied *FA'* – *FA* der schiefen und geraden Aufsteigung heifst der Aufsteigungs-Unterschied, die Ascensional-Differenz. (S. den folgenden A.)

Gehört das Zenith *z* der nördl. Halbkugel an, so steht das Gestirn *S* in der südlichen. Ist *s* ein Gestirn der nördl. Halbkugel, *sa* seine Abweichung, so ist *FA'* seine schiefe, *Fa* seine gerade Aufsteigung, und *Fa* – *FA'* seine Ascensional-Differenz. Bei Gestirnen von nördl. Abweichung ist für uns die gerade Aufsteigung gröfser, bei Gestirnen südl. Abweichung kleiner als die schiefe Aufsteigung. Oder, wie man es auch ausdrückt: Schiefe Aufsteigung = gerade Aufsteigung ± Ascensional-Differenz, wo + der südlichen, – der nördl. Abweichung von Gestirnen angehört.

Man findet den Punkt des Aequators, dessen Entfernung von *F* die Rectascension eines Gestirns giebt, an irgend einem Ort der Erde durch unmittelbare Beobachtung in dem Augenblick der Culmination des Gestirns, indem sodann dieser Punkt in dem Meridian des Ortes liegt.

Ascensional-Differenz. (Erkl. s. Ascension). In Fig. 82 ist Bogen *sa* die Abweichung des Gestirns *s*, Bog. *aA'* die A. D. von *s*, $\angle sA'a$ die Aequatorhöhe (s. d.) des Beobachtungsortes, $\angle saA' = 90°$. In dem bei *a* rechtwinkligen sphär. △ ist aber der *sin* jeder Kathete = der *tg* der anderen Kathete mal der *Cotg* des der letzteren gegenüber liegenden schiefen Winkels; mithin

$$\sin aA' = tg \cdot as \times \cot \cdot sA'a = \frac{tg \cdot as}{tg \cdot sA'a}$$

d. h. der *sin* der A. D. ist = der *tg* der Abweichung dividirt durch die *tg* der Aequatorhöhe.

Beispiel 1. Es sei *s* die Sonne, die Schiefe der Ekliptik beträgt etwa 23½, am längsten Tage also ist deren Abweichung $as = 23°30'$; die Aequatorhöhe von Berlin ist 37°28'47"; mithin

$$\log \sin \text{A. D.} = \log \frac{tg\, 23°30'}{tg\, 37°28'47''} = 9{,}7536397 - 10$$

woraus A. D. = 34°32'48"

Aus dieser A. D. ist es nun leicht, die Länge des längsten Tages für Berlin zu finden. Jeder Punkt des Aequators nämlich ist für jeden Ort der Erdoberfläche 12 Stunden lang sichtbar und 12 Stunden lang unsichtbar; und wenn die Sonne im Aequator steht (in den beiden Nachtgleichen des Jahres), so ist an jedem Ort der Erde 12 Stunden Tag und 12 Stunden Nacht; die Sonne beschreibt sichtbar einen Bogen von 180° am Himmel. Der Punkt des Aequators also, in welchem die Sonne in den Nachtgleichen für Berlin aufgeht, ist von dem Meridian von Berlin 90° entfernt, und er ist, wenn die Sonne am längsten Tage aufgeht, schon früher aufgegangen, nämlich um die A. D. = 34°32'48"; die Sonne beschreibt also am längsten Tage vom Aufgang bis Mittag einen Bogen von 90° + 34°32'48" = 124° 32' 48" und der längste Tag in Berlin dauert $\frac{2 \times 124°\,32'\,48''}{360°} \cdot 24$ Stunden = 16 St. 36'22,4"

2) Für den kürzesten Tag steht die Sonne 23° 30' jenseits des Aequators; man hat also *sin* A. D. $= \frac{tg\,(-23°30')}{tg\,37°28'47''}$ Nun ist $tg(-23°30') = -tg\,23°30'$, mithin A. D. = –34°32'48". Der Sonnen-Aufgangspunkt in den Nachtgleichen liegt

also beim Aufgang der Sonne am kürzesten Tage noch um 34° 32′ 48″ unter dem Horizont von Berlin; der halbe Tag hat $90° - 34° 32' 48'' = 55° 27' 12''$ und der kürzeste Tag dauert $\frac{2 \cdot 55° 27' 12''}{360°} \cdot 24$ Stunden = 7 St. 23′ 37,6″.

3) Bei Eintritt des Sommers ist die Sonne vom Frühlingspunkt *F* 90° entfernt, d. h. da die Erde in dem Winterpunkt sich befindet (s. Aequator der Erde), so scheint die Sonne in dem Sommerpunkt zu stehen und die Entfernung von $F = 90°$ zu sein, oder die Länge oder die Rectascension = 90° zu haben. Die schiefe Aufsteigung der Sonne beträgt also an unserem längsten Tage 90° — der A. D. $= 90° - 34° 32' 48'' = 55° 27' 12''$. Am kürzesten Tage steht die Erde in dem Sommerpunkt, die Sonne scheint in dem Winterpunkt zu stehen, deren Rectascension ist also = 270° und deren schiefe Aufsteigung $= 270° + 34° 32' 48'' = 304° 32' 48''$.

Die Formel $\sin \text{A. D.} = \frac{tg \text{ Abweichung}}{tg \text{ Aequatorhöhe}}$ zeigt eine Grenze für die A. D. Nämlich für Abweichung = Aequatorhöhe wird *sin* A. D. = 1 und A. D. = 90°; d. h. das Gestirn befindet sich in einem durch *H* oder *h* gehenden Parallelkreise, indem dann der Bogen $HQ = hq$ nicht nur die Abweichung ist, sondern zugleich die Aequatorhöhe $= \angle HA'Q = \angle hA'q$ mifst. Die Gestirne beider Kreise berühren alle 24 Stunden den Horizont, das Gestirn des *H* Kreises im tiefsten Stande, das des *h* Kreises im höchsten. Ersteres geht nicht mehr unter und ist der nächste Circumpolarstern, letzteres geht nicht mehr auf. In dem ersten Falle befindet sich die Sonne für die Bewohner der Polarkreise bei der gröfsten gleichnamigen Abweichung der Sonne, in dem letzten Fall bei der gröfsten ungleichnamigen Abweichung derselben. In unserem Sommer ist also auf dem nördl. Polarkreise der längste Tag 24 Stunden lang, anstatt des Untergangs streift die Sonne den Horizont und geht sogleich wieder aufwärts; in unserem Winter ist dort der kürzeste Tag = 0, die Sonne streift von unten den Horizont, anstatt dafs sie aufgeht. Auf dem südl. Polarkreise findet dies in den für uns entgegengesetzten Jahreszeiten statt.

Gestirne, die eine noch gröfsere Abweichung haben, bewegen sich in Kreisen, die zwischen *H*, *P* und *h*, *p* liegen; erstere gehen uns nicht unter, letztere gehen uns nicht auf.

Ascii (Unschattige, eigentlich askii, von ἄσκιος). Die Bewohner der heifsen Zone, weil die Sonne zu Mittage ihnen bisweilen senkrecht über dem Kopf steht, wo sie dann keinen Schatten werfen. Vergl. Amphiscii, Antiscii.

Aspecten (von adspectus, der Anblick). Configurationen, auch Constellationen, letzterer Name besonders in der Astrologie, sind die verschiedenen gegenseitigen Standpunkte oder Stellungen zweier Gestirne zu verschiedenen Zeiten, dieselben von einem dritten Gestirn aus betrachtet. Die hauptsächlichsten A. sind:

1) Der Zusammenschein, Zusammenkunft, Conjunction (Zeichen ☌), wenn zwei Gestirne einerlei Länge haben, wenn also dieselben in einerlei Breitenhalbkreise liegen, in welchem nämlich die Axe der Ekliptik der Durchmesser ist.

2) Der Gegenschein, Opposition (Zeichen ☍), wenn zwei Gestirne eine um 180° verschiedene Länge haben, wenn sie also in einerlei Breitenkreise, aber in entgegengesetzten Halbkreisen desselben liegen.

3) Der Geviertschein, die Quadratur (Zeichen □), wenn zwei Gestirne eine um 90° verschiedene Länge haben.

Steht, von der Erde aus gesehen, der Mond mit der Sonne in Conjunction, so ist Neumond, und befindet sich dieser nahe der Ekliptik, so entsteht eine Sonnenfinsternifs, indem die Sonne zum Theil von dem Monde bedeckt wird. Steht der Mond mit der Sonne in Opposition, so ist Vollmond, und befindet sich dieser nahe der Ekliptikebene, so entsteht eine Mondfinsternifs, indem dieser von dem Schatten der Erde ganz oder zum Theil bedeckt wird. Steht der Mond mit der Sonne in den Quadraturen, so ist erstes oder letztes Viertel des Mondes.

Astatische Magnetnadel (ἄστατος, unstät), eine Nadel zur Wahrnehmung und Untersuchung sehr schwacher magnetischer Wirkungen, indem die Nadel von der Einwirkung des Erdmagnetismus unabhängig, für andere magnetische Einwirkungen also um so empfindlicher gemacht wird.

Es ist nämlich erfahrungsmäfsig, dafs eine Magnetnadel aus der Richtung des magnetischen Meridians abgelenkt wird, wenn man neben oder um die Nadel einen galvanischen Strom führt. Ist *CE* die Richtung der Nadel nach dem magnetischen Pol der Erde, also deren natürliche Richtung in Folge der Kraft (*P*) des Erdmagnetismus, *CM* deren Richtung unter dem $\angle \alpha$ mit *CE* in Folge einer neben der Nadel befindlichen elektrischen

Strömung, so äufsert diese auf die Nadel offenbar eine Kraft (p) nach der Richtung CG, und würde ohne Gegenwirkung durch P die Nadel in die Richtung CG drehen.

Fig. 83.



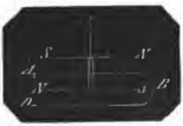
Indem nun die Nadel nach CM gerichtet bleibt, sind die Kräfte P und p im Gleichgewicht, und es ist $p = P \cdot tg\,\alpha$

Eigentlich $p = P \cdot tg\,\alpha + w$, wo w die innerhalb des Systems noch einwirkenden Reibungswiderstände bedeutet.

Ist p so gering, dafs w nicht überwunden wird, so geschieht keine Wahrnehmung des Stroms; man hängt daher die Nadel an einen Coconfaden um w bis auf das Beharrungsvermögen oder die Trägheit der Nadelmasse zu beseitigen.

Bei Weitem wichtiger ist nun, die Nadel von dem Erdmagnetismus unabhängig zu machen, damit bei schon geringen Strömungen gröfsere Ablenkungen geschehen, und man erreicht dies, wenn man zwei Magnetnadeln von möglichst gleich grofser magnetischer Stärke so mit einander verbindet, dafs der Südpol der einen über

Fig. 84.



den Nordpol der anderen Nadel fällt. Den Draht ABD, durch welchen ein zu beobachtender Strom geleitet wird, führt man um nur eine Nadel und beide Nadeln erhalten hierdurch die Neigung zur Ablenkung nach einerlei Richtung. Denn wenn die Strömung gegen die obere Nadel unterhalb derselben rechts geschieht, so geschieht sie gegen die untere Nadel unterhalb derselben links, mithin geschehen die Ablenkungen beider Nadeln in den gleichnamigen Polen nach entgegengesetzten Richtungen, und da diese gleichnamigen Pole entgegengesetzte Lage mit einander haben, so geschieht die Ablenkung beider Nadeln übereinstimmend.

Die Quantität der magnetischen Wirkung einer Strömung ist nur zu messen und als aliquoter Theil der Kraft des Erdmagnetismus anzugeben, wenn jede einzelne a. N. ajustirt wird. Man untersuche demnach mit einer nicht astatischen Nadel eine Strömung, durch welche dieselbe um einen kleinen $\angle\,\alpha$ noch afficirt wird; dieselbe Strömung zugleich durch die zu ajustirende a. N.; gesetzt, deren Ablenkung betrage A°, so hat man die Quantität des Magnetismus der Strömung $p = P\,tg\,\alpha = x\,tg \cdot A$, wenn x die Kraft-Einheit der a. N. bedeutet, und man hat diese Kraft-Einheit $x = \frac{tg\,\alpha}{tg\,A}\,P$, mithin in $\frac{tg\,\alpha}{tg\,A}$ einen Coefficienten von P.

Für jede andere Strömung, die nun die Nadel um den $\angle\,B$ ablenkt, ist

$$p = \frac{tg\,\alpha}{tg\,A} \cdot P \cdot tg\,B$$

Asteroiden, Planetoiden. Die kleineren Planeten unseres Sonnensystems, früher nur die vier: Vesta, Juno, Ceres, Pallas. Später sind noch viele andere kleine Planeten entdeckt worden, die den asteroïdischen Planeten zugezählt werden; die Reihenfolge derselben von dem nächsten bis zu dem der Sonne entferntesten, und alle zwischen Mars und Jupiter befindlich, sind folgende, 23 an der Zahl:

Flora, Melpomene, Victoria, Vesta, Iris, Metis, Hebe, Parthenope, Fortuna, Massilia, Lutetia, Thetis, Egeria, Asträa, Irene Thalia, Eunomia, Juno, Ceres, Pallas, Kalliope, Psyche, Hygiea.

Asträa, asteroïdischer Planet, von der Sonne ab der 18te Planet, der 15te der oberen Planeten. Neigung gegen die Ekliptik 5°20′7,2″; Excentricität 0,195520; Länge des aufsteigenden Knotens 141° 10′6,7″; Länge des Perihels 135°45′17″; siderische Umlaufszeit 1501,47 mittlere Sonnentage.

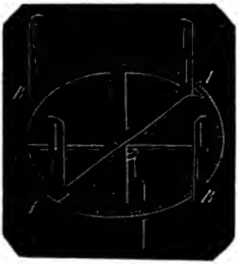
Astrognosie. Die Kenntnifs des gestirnten Himmels, der Fixsterne, deren Stellung zu einander, der zu Sternbildern vereinigten Sterngruppen, der die Himmelskugel eintheilenden Kreise mit den darin festgesetzten Punkten zur Ortsbestimmung der Sterne, und aller deren Namen. Die A. bildet den beschreibenden Theil der Astronomie.

Astrolabium (ἀστήρ, Gestirn, λαβίς, jedes Werkzeug zum Festhalten). 1) Ein von Hipparch erfundenes, der Ringkugel ähnlich gestaltetes, bei den alten Astronomen, wie noch in späteren Zeiten gebräuchliches Winkelmefs-Instrument, wel-

ches aber jetzt durch andere bessere Instrumente ersetzt wird.

2) Ein Winkelmefs-Instrument für Feldmesser. Es besteht aus einem in Grade, auch halbe und viertel Grade eingetheilten messingenen horizontalen Kreisring, um dessen Mittelpunkt eine Alhidade (s. d.) mit Dioptern *A*, *A* zum Visiren gedreht werden kann und wo dann die von den Visirlinien gebildeten Winkel auf dem Ring abgelesen werden. Gewöhnlich sind beide Dioptern, wie hier

Fig. 85.



gezeichnet, zum vor- und rückwärts Visiren eingerichtet, indem jede Diopter zum Theil (in dem schmalen Schlitz) Oculardiopter und zum Theil (in dem breiten Schlitz) Objectivdiopter ist. Statt der Dioptern wird auch ein Fernrohr angewendet, oder es befinden sich auch 2 Fernröhre mit ihren Axen unter einander und mit der Absehekante der Alhidade in einerlei verticalen Ebene, um vor- und rückwärts visiren zu können.

Die älteren **A.** haben oft nur einen halben Kreis eingetheilt oder wohl nur einen eingetheilten Quadrant, was für Vermessungen unbequem ist, wenn Winkel abgenommen werden sollen, die im ersten Fall gröfser als 180° und im zweiten Fall gröfser als 90° sind.

Die gerade Linie durch 0° und 180° des eingetheilten Kreisringes wird mit 2 an den Rand befestigten Dioptern *B*, *B* bezeichnet, welche zum vorwärts und rückwärts Visiren eingerichtet sind. Soll nun auf dem Felde ein $\angle xyz$ gemessen werden, so stellt man das Instrument mit dem Mittelpunkt des Kreisringes senkrecht über den Scheitelpunkt *y* des Winkels, dreht den Kreisring so lange herum, bis die Dioptern *B*, *B* in den einen Schenkel, z. B. *yx*, gerichtet sind, stellt den Ring mittelst einer Schraube an das Stativ unbeweglich fest und dreht die Alhidade herum, bis die Dioptern *A*, *A* in den zweiten Schenkel *yz* gerichtet sind, wonach man den Winkel *xyz* auf dem Ring in Graden unmittelbar ablies't. Ist eine Alhidaden-Diopter mit einem Nonius versehen, oder, was für die Controlle der Ablesung und zur Prüfung der Richtigkeit des Instruments zweckmäfsiger ist, haben beide Alhidaden-Dioptern Nonien, wie hier gezeichnet, so kann man Winkel bis auf eine oder zwei Minuten genau ablesen. Das Instrument ohne Nonius gewährt keine gröfsere Genauigkeit als die Boussole, und es ist diese dem A. schon deshalb vorzuziehen, weil die Richtung der Magnetnadel, welche hier die Normal-Visirlinie *B*, *B* vertritt, überall sich $\ddagger$ bleibt, nicht jedes Mal besonders eingestellt werden darf, und einen einmal begangenen Fehler nicht auf die ganze Vermessung fortpflanzt.

Astrologie (*αστηρ*, Gestirne, *λογιος*, kundig, gelehrt). Dem Wortbegriff nach die Lehre von den Gestirnen, die Sternkunde, die Himmelskunde; bei den Alten und auch hier und dort heut noch die an göttliche Weisheit grenzende oder vielmehr die in dieselbe hineinragende Wissenschaft von dem Einflufs der Gestirne auf die unserer Erde widerfahrenden weltlichen Begebenheiten, und zwar in Betreff ganzer Völker und einzelner Menschen, besonders derjenigen, welche regieren oder regieren wollen oder regieren sollen. Ein Astrologe kennt die Figur, zu welcher die verschiedenen Planeten und welche von ihnen unter sich mit der Sonne und gewissen Fixsternen sich gruppiren, wenn unserer Erde Krieg bedroht, die Figur für Pest, für Hungersnoth, für Friede und Freude. Er lehrt die Constellation, unter welcher zwei Liebende sich ehelichen müssen, um ein glückliches Leben mit einander zu führen; unter welcher ein Kind zu taufen ist, damit es ein frommer gottgefälliger Mensch werde, und so die Constellationen für alle einem Menschen wichtigen Unternehmungen.

Diese hohe Weisheit schreibt sich aus dem tiefsten Alterthum her, und man darf sich nicht wundern, dafs sie gewesen, dafs sie cultivirt worden ist, dafs man ihr vertraute und dafs sie in höchsten Ehren stand.

Denn wufste man es anders, als man es sah? Wufste man nicht, dafs die Erde still steht, und dafs nicht nur die Sonne, sondern der ganze gestirnte Himmel alle 24 Stunden um sie herum sich bewegt? War die Erde nicht die Hauptperson der

ganzen Schöpfung? Hatten Monarchen und deren Völker nicht kosmische Bedeutung und stand nicht eben darum jeder einzelne Mensch weltlich höher? Lehrt nicht selbst die Bibel, dafs Gott Sonne, Mond und Sterne nur der Erde wegen geschaffen habe? — Mose 1, 15: „Und seien Lichter an der Veste des Himmels, dafs sie scheinen auf Erden. Und es geschah also." 16: „Und Gott machte zwei grofse Lichter, ein grofs Licht, das den Tag regiere, und ein klein Licht, das die Nacht regiere. Dazu auch Sterne." 17: „Und Gott setzte sie an die Veste des Himmels, dafs sie schienen auf die Erde." —

Und welche Macht hatten grofse Männer über Sonne, Mond und Sterne? — Josua, der Nachfolger Mosis, nachdem er mit dem lieben Gott persönlich Rücksprache genommen, sprach (Josua 10, 12) Angesichts seines Heeres: Sonne, stehe stille zu Gibeon und Mond im Thale Ajalon; (10, 13): Da stand die Sonne und der Mond stille, bis dafs sich das Volk an seinen Feinden rächete. Also stand die Sonne mitten am Himmel und verzog unterzugehen beinahe einen ganzen Tag!

Wenn alle gebildeten Völker der Erde und aller Religionen solche und ähnliche historischen Thatsachen aufzuweisen hatten, wenn Könige der Erde unmittelbar von Göttern mit Königstöchtern erzeugt oder dem Schoofse von Göttinnen ihr Dasein verdankten, so war nichts natürlicher, als dafs die Sterne nur deshalb die Erde umkreis'ten, damit sie sich um die daselbst befindlichen hohen Personen um so specieller bekümmern könnten, dafs sie zu ihnen ermunternde, beistimmende, warnende, zürnende Worte sagten, in einer klaren, unverhohlenen Sprache, in der Sprache der Constellationen, welche die schriftgelehrten Priester verstanden und die Güte hatten zu übersetzen.

In um so höherem Ansehn mufsten diese Wahrsagungen mit den Wahrsagern selbst bei dem Volke stehen, dies Ansehn sich von Generation zu Generation forterben, auch Personen niederen Ranges Constellationen für sich in Anspruch nehmen, und diese sich von Weisen entziffern lassen, weil sich immer solche fanden, die mit einem dem Vermögen des Fragestellers angemessenen Honorar zufrieden waren.

Mit Galilei's Bestätigung des copernicanischen Systems, dafs der gestirnte Himmel und die Sonne an ihrem Kreislauf um die Erde ganz unschuldig seien, dafs also unsere Erde nicht nur nicht die Hauptperson der Schöpfung, sondern ein äufserst kleines und höchst untergeordnetes Gliedchen an der Kette des Weltalls ausmacht, mufste der Dünkel der Menschen tief herabsteigen! — Aber was sträubt sich mehr als menschlicher Dünkel? — Das Licht war zu grell, zu viel Licht auf einmal blendet, es wurden die mit göttlichem Geist beseelt gewesenen Bibelverfasser in ihrer Autorität angegriffen, das Licht war ein Irrlicht, Galilei erhielt für seine schnöde Lehre den wohlverdienten Lohn, das copernicanische System machte sich nur langsam spärliche Bahn. Aber wenn heut, nach 400 Jahren, nur noch Wenige es läugnen, der Dünkel der Menschen hat in demselben Maafse mit jenen Läugnern nicht abgenommen:

Wir leben in einer Zeit, welche für die in derselben sich bewegenden geistlichen Richtungen viel zu aufgeklärt ist; wir sehen Traum- und Zeichendeuter, Kartenleger, kurz: Wahrsager aller möglichen Gattungen und Systeme bei vornehmen Leuten ihr Glück machen; wir hören und lesen Bibelauslegungen und Consequenzen daraus, dafs der liebe Gott darüber sich erbarmen möchte, und dürfen uns daher nicht wundern, dafs heut noch der Mysticismus auch astrologische Richtungen hat, dafs Menschen sich herausnehmen, auch diejenige Bibel durch verquatschende Auslegungen herabzuziehen, welche der liebe Gott ohne Hülfe von sogenannten inspirirten Menschen, sondern ganz allein geschrieben hat, das Fundament einer einzigen und nicht zu verfälschenden Religion für Verehrung und Anbetung eines einzigen Gottes, in dem gestirnten Himmel das Weltgebäude, und für die es nur ein einziges Priesterthum giebt: die Wissenschaft in ihrer Wahrheit.

Astronomie (*αστηρ*, Gestirn, *νομος*, Anordnung, Gesetz). Himmelskunde, Sternkunde, die Lehre von den am Himmel befindlichen Gestirnen und den Gesetzen, nach welchen sie sich bewegen. Sie wird eingetheilt in die theoretische und in die praktische A. Erstere zerfällt in die sphärische, in die theoretische und in die physische A.; letztere in die beobachtende und in die rechnende A.

Die sphärische A., so genannt, weil der Himmel als eine hohle Halbkugel erscheint, heifst auch empirische A., weil hier erfahrungsmäfsig die bei den Astronomen üblichen Namen und Eintheilungen gelehrt werden; auch Astrognosie, weil sie eigentlich die der höheren Himmelskunde vorangehende Himmelsbeschreibung ist.

Sie lehrt die Punkte und Kreise kennen, welche auf der Himmelskugel verzeichnet werden, mit Hülfe deren man die Gestirne in ihrer Stellung und Bewegung angiebt. Als: Pol, Zenith, Frühlingspunkt; Aequator, Ekliptik, Parallelkreis, Horizont, Meridian; die Bezeichnung von Länge, Breite, Abweichung, Aufsteigung u. s. w., ferner Namen und Ort der Fixsterne und deren Gruppirungen zu Sternbildern, mit Rücksicht auf obige Punkte und Kreise.

Die theoretische A., welche besser die mathematische A. genannt werden möchte, weil sie ganz besonders die mathematischen Erkenntnisse beansprucht, und weil dann der folgende Theil, die physische A., welche ebenfalls eine theoretische A. ist, diesem Theil recht eigentlich als nothwendig angereiht erscheint. Aus demselben Grunde ist der Name theoretische A. (wie theoretisch von Theorie abgeleitet) nicht angemessen, und scientifische A. desgleichen nicht, weil beide Namen dem folgenden Theil mit gleichem Recht zukommen.

Sie lehrt, aus den Beobachtungen der Gestirne, besonders der Planeten deren wahre Bahnen bestimmen, Sein von Schein unterscheiden; sie ist dasjenige Gebiet, in welchem Copernicus und Galilei mit Hülfe ihrer bewundernswürdigen Vernunftschlüsse sich unsterblich gemacht haben, weshalb denn auch der ihr gegebene Name rationelle A. eben so richtig als schön ist.

Die physische A. (die in der Natur begründete). Diese lehrt die Naturgesetze kennen, zufolge welcher die Himmelskörper sich so bewegen, wie es geschieht, und lehrt folglich auch die Regeln, nach welchen deren Bewegungen im Voraus zu berechnen sind. In diesem Gebiet haben sich Galilei, Kepler und Newton hervorragend ausgezeichnet.

Astronomische Breite oder Breite eines Gestirns ist dessen Abstand von der Ekliptik. Die Ekliptik, die Ellipse, in welcher die Erde um die Sonne sich bewegt, hat etwa 40 Millionen Meilen im Durchmesser. Da nun die B. auch von Sternen angegeben werden sollen, deren Entfernungen vom Sonnensystem unermeſslich sind, so ist die Ebene der Ekl. nach allen Richtungen vom Mittelpunkt aus bis in's Unendliche erweitert zu denken; es ist demnach gleichgültig, wo man sich deren Mittelpunkt denkt, ob z. B. in dem Mittelpunkt der Sonne oder in dem der Erde, welche beide in der Ebene der Ekl. liegen.

Die Ekl. theilt also die Himmelskugel in zwei Halbkugeln, in die nördliche, in welcher der Nordpol liegt, und in die südliche, in welcher der Südpol liegt. Die in der ersteren befindlichen Sterne haben nördliche B., die in der letzteren belegenen südliche B.; Gestirne, die in der Ekliptik-Ebene selbst liegen, haben keine Breite oder die Breite = 0, wie Sonne und Erde.

Um die Breiten der Gestirne in ihrem Abstand von der Ekl. messen zu können, denke man sich irgend wo, z. B. in dem Mittelpunkt der Erde, den Mittelpunkt der Ekl., errichte hier auf der Ebene der Ekliptik nach beiden Seiten hin ein Loth, die Axe der Ekl., so sind die beiden unendlich fernen Endpunkte dieser Axe die Pole der Ekl., jeder durch beide Pole gelegte Kreis ist auf der Ekl. normal, der von einem Pol durch ein Gestirn gelegte, auf der Ekliptik normale Kreis heiſst der Breitenkreis des Gestirns und dessen Bogen zwischen dem Gestirn und der Ekliptik die Breite des Gestirns.

Die B. eines Gestirns kann nie mehr als 90° betragen, und diese hat dasselbe, wenn es in einem der Pole der Ekl. sich befindet. Planeten, Monde und Kometen haben in jedem Punkt ihrer Bahn eine B., mit Ausnahme, wenn sie sich in ihren Knoten (s. absteigender Knoten) befinden, nämlich in den Punkten, wo sie die Ekl. durchschneiden, also bald nördliche, bald südliche B. Die Länge der Bahn eines Planeten vom aufsteigenden Knoten ab bis zu einem Punkt der Bahn gemessen, heiſst das Argument der zu diesem Punkt der Bahn gehörigen B.

Durch die Breite und die Bezeichnung des Punktes, wo der sie bestimmende Breitenkreis die Peripherie der Ekl. schneidet (die Länge des Sterns), ist die Lage des Sterns am Himmel vollkommen bestimmt.

Die Fixsterne haben unmeſsbare Entfernungen sowohl von der Erde, wie von der Sonne, und daher sind die beiden Winkel gleich groſs, welche ein Fixstern, von der Erde und von der Sonne aus gesehen, mit der Ebene der Ekliptik bildet.

Die zu unserem Sonnensystem gehörenden Körper dagegen, die Planeten, Monde und Kometen haben meſsbare Entfernungen von Sonne und Erde; von jedem dieser beiden Weltkörper sind die Entfernungen verschieden, folglich auch die Winkel, die von der Erde und von der Sonne aus beobachtet ein Planet, Mond oder Komet in einem bestimmten Augenblick mit der Ekliptik bildet, d. h.

dessen Breite, je nachdem diese auf den Erd- oder Sonnenmittelpunkt bezogen wird. Die von der Erde aus beobachtete Breite heifst die geocentrische Breite, die auf den Mittelpunkt der Sonne bezogene die heliocentrische Breite des zu unserem Sonnensystem gehörenden Gestirns.

Astronomischer Breitenkreis, s. den vor. Art.

Astronomische Dämmerung. 1. Dämmerung ist die Erleuchtung der Erdoberfläche vor dem Aufgang und nach dem Untergang der Sonne durch Brechung und Spiegelung der Lichtstrahlen in der Erd-Atmosphäre. (Vergl. Astronom. Strahlenbrechung). Erstere heifst Morgen-Dämmerung, letztere Abend-D. Eben so wie der von der Sonne erleuchtete Mond sein erhaltenes Licht uns zusendet, wie bei nahe unter dem Horizont stehender Sonne erleuchtete Wolken, die Morgen- und die Abendröthe uns erscheinen, wie bei Tage auch diejenigen Gegenstände, welche nicht unmittelbar von der Sonne beschienen werden, hell leuchten, in schmalen, mit hohen Gebäuden eingefafsten Höfen die untersten Zimmer noch erhellt werden, indem das Sonnenlicht in den zusammenhangenden Theilchen der Atmosphäre sich hierher fortpflanzt, eben so verbreitet die erleuchtete atmosphärische Luft eine Helligkeit, welche mit der Annäherung der Sonne an den Horizont zu- und mit deren Entfernung abnimmt.

In welchem Stande gegen den Horizont eines Orts die Sonne anfängt, die obersten Luftschichten zu erleuchten, ist nicht ganz festgestellt, und kann es auch nicht, weil von den mehr oder weniger wässerigen Beimengungen derjenigen Luftschichten, welche die Sonne zuerst oder zuletzt trifft, die Erscheinung der Dämmerung mit abhängt. Sie wird im Mittel 18° angegeben, und diese Dämmerung ist die astronomische Dämmerung, während unter bürgerlicher Dämmerung diejenige D. verstanden wird, bei welcher man Gegenstände noch deutlich erkennen kann, und für diese wird der Stand der Sonne im Mittel zu 6° unter dem Horizont angenommen.

Ist nämlich HH' der scheinbare Horizont für den Ort O, und steht die Sonne um den Winkel $HOA = H'OA' = 18°$ unter dem Horizont, hat also die Sonne die Richtung $CE = CE'$, so dafs die Bogen $DE = D'E' = 18°$ betragen, so ist der durch EE' gelegte Kreis (astronomischer Dämmerungskreis) die Dämmerungsgrenze für den Ort O.

2. Ist O ein Ort im Aequator und steht die Sonne ebenfalls daselbst, so beträgt die Zeit jeder astr. D., der Morgen- und der Abend-D.

Fig. 86.



$\frac{18°}{360°} \times 24$ Stunden = 1 Stunde 12 Minuten, die bürgerliche ⅓ derselben = 24 Minuten.

3. Ist O ein Ort im Pol und ist die Sonne aus dem gleichnamigen Wendekreis in den Aequator getreten, so geht sie im Horizont auf und unter. Die Sonne hat auf dem Wege vom Wendekreis in den Aequator einen Bogen von 23½° beschrieben und dazu 3 Monate Zeit bedurft, und bedarf nun eben so viel Zeit, um nach der entgegengesetzten Sonnenwende zu gelangen, mithin beträgt an dem Pol die Zeit der a. D. $\frac{18°}{23\frac{1}{2}°} \times 3$ Monat = 2 Monat 9 Tage, die der bürgerlichen D. 23 Tage, und die eigentliche astronomische Nacht daselbst nur 1 Monat 12 Tage.

Die hier betrachtete D. ist die Abenddämmerung, die nach dem Winter wieder beginnende D. die Morgendämmerung, so dafs an dem Pol in einem Jahr nur zwei Dämmerungen, jede von 2 Monat 9 Tagen, vorkommen.

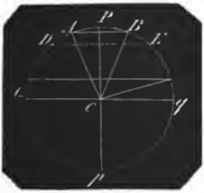
4. Wenn die Sonne im Aequator steht, so sagt man wohl, die Pole haben 24 Stunden lang Tag, dies ist aber nicht richtig: Auf der ganzen Erde ist nur 12 Stunden lang Tag und 12 Stunden Nacht. Denn wenn die Sonne aus dem Wendekreise der dem Pol zugehörigen Halbkugel in den Aequator tritt, so können für die der 24stündigen Umdrehung zukommende Tageslänge nur die letzten 12 Stunden gerechnet werden, in welchen die Sonne noch über dem Aequator stand, die folgenden 12 Stunden, in welchen sie aus dem Aequator nach dem anderen Wendekreise sich bewegt, gehören der Nacht an, welche nun permanent bleibt. Und eben so sind beim Wieder-Eintritt der Sonne in die dem Pol zugehörige Halbkugel die

letzten 12 Stunden, in denen sie noch aufserhalb des Aequators sich befand, der permanent gewesenen Nacht zukommend, und die ersten 12 Stunden, in welchen sie von dem Aequator ab in die Halbkugel aufstieg, dem Tage, der nun permanent bleibt.

Nimmt man nun, wenn die Sonne im Aequator steht, von dem Pol *P* oder *p* aus, auf einem beliebigen Meridian einen Bogen $= 18°$, so haben alle Orte des dem Endpunkt dieses Bogens zugehörigen Parallelkreises 12 Stunden Tag und 12 Stunden Dämmerung. Dies sind alle Orte von 72° nördlicher und südlicher Breite oder $5\frac{1}{2}°$ über dem Polarkreise nach dem Pol hin. Von diesen beiden Parallelkreisen ab bis zum Aequator hin werden die D. immer kürzer und die Nächte immer länger; im Aequator selbst ist jede der beiden D. = 1 St. 12 Min. zugleich das Minimum aller D. auf der ganzen Erde.

5. Es seien *P*, *p* die Pole; ist $AP = BP = 23\frac{1}{2}°$, so ist, wenn die Sonne in dem mit *P* gleichnamigen Wendekreise steht,

Fig. 87.



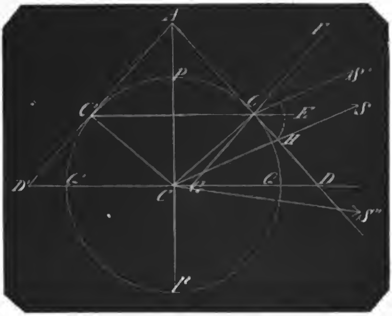
die ganze Polarzone *PAB* erleuchtet und im Polarkreise *AB* ist 24stündiger Tag. Nimmt man $AD = BE = 18°$, so haben die Orte im Parallelkreise *DE* die Zeit der beiden D. plus dem dazwischen liegenden Tage = 24 Stunden, also die Orte von der gleichnamigen geogr. Breite

$$= 90° - 23\tfrac{1}{2}° - 18° = 48\tfrac{1}{2}°.$$

6. Man kann für jeden Ort der Erde sehr leicht ermitteln, ob er bei gegebenem Stande der Sonne Dämmerung erhält oder nicht, indem man die Tiefe der Sonne im Maximo, also zu Mitternacht für den Ort aufsucht.

Es seien *P*, *p* die Erdpole, *Q' Q* der

Fig. 88.



Aequator, *O* ein Ort zu Mittage, also *O'* derselbe zu Mitternacht, *CS* die gleichnamige Richtung der Sonne, die Horizonte für *O* und *O'* schneiden sich in der verlängerten Axe *p P* in *A* und den Aequator in *D* und *D'*. Verlängert man den Parallelkreis *O'O*, zieht $OS' \parallel CS$ und durch *O*, $GF \parallel O'A$, so ist

$\angle S'OD$ die Höhe (*Sh*) der Sonne zu Mittag
$\angle FOS$ die Tiefe (*Sf*) der Sonne zu Mitternacht.

Nun ist

$$\angle S'OD = \angle SHD = \angle ODC + \angle SCD$$

Es ist aber $\angle ODC = \angle DOE =$ der Aequatorhöhe für *O* und $\angle SCD$ ist die mit *O* und *P* gleichnamige Abweichung der Sonne. Demnach ist bei gleichnamiger Abweichung der Sonne die Mittagshöhe (*Sh*) der Sonne = der Aequatorhöhe des Orts plus der Abweichung der Sonne.

Hat die Sonne ungleichnamige Abweichung, wie $\angle S''CD$, so ist $\angle S''JK =$ der Mittagshöhe der Sonne für *O*, und

$$= \angle ODC - \angle S''CD.$$

Demnach ist bei ungleichnamiger Abweichung der Sonne die Mittagshöhe (*Sh*) der Sonne = der Aequatorhöhe des Orts minus der Abweichung der Sonne.

Da $\angle ODC = 90° - \angle OCQ$, und da $\angle OCQ$ die geographische Breite von *O* ist, so hat man, wenn diese für einen Ort *O* gegeben ist, die Mittagshöhe der Sonne für den Ort *O* auch = dem Complement der geogr. Br. des Orts ± der Abweichung der Sonne.

Ferner ist $\angle FOD = \angle AOG = \angle ODG + \angle OGD = 2\angle ODG$, d. h. die Summe $(Sh + Sf)$ der Mittagssonnenhöhe und der Mitternachtssonnentiefe für denselben Ort ist gleich der doppelten Aequatorhöhe des Orts oder dessen doppeltem Complement

der geogr. Br. Mithin die Mitternachtssonnentiefe (*Sf*) ist gleich dieser doppelten Aequatorhöhe weniger der Sonnenhöhe, oder gleich der **Aequatorhöhe des Orts + der Abweichung der Sonne.**

7. **Steht die Sonne im Aequator, so ist auf allen Orten der Erde** $Sh = Sf$.

Geogr. Br.	$Sh + Sf$	$Sh = Sf$
Pole 90°	0	0
72°	36°	18°
Polarkreise $66\frac{1}{2}$°	47°	$23\frac{1}{2}$°
Wendekreise $23\frac{1}{2}$°	133°	$66\frac{1}{2}$°
Aequator 0	180°	90°

Da sämmtliche Orte Tag haben, so haben sie auch Tag + *D*. Vom Aequator ab haben alle Orte auch Nacht, bis zu 72° geogr. Br., wo die Grenze der Nacht und Tag + *D* = 24 Stunden beträgt, weil die Sonnentiefe = 18° ist, wie schon ad 4 nachgewiesen worden.

8. **Steht die Sonne im nördlichen Wendekreise, Abweichung** $= 23\frac{1}{2}$°, **so ist**

Geogr. Br.	$Sh + Sf$	Sh	Sf
Nordpol 90°	0	$23\frac{1}{2}$°	$-23\frac{1}{2}$°
Nördl. Polarkreis $66\frac{1}{2}$°	47°	47°	0
Berlin 52° 31′ 13″	74° 57′ 34″	60° 58′ 47″	13° 58′ 47″
$48\frac{1}{2}$°	83°	65°	18°
Wendekreis $23\frac{1}{2}$°	133°	90°	43°
Aequator 0	180°	$66\frac{1}{2}$° ($113\frac{1}{2}$°)	$66\frac{1}{2}$°

$Sf = -23\frac{1}{2}$° für den Nordpol heifst, dafs die Sonne keine Tiefe hat, sondern fortdauernd die Höhe $= 23\frac{1}{2}$°. Alle Orte der nördlichen Halbkugel haben Tag, also auch alle Tag + D.

In Berlin steht die Sonne niedriger als 18°, mithin hat Berlin um die Zeit des längsten Tages permanente Dämmerung und keine Nacht.

Unter $48\frac{1}{2}$° geogr. Br. ist vom Aequator ab der erste Parallelkreis, in welchem Tag + D. 24 Stunden dauert, wie dies schon ad 5 nachgewiesen ist, also in der Nähe von Passau, Landshut, Tübingen, Strafsburg, Luneville u. s. w.

Die Orte der südlichen Halbkugel verhalten sich hier so, wie die der nördlichen in der folgenden Tabelle.

9. **Steht die Sonne im südlichen Wendekreise (Abweichung** $= 23\frac{1}{2}$°), **so ist**

Nördl. geogr. Br.	$Sh + Sf$	Sh	Sf
Nordpol 90°	0°	$-23\frac{1}{2}$°	$23\frac{1}{2}$°
$84\frac{1}{2}$°	11°	-18°	29°
Polarkreis $66\frac{1}{2}$°	47°	0	47°
Berlin 52° 31′ 13″	74° 57′ 34″	14° 58′ 47″	59° 58′ 47″
$48\frac{1}{2}$°	83°	18°	65°
Wendekreis $23\frac{1}{2}$°	133°	43°	90°
Aequator 0	180°	$66\frac{1}{2}$°	$113\frac{1}{2}$° ($66\frac{1}{2}$°)

$Sh = -23\frac{1}{2}$° für den Nordpol heifst, dafs die Sonne keine Höhe hat, sondern fortdauernd die Tiefe $23\frac{1}{2}$°.

Vom Polarkreis ab haben alle Orte der nördlichen Halbkugel Tag, also auch alle Tag + D.

Unter $84\frac{1}{2}$° geogr. Br., also $5\frac{1}{2}$° **vom** Nordpol, ist der erste Parallelkreis, **von** dem aus die D. beginnen, in ihm selbst nur einen Augenblick lang, weil die Tiefe der Sonne von 18°, der D.-Grenze, bis 29° zunimmt, und kein Ort hat Nacht-

dämmerung, sondern jeder vollständige Nacht.

10. Um zu erfahren, mit welcher Abweichung der Sonne in Berlin die 24stündige Nachtdämmerung beginnt, hat man

$74° 57' 34'' = Sh + Sf = Sh + 18°$

woraus $Sh = 56° 57' 34''$

und die zugehörige nördliche Abw. der Sonne

$= Sh + \text{geogr. Br.} - 90° = 19° 28' 47''$

Da nun vom Austritt der Sonne aus dem Aequator (20. März) bis zum Eintritt in den nördlichen Wendekreis (22. Juni) 94 Tage vergehen, so hat man die Anzahl der Tage der permanenten D. $= x$ aus der Proportion

$23\frac{1}{2}° : 23\frac{1}{2}° - 19° 28' 47'' = 94 : x$

woraus $x = 16$ Tage.

Bei der Rückkehr der Sonne aus dem Wendekreise nach dem Aequator sind abermals 16 Tage für permanente D., und somit in Berlin um den längsten Tag am 22. Juni 32 Tage nachtlos, nämlich vom 6. Juni bis zum 8. August.

11. Für einen aufserhalb des Aequators liegenden Ort *O*, wenn die Sonne im Aequator steht, erhält man mit Hülfe der sphärischen Trigonometrie den Dämmerungsbogen, wenn man *Sinus* 18° durch den *Sinus* der Aequatorhöhe dividirt. Denn ist *Hh* der Horizont für *O*, *Qq* der Aequator, *dd* der Dämmerungskreis, der den Aequator in *S* schneidet, so hat man *SO* als den Dämmerungsbogen für *O*, zieht man nun den Scheitelkreis vom Zenith *Z* durch *S*, so ist der Bogen *BS* desselben = 18° und senkrecht in *B*, mit-

Fig. 89.



hin $\angle SBO = 90°$, $\angle BOS =$ der Aequatorhöhe für *O*,

und $\sin BOS : \sin SBO = \sin BS : \sin OS$,

d. i. $\sin BOS : 1 = \sin 18° : \sin OS$,

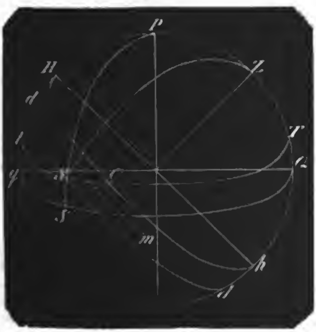
woraus $\sin OS = \dfrac{\sin 18°}{\sin BOS}$

Die Formel hat nur Anwendung bei $\angle BOS = 18°$ bis 90° oder bei Orten von 0° bis 72° geogr. B. Für 0° Breite liegt *O* im Aequator, $\angle BOS$ ist $= 90°$, $OS = 18°$ giebt 72 Zeit-Minuten. Für 72° Breite, also $5\frac{1}{2}°$ über dem Polarkreise, ist $\angle BOS = 18°$ und $OS = 90°$, giebt eine Dämmerung von 6 Stunden, so dafs hier die Morgen-Dämmerung mit dem Ende der Abend-Dämmerung anfängt, wie schon ad 4 und 7 nachgewiesen worden.

12. Für einen aufserhalb des Aequators liegenden Ort *O*, wenn die Sonne gleichnamige Abweichung hat, findet man den Dämmerungsbogen *OS* plus dem halben Tagebogen *OT*, also *ST* durch den $\angle SPT = \angle SPZ$, durch die Formel:

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} SPZ = \frac{\sin \frac{1}{2}(ZS + PS - PZ) \times \sin \frac{1}{2}(ZS + PZ - PS)}{\sin PZ \times \sin PS}$$

Fig. 90.



Ist nämlich *Hh* der Horizont des Orts, *dd*, darunter 18° tief, der Dämmerungskreis, *Qq* der Aequator, *Tt* darüber die nördliche Abweichung der Sonne, *S* deren Stand in *dd*, so ist *OT* der halbe Tagebogen, *SO* der Dämmerungsbogen; ist *PSS'* der Abweichungskreis durch *S*, so wird Bogen *SOT* gemessen durch *S'Q* oder durch $\angle S'PQ = SPZ$, von dem das Quadrat des Sinus der Hälfte durch obige Formel gegeben ist; denn in dem Dreieck *PSZ* sind *PS* und *PZ* die einschliefsenden Seiten, und *SZ* der durch *S* gelegte, also in *A* senkrechte Scheitelkreis, ist die gegenüber liegende Seite.

PS ist das Complement der nördlichen Abweichung *SS'*.

PZ der Zenith-Abstand vom Nordpol $SZ = SA + AZ = 18° + 90° = 108°$

Die Formel giebt nur mögliche Werthe, wenn der Zähler kleiner als

der Nenner ist. Bei gleichem Zähler und Nenner wird $sin^2 \frac{1}{2} ZPS = 1$, mithin $ZPS = 180°$, also der ganze Tagebogen nebst den beiden Dämmerungsbogen $= 360°$.

Für $PS = 90° - 23\frac{1}{2}° = 66\frac{1}{2}°$, d. h. wenn die Sonne in dem mit dem Pol gleichnamigen Wendekreise steht, erhält man:

$$sin^2 \frac{1}{2} ZPS = \frac{sin \frac{1}{2}(174\frac{1}{2}° - PZ)\ sin \frac{1}{2}(41\frac{1}{2}° + PZ)}{sin\, PZ \cdot sin\, 66\frac{1}{2}°}$$

Setzt man $PZ = 41\frac{1}{2}°$, so wird $\frac{1}{2}(174\frac{1}{2}° - PZ) = 66\frac{1}{2}°$, $sin^2 \frac{1}{2} ZPS = 1$, mithin $ZPS = 180°$ und der Tagebogen + den beiden D.-Bögen = 24 Stunden; der Zenith-Abstand $41\frac{1}{2}°$ giebt aber die geogr. Br. $= 48\frac{1}{2}°$, wie schon ad 5, 8 und 9 nachgewiesen worden.

13. Um aus der Formel ad 12 zu erfahren, mit welcher nördlichen Abweichung der Sonne die permanente D. in Berlin anfängt, hat man

$\frac{1}{2} ZPS = 90°$

$ZS = 108°$

$PZ =$ dem Complement der geogr. Br. des Orts $= 90° - 52°31'13'' = 37°28'47''$

und es entsteht

$$1 = \frac{sin \frac{1}{2}(70°31'13'' + x) \times sin \frac{1}{2}(145°28'47'' - x)}{sin\, x \cdot sin\, 37°28'47''}$$

Da nach No. 8 und 10 die Aufgabe möglich ist, so mufs es für x einen Werth geben, für welchen Zähler und Nenner gleich werden, mithin mufs der erste Factor des Zählers $= sin\, x$ sein, d. h. $x = 70°31'13''$

Diesen Werth in den zweiten Factor gesetzt, giebt diesen $= sin\, 37°28'47''$

x ist das Complement der nördlichen Abweichung, und man erhält diese

$$= 19°\ 28'\ 47''$$

wie schon ad 10 nachgewiesen worden.

14. Wenn die Sonne mit dem Ort O ungleichnamige Abweichung hat, bleibt die Formel 12 dieselbe, nur dafs $PS = 90°$ + der Abweichung beträgt. Hier hat man für gleichen Zähler und Nenner $ZPS = 180°$, für $PS = 90° + 23\frac{1}{2}° = 113\frac{1}{2}°$, d. h. wenn die Sonne in dem mit dem Pol ungleichnamigen Wendekreise steht, erhält man für gleichen Zähler und Nenner des Bruchs:

$$\frac{sin \frac{1}{2}(221\frac{1}{2}° - PZ) \times sin \frac{1}{2}(PZ - 5\frac{1}{2}°)}{sin\, PZ \times sin\, 113\frac{1}{2}°}$$

$PZ = 138\frac{1}{2}°$; d. h. der Parallelkreis, in welchem sämmtliche Orte zur Zeit der beiden Dämmerungen + dem zwischen liegenden Tage = 24 Stunden haben, liegt $41\frac{1}{2}°$ von dem gleichnamigen Pol, oder unter $48\frac{1}{2}°$ gleichnamiger geogr. Br., wie schon ad 5 gezeigt worden.

Setzt man $PZ = 23\frac{1}{2}°$, d. h. sucht man $\angle ZPS$ für die Orte des ungleichnamigen Polarkreises, so erhält man

$$sin^2 \frac{1}{2} ZPS = \frac{sin\ 18°}{sin\ 47°}$$

$$log\, sin \frac{1}{2} ZPS = 9{,}81292745 - 10$$

und $\angle ZPS = 81°\ 5'$, mithin die Zeit des ganzen Tage- und der beiden angrenzenden Dämmerungsbogen $= \frac{81°\ 5'}{180°} \times 24$ Std. = 10 Stunden 49 Minuten.

Wenn die Sonne in dem ungleichnamigen Wendekreise steht, so tangirt ihre Richtung den Polarkreis, es ist mithin Sonnen-Aufgang und Sonnen-Untergang in einem und demselben Augenblick, daher fängt mit dem Aufhören der Morgendämmerung zugleich die Abend-D. an, und beide zusammen währen 10 Std. 49 Min., so dafs die eigentliche Nacht nur 13 Std. 11 Min. dauert.

15. In dem speciellen Fall (No. 14), dafs die Sonne in dem ungleichnamigen Wendekreis steht, ist der positive Grenzwerth von $PZ = 5\frac{1}{2}°$; hierfür wird $\angle ZPS = 0$, also Dämmerungen giebt es dann nur in einer Entfernung von $5\frac{1}{2}°$ von dem Pol, und von der ungleichnamigen geogr. Br. $84\frac{1}{2}°$ ab bis zum Pol; also nur auf $5\frac{1}{2}°$ Breite giebt es keine Dämmerung mehr, wie dies schon ad 9 gezeigt ist.

16. Um aus der Formel No. 12 zu erfahren, unter welcher südlichen Abweichung (x) am Nordpol die permanente D. eintritt und aufhört, hat man

$ZPS = 180°$; $sin^2 \frac{1}{2} ZPS = 1$

$ZS = 108°$

$PS = 90° + x$

$PZ = 0$

$$\text{mithin } 1 = \frac{sin \frac{1}{2}(198° + x) \times sin \frac{1}{2}(18° - x)}{sin\, 0 \times sin(90° + x)}$$

Betrachtet man PZ (hier $= 0$ im Nenner) als den Bogen, der soeben verschwinden will, so mufs der Bogen $\frac{1}{2}(18° - x)$ des Zählers demselben entsprechen, mithin hat man die südliche Abweichung $x = 18°$. Dann auch $\frac{1}{2}(198° + x) = 108° = 90° + 18° = 90 + x$, der Zähler also dem Nenner gleich. Die eigentliche Nacht des Nordpols dauert also so lange, als die Sonne von der südlichen Abw. 18° in den südlichen Wendekreis und von dort wieder

in denselben Abweichungskreis tritt, wie ad 3 schon nachgewiesen ist.

17. Will man für Berlin die Länge der eigentlichen Nacht am kürzesten Tage, also bei der südl. Abw. der Sonne von $23\frac{1}{2}°$ erfahren, so hat man

$ZS = 108°$
$PS = 90° + 23\frac{1}{2}° = 113\frac{1}{2}°$
$PZ = 90° - 52°31'13'' = 37°28'47''$

und es ist

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} ZPS = \frac{\sin 92°0'36\frac{1}{2}'' \times \sin 15°59'23\frac{1}{2}''}{\sin 37°28'47'' \times \sin 113\frac{1}{2}°}$$
$$= \frac{\sin 87°59'23\frac{1}{2}'' \times \sin 15°59'23\frac{1}{2}''}{\sin 37°28'47'' \times \sin 66\frac{1}{2}°}$$

woraus $\log \sin \frac{1}{2} ZPS = 9{,}84657906$ und $ZPS = 89°14'18''$

Dies ist der Bogen des halben Tages und einer Dämmerung, mithin ist der Bogen für den Tag + 2 angrenzenden D. $= 178°28'36''$

und der Nachtbogen dessen Ergänzung zu $360° = 181°31'24''$, daher

die Nachtzeit $= \frac{181°31'24''}{360°} \times 24$ Stunden

= 12 Std. 6 Min. $5\frac{1}{2}$ Sec.

18. Denkt man sich in No. 12 den Bogen PO gezogen, so ist $\angle OPQ = \angle OPZ$ der $\angle$, der den halben Tagebogen OT mifst, und man hat

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} OPZ = \frac{\sin \frac{1}{2}(OZ + OP - PZ) \times \sin \frac{1}{2}(OZ + PZ - OP)}{\sin PZ \cdot \sin OP}$$

hier ist wieder

$OP = 90°$ minus der nördlichen Abweichung.

PZ der Zenith-Abstand vom Nordpol und OZ ist hier $90°$.

Für eine südliche Abweichung der Sonne bleibt die Formel dieselbe (s. No. 14), nur dafs $OP = 90° +$ der Abweichung genommen werden mufs.

Man kann also, wenn man aus Formel No. 12 den Bogen des halben Tages + D erhält, nach dieser Formel den Bogen des halben Tages finden, diesen von dem ersten abziehen, um den D.-Bogen zu erhalten.

19. Für den kürzesten Tag in Berlin hat man

$OZ = 90°$
$OP = 90° + 23\frac{1}{2}° = 113\frac{1}{2}°$
$PZ = 90° - 52°31'13'' = 37°28'47''$

mithin

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} OPZ = \frac{\sin 83°0'36\frac{1}{2}'' \times \sin 6°59'23\frac{1}{2}''}{\sin 37°28'47'' \times \sin 66\frac{1}{2}°}$$

Man erhält

$\log \frac{1}{2} OPZ = 9{,}667691675 - 10$
und $\angle OPZ = 55°27'12''$

und der halbe Tag dauert

$\frac{55°27'12''}{360°} \times 24$ Stunden $= 3$ Std. $41'48{,}8''$

Diese Berechnung stimmt genau mit der unter dem Art. Ascensional-Differenz, Beisp. 3, gegebenen; man bedient sich also für die Auffindung des Tagebogens für einen gegebenen Ort der Erde besser der dort aufgestellten Regel

$$\sin \text{Asc.-Diff.} = \frac{tg \text{ Abweichung der Sonne}}{tg \text{ Aequatorhöhe des Orts}}$$

wo dann $\frac{1}{2}$ Tagebogen $= 90° \pm$ Asc.-Differenz.

Nun ist (No. 17) der Bogen des halben Tages + D. $= 89°14'18''$
Aus No. 19 ist $\frac{1}{2}$ Tagebogen $\quad 55°27'12''$
daher ein Dämmerungsbogen $\quad 33°47'\ 6''$
mithin die D.-Zeit am kürzesten Tage

$= \frac{33°47'6''}{360°} \times 24$ Std. $= 2$ Std. 15 M. 8,4 Sec.

der halbe Tag dauert

(s. o.)		3 „ 41 „ 48,8 „
$\frac{1}{2}$ Tag + D.	=	5 Std. 56 M. 57,2 Sec.
Tag + 2 D.	=	11 Std. 53 M. 54,4 Sec.
folglich Nacht	=	12 Std. 6 M. 5,6 Sec.

wie in No. 17 berechnet worden.

20. Unter welcher Abweichung der Sonne ein Ort der Erde von gegebener geogr. Breite oder Polhöhe die geringste Dämmerungszeit hat, ist keine sehr wichtige Frage, und doch ist sie verschiedentlich und mühsam gelöst worden.

Da im Sommer die längsten D. existiren, so kann die geringste Dämmerungszeit nur in den Winter fallen, also bei ungleichnamiger Abweichung der Sonne mit der Lage des Orts, und diese geschieht offenbar, wenn der D.-Bogen die geringste Länge hat, wenn also die Sonne diesen Bogen möglichst senkrecht durchläuft, folglich wenn die Mitte dieses Bo-

gens im Morgen- oder Abendpunkt des Ortes liegt, wenn also $\angle mZP = 90°$ ist, wo m die Mitte des letzten vor Sonnenaufgang oder des ersten nach Sonnenuntergang beschriebenen Bogens von 18° Höhe unterhalb des Horizonts bedeutet.

In jedem rechtwinkligen sphärischen △ ist der *cos* der Hypothenuse = dem Product der *cos* beider Katheten, daher $\cos Pm = \cos PZ \cdot \cos Zm$

Nun ist $Pm = 90° +$ Abweichung $= 90° + d$
$PZ =$ der Zenithdistanz z = dem Complement der Polhöhe p oder dem der geogr. Breite des Orts

und $Zm = 90° + 9° = 99°$
mithin $\cos(90 + d) = \cos z \cdot \cos 99°$
oder $-\sin d = \cos z(-\sin 9°)$
woraus $\sin d = \cos z \cdot \sin 9° = \sin p \cdot \sin 9°$

21. In Gehlers physikalischem Wörterbuch II, pag. 267—269 (1826), ist unter ähnlichen Betrachtungen mit Hülfe der Lehre vom Minimum aus der Differenzialrechnung gefunden $\sin d = \sin p \cdot tg\, 9°$ und für einen Ort von 50° Polhöhe die südl. Abw. $d = 6°58'$.

Es ist $\log \sin 50° = 9{,}8842540 - 10$
$\log \sin 9° = 9{,}1943324 - 10$
$\log tg\, 9° = 9{,}1997125 - 10$

$\sin d = \sin p \cdot \sin 9°$ giebt $d = 6°52'57\frac{1}{2}''$
$= \sin p \cdot tg\, 9°$ „ $d = 6°58'8''$

Um beide Formeln mit einander zu vergleichen, sei die Polhöhe eines Orts 50°, dessen Zenithdistanz also = 40°. Dann hat man nach Formel No. 12 für $d = 6°52'57\frac{1}{2}''$

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} SPZ = \frac{\sin 82°26'28\frac{1}{2}'' \times \sin 25°33'31\frac{1}{4}''}{\sin 40° \times \sin 83°7'2\frac{1}{2}''}$$

$\log \sin 82°26'28\frac{1}{2}''$	$= 9{,}9962096$
$\log \sin 25°33'31\frac{1}{4}''$	$= 9{,}6349156$
$\log$ Zähler	$= 9{,}6311252$
$\log \sin 40°$	$= 9{,}8080675$
$\log \sin 83°7'2\frac{1}{2}''$	$= 9{,}9968590$
$\log$ Nenner	$= 9{,}8049265$
$\log \sin^2 \frac{1}{2} SPZ$	$= 19{,}8261987 - 20$
$\log \sin \frac{1}{2} SPZ$	$= 9{,}91309935 - 10$

Man findet in den Tafeln
$\frac{1}{2} SPZ = 54°57'\frac{1}{4}''$
mithin SPZ = dem Bogen des halben Tages + einer Dämmerung
$109°54'\frac{1}{2}''$
der halbe Tagebogen ist (s. No. 19) $= 90° -$ Ascensional-Differenz

$$\sin \text{Asc.-Diff.} = \frac{tg\, 6°52'57\frac{1}{2}''}{tg\, 40°}$$

$\log tg\, 6°52'57\frac{1}{2}''$	$= 9{,}0817283$
$\log tg\, 40°$	$= 9{,}9238135$
$\log \sin$ Asc.-D.	$= 9{,}1579148$
woraus Asc.-D.	$= 8°16'15''$

und der halbe Tagebogen	$= 81°43'45''$
dieser + einer D. war	$= 109°54'\frac{1}{2}''$
bleibt ein D.-Bogen	$= 28°10'15\frac{1}{2}''$

Für $d = 6°58'8''$

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} SPZ = \frac{\sin 82°29'4'' \times \sin 25°30'56''}{\sin 40° \times \sin 83°1'52''}$$

$\log \sin 82°29'4''$	$= 9{,}9962530$
$\log \sin 25°30'56''$	$= 9{,}6342314$
$\log$ Zähler	$= 9{,}6304844$
$\log \sin 40°$	$= 9{,}8080675$
$\log \sin 83°1'52''$	$= 9{,}9967796$
$\log$ Nenner	$= 9{,}8048471$
$\log \sin^2 \frac{1}{2} SPZ$	$= 19{,}8256373 - 20$
$\log \sin \frac{1}{2} SPZ$	$= 9{,}91281865 - 10$
hieraus $\frac{1}{2} SPZ$	$= 54°53'50\frac{1}{2}''$
und SPZ	$= 109°47'41''$

$$\sin \text{Asc.-D.} = \frac{tg\, 6°58'8''}{tg\, 40°}$$

$\log tg\, 6°58'8''$	$= 9{,}0871899$
$\log tg\, 40°$	$= 9{,}9238135$
$\log \sin$ Asc.-D.	$= 9{,}1633764$
woraus Asc.-D.	$= 8°22'34''$
also der halbe Tagebogen	$= 81°37'26''$
dieser + D.	$= 109°47'41''$
bleibt ein D.-Bogen	$= 28°10'15''$

Der Unterschied beider Bögen, je nachdem man $\sin d = \sin p \cdot \sin 9°$, oder $= \sin p \cdot tg\, 9°$ nimmt, beträgt mithin etwa $\frac{1}{2}$ Bogensecunde, d. i. 2 Zeittertien, während ein Unterschied nur in Secunden noch unbedeutend sein würde.

Die Zeit, in welcher die Sonne die südliche Abweichung von circa $23\frac{1}{2}°$ durchläuft, bis sie aus dem Wendezirkel des Steinbocks in den Aequator tritt, beträgt vom 22. Dec. bis 21—22. März im Mittel 90 Tage. Denkt man sich diese mit gleichförmiger Geschwindigkeit durchlaufen, so hat man in 90 Tagen zu 24 Stunden die Zeit für eine Bogenminute der Abweichung

$$= \frac{90 \cdot 24}{23\frac{1}{2} \cdot 60} = 1{,}532 \text{ Stunden.}$$

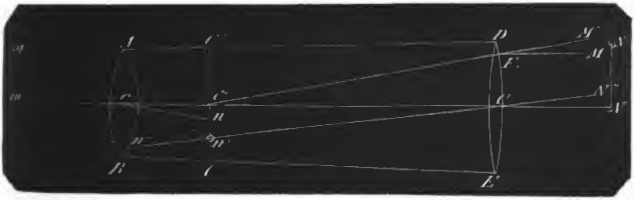
Bringt man für d $tg\, 9°$ in Rechnung, so erhält man $d =$	$6°58'8''$
für Einführung von $\sin 9°$ ist d	$6°52'57\frac{1}{2}''$
Unterschied im Bogen	$5'10\frac{1}{2}''$

also ein Zeit-Unterschied von
$5\frac{1}{6} \times 1{,}532 = 8$ Stunden,
woraus wiederum erhellt, daſs beide Ausdrücke für d ein übereinstimmendes Resultat geben müssen.

Dagegen ist, streng genommen, die Formel: $\sin d = \sin p \cdot tg\, 9°$ die richtige, und daſs die Formel: $\sin d = \sin p \cdot \sin 9°$, streng genommen, nicht richtig ist, liegt darin, daſs, wenn der Bogen von 18° Höhe

vom Horizont ab nach unterwärts in der kürzesten Zeit zurückgelegt werden soll, der Mittelpunkt des D.-Bogens *OS* nicht ganz genau in den Morgen- oder Abendpunkt des Orts, also in das Zenith *Z* normal auf den Meridian *ZP* treffen darf, sondern dafs der $\angle PZS$, wenn *S* in *m* steht, um ein freilich sehr Geringes stumpf sein mufs.

Fig. 91.



Astronomisches Fernrohr, Sternrohr, auch nach seinem Erfinder Kepler'sches Fernrohr genannt, unterscheidet sich von dem ältesten Galilei'schen F. dadurch, dafs jenes ein biconvexes, dieses, das ältere F., ein biconcaves Ocularglas hat. Aus diesem Unterschied entspringt zunächst ein zweiter, nämlich, dafs das Galilei'sche F. alle Gegenstände so sehen läfst, wie sie in Wirklichkeit sind, und dafs das Sternrohr dieselben verkehrt zeigt, nämlich das Obere zu Unterst und das Rechts und Links zu Links und Rechts.

Das Objectivglas ist in beiden F. biconvex, bei dem Galilei'schen F. liegen die Brennpunkte beider Gläser in einerlei Punkt aufserhalb hinter dem Ocularglas, bei dem Kepler'schen F. liegen beide Brennpunkte innerhalb des Rohrs in einerlei Punkt, und die Brennweite des einen Glases ist die Verlängerung der Brennweite des anderen, und dieses mufs deshalb länger sein als das Rohr des älteren F. Bei diesem älteren wird von dem Gegenstand kein Bild gestaltet, dasselbe vielmehr durch das eingestellte Ocularglas unterbrochen; bei dem Kepler'schen F. dagegen wird durch das Objectivglas das Bild des Gegenstandes nach dem Brennpunkt geworfen und dieses zur Beschauung von dem Ocularglas aufgenommen.

Das Angeführte macht die wesentlichsten Unterschiede beider F. aus, die jedoch alle Folgen der verschieden gestalteten Ocularglåser sind; auch kann man noch dazu rechnen, dafs beim Gebrauch des Galilei'schen F. das Auge ganz nahe dem Ocular sein mufs, während es bei dem Kepler'schen F. in einer gewissen Entfernung von dem Glase verbleibt.

Die Theorie des Sternrohrs ist folgende: Es sei *ABDE* das Fernrohr, *DE* das Objectiv, *AB* das Ocular, *NN'* die (halbe) Höhe eines sehr entfernten Gegenstandes, z. B. eines Gestirns, so wird derselbe um so viel vergröfserter gesehen, als die Krümmung des Oculars die Krümmung des Objectivs übertrifft.

Jedes der Gläser ist biconvex, und zwar der Art, dafs beide Flächen, die Vorderfläche und die Hinterfläche jedes Glases, einerlei Krümmung haben, dafs nämlich beide Flächen als Theile gleich grofser Kugeloberflächen zu betrachten sind.

Man legt beide Gläser ‡ mit einander und so in die Röhre, dafs die Verbindungslinie *cC* auf beiden Gläsern normal steht. Diese Linie *cC* ist die Axe des F. und es wird das F. mit dieser Axe nach dem zu beobachtenden Gegenstand *NN'* gerichtet, von dem nur die obere Hälfte gezeichnet ist, so dafs *N* dessen Mitte vorstellt; *NN'* sei z. B. der obere senkrechte Halbmesser des Vollmondes, und dieser werde durch das blofse Auge, wenn es in *C* sich befindet, unter dem sehr kleinen $\angle N''CN$ gesehen. Diese letzte Voraussetzung kann der ungeübte Leser sich klar machen, wenn er den Blick auf's Fenster richtet:

Durch eine Scheibe von vielleicht 16 Zoll Höhe sieht der Leser, ohne dafs er vom Stuhl aufsteht, von dem nahen Hause nur das untere Stockwerk, ein entfernter befindliches Haus von 40 Fufs Höhe füllt schon vom Pflaster bis zum Forst dieselbe Höhe der Scheibe, in noch gröfserer Entfernung ein Thurm von 200 Fufs Höhe, und wenn es Nacht ist, so tangiren den oberen und den unteren Rand der Scheibe

zwei Fixsterne, die Milliarden von Meilen aus einander stehen. Alle diese verschiedenen Längen sieht der Leser aus einerlei Punkt des Zimmers, in welchem sich eben sein Auge befindet, innerhalb einerlei Höhe, welche die 16 Zoll aus einander liegenden waagerechten Ränder der Scheibe begrenzen; folglich sieht er alle diese Höhen und Längen gleich lang, nicht 16 Zoll, nicht 40 Fufs, nicht 200 Fufs, nicht Milliarden Meilen lang, sondern als das gleich lange Bild auf der inneren Netzhaut des Auges, in der sich die genannten Gegenstände abspiegeln, indem die beiden in senkrechter Ebene befindlichen Lichtstrahlen, welche als gerade Linien von dem oberen und dem unteren Rande der Scheibe in dem Augenmittelpunkt zusammentreffen, hier nach hinterwärts bis zu der im Auge tiefer liegenden Netzhaut kreuzweise sich verlängern, auf welcher sie als Endpunkte das Bild aller genannten Höhen und Längen begrenzen, welches also nur einerlei Länge und zwar eine nur sehr kleine Länge haben kann.

Dafs wir die Längen der genannten Gegenstände richtig würdigen, liegt in unserer Vernunft, mit der wir die von Kindesbeinen an gemachten Erfahrungen uns unbewufst augenblicklich vergegenwärtigen. Ein Kind greift nach dem Monde, um daran zu lutschen, und es erhält erst nach und nach, erst wenn es Tausende von Malen nach Dingen vergeblich gegriffen hat, Begriff von Entfernungen.

Ausgewachsene Thiere zeigen beim Jagen nach Beute, und wenn sie ihren Feind fliehen, in richtigem Sehen einen hohen Verstand. Dafs aber die Sonne 20 Millionen Meilen entfernt ist und 194000 Meilen Durchmesser hat, glauben viele, sonst ganz gescheute Leute nicht, und es ist nicht zu verlangen, wenn sie nicht gelernt haben, wie man es, oder auch nur, dafs man es wissen kann. Waren doch die jüdischen Propheten als Weissager des Messias die weisesten Männer ihres Zeitalters und hielten doch den Mond für ein gröfseres Licht, als alle Sterne zusammengenommen.

Jede biconvexe Linse, wie *DE*, hat nun die Eigenschaft, dafs jeder Lichtstrahl, der auf den Mittelpunkt *C* der Linse trifft, ungeändert seine geradlinige Richtung durch das Glas fortsetzt, woher denn auch diese Linien Axen der Linse genannt werden, und zwar ist die normal auf den Durchmesser durch den Mittelpunkt *C* gerichtete Linie *Nc* die Hauptaxe, alle übrigen durch *C* gerichtete gerade Linien, wie *N''n''*, heifsen Nebenaxen der Linse *DE*.

Ein Kreis bei *N* von dem wirklichen Durchmesser *DE*, also der sehr weit entlegene Punkt *N* selbst wirft nun nach dem Objectiv *DE* ganz dicht neben einander befindliche, mit der Hauptaxe *NC* parallele Lichtstrahlen, und die Linse hat die Eigenschaft, dafs sie jeden dieser unendlich vielen Strahlen nach einem einzigen Punkt hin ablenkt, der hinter der Linse liegt und der der Mittelpunkt der Kugeloberfläche ist, nach welcher die dem Punkt *N* zugekehrte Fläche, die Vorderfläche oder Aufsenfläche, der Linse gekrümmt ist und welcher der Brennpunkt der Linse heifst. Ist *MF* ein solcher, aus *N* kommender, mit *NC* paralleler Lichtstrahl und ist *c'* der gedachte Brennpunkt, so setzt der Strahl *MF* seine Richtung geradlinig nach *Fc'* fort, und dies geschieht mit allen übrigen, aus *N* kommenden, mit *Nc'* parallelen Strahlen, so dafs der innere Raum *DEc'* von einem Lichtstrahlenkegel ausgefüllt wird. Es entsteht mithin ein von unendlich vielen Strahlen vereinigt gebildetes und daher sehr correctes Bild von *N* in dem Punkt *c'*.

Es ist klar, dafs auch der oberste Punkt *N'* auf das Glas *DE* eine unendliche Menge dicht neben einander befindlicher, mit *N''C* paralleler Strahlen wirft, und die Linse *DE* hat die Eigenschaft, dafs diese Strahlen alle wiederum nach nur einem hinter der Linse befindlichen Punkt geworfen werden. Dieser Punkt liegt in der durch den Brennpunkt *c'* mit dem Kreisring *DE* parallel gelegten Ebene *C'C''*, d. h. in der Brennweite des Glases, und zwar da, wo die Nebenaxe *N''n''* diese Ebene schneidet, also in *n'*.

Ist *M'F* ein solcher, aus *N'* kommender, mit *N''C* paralleler Strahl, so setzt dieser also seinen Weg geradlinig nach *Fn'* fort; es gilt dies wieder von allen aus *N'* auf das Glas geworfenen Strahlen, der innere Raum *DEn'* wird von einem Lichtstrahlenkegel ausgefüllt, und in *n'* entsteht ein von unendlich vielen Strahlen gebildetes und daher sehr correctes Bild von *N'*.

Alle übrigen, also innerhalb *NN'* liegenden Punkte des Gegenstandes *NN'* werfen Strahlen auf *DE* unter Winkeln, die kleiner sind als $\angle N''CN$, jeder dieser Punkte wirft einen Strahl durch *C*, jeder dieser durch *C* fallenden Strahlen ist eine Nebenaxe und geht ungebrochen fort, fällt also zwischen *c'* und *n'*, und jedem dieser Strahlenpunkte in *c'n'* correspondiren eine unendliche Menge von Strahlen

aus demselben Punkt von *NN'*, so dafs innerhalb *c'n'* eine unendliche Menge von Punkten entsteht, die alle die Spitzen von Strahlenkegeln sind und von den einzeln ihnen zugehörigen, in *NN'* liegenden Punkten ein correctes Bild liefern.

Demnach ist die Linie *c'n'* ein äufserst correctes Luftbild von der wirklichen Linie *NN'*; man kann *DE* als die Pupille und die Luftebene *C'C''* als die Netzhaut eines Auges ansehen, in welcher die von *DE* aufgenommenen und kreuzweise hindurch gehenden Lichtstrahlen als Bild von *NN'* sich abspiegeln, und zwar eben so verkehrt und eben so grofs, als ein in *C* befindliches wirkliches Auge den Gegenstand *NN'* sieht. Denn wenngleich die Länge *c'C* viel gröfser ist als der Abstand der Netzhaut von der Pupille unseres Auges, so ist oben nachgewiesen, dafs Gegenstände von 18 Zoll und von Milliarden Meilen gleich grofs gesehen werden, wenn das Sehen beider so ungeheuer verschiedenen Längen unter einerlei Winkel geschieht; $\angle N''CN = \angle n'Cc'$ ist aber derjenige $\angle$, unter welchem ein in *C* befindliches Auge den Gegenstand *NN'* sehen würde.

Fafst man nun, wie oben vorausgesetzt, *N* als Mittelpunkt und *NN'* als Halbmesser einer Kreisfläche (Mondfläche) auf, so gilt von dem senkrecht abwärts fallenden Halbmesser dasselbe, und dieser wird in der Ebene *C'C''* senkrecht aufwärts abgespiegelt; ebenso der Halbmesser rechts von *N* waagerecht in *C'C''*, links von *c'* waagerecht u. s. w., kurz, es entsteht in der Ebene *C'C''* ein Luftbild, dessen Punkte den correspondirenden wirklichen Punkten in *NN'* diametral entgegengesetzt liegen, und zwar ohne Vergröfserung, und wie es auf der Netzhaut eines in *C* befindlichen Auges sich abspiegelt.

Jetzt kommt es darauf an, dem Auge das verkehrte Luftbild *c'n'* von *NN'* dem Auge, und zwar vergröfsert zuzuführen, und dies geschieht, indem man ein zweites biconvexes Glas von stärkerer Krümmung, das Ocularglas $AB \mp$ mit *DE*, dessen Mittelpunkt *c* in gerader Linie mit *c'C* und so einsetzt, dafs der Punkt *c'* zugleich der Mittelpunkt der Kugeloberfläche wird, nach welcher die dem Auge zugekehrte Fläche, die Aufsenfläche von *AB* gekrümmt ist. Also bei dem astr. F. müssen Ocular und Objectiv einerlei Hauptaxe, einerlei Brennpunkt haben und in der Summe beider Brennweiten von einander abstehen.

Der Grund davon ist nach dem Vorherigen bald einzusehen:

So wie die mit der Hauptaxe *Cc'* parallel auf die Aufsenfläche der Linse *DE* fallenden Strahlen nach dem Brennpunkt *c'* geworfen werden, so werden auch alle von dem Brennpunkt *c'* auf die Innenfläche von *DE* fallenden Strahlen aufserhalb parallel der Hauptaxe *c'C* fortgeleitet, und da *c'* zugleich der Brennpunkt der Linse *AB* ist, so werden alle von *c'* auf die Innenfläche von *AB* fallenden Strahlen aufserhalb *AB* und parallel der Hauptaxe *c'c* sich fortsetzen, und ein hinter *AB* befindliches Auge wird die aus *c'* kommenden Strahlen in paralleler Richtung mit der Pupille auffangen.

Desgleichen wie die von Aufsen parallel *N''C* auf *DE* treffenden Strahlen nach dem Punkt *n'* gelenkt werden, so müssen auch die aus dem Punkt *n'* auf die Innenfläche von *DE* fallenden Strahlen aufserhalb *DE* parallel mit *CN''* sich fortsetzen, und da *n'* zugleich in der Brennweite der Linse *AB* liegt, so wird der aus *n'* auf *c* fallende Strahl ungebrochen in der geradlinigen Richtung *cm* nach Aufsen weiter gehen, und alle anderen von *n'* auf die Innenfläche von *AB* fallenden Strahlen, wie *nn''*, werden nach Aufsen in die mit *cm* parallele Richtung, also *nn''* nach *n''m'* weiter gehen, und das hinter *AB* befindliche Auge alle die mit *cm* parallelen, aus dem Punkt *n'* kommenden Strahlen mit der Pupille auffangen.

Ebenso erhält das hinter *AB* befindliche Auge von allen übrigen Punkten des Luftbildes *c'n'* parallele Strahlen, es sieht mithin nicht den wirklichen Gegenstand *NN'*, sondern nur dessen verkehrtes Luftbild *c'n'*; den Punkt *c'* in der Richtung *m'c*, den Punkt *n'* in der Richtung *m'n''*; also das Untere sieht man unten, ebenso das Obere oben, Rechts und Links sieht man rechts und links, man sieht das Luftbild wie es ist, man sieht also den beobachteten Gegenstand verkehrt.

Das unbewaffnete Auge sieht den Gegenstand *NN'* unter dem $\angle N''CN$, das Auge hinter *AB* würde also *NN'* unter dem $\angle c'cn = \angle N''CN$ und den Punkt *N'* in *n* sehen. Dieser Punkt erscheint aber dem Auge in der Richtung *cn'*, es wird mithin die Linie von der natürlichen Länge *c'n* in die gröfsere Länge *c'n* aus einander gezogen, jeder andere Punkt von *NN'* desgleichen in demselben Verhältnifs von *c'n* : *c'n'*, und es beträgt mithin die Vergröfserung von *NN'* das $\frac{c'n'}{c'n}$ fache.

c'n' und *c'n* sind die Tangenten der

$\angle c'cn'$ und $c'cn$ bei dem gleichen Halbmesser cc'

$\angle c'cn$ ist $= \angle c'Cn'$, mithin

$\triangle c'cn \sim \triangle c'Cn'$

daher $c'n' : c'n = c'C : cc'$

mithin ist die Vergröfserung

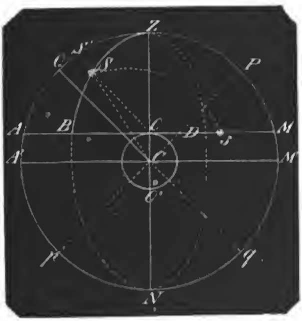
$$\frac{c'n'}{c'n} = \frac{c'C}{c'c}$$

d. h. die Vergröfserung des a. F. ist = dem Quotient der Brennweite des Objectivs durch die Brennweite des Oculars. Oder das a. F. vergröfsert so viel mal, als die Brennweite des Oculars in der Brennweite des Objectivs enthalten ist.

Das a. F. hat denn auch die Bequemlichkeit, dafs man mit demselben Objectiv verschiedene Vergröfserungen hervorbringen kann, indem man Oculare von verschiedenen Brennweiten mit einander vertauscht, und diese mehr oder weniger tief hineinschraubt, um den Brennpunkt mit dem des Objectivs in einen Punkt zu vereinigen.

Astronomischer Horizont, wahrer Horizont (ὁρίζειν, begrenzen). Ist der um den Mittelpunkt (*C*) der Erde mit der waagerechten Ebene (*AM*) eines Orts (*O*) der Erdoberfläche parallel gedachte Kreis (*A'M'*) während der die waagerechte Ebene des Orts und die Himmelskugel uns sichtbar begrenzende Kreis (*AM*), der also für uns eigentlicher, wahrer Horizont, wahrer Gesichtskreis ist, der scheinbare Horizont genannt wird.

Fig. 92.



Die zu den gedachten Kreisen gehörenden Ebenen heifsen: Ebene des astr. oder wahren H. (*A'M'*) und Ebene des scheinbaren H. (*AM*), und es müssen dieselben von allen Seiten bis in die Unendlichkeit erweitert und die diese Ebenen begrenzenden Kreislinien, die H. selbst, unendlich weit hinausgerückt oder mit einem Halbmesser von unendlicher Länge beschrieben gedacht werden.

Der Grund für die unterschiedenen Bezeichnungen: wahrer und scheinbarer H., ist der, dafs die Standpunkte aller Gestirne (wie *S*) gegen die Erde als Kugel auf deren Mittelpunkt (*C*) bezogen werden müssen, dafs aber alle Beobachtungen von Gestirnen, Messungen der von ihnen gebildeten Winkel von Punkten (wie *O*) aus geschehen, die von dem Normalpunkt, dem Erdmittelpunkt um den Halbmesser (*OC*) der Erde entfernt sind. Diese Winkel nun (wie $\angle AOS$), sowie die auf den Horizont (*AM*) der Sternwarte (*O*) bezogenen Linien und Ebenen sind aber solche, welche dem Astronom für die darauf zu gründenden Berechnungen die richtigen zu sein scheinen, und müssen erst auf den dem Ortshorizont (*AM*) parallelen richtigen, daher wahren oder astr. H. (*A'M'*) reducirt werden.

2. Diese Reduction ist aber nur erforderlich für Gestirne, die eine mefsbare Entfernung von der Erde haben, also für die Sonne und für die Planeten und Monde unseres Sonnensystems; für die Fixsterne von unermefslicher Entfernung verschwindet der Unterschied von circa 860 Meilen, um welche der scheinbare von dem wahren H. entfernt ist ($\angle SOA = \angle SCA'$, $OC =$ Null), und beide fallen in eine und dieselbe Kreislinie und deren zugehörige Ebenen (*AM* und *A'M'*) in nur eine Ebene zusammen.

Der nächste der Gestirne ist uns der Mond und von der Erde circa 50000 Meilen entfernt. Stellt man sich diesen in dem wahren H. (*A'M'*) eines Orts (*O*) z. B. Berlins vor, so erhält man den $\angle OAC$, um welchen er noch unter dem scheinbaren H. (*AM*) Berlins steht, aus $tg\, OA'C = \frac{860}{50000}$, woraus $\angle OA'C$ etwa 59 Minuten, und es ist bei dem Mond dieser Unterschied (die Horizontal-Parallaxe) nicht ganz unbedeutend. Die Sonne von circa 20 Millionen Meilen Entfernung von der Erde hat die Horizontal-Parallaxe aus $tg\, OA'C = \frac{860}{20000000}$ von nur 8,9 Secunden.

Jeder Ort der Erdoberfläche hat seinen wahren und seinen scheinbaren H., Orte, die sich diametral gegenüber liegen (*O*, *O'*), haben einerlei wahren H. (*A'M'*) und deren scheinbare H. sind parallel und um

den Erddurchmesser (OO') von einander entfernt.

3. Alle Beobachtungen und Messungen beziehen sich unmittelbar auf den H. des Beobachtungsortes, und jeder Ort der Erdoberfläche mufs mit dem Erdmittelpunkt als in einem und demselben Punkt befindlich und mit demselben als Welt-Mittelpunkt gedacht werden (s. Aequator); der H. des Orts (wahrer und scheinbarer, jetzt einerlei) theilt demnach die Himmelskugel in 2 Hälften, der H. ist ein gröfster Kreis der Himmelskugel, alle von dem Auge O des Beobachters auf die Himmelskugel gerichtete gerade Linien (OS) sind Halbmesser der Himmelskugel, jeder zwischen 2 Gestirnen (S, s) gemessene Winkel hat das Auge (O) des Beobachters zur Spitze und der zu diesem ∠ auf der Himmelskugel verzeichnete Bogen Ss ist der Bogen eines gröfsten Kreises.

4. Das in einem Ort O gefällte Loth, ZN, welches nach dem Mittelpunkt C der Erde gerichtet ist, auf beiden Seiten bis in die unendlich ferne Himmelskugel gedacht, die Axe des H. heifst Scheitellinie, Verticallinie; von deren Endpunkten, den Polen des H. heifst der über dem H., also über dem Kopf des Beobachters belegene (Z) der Scheitelpunkt oder das Zenith, der unter dem Horizont befindliche (N) der Fufspunkt oder das Nadir.

Die durch beide Pole des H. gelegten Kreise (wie ZSN) heifsen Scheitelkreise, Verticalkreise. Die Scheitellinie ZN ist deren gemeinschaftlicher Durchmesser; sie stehen auf dem H. (AM) lothrecht und werden von demselben gehälftet (BZD und BND sind Halbkreise).

Durch jedes am Himmel befindliche Gestirn (wie S) kann ein Scheitelkreis (ZSB) gelegt werden; der zu messende Bogen (SZ) vom Gestirn bis zum Zenith (Z) heifst dessen Abstand vom Scheitel oder dessen Zenithdistanz, der zu messende Bogen (SB) vom Gestirn bis zu dem Durchschnittspunkt (B) des Scheitelkreises mit dem H. heifst die Höhe des Gestirns.

5. Liegt O in der nördlichen Halbkugel der Erde, so sei P der Nordpol, p der Südpol, senkrecht darauf durch C ist also Qq der Aequator. Die Punkte P, p, Q, q liegen in der Himmelskugel, also unendlich weit von C, mithin kann wieder jedes O für C gelten, die Aequator-Ebene Qq schneidet den H. jedes Ortes O in O selbst, und jeder Ort O ist nicht nur Mittelpunkt seines H., sondern so wie Mittelpunkt der Himmelskugel auch Mittelpunkt des Welt-Aequators. Wenn O in Pp liegt, also für die Orte unter dem Nordpol und dem Südpol läuft der Erd-Aequator mit dem H. parallel, und der Himmels-Aequator macht mit dem H. einerlei Ebene aus.

Wie durch jedes Gestirn, so kann durch jeden Punkt der Himmelskugel ein Scheitelkreis gelegt werden, also auch durch die (nicht durch ein Gestirn sichtbar gemachten) Pole P, p. Da die Axe Pp durch C ($= O$) gerichtet ist, so haben beide Pole denselben Scheitelkreis, dieser steht wie auf dem H., so auch auf dem Aequator senkrecht und schneidet diesen in den beiden dem H. höchsten und tiefsten Punkten Q, q.

6. Da sämmtliche Gestirne ∦ dem Aequator Qq sich kreisförmig zu bewegen scheinen, so haben dieselben ihre gröfste Höhe über dem H. und ihre gröfste Tiefe unter dem H., wenn sie in den zu den Polen P, p gehörenden Scheitelkreis ($PZApNMP$) treten, wenn sie culminiren; die gröfste Höhe in dem Halbkreis PQp, die gröfste Tiefe in dem Halbkreis Pqp, und da die Sonne, wenn sie in PQp culminirt, den Mittag des Orts O angiebt, so heifst der zu den Polen P, p gehörende Scheitelkreis des Orts der Mittagskreis, Meridian des Orts.

7. Die beiden Orte unter den beiden Polen haben keinen Meridian, oder vielmehr: jeder beliebige Scheitelkreis ist Meridian des unter P oder p befindlichen Orts, und zwar sowohl aus dem geometrischen Grunde, dafs jeder durch O daselbst gelegte Scheitelkreis durch beide Pole liegt, als aus dem physikalischen, dafs die Sonne wirklich niemals oder, wenn man will, permanent culminirt:

Tritt die Sonne von unten in den Horizont, so bezeichnet sie diesen 24 Stunden lang mit ihrem Lauf, den folgenden Tag beschreibt sie einen etwas höher liegenden, dem H. parallelen Kreis und tritt fortdauernd in höhere dem H. parallele Kreise, bis sie in den Sommerpunkt der Ekliptik kommt, wo sie wieder auf dieselbe Weise bis in den H. herab geht und von nun ab unter dem H. ihre Kreisläufe fortsetzt.

Man verschafft sich ein genaues Bild von dem Aufsteigen der Sonne für den Ort unter dem Pol, wenn man sich um die Erdaxe auf dem H. als Basis einen Cylinder mit dem Halbmesser von circa 20 Millionen Meilen beschrieben denkt, von der Höhe, dafs die von dem Ort im H. nach einem höchsten Punkt des Mantels gezogene gerade Linie mit dem H. einen ∠ von circa $23\frac{1}{2}°$ bildet, und wenn

man den Mantel von unten bis oben mit 92 Schraubengängen versieht, in welchen die Sonne am 22. März aufsteigt, alle 24 Stunden einen Schraubengang zurücklegt und am 23. Juni den höchsten Punkt des Mantels erreicht. Das Herabsteigen der Sonne von diesem Zeitpunkt bis zum 23. September geschieht nach derselben Richtung auf dieselbe schraubenförmige Weise, weshalb man sich für die Bewegung der Sonne von oben nach unten die Schraubengänge des Cylindermantels von entgegengesetzter Windung zu denken hat.

8. Das Zenith Z theilt den über dem H. befindlichen Meridian in 2 Quadranten; der Durchschnittspunkt A desjenigen, in welchem der Pol P nicht liegt, heifst der Mittagspunkt, Südpunkt, der Punkt M, in welchem der Pol P liegt, der Mitternachtspunkt, Nordpunkt; der durch Z rechtwinklig auf den Meridian gezeichnete Scheitelkreis schneidet den H. rechts von dem Pol in dem Morgenpunkt, Ostpunkt, links von dem Pol in dem Abendpunkt (s. d.) Westpunkt; diese beiden Punkte, deren Projection O ist, sind zugleich die Durchschnittspunkte des Aequators mit dem H.

Der Bogen zwischen dem Culminationspunkt eines Gestirns und dem Mittagspunkt A des H. heifst die Mittagshöhe des Gestirns. Ist z. B. $SS' \# Qq$, so culminirt S in S' und Bogen $S'A$ ist die Mittagshöhe von S.

Eben so heifst Bogen QA $(= QA')$ die Aequatorhöhe des Orts O und Bogen PM $(= PM')$ die Polhöhe des Orts O. Der Bogen QZ ist der Zenith-Abstand des Aequators und der Bogen PZ der Zenith-Abstand des Pols, beide für den Ort O.

Zenith-Abstand und Höhe eines Gestirns oder eines Punkts in der Himmelskugel ergänzen sich zu 90°. $\angle PCM'$, die Polhöhe, ist $= \angle A'Cp$, weil beide Scheitel$\angle$ sind, $\angle QCA' + \angle A'Cp = 90°$, folglich ergänzen sich Polhöhe PM und Aequatorhöhe QA eines Orts O zu 90°.

Die Polhöhe PM ist = dem Zenith-Abstand QZ des Aequators, und die Aequatorhöhe QA ist = dem Zenith-Abstand des Pols.

Der Bogen QZ, der Zenith-Abstand des Aequators, ist zugleich die geographische Breite von O und = dem Bogen PM, welcher die Polhöhe von O ist, mithin ist die Polhöhe eines Orts O der Erdoberfläche gleich dessen geographischer Breite.

Für Orte unter dem Pol, also wenn man P in Z und Q in A $(= A')$ gerückt denkt, ist die Aequatorhöhe = Null, die Polhöhe $= \angle ZOM = 90°$, der Zenith-Abstand des Aequators $= 90°$, der Zenith-Abstand des Pols = Null, die geogr. Breite $= 90°$.

Für Orte im Aequator ist die Aequatorhöhe $= 90°$, die Polhöhe = Null, der Zenith-Abstand des Aequators = Null, der des Pols $= 90°$, die geogr. Breite = Null.

Der Bogen BA zwischen dem Durchschnittspunkt B des Scheitelkreises ZSB eines Gestirns S mit dem H. und dem Mittagspunkt A heifst das Azimuth oder die Südweite des Gestirns S in Beziehung auf den H. des Orts O. Das Azimuth ist östlich oder westlich, es wird von dem Mittagspunkt A zu beiden Seiten bis zum Mitternachtspunkt von 0° bis 180° gezählt.

9. Niemand ist im Stande, eine horizontale Linie unmittelbar mit einem Instrument zu ziehen, zu zeichnen, oder deren Richtung einzustellen; nur mittelbar ist dies möglich und zwar mit Hülfe der lothrechten Linie, welche mittelst des Bleiloths unmittelbar angegeben wird, die in jedem Ort in Folge der Schwerkraft nach dem Mttelpunkt der Erde gerichtet ist und mit der Ebene des H. einen rechten Winkel bildet.

Eine Horizontallinie wird also dadurch bezeichnet, dafs ein Instrument zwei Linien oder Ebenen erhält, die von dem mechanischen Künstler äufserst genau unter einem rechten $\angle$ befindlich gearbeitet sind, dafs die eine Linie oder Ebene mit einem frei spielenden Bleiloth versehen ist und dafs man diese entweder durch mikrometrische Vorrichtungen für jedesmalige Beobachtung mit dem Loth in einerlei Linie bringt, oder diese lothrechte Richtung, einmal festgestellt, bleibend macht, wonach die zweite Linie oder Ebene unter 90° mit dem Loth die Horizontale bezeichnet.

Selbst die Libelle zum Nivelliren giebt nicht unmittelbar die dem Geometer erforderliche Horizontale an, sondern mittelst der richtig in den Nullpunkt einzustellenden Luftblase die Verticale, sowie Maurer und Zimmermann Plinten und Balken mit Hülfe des Bleiloths der Setzwaage horizontal legen.

Astronomisches Jahr, im Gegensatz von bürgerlichem Jahr. Ist die genaue, in Tagen, Stunden, Minuten und Secunden ermittelte Zeit, in welcher ein Umlauf der Erde in der Ekliptik von einem in derselben festgestellten Punkt bis wieder zu demselben Punkt geschieht, während das bürgerliche Jahr oder Ka-

lenderjahr aus nur ganzen Tagen zu 24 Stunden besteht.

Die in der Ekliptik festgestellten Punkte sind entweder der Durchschnittspunkt des Breitenkreises eines bestimmten Fixsterns, welcher das siderische Jahr (sidus, Gestirn), das Sternjahr bestimmt, oder einer der vier Punkte, welche die Anfänge der Jahreszeiten bestimmen; dies sind die beiden Aequinoctialpunkte und die beiden Solstitialpunkte, von welchen der eine der ersteren, der Frühlingspunkt, gewählt ist, und welcher das tropische Jahr bestimmt. Dieser Name kommt von ἡ τροπή, die Wendung, indem die Solstitialpunkte auch Wendepunkte, Tropen genannt werden. Oder das Perihelium oder das Aphelium, welche das anomalistische Jahr bestimmen (s. d. und Anomalie).

Alle drei astr. Jahre sind unter einander verschieden: Fixsterne kann man als unveränderlich in ihren Standpunkten betrachten, die Erde beschreibt also während des siderischen Jahres genau 360°. Die Aequinoctialpunkte dagegen verändern sich jährlich um einen Bogen von 50,1 Sec. von Ost nach West; da nun die Erde von West nach Ost sich bewegt, so kommt der Frühlingspunkt jährlich um diese 50,1" der Erde entgegen, und in dem tropischen Jahr beschreibt die Sonne nur einen Bogen 360° − 50,1" = 359° 59' 9,9". Das tropische Jahr ist also in dem Verhältnifs beider Bogen kürzer als das siderische Jahr. Aphelium und Perihelium verändern jährlich ihre Lage um einen Bogen von 11,8 Sec. von West nach Ost; mithin hat die Sonne in dem anomalistischen Jahr einen Bogen zu durchlaufen von 360° + 11,8" und dieses anomalistische Jahr ist also das längste der astr. Jahre.

Das siderische Jahr kann unmittelbar durch Beobachtung zweier auf einander folgender Durchgänge der Sonne durch den Breitenkreis eines bestimmten Fixsterns gefunden werden. Es beträgt im Mittel 365 Tage 6 Stunden 9 Min. 11 Sec. und die Sonne beschreibt während dieser Zeit genau einen vollen Kreis von 360°.

Bei dem scheinbaren Eintritt der Sonne in den Frühlingspunkt, also bei dem wirklichen Eintritt der Erde in den Herbstpunkt hat die Sonne die Abweichung = 0; dieser Eintritt ist durch unmittelbare Beobachtung der Mittagshöhe der Sonne in einem Ort zu finden (s. Abweichung).

Der Frühlingspunkt nämlich liegt offenbar in irgend einem Meridian. Beobachtet man nun, dafs die Sonne in dem Augenblick, wo sie durch den Meridian geht, also in dem Augenblick des Mittags eine Mittagshöhe hat, die genau mit der bekannten Aequatorhöhe des Beobachtungsorts übereinstimmt, so gehört der Ort dem eben gedachten Meridian an, und der Frühlingspunkt liegt in dem beobachteten Standpunkt der Sonne. Findet man dagegen, dafs die Sonne in einem Mittage eine geringere, in dem folgenden Mittage eine gröfsere Höhe hat als die bekannte Aequatorhöhe des Orts, so ist die Sonne in der Zwischenzeit durch den Frühlingspunkt gegangen, und aus dem Unterschiede der beiden beobachteten Höhen kann man auf dieselbe Weise, wie in dem Art.: „Absiden" die Ermittelung der Absidenpunkte gezeigt worden, die genaue Zeit des Durchgangs der Sonne durch den Frühlingspunkt berechnen.

Das tropische Jahr beträgt im Mittel 365 Tage 5 Stunden 48 Min. 51 Sec. und die Sonne beschreibt während dieser Zeit im Mittel einen Bogen von 359° 59' 9,9".

Dieses tropische Jahr ist es, welches unsern Kalenderjahren zu Grunde liegt.

Das anomalistische Jahr wird durch Beobachtung zweier auf einander folgender Anomalien gefunden (s. Absiden). Es beträgt 365 Tage 6 Stunden 14 Min. 23 Sec. und die Sonne beschreibt während dieser Zeit einen vollen Kreis von 360° + einem Bogen von 11,8 Secunden.

Astronomische Jahrbücher (Ephemeriden) sind für den Seemann das, was für andere Geschäftsmänner, besonders den Landmann, der bekannte Kalender ist. Sie enthalten im Voraus: berechnet für ein Jahr die zeitweisen Constellationen der Gestirne, die Sonnen- und Mondfinsternisse, die der Jupitertrabanten, die Lichtwechsel der Venus, Tabellen zur Berechnung der Zeit beim Auf- und Untergang der Sonne und des Mondes, für Verwandlung des Bogenmaafses in Zeitmaafs und dergleichen nützliche Angaben mehr. Sie werden auch wohl noch auf andere wichtige astronomische Nachrichten und Abhandlungen ausgedehnt und gehören sodann zur Literatur. Besonders zeichnen sich hierin die Berliner astr. J. aus, welche von Bode i. J 1776 begonnen, von Enke fortgesetzt werden und äufserst werthvolle Aufsätze enthalten.

Astronomi che Jahreszeiten. Werden bestimmt durch die Höhe der Sonne für einen Ort *O* auf der Erde.

Die für jeden Ort auf der Erde geltenden, also allgemeinen Bestimmungen derselben sind folgende: Der astronomische Winter fängt in dem Augenblick an, wo die Sonne in den vom Zenith

entferntesten Parallelkreis tritt, wo also die Sonne über *O* am niedrigsten steht, wo sie die kleinste Mittagshöhe hat.

Der astronomische Sommer fängt in dem Augenblick an, wo die Sonne in den vom Zenith nächsten Parallelkreis tritt, wo die Sonne also über *O* am höchsten steht, wo sie die gröfste Mittagshöhe hat.

Der astr. Frühling beginnt zugleich mit dem Ende des Winters, in dem Augenblick, wo die Sonne in den Parallelkreis tritt, der zwischen den eben genannten in der Mitte liegt, wo die Sonne also die mittlere Mittagshöhe hat, und der astr. Herbst beginnt zugleich mit dem Ende des Sommers, in dem Augenblick, wo die Sonne zum zweiten Mal in den Parallelkreis der mittleren Mittagshöhe tritt.

Hiernach ergeben sich die Jahreszeiten und deren Grenzen für folgende speciell benannten Orte und Ortsgegenden:

Am Nordpol fängt der Frühling an, sobald die Sonne aus der südlichen Halbkugel in den Aequator tritt, die Sonne erscheint im Horizont und es bricht der Morgen an. Der Herbst fängt an in dem Augenblick, wo die Sonne aus der nördlichen Halbkugel wieder in den Aequator tritt, die Sonne geht unter, die Nacht bricht an.

Der Sommer fängt an in dem Augenblick, wo die Sonne in den nördlichen Wendekreis tritt, mithin zwischen Frühlings- und Herbst-Anfang genau in der Mitte und zugleich zwischen dem Eintritt des Tages und dem der Nacht in der Mitte, also gerade zu Mittage, und der Winter fängt an, sowie die Sonne in den südlichen Wendekreis tritt, und gerade zu Mitternacht.

In der kalten Zone, den Pol selbst ausgenommen, und in der nördlichen gemäfsigten Zone sind die Anfangspunkte der Jahreszeiten wie beim Nordpol selbst, nur dafs hier nicht deren Eintritte genau im Morgen, Mittag, Abend und Mitternacht sein können (Vorrückung der Nachtgleichen).

Auch für einen Ort in dem nördlichen Wendekreise ist noch die Reihenfolge wie in der gemäfsigten Zone: die gröfste Mittagshöhe findet einmal des Jahres statt, wo die Sonne im Zenith steht, die kleinste einmal, wenn sie im Wendekreis des Steinbocks steht, und die mittlere zwei Mal, wenn die Sonne den Aequator schneidet.

Also der Winter fängt an, wenn die Sonne in den südlichen Wendekreis tritt und dauert, bis sie aus der südlichen Halbkugel den Aequator schneidet; mit diesem Augenblick fängt der Frühling an und dauert bis zu dem Augenblick, wo die Sonne in den nördlichen Wendekreis, also in das Zenith von *O* tritt, wo auch der Sommer beginnt und bis zum Wieder-Eintritt der Sonne in den Aequator dauert. Mit diesem Augenblick beginnt der Herbst und dauert bis zum Eintritt der Sonne in den südlichen Wendekreis.

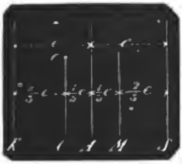
Für einen Ort im Aequator selbst ist zwei Mal im Jahr die gröfste Mittagshöhe, nämlich im Zenith, wenn die Sonne den Aequator schneidet, zwei Mal die kleinste, wenn die Sonne in die Wendekreise tritt, und vier Mal die mittlere Mittagshöhe, gerade in den Mitten zwischen dem Aequator und den beiden Wendekreisen. Daher sind hier alle astr. J. doppelt:

Der erste Winter fängt an, wenn die Sonne in den Wendekreis des Steinbocks tritt (22. December); er dauert, bis die Sonne die erste mittlere Mittagshöhe hat, wenn nämlich ihre südliche Abweichung gleich der halben Schiefe der Ekliptik beträgt. Hier fängt der erste Frühling an (18. Febr.) und er dauert, bis die Sonne im Aequator, also im Zenith des Orts die gröfste Mittagshöhe erreicht hat. Hier fängt der erste Sommer an (21. März) und er dauert, bis die Sonne zum zweiten Mal die mittlere Zenithdistanz erhält, indem ihre nördliche Abweichung die halbe Schiefe der Ekliptik erhält. Hier fängt der erste Herbst an (21. April) und er dauert, bis die Sonne in den Wendekreis des Krebses tritt. Hier fängt der zweite Winter an (22. Juni) und er dauert, bis die Sonne zum dritten Mal die halbe Zenithdistanz erhält, indem deren nördliche Abweichung gleich der halben Schiefe der Ekliptik beträgt. Hier beginnt der zweite Frühling (23. August) und dieser dauert, bis die Sonne zum zweiten Mal in den Aequator, also in das Zenith tritt. Hier beginnt der zweite Sommer (23 Spt.) und dieser dauert, bis die Sonne zum vierten Mal in die mittlere Zenithdistanz tritt, indem ihre südliche Abweichung gleich der halben Schiefe der Ekliptik beträgt. Hier beginnt der zweite Herbst (24. October) und dieser dauert bis zu Anfang des ersten Winters am 22. December.

Ist die nördliche Breite des Orts *O* $= \frac{1}{3}$ der Schiefe der Ekliptik (e), so hat die Sonne im Zenith zwei Mal ihre gröfste Mittagshöhe, im Wendekreis des Steinbocks *S* ihre kleinste Mittagshöhe, der Abstand beider ist $e + \frac{1}{3}e$, der mittlere Abstand in *M* also $= \frac{1}{2}(e + \frac{1}{3}e) = \frac{2}{3}e$ und

so viel beträgt auch der Abstand des Wendezirkels des Krebses K; in diesem ist ihre mittlere Mittagshöhe ein Mal, südlich vom Aequator A in M aber zwei Mal, im Ganzen also drei Mal, der Ort O hat also 1 Frühling, 2 Sommer, 2 Herbste und 1 Winter.

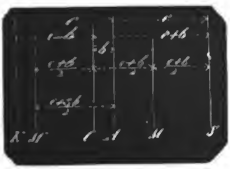
Fig. 93.



Es beginnt der Winter mit dem Eintritt der Sonne in S, der Frühling mit ihrem ersten Eintritt in M, der erste Sommer mit ihrem Eintritt in O, der erste Herbst mit ihrem Eintritt in K, der zweite Sommer mit ihrem zweiten Eintritt in O, der zweite Herbst mit ihrem zweiten Eintritt in M und hierauf wieder der Winter mit dem Eintritt der Sonne in S.

Für jeden Ort O, der näher an dem Aequator liegt als $\frac{1}{3}$ der Schiefe (e) der Ekliptik, hat die Sonne im Zenith (O) 2 Mal die gröfste Mittagshöhe, in S die kleinste, zwischen beiden 2 Mal die mittlere in M, und zwischen O und K noch zwei Mal dieselbe in M'.

Fig. 94.



Denn da $AO = b < \frac{e}{3}$

so ist $OS = e + b < \frac{4}{3} e$

mithin $OM = \frac{e+b}{2} < \frac{2}{3} e$

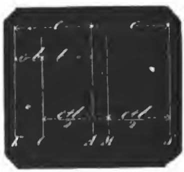
da nun $OK = e - b > \frac{2}{3} e$

so mufs es zwischen O und K einen Parallelkreis in M' geben, der von O um $\frac{e+b}{2} < \frac{2}{3} e$ absteht, und in welchem die Sonne dieselbe mittlere Höhe für O hat wie in M.

Daher hat der Ort O 1 Winter, 1 Frühling, 2 Sommer und 3 Herbste: Der Winter beginnt mit dem Eintritt der Sonne in S, der Frühling mit ihrem Eintritt aus S in M unter $\left(\frac{e-b}{2}\right)^\circ$ südlicher Br., der erste Sommer mit ihrem Eintritt in O unter b° nördlicher Breite, der erste Herbst mit dem Eintritt aus O in M' unter $\left(\frac{e+3b}{2}\right)^\circ$ nördlicher Breite, der zweite Herbst, wenn die Sonne von M' nach K gegangen, von dort zurück nach demselben M' gekommen ist und in M' wieder eintritt, der zweite Sommer beginnt mit dem Eintritt der Sonne aus M' in O, der dritte Herbst mit dem Eintritt aus O in M und dauert bis zum Eintritt der Sonne aus M in S, wo der Winter wieder anfängt.

Für jeden Ort O, der näher am Aequator liegt als e und ferner als $\frac{1}{3} e$ hat die Sonne im Zenith O zwei Mal die gröfste Mittagshöhe, in S die kleinste, zwischen beiden, O und S, in der Mitte zwei Mal die mittlere, während in K, der nördlichen Grenze der Sonnenbahn, die Sonne eine Mittagshöhe hat, die zwischen der gröfsten und der mittleren befindlich ist; daher hat der Ort O 1 Winter, 1 Frühling, 2 Sommer und 1 Herbst.

Fig. 95.



Der Winter beginnt mit dem Eintritt der Sonne in S, der Frühling mit deren Eintritt aus S in M unter $\left(\frac{e-b}{2}\right)^\circ$ südlicher Br., der erste Sommer mit ihrem ersten Eintritt aus M in das Zenith von O, der zweite Sommer mit ihrem zweiten Eintritt von O nach K und von K zurück in das Zenith von O, der Herbst mit ihrem zweiten Eintritt aus O in M und dieser dauert bis zu dem Wieder-Eintritt der Sonne in S, wo der Winter wieder anfängt.

Für Orte der südlichen Halbkugel hat

man dieselben Verhältnisse, wenn man den Wendezirkel des Krebses *K* mit dem des Steinbocks *S* vertauscht.

Astronomische Länge, Länge der Gestirne. Ist der östliche Abstand der Gestirne vom Frühlingspunkt (s. Absiden und astronomisches Jahr), in Bogen von 0 bis 360° gemessen.

Von Gestirnen, die in der Ebene der Ekliptik selbst liegen, wird die Länge unmittelbar angegeben; von allen übrigen Gestirnen wird die Länge des Punkts gemessen, in welchem der kleinere Bogen des Breitenkreises, der Breitenbogen des Gestirns die Ekliptik berührt (s. astronomische Breite).

Man sagt in der Regel: A. L. eines Gestirns sei der Abstand desselben vom Frühlingspunkt, von Abend nach Morgen oder von Rechts nach Links gemessen; Beides ist zwar richtig, aber weniger präcis bezeichnet. Denn da die Erde in jedem Augenblick in der Ekliptik sich befindet, so kann man eben so gut aufserhalb wie innerhalb der Ekliptik sich stehend vorstellen; betrachtet man im ersten Fall Abend und Morgen, Rechts und Links für den dem Beschauer zunächst befindlichen elliptischen Halbkreis, so hat man die entgegengesetzte, also unrichtige Abmessung für die a. L., und zwar deren Ergänzung zu 360°. Man mufs sich bei der Bezeichnung von Abend nach Morgen oder von Rechts nach Links vorstellen, dafs man innerhalb der Ekliptik sich befindet, das Gesicht nach Mittag gerichtet und in die hohle Himmelshalbkugel gesehen; alsdann liegt Abend zur Rechten, Morgen zur Linken, die Messung geschieht von Rechts nach Links oder von Abend (über Mittag) nach Morgen. Eine richtige präcise Bezeichnung für a. L. ist daher auch, wenn man sagt, die L. wird vom Frühlingspunkt aus nach der Folge der Zeichen gemessen (s. absteigendes Zeichen).

Fixsterne haben eine unermefsliche Entfernung von der Erde und deshalb einen unveränderten Stand gegen die Erde, diese möge sich in irgend welchem Punkt der Ekliptik befinden, mithin auch denselben Standort gegen die in der Mitte der Ekliptik befindliche Sonne, und folglich auch deren Breitenbogen dieselbe Entfernung von dem Frühlingspunkt oder dieselbe Länge; die Sterne mögen von der Erde oder von der Sonne aus betrachtet werden, indem beide Beobachtungslinien nach demselben Stern mit einander ⫩ laufen.

Die zu unserem Sonnensystem gehörenden Gestirne dagegen, die Planeten, Monde und Kometen haben mefsbare und daher von Erde und Sonne verschiedene Entfernungen, die Visirlinien von der Erde und von der Sonne aus nach einem solchen Gestirn gerichtet, bilden einen Winkel, und sie durchkreuzen sich in dem Gestirn, und deren Verlängerungen geben auf der unendlich fernen hohlen Himmelskugel verschiedene Punkte an.

Befindet sich das Gestirn in der Ebene der Ekliptik (im Knoten), so sind die beiden Punkte verschieden weit vom Frühlingspunkt entfernt, steht es aufserhalb der Ekliptik, so haben beide Punkte verschiedene Breitenkreise und diese sind von dem Frühlingspunkt verschieden entfernt.

Jedes zu unserem Sonnensystem gehörende Gestirn hat also zwei verschiedene Längen: die von der Erde aus beobachtete, die geocentrische Länge und die in dem Sonnenmittelpunkt beobachtet gedachte, die heliocentrische Länge (vergl. astronomische Breite). Die Erde befindet sich fortdauernd in der Ekliptik, sie hat also weder geocentrische, noch heliocentrische Breite, und ihre heliocentrische Länge ist zugleich ihre geocentrische; die Sonne in einem Brennpunkt der Ekliptik hat weder heliocentrische Länge, noch Breite, auch keine geocentrische Breite, wohl aber eine geocentrische Länge, nämlich die in irgend einem Augenblick von der Erde aus beobachtete Entfernung der Sonne von dem unendlich fern gedachten Frühlingspunkt in Bogenmaafs ausgedrückt.

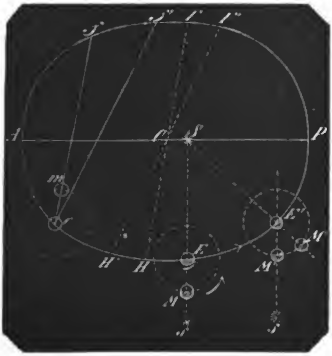
Astronomische Maschinen s. u. Apparat.

Astronomischer Meridian, Himmelsmeridian s. u. astronomischer Horizont No. 6, 7 und 8. Der M. eines Orts theilt die hohle Himmelskugel in 2 gleiche Halbkugelflächen, in die östliche und in die westliche; erstere liegt, wenn man nach dem Mittagspunkt sieht, zur Linken, letztere zur Rechten. Man sagt astr. M. im Gegensatz zum Erdmeridian, unter welchem man jeden der Halbkreise versteht, die durch beide Erdpole auf der Erdoberfläche beschrieben werden können, so dafs jeder Ort der Erde seinen bestimmten Meridian hat, und in welchem die Sonne in dem Augenblick sich befindet, wenn für den Ort Mittag ist, weil man aus jedem Ort der Erdoberfläche durch beide Pole einen Halbkreis beschreiben kann.

Astronomischer Monat, im Gegensatz von bürgerlichem Monat, ist die genaue, in Tagen, Stunden, Minuten und Secunden ermittelte Zeit, in welcher ein Umlauf des Mondes in der Mondbahn von

einem in derselben festgestellten Punkt bis wieder zu demselben Punkt geschieht, während der bürgerliche Monat oder der Kalendermonat aus nur ganzen Tagen zu 24 Stunden besteht.

Fig. 96.



Je nachdem die Punkte in der Mondbahn angenommen werden, je nachdem hat man verschiedene astr. M. (vergl. astr. Jahr). Damit diese M. möglichst klar verstanden werden, sei Fig. 96 *AFPH* die Ekliptik, *S* die Sonne in deren Brennpunkt; *A* das Aphel, *P* das Perihel, *F* der Frühlingspunkt, *H* der Herbstpunkt (s. Absiden), *E* die Erde in einem beliebigen Punkt der Ekliptik, in welcher sie sich nach der Pfeilrichtung um die Sonne bewegt und dabei die nach dem zweiten Pfeil gerichtete Axendrehung macht; der um *E* punktirte Kreis sei die Bahn des Mondes um die Erde, der von dieser um die Sonne mit fortgeführt wird, der Mond *M* darin bewegt sich nach der Richtung des Pfeils, also mit der Axendrehung der Erde nach einerlei Richtung, ohne selbst weitere Rotationen um seine Axe zu machen. Die Mondbahn liegt mit der Ekliptik nicht in derselben Ebene, sondern schneidet dieselbe zu verschiedenen Zeiten unter verschiedenen Winkeln, die aber $5\frac{1}{3}°$ nicht übersteigen, so dafs der Mond der Ekliptik immer sehr nahe ist, und bei jedem Umlauf um die Erde dieselbe 2 Mal (in den beiden Knoten) durchschneidet.

2. Der eigentlichste astr. M. ist der siderische M. (sidus, Gestirn), nämlich diejenige Zeit, in welcher der Mond, von der Erde aus gesehen, wieder mit demselben Fixstern zusammentrifft, oder denselben Stand gegen ihn hat. Es befinde sich in einer Richtung *Es*, entweder genau in der Ebene der Mondbahn, oder sehr nahe derselben, ein Fixstern *s*, so wird dieser vom Monde bedeckt oder tangirt, wenn dieser den Stand *M* hat. Von diesem Zeitpunkt ab entfernt sich der Mond von dem Stern immer mehr östlich, und tritt erst wieder nach vollendetem Umlauf um die Erde in dieselbe den Stern bedeckende Lage; während dieser Zeit ist nun die Erde mit dem Monde in der Ekliptik um eine Länge *EE'* weiter gegangen und die zweite Bedeckung des Fixsterns geschieht, wenn der Mond in *M'* zwischen *E'* und *s* getreten ist. Da nun der Fixstern *s* von dem Sonnensystem unendlich weit entfernt ist, so ist die Richtung $E's \parallel$ der Richtung *Es*, und der Mond hat genau den vollen Kreis mit 360° beschrieben. Die Zeit, in welcher dies geschieht, ist bei den bedeutenden Ungleichheiten der Mondbewegung im Mittel 27 Tage 7 Std. 43 Min. 11 Sec.

3. Ein zweiter astr. M. ist der tropische M. (vergl. astr. Jahr), die Zeit, in welcher der Mond um die Erde läuft, wobei er vom Frühlingspunkt aus in denselben zurückkehrt. Hierbei ist Folgendes zu beachten. Die durch den Mittelpunkt *C* der Ekliptik gezeichnete gerade Linie *HF* bezeichnet in den Endpunkten *H* und *F* allerdings den Herbstpunkt und den Frühlingspunkt in der Ekliptik, da jedoch diese Punkte auf der unendlich fernen Himmelskugel verzeichnet werden, so mufs man die endliche, etwa 40 Millionen Meilen betragende Länge *HF* nach beiden Seiten hin in's Unendliche sich verlängert denken; dann liegen also *F* und *H*, von jedem Punkt der Ekliptik aus gesehen, $\parallel$ mit *HF*. Steht demnach die Erde in *e* und der Mond in *m*, so dafs $emf \parallel HF$, so liegt der Mond, von der Erde aus gesehen, im Frühlingspunkt, und wenn die Erde während einer Umdrehung des Mondes um dieselbe nach *H* gerückt wäre, so würde *HF* die Richtung sein, in welcher *e* und *m* sich befinden, und der Mond würde, wie beim siderischen Monat, genau 360° beschrieben haben. Allein Frühlings- und Herbstpunkt bleiben nicht constant: die Linie *HF* ändert ihre Richtung in *H'F'* um einen $\angle FCF' = 50{,}24$ Sec. jährlich. Setzt man also das Jahr $365\frac{1}{4}$ Tag, den siderischen Monat $= 27\frac{1}{3}$ Tag, so hat man den $\angle FCF'$, um den der Punkt *F*

während eines Mondumlaufs sich ändert, $=\frac{27\frac{1}{3}}{365\frac{1}{4}}\times 50{,}24$ Sec. $=3{,}75$ Sec. Hat also der Mond von *e* aus die Richtung *emf*, so hat er, um wiederum in die Richtung nach dem Frühlingspunkt zu kommen, die Richtung *emf'* zu erhalten, also $360^\circ - fef' = 360^\circ - 3{,}75''$ zu beschreiben. Nun macht aber der Mond 360° in $27\frac{1}{3}$ Tagen, mithin 3,75" in $\frac{3{,}75''}{360^\circ}\times 27\frac{1}{3}$ Tage = 7 Zeit-Secunden. Der tropische Monat beträgt also im Mittel 7 Sec. weniger als der siderische = 27 Tg. 7 Std. 43 Min. 4 Sec.

Beide astr. M., der siderische und der tropische, werden ihres geringen Unterschiedes wegen mit dem gemeinschaftlichen Namen periodischer M. bezeichnet.

4. Ein dritter astr. M. ist der Knoten- oder Drachen-Monat, die Zeit, in welcher der Mond aus einem Knoten in denselben zurückkehrt, und zwar von absteigendem zu absteigendem, oder von auf- zu aufsteigendem Knoten. Dieser M. ist wieder kürzer als die periodischen M., weil die Knoten eine rückgängige Bewegung machen, welche in einem Jahr von $365\frac{1}{4}$ Tag = 19° 19' in der Mondbahn, also in einem Monat von $27\frac{1}{3}$ Tag $\frac{27\frac{1}{3}}{365\frac{1}{4}}\times 19^\circ 19' = 1^\circ 26' 44''$ beträgt, mit welchen der Knoten dem Monde entgegenkommt. Da nun der Mond in $27\frac{1}{3}$ Tag 360° zurücklegt, so entspricht jenem Winkel eine Zeit von $\frac{1^\circ 26' 44''}{360^\circ}\times 27\frac{1}{3}$ Tag = 2 Std. 38 Min. 3 Sec.; diese von dem siderischen M. abgezogen, giebt den Knoten-M. = 27 Tg. 5 Std. 5 Min. 8 Sec.

Der Name Drachenmonat stammt aus der ältesten Zeit der Mythe, indem diese den Mond als Göttin Luna sich dachte, und die Mondfinsternisse, die nur in dem Knoten entstehen können, als Folgen des Kampfes der Luna mit einem Drachen ansahen, woher der aufsteigende Knoten Drachenkopf, der absteigende Drachenschwanz genannt wurde.

5. Ein vierter astr. M. ist der anomalistische M. (s. d.)

6. Der fünfte astr. M. ist derjenige, welcher unseren bürgerlichen Verhältnissen am entsprechendsten ist, nämlich der von einem Eintritt einer bestimmten Mondphase bis zu dem Wieder-Eintritt in dieselbe, als den Neumond oder den Vollmond, und der wegen gleicher Zusammenkunft (Synode) von Sonne, Erde und Mond der synodische M. genannt wird.

Fig. 96 zeigt den Mond *M* mit der Erde und der Sonne in gerader Linie, so dafs der nicht erleuchteten Erdhälfte die erleuchtete Mondhälfte zugekehrt, also Vollmond ist. Bewegt sich nun der Mond, bis er wieder in denselben Punkt *M*, also in *M'* tritt, so ist noch nicht der zweite Vollmond eingetreten, der Mond mufs noch den Bogen *M'E'M''* = Bogen *MSM'* zurücklegen, also den Bogen, um welchen während seiner vollständigen Bewegung die Erde in der Ekliptik fortgeschritten ist. Die Erde durchläuft 360° in $365\frac{1}{4}$ Tag, der Mond 360° in $27\frac{1}{3}$ Tag; die Winkel-Geschwindigkeiten beider Körper haben das umgekehrte Verhältnifs mit den Geschwindigkeiten für den ganzen Umfang, die Winkel-Geschwindigkeit der Erde zu der des Mondes ist also = $27\frac{1}{3} : 365\frac{1}{4}$. Bezeichnet man den $\angle M'E'M'' = \angle ESE'$ mit *y*, so beschreibt der Mond den $\angle 360^\circ + y$, während die Erde den $\angle y$ beschreibt, mithin hat man:

$$365\tfrac{1}{4} : 27\tfrac{1}{3} = 360 + y : y$$

woraus

$$365\tfrac{1}{4} - 27\tfrac{1}{3} : 27\tfrac{1}{3} = 360^\circ : y$$

und $y = 29^\circ\ 7'\ 10\frac{1}{2}''$

Dividirt man diesen Bogen mit 360° und multiplicirt mit $365\frac{1}{4}$ Tag, oder dividirt man diesen Bogen + 360° durch 360° und multiplicirt mit $27\frac{1}{3}$, so erhält man die Dauer *x* des synodischen Monats = 29 Tg. 13 Std. 3 Min. 45 Sec.

Diesen M. = *x*, erhält man auch ohne vorherige Ermittelung des Bogens *y* aus der Proportion:

$$365\tfrac{1}{4} - 27\tfrac{1}{3} : 27\tfrac{1}{3} = 365\tfrac{1}{4} : x$$

weil

$$365\tfrac{1}{4} : 27\tfrac{1}{3} = 365\tfrac{1}{4} + x : x$$

indem das letzte Verhältnifs $360^\circ + y : y$ in obiger Proportion aus 2 Bogen besteht, und diese wie die Zeiten $365\frac{1}{4} + x$ Tage : *x* Tagen, in welchen sie mit einerlei Winkel-Geschwindigkeit zurückgelegt worden, sich verhalten.

7. Endlich hat man den sechsten astr. M., den Sonnen-Monat, der zwölfte Theil des Sonnenjahres = $\frac{1}{12}\cdot 365\frac{1}{4}$ Tag = 30 Tg. $10\frac{1}{2}$ Std.

Wegen der grofsen Ungleichheiten, mit welchen der Mond um die Erde sich bewegt, sind alle astr. M. nur Mittelwerthe. Legt man die Beobachtungen zu Grunde, welche von einer grofsen Anzahl von Mondfinsternissen gemacht worden sind, indem das Mittel an Zeit zwischen Anfang und Ende jeder Finsternifs offenbar der Moment ist, in welchem der wirkliche Vollmond eben stattfindet, so erhält man den synodischen M. im Maximo 29 Tg. 19 Std., im Minimo 29 Tg. $6\frac{1}{2}$ Std., woraus das Mittel 29 Tg. 12 Std. 45 Min. für den synodischen M. hervorgeht.

Setzt man übrigens, um genauer zu rechnen, in das zweite Glied der beiden letzten Proportionen statt $27\frac{1}{3}$ Tg. die wirkliche Zeit 27 Tg. 7 Std. 44 Min., so erhält man für den Bogen y den Werth 29° 6' 24,5" und für den synodischen M. $x = 29$ Tg. 12 Std. 45 Min., wie der eben gedachte Mittelwerth beträgt.

Astronomisches Ocular. Das Ocular am astr. Fernrohr, eine biconvexe Linse, während das Galilei'sche O. ein biconcaves ist (s. astr. Fernrohr zu Anfange).

Astronomischer Ort. Der Ort, in welchem am Himmelsgewölbe ein Weltkörper sich befindet. Der a. O. wird auf zweierlei Art bezeichnet: Erstens, in Beziehung auf die Lage der Ekliptik durch Breite: der zwischen dem Ort und der Ekliptik senkrecht auf dieser befindliche Bogen des gröfsten Kreises, und Länge: der östliche Abstand jenes Breitenkreises, von dem Frühlingspunkt in dem Bogen der Ekliptik gemessen. Zweitens, in Beziehung auf den Welt-Aequator durch Abweichung: der zwischen dem Ort und dem Aequator senkrecht auf diesem befindliche Bogen des gröfsten Kreises, und gerade Aufsteigung: der östliche Abstand jenes Abweichungskreises, von dem Frühlingspunkt in dem Bogen des Aequators gemessen.

Astronomischer Quadrant. Ein in Grade und deren Theile eingetheilter, später noch mit einem Nonius versehener Viertelkreis (Quadrant), der früher auf den Sternwarten als Winkelmefs-Instrument üblich war. Der eine Halbmesser wurde senkrecht gestellt, so dafs der andere waagerecht lag; um den Mittelpunkt drehbar waren Dioptern oder ein Fernrohr befestigt, die Ebene des Q. befand sich in der Mittagsebene, so dafs die Culmination der Sterne und deren Höhen und Zenith-Abstände gemessen werden konnten. Dieser Q. ist feststehend (Mauer-Quadrant). Ein beweglicher Q., der um seinen lothrechten Schenkel oder Halbmesser sich dreht, mifst auch die Höhen und Zenith-Abstände der aufserhalb des Meridians befindlichen Gestirne, und ist deshalb mit einem festliegenden horizontalen Kreis versehen (vergl. Aequatoreal), auf welchem das zu der Höhe gehörende Azimuth (die Entfernung des Sterns vom Meridian, dessen Südweite) abgelesen werden kann. Der a. Q. ist nicht mehr gebräuchlich und durch bessere Instrumente ersetzt.

Was die Quadranten besonders weniger zuverlässig macht, ist die ungleichmäfsige Veränderung des Metalls bei Temperaturwechseln wegen deren Form, und die vollen Kreise sind zuverlässiger, weil jene Ausdehnungen und Zusammenziehungen des Metalls bei geschlossenen Formen gleichförmig geschehen.

Astronomische Rechnungen. Die Rechnungen, mit welchen aus den beobachteten verschiedenen Orten eines Gestirns und dem zwischen beiden stattgefundenen Zeit-Unterschied, dessen Ort zu einem künftigen Zeit-Augenblick vorher genau bestimmt wird, so wie für die zu unserem Sonnensystem gehörenden Weltkörper Gröfse, Dichtigkeit, Rotation, Bahn u. s. w.

Diese R. beruhen auf der von Newton aufgestellten und überall streng bewährten Hypothese über die Natur der Attraction und werden mit Hülfe der Lehren der sphärischen Geometrie ausgeführt.

Astronomische Refraction, Strahlenbrechung, ist der ∠, um den ein Gestirn vermöge der Brechung des Lichtstrahls innerhalb des Luftgebiets höher zu stehen scheint, als es wirklich steht.

Fig. 97.



Kommt ein Lichtstrahl aus einem dünneren Mittel in ein dichteres, z. B. aus Luft in Wasser, so wird der Strahl nach dem Einfallslothe hin gebrochen. Ist *Ff* ein dichterer Körper als Luft, z. B. Glas, ist *Ll* das Einfallsloth, so wird der Lichtstrahl *AB*, statt in seiner Verlängerung *BE* weiter fortzugehen, nach *BC* gebrochen, und von *C* aus wieder in die Luft tretend, nimmt er die Richtung $CD \mathrel{\#} AB$ wieder an. Ein Auge in *D* empfängt den Strahl *ABC* aus *C*, und da es nur den Ort des Gegenstandes nach gerader Richtung beurtheilen kann, so versetzt es den Gegenstand *A* in *G*, ein Auge in *C* versetzt *A* nach *H*.

Der Lichtstrahl der Gestirne kommt aus luftleerem Raume, trifft durch dünne, aber immer dichter werdende Luftschichten die Erdoberfläche und wird somit curvenförmig abgelenkt.

Es sei *AOB* die Erdoberfläche, *Tt* die Tangente in *B*, so sollte ein Gestirn für

B erst aufgehen, wenn es in die Richtung *Tt* getreten wäre, allein es wird schon in *B* sichtbar, wenn es unterhalb *T*, z. B. in *S* erst steht. Den Luftkreis nämlich

Fig. 98.



kann man sich aus einer sehr grofsen Menge niedriger Luftschichten vorstellen, von denen jede der Erde näher liegende etwas dichter als die darüber befindliche ist. Der ganze Luftkreis in 3 Schichten gedacht, von welchen jede die mittlere Dichtigkeit der darin begriffenen Schichten in *aa*, *bb*, *dd* besitzt, giebt für den Lichtstrahl *Sm* die Ablenkungen *mn*, *np*, *pB*, und da man aus allen um uns befindlichen Gegenständen gewohnt ist, den Lichtstrahl nur in gerader Linie zu empfangen, so glaubt man auch, dafs das Gestirn *S* in der Richtung *tT* sich befinde und es scheint in der Richtung *Tt* aufzugehen. Ebenso wird ein Beobachter in *O* einen Circumpolarstern in seinem niedrigsten Stande *s'* viel höher, etwa in *S'* stehend annehmen.

Sterne, die im Zenith stehen, erfahren keine Strahlenbrechung, weil der Lichtstrahl mit dem Einfallsloth zusammentrifft, die Brechung wird um so stärker, je näher der Stern dem Horizont steht, wo die Brechung am stärksten ist. Die Beobachtung eines Sterns ist demnach am sichersten, wenn derselbe culminirt.

Tritt ein Stern in das Zenith eines Ortes oder in die Nähe desselben bei seiner Culmination, so findet man dessen Abweichung, und hiernach vermittelst der sphärischen Trigonometrie seinen wahren Stand zu bestimmten Zeitabständen von der Zeit der Culmination. Beobachtet man nun in den Zeitpunkten den Stern, so findet man ihn höher stehend, und die Differenz zwischen der berechneten wahren Höhe und der gefundenen ist die Gröfse der astronomischen Strahlenbrechung für die bekannte scheinbare Höhe.

Mittelst einer Reihe äufserst sorgfältiger Beobachtungen an vielen Orten hat man tabellarisch die Gröfse der Strahlenbrechung für gegebene scheinbare Sternhöhen. La Place giebt dieselben an:

Scheinbarer Abstand vom Scheitel

10°	Refraction	10,3"
20°	„	21,2"
30°	„	33,4"
40°	„	48,9"
45°	„	58,2"
50°	„	1' 9,3"
60°	„	1' 40,6"
70°	„	2 38,8"
80°	„	5' 19,8"
85°	„	9 54,3"
87°	„	14 28,1"
90°	„	33' 46,3"

Ein Stern, der eben untergehen will, beschreibt also noch einen sichtbaren Bogen von 33' 46,3", und wenn er den Horizont senkrecht durchschneidet, so ist er noch $\frac{33' 46{,}3''}{360°} \times 24$ Stunden = 2 Min. 15,085 Sec. über dem Horizont zu sehen.

Astronomischer Ring. Die viel zu wichtige Bezeichnung der ehemals sehr gebräuchlichen Taschen-Sonnenuhr in Form eines Ringes, daher auch Sonnenring genannt, durch eine Oese an einem kleinen Haken beweglich befestigt, mit welchem man den Ring gegen die Sonne hangen liefs. Durch eine kleine Oeffnung schien die Sonne in's Innere des Ringes und gab mit ihrem Lichtpunkt die dort mit Linien und Zahlen bezeichneten Tagesstunden an. Die Oeffnung befand sich in einem kreisförmigen Plättchen und konnte mit diesem nach dem für jeden Monat des Jahres auf der Aufsenfläche bezeichneten Theilstrich verschoben werden.

Astronomische Strahlenbrechung s. v. w. astr. Refraction.

Astronomische Tafeln sind Hülfstabellen zum Gebrauch für astronomische Beobachtungen und Berechnungen. Die ersten, vollständigsten und ausführlichsten sind diejenigen, welche die Berliner Akademie der Wissenschaften im Jahre 1776 in 3 Bänden herausgegeben hat.

Diese Tafeln enthalten die Vorstellung des Sonnensystems, nämlich das Verzeichnifs für alle Planeten, deren gröfste, mittlere und kleinste Entfernung von der Sonne, in Halbmessern der Erdbahn ausgedrückt, deren Gleichungen des Mittelpunkts, deren Bahn-Neigung gegen die Ekliptik, deren wahren Abstände von der Sonne, deren Sternjahre, tropischen und synodischen Jahre, deren Zeit der Umwälzung, deren Dichtigkeit und Masse u. s. w.

Die Vorstellung des Mondlaufs, das Verzeichniſs der Oerter auf der Erde und deren geographische Länge und Breite. Zeitrechnungen für die gebräuchlichsten Kalender. Das Verzeichniſs der Fixsterne, deren Länge und Breite u. s. w.

Tafeln zur Berechnung der wahren Länge der Sonne, deren scheinbare Halbmesser an bestimmten Tagen, deren Zeitgleichung, Abweichung, Axen-Neigung.

Tafeln zur Berechnung der wahren Länge, Breite, der Parallaxe, des scheinbaren Durchmessers, der stündlichen Bewegung des Mondes, und für die Lagen des Mond-Aequators für die Zeit der Neu- und Vollmonde.

Tafeln für die Bewegung der einzelnen Planeten, deren beobachtete Gegenscheine und Zusammenkünfte mit der Sonne.

Perturbations-Tafeln für den Saturn und den Jupiter, für die Bewegung der Knotenlinien und Bahn-Veränderungen der Planeten vermöge ihrer wechselseitigen Einwirkung.

Tafeln zur Berechnung der Bahn der Kometen.

Hülfstafeln zur Berechnung der Nutation der Erd-Axe, der Abirrung des Lichtes, der abgeplatteten Form der Erde; Tafeln für die Gradlängen in verschiedenen Meridianen verschiedener Oerter, für die Längen des Secundenpendels; Tafeln für die Sinus, durch Bogen von gleicher Länge ausgedrückt, der Positionswinkel für die acht ersten Grade der Breite und alle Grade der Länge, zum Gebrauch für Mond und Planeten.

Tafel für die mittlere astronomische Strahlenbrechung bei 0° bis 90° Höhe und mit Rücksicht auf die verschiedene Dichtigkeit der Luft.

Tafel für die halben Tagebogen (und Weiten in Ost und West) bei gegebener südlicher und nördlicher Abweichung der Gestirne und deren Breiten und Polhöhen.

Tafel für die Lichtgestalten des Mondes und der Venus, und endlich

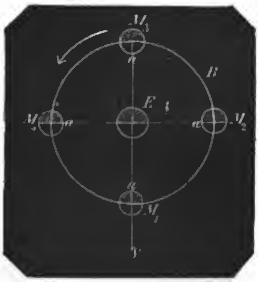
Längen der Kreisbogen, in Theilen des Halbmessers ausgedrückt.

Anweisungen zum Gebrauch dieser Tafeln befinden sich in den astronomischen Jahrbüchern derselben Akademie vom Jahr 1776.

Astronomischer Tag. Unterscheidet sich von bürgerlichem Tag, indem jener mit dem Augenblick beginnt, wo die Sonne durch den oberen Meridian des Ortes geht, also um 12 Uhr Mittags, und daſs dessen Stunden von 1 bis 24 fortgezählt werden, während der bürgerliche Tag anfängt, wenn die Sonne durch den unteren Meridian des Ortes geht, also um 12 Uhr Mitternacht, und daſs dessen Stunden in 2 halben Tagen von 1 bis 12 fortgezählt werden. Der astr. T. fängt übrigens mit dem bürg. T. desselben Datums 12 Stunden später an; bürgerliche Zeit wird also in astronomische Zeit verwandelt, indem man die Nachmittagsstunden, welche übereinstimmen, beibehält, zu den Vormittagsstunden aber 12 Stunden hinzuzählt und einen ganzen Tag zurückrechnet. Der erste Januar 1856 Nachm. 3 Uhr war astronomisch der erste Januar 1856, 3 Uhr, derselbe Tag Vorm. 10 Uhr war astronomisch der 31. December 1855, 22 Uhr.

Astronomischer Tag des Mondes. Bedeutet E die Erde, B nach der Richtung des Pfeiles die Mondbahn, S die Richtung der Sonne, so hat man während des Umlaufes des Mondes um die Erde, wie schon erwähnt, keine Axendrehung; die

Fig. 99.



mit a bezeichneten Punkte haben in allen vier gezeichneten Stellungen des Mondes die angegebenen Lagen. In M_1 hat a Mitternacht, in M_2 Sonnen-Aufgang, in M_3 Mittag, in M_4 Sonnen-Untergang und in M_1 wieder Mitternacht. Der astr. T. des Mondes (auf der Erde circa 24 Std.) ist demnach gleich dem synodischen Monat desselben, nämlich der Zeit von einer Conjunction desselben mit der Sonne bis zur nächstfolgenden (s. astr. Monat, der 5te) = 29 Tg. 13 Std. 3 Min. 45 Sec. Erdzeit, und eben so lange währt eine vollständige scheinbare Umdrehung sämmtlicher Gestirne um den Mond.

Astronomische Vergröſserung. Die V., in welcher die durch ein Fernrohr gesehenen Gestirne gegen den Anblick mit

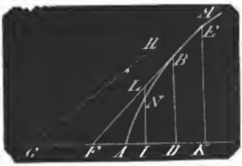
unbewaffnetem Auge erscheinen. Bei der so sehr grofsen Ferne der Gestirne bleibt deren scheinbare Gröfse dieselbe, sie ändert sich aber in so vielfacher Annäherung und Schärfe des Bildes (s. astr. Fernrohr.)

Astronomische Zeichen sind die bekannten Kalenderzeichen. Aufser den im Art. „Absteigendes Zeichen" angegebenen hat man noch die für die Sonne, die Mondphasen, für sämmtliche gröfsere Planeten, für Gegenschein, Zusammenkunft, Geviertschein und Knoten.

Asymmetrisch (α, Verneinung, συν, zusammen, μετρειν, messen). Bei den alten Analysten s. v. w. incommensurabel oder irrational, wie z. B. die Seite und die Diagonale eines Quadrats (1 und $\sqrt{2}$), der Durchmesser und die Peripherie eines Kreises (1 und π) sind a.

Asymptote (α, Verneinung, συν, zusammen, πιπτειν, fallen). Eine Linie, in der Regel eine gerade, welche einer krummen Linie immer näher kommt, ohne sie jemals zu erreichen, oder ohne mit ihr zusammenzufallen; man kann daher auch eine A. definiren als eine gerade Linie, welche eine krumme Linie in einem unendlich weit entfernten Punkt tangirt.

Fig. 100.



Es sei FB eine Tangente an der Curve ABE für den Punkt B, AD sei die Axe der Abscissen x, x' ...., A deren Anfangspunkt, die zugehörigen Ordinaten seien y, y' ...., so ist FD die Subtangente zu x und y. Es sei GH eine A., so soll diese die Curve erst in einem ∞ fernen Punkt als Tangente berühren. Es ist mithin die dazu gehörige Abscisse von A aus ∞, es ist also für die Zulässigkeit einer A. nothwendig, dafs die Curve eine unendliche Abscisse zuläfst. Aber auch die Subtangente von G aus ist ∞, allein die Differenz beider, Subtangente − Abscisse $= GA$, ist eine endliche Gröfse, und diese ist die zweite Bedingung, unter welcher eine A. zulässig ist.

Um daher eine A. zu bestimmen, ist erforderlich, eine Subtangente (T) durch die Coordinaten auszudrücken, und dies geschieht (ohne Hülfe der Differenzialrechnung) folgender Art: Es sei $ID = DK = d$, also $AI\ (x') = x - d$ und $AK\ (x'') = x + d$

Nun ist $FI : FD : FK = IL : DB : KM$ oder $T - d : T : T + d = y' + NL : y : y'' + EM$

Hieraus ist

$$\frac{T-d}{T} > \frac{y'}{y}$$
$$\frac{T+d}{T} > \frac{y''}{y}$$

Dies aus der Natur der Tangente von selbst hervorgehende Resultat bietet aber ein Mittel für die Construction der Tangente; denn je kleiner d genommen wird, desto mehr verschwindet sowohl rechts als links von y die Ungleichheit, und mit $d = 0$ ist vollkommene Gleichheit vorhanden.

1. Beispiel. Die Gleichung für die Parabel ist

$$y^2 = p \cdot x$$

Man ersieht, dafs x einen unendlichen Werth annehmen kann, dafs also in dieser Beziehung eine A. möglich ist, und es ist daher die Subtangente zu bestimmen.

Nun ist $\frac{T \mp d}{T} > \frac{y_{\prime}}{y}$

daher $\left(\frac{T \mp d}{T}\right)^2 > \frac{p(x \mp d)}{px}$

die Nenner fortgeschafft und gehoben, giebt

$$\pm 2Tx + dx > \mp T^2$$

Hierin $d = 0$ gesetzt, giebt

$$2Tx = T^2$$

woraus $T = 2x$

Nun ist Subtang. − Abscisse $= 2x - x = x$, mithin für $x = \infty$ hat diese Differenz ebenfalls einen unendlichen Werth, und eine A. ist nicht möglich.

2. Beispiel. Die Gleichung für die Ellipse ist

$$y^2 = ax - bx^2$$

Schreibt man dafür

$$y^2 = b \cdot x\left(\frac{a}{b} - x\right)$$

so ersieht man, dafs, so lange $x < \frac{a}{b}$ ist, y^2 einen positiven Werth behält, dafs für $x = \frac{a}{b}$, $y^2 = 0$ wird, dafs mit dem ferneren Wachsthum von x die Klammergröfse negativ wird, dafs, da y^2 als Quadrat negativ nicht existiren kann, $x = \infty$, oder eine unendliche Abscisse nicht möglich ist, und dafs daher auch die Subtangente nicht ermittelt werden darf.

3. Beispiel. Die Gleichung für die Hyperbel ist

$$y^2 = ax + bx^2 = bx\left(\frac{a}{b} + x\right)$$

welche eine unendliche Abscisse x zuläfst.

Zur Auffindung der Subtangente hat man

$$\left(\frac{T+d}{T}\right)^2 > \frac{a(x+d) + b\,(x+d)^2}{ax + bx^2}$$

die Nenner fortgeschafft und gehoben, giebt

$$(2\,T + d)(ax + bx^2) > (a + bd + 2\,bx)\,T^2$$

Hierin $d = 0$ gesetzt, giebt

$$2\,(ax + bx^2)\,T = (a + 2\,bx)\,T^2$$

$$\text{woraus } T = 2\cdot\frac{ax + bx^2}{a + 2\,bx}$$

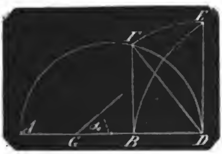
Es ist mithin allgemein Subtang. — Abscisse

$$= 2\cdot\frac{ax + bx^2}{a + 2\,bx} - x = \frac{ax}{a + 2bx} = \frac{a}{\frac{a}{x} + 2b}$$

für $x = \infty$ wird $\frac{a}{x} = 0$, mithin die Differenz $= \frac{a}{2b}$

Da nun $y^2 = ax + bx^2$, so ist b eine abstracte Zahl in dem gegebenen Werthe von $\frac{1}{n}$ bis n. Es sei für beispielsweise erforderliche Construction der A., der Einfachheit wegen $b = 1$, a ebenfalls als Länge AB gegeben, so erhält man für jedes beliebige x, z. B. BD, einen Punkt der

Fig. 101.



Hyperbel für den Scheitel B, wenn man über AD einen Halbkreis zeichnet, das Loth BF errichtet und aus D den Bogen FE bis in die Lothrechte DE beschreibt.

Denn $y^2 = ax + x^2 = x(a + x)$

Nun ist $BD = x$, $AD = a + x$, mithin $FD^2 = x(a + x)$

Subtg. — Abscisse ist $= \frac{a}{2} = GB$, und G ist der Anfangspunkt der A.; nur ist der Winkel noch nicht bekannt, unter welchem sie gezogen werden mufs. Es ist aber für jedes x

Subtg. $\times\, tg\,\alpha = y$

$$\text{also } 2\cdot\frac{ax + bx^2}{a + 2\,bx}\,tg\,\alpha = \sqrt{ax + bx^2}$$

$$\text{woraus } tg\,\alpha = \frac{a + 2\,bx}{2\sqrt{ax + bx^2}} = \frac{\frac{a}{x} + 2b}{2\sqrt{\frac{a}{x} + b}}$$

für $x = \infty$ wird $\frac{a}{x} = 0$

mithin $tg\,\alpha = \frac{2b}{2\sqrt{b}} = \sqrt{b}$

in vorliegendem Fall ist $b = 1$

mithin $tg\,\alpha = 1$

und $\alpha = 45°$

Atmosphäre. Der die Erde umgebende Luftkreis, war nicht von Anfang an von der heutigen Beschaffenheit. Die Erde, ursprünglich gasförmig, durch Abkühlung flüssig, durch weitere Abkühlung beim Umschwung durch den kalten Weltenraum an der Oberfläche zu einer starren Kruste erhärtet, also anfänglich in glühendem Zustande hatte den Sauerstoff zu den fossilischen Verbindungen zu Verbrennung des Wasserstoffs zu Wasser und des Kohlenstoffs zu Kohlensäure vollständig consumirt. Bei der noch heifsen Rinde war sämmtliches Wasser noch als Dampf über der Erdoberfläche, die Sonnenstrahlen konnten nicht durchdringen und äufserten sich also noch nicht auf die heutigen klimatischen Verhältnisse; die Erdrinde war an den Polen so heifs, wie am Aequator. Nach weiterer Abkühlung schlug sich der Wasserdampf zu Wasser immer mehr nieder, vielfache Durchbrüche der inneren elastischen Gase durch die Rinde erzeugten Höhen und Tiefen, hier sammelte sich die Wassermasse, die Atmosphäre wurde immer lichter, allein sie bestand nur aus Stickstoff, Kohlensäure und einer grofsen Menge Wasserdampf. Hier fing offenbar schon der Schöpfer an, die Natur zur Aufnahme von lebenden Wesen sich vorbereiten zu lassen. Blattgewächse mufsten nach und nach (sowie dies von allen Blättern der Pflanzen noch heut geschieht) die Kohlensäure aufsaugen, den Kohlenstoff zu eigenem Wachsthum verbrauchen und den reinen Sauerstoff ausathmen, so dafs die A. zu der heutigen Zusammensetzung, aus Stickstoff und Sauerstoff hergestellt wurde; sie wurde bei immer weiterer Niederschlagung der Wasserdämpfe immer durchsichtiger, die Brechung der Lichtstrahlen unterhielt die heutige kosmische Wärme der Erdoberfläche und mit der Schiefe der Erdaxe gegen die Ekliptik, deren klimatischen

Abstufungen, und erzeugte somit die Strömungen der Luftmasse in den oberen Regionen vom Aequator nach beiden Polen hin, und mit Herstellung des Gleichgewichts in den unteren Regionen von den Polen nach dem Aequator hin, wie es noch heut geschieht. Indem nämlich die Luft um die Aequator-Ebene heifser, ausgedehnter, leichter und höher, nach den Polen zu immer kälter, dichter, schwerer und niedriger ist, so finden die oberen Schichten vom Aequator ab, zu beiden Seiten in gleichen Höhen oder Abständen von der Erdoberfläche Luftleeren, welche sie permanent auszufüllen haben; mit diesen oberen Abströmungen werden aber die zugehörigen Luftsäulen über der Oberfläche leichter, die nach den Polen hin durch Zuströmungen schwerer, das aërostatische Gleichgewicht ist gestört, und die nothwendige Folge davon ist die Strömung der unteren Luft-Regionen in entgegengesetzten Richtungen.

Dafs die Luftströmungen (Winde) in verschiedenen Höhen nach verschiedenen Richtungen gehen, beweisen uns die Luftschifffahrt und Gewitter. Einen Vogel, der bei starkem Wind in die Luft sich erheben will, sieht man unter grofser Anstrengung senkrecht bis zu einer bestimmten Höhe sich aufschwingen, und hier leichten Fluges äufserst schnell nach einer mit dem Winde ganz verschiedenen Richtung horizontal fortgehen. Offenbar hatte der Vogel schon die Absicht, die später genommene Richtung einzuschlagen, und sein Instinct lehrte ihn, dafs er eine Luftschicht von der geeigneten Stromrichtung finden würde.

Eine andere permanente Luftströmung auf dem ganzen Erdball ist die von Ost nach West, in Folge des täglichen Umschwungs des Erdballs von West nach Ost um seine Axe, und diese hat von Anfang an stattgefunden. Die Lufttheilchen nämlich, welche vermöge der Schwerkraft an den festen Erdkörper gefesselt sind, werden in die Schwungbewegung mit hineingerissen, ungeachtet sie als abgesonderte Körperchen keinen festen Zusammenhang mit der Erdaxe haben; ihres Beharrungsvermögens oder ihrer Trägheit zufolge wollen sie in Ruhe bleiben, d. h. den zuvor eingenommenen Ort beibehalten, und somit entsteht die scheinbar rückgängige Bewegung der Luft, der Ostwind, welcher, wo der Umschwung am stärksten ist, am Aequator, am heftigsten weht, während er an den Polen = Null ist und in unseren Gegenden durch viele zufällige andere Luftströmungen so weit unterbrochen wird, dafs wir denselben als permanent nicht mehr wahrnehmen. Da mit der gröfseren Höhe die Lufttheilchen eine gröfsere Umschwungs-Geschwindigkeit annehmen müssen, zugleich ihre Leichtigkeit und Beweglichkeit zu-, ihre Schwerkraft aber abnimmt, so treffen alle Umstände überein, dafs die Strömung der Luft von Ost nach West mit der Höhe der Luft-Region zunimmt, und auch in unseren Gegenden wird sie mit zunehmender Höhe immer vorherrschender sein.

2. Die Höhe der A. wird sehr verschieden angegeben, je nach den Voraussetzungen, welche den Berechnungen derselben zu Grunde gelegt werden.

Nach dem Mariotte'schen Gesetz könnte man annehmen, dafs die A. bis in's Unendliche reicht. Mariotte nimmt nämlich an, dafs jede luftförmige Flüssigkeit ein unbegrenztes Expansionsbestreben habe, dafs sie zu unbegrenzter Ausdehnung nur durch Druckkraft verhindert werde, und dafs die Dichtigkeiten verschiedener Luftmassen sich verhalten wie die auf sie wirkenden Druckkräfte.

Nun ist die Druckkraft der A. auf die an der Erdoberfläche befindliche unterste Luftschicht so grofs, dafs sie einer Quecksilbersäule im Mittel von 28 par. Zoll oder 760^{mm} (Millimeter) das Gleichgewicht hält, und in $11{,}5^{m}$ (Meter) Höhe sinkt das Barometer um 1^{mm}; die darüber stehende Luftsäule hält also einer 759^{mm} hohen Quecksilbersäule das Gleichgewicht. Bei $2 \times 11{,}5^{m}$ steht nun das Barometer auf

$$759 - \frac{759}{760} = 760\left(\frac{759}{760}\right)^2 \text{ Millm.}$$

und bei $n \times 11{,}5^{m}$ auf $760\left(\frac{759}{760}\right)^n$ Millm.

So grofs man also auch immer n nehmen mag, so behält der Druck der darüber befindlichen Luft einen reellen Werth, und die Höhe $n \times 11{,}5^{m}$ ist ohne Grenzen.

Allein erstens ist eine unbegrenzte Verdünnung der Luft nicht wohl denkbar, denn das Auseinanderrücken der Atome, bei welcher der Körper, dem sie angehören, als ein homogenes Ganzes noch existiren kann, mufs jedenfalls seine Grenzen haben. (Vergl. den folg. Art. Atom.) Aber auch zweitens kommt hinzu, dafs die mit der Ferne vom Erdmittel zunehmende Centrifugalkraft mit der abnehmenden Schwerkraft in's Gleichgewicht kommen mufs, und dafs in dieser Höhe von der Erdoberfläche kein Körper der Erde mehr angehören kann.

3. Um diese Höhe zu finden, kann man 2 Wege einschlagen:

Jedes Lufttheilchen macht mit dem

Parallelkreise, zu dem es gehört, in 24 Stunden einen Umschwung um die Erdaxe, die Geschwindigkeit desselben wird um so gröſser, je weiter es von der Erdoberfläche entfernt ist. Stellt man sich nun in der Aequator-Ebene ein in der möglich höchsten Luftkreislinie liegendes Lufttheilchen vor, so hat dies diejenige Geschwindigkeit, welche seinem Umschwung um die Erdaxe in 24 Stunden zugehört. Es entferne sich dieses Lufttheilchen um ein Geringes über den Endkreis, so behält es in Folge des Beharrungsvermögens seine Geschwindigkeit bei und bewegt sich unabhängig von der Luftbewegung und nur noch abhängig von der Anziehungskraft der Erdmasse, also wie ein Mond in 24 Stunden um die Erdaxe.

Der zweite hierauf folgende Art. Attraction zeigt, daſs die Bewegung eines angezogenen Körpers nur von der Masse des anziehenden Körpers, nicht aber von seiner eigenen Masse abhängig ist, mithin ist seine Bewegung mit der unseres Mondes zu vergleichen.

Der Mond umkreis't die Erde in 27 Tg. 7 Std. 43 Min. (s. astr. Monat, 2.), wofür man 27 Tg. 8 Std. = $27\frac{1}{3}$ Tage setzen kann. Die mittlere Entfernung des Mondes von der Erde ist 50800 geogr. Meilen, der Erdhalbmesser beträgt 860 Meilen, mithin die Entfernung des Mondes von der Erde von Mittel zu Mittel = 59 Erdhalbmesser. Nun verhalten sich nach dem 3. Kepler'schen Gesetz die Quadrate der Umlaufszeiten zweier Körper um einen Centralkörper wie die Kubi deren Entfernungen von diesem. Bezeichnet man also die Entfernung des Lufttheilchens von dem Erdmittelpunkt mit x, (in Erdhalbmessern), so hat man

$$(27\tfrac{1}{3})^2 : 1^2 = 59^3 : x^3$$

woraus

$$x = \frac{59}{\sqrt[3]{(27\frac{1}{3})^2}} = 6{,}50$$

Demnach hätte die A. eine Höhe von $6\frac{1}{2}$ Erdhalbmessern

$$= 6\tfrac{1}{2} \times 860 = 5590 \text{ geogr. Ml.}$$

Hierbei ist zu bemerken, daſs die Verzögerung, welche jedes Lufttheilchen in dem rückgängigen Passatwinde erleidet, auſser Acht gelassen werden kann; denn setzt man die Geschw. des Windes an der Erdoberfläche auch 10 Fuſs per Sec., so beträgt dies bei circa 1500 Fuſs Geschwindigkeit des Aequators $\frac{1}{150}$, und statt 1^2 würde $\left(\frac{149}{150}\right)^2$ zu setzen sein.

4. Ein zweiter Weg ist folgender:

Mit Beibehaltung der Bezeichnung von x würde ein Körper, also auch ein Lufttheilchen in der Entfernung von x Erdhalbmessern in der ersten Secunde $\frac{g}{x^2}$ Fuſs fallen, wenn er an der Erdoberfläche g ($15\frac{5}{8}$ preuſs.) Fuſs fällt.

Bezeichnet man die Fliehkraft, welche ein Körper an der Erdoberfläche im Aequator beim Umschwung um die Axe besitzt, mit F, so ist

$$F = \frac{c^2}{2g \cdot r} M$$

wo c die Geschwindigkeit des Körpers per Sec., g die Fallhöhe per Sec., r den Erdhalbmesser und M die Masse des Körpers bedeuten.

Der Umfang des Aequators ist 5400 geogr. Ml., diese durchläuft der Körper in 24 Stunden oder in 24·60·60 Sec., mithin ist

$$c = \frac{5400}{24 \cdot 60 \cdot 60} = \tfrac{1}{16} \text{ Meile}$$

$$g = 15\tfrac{5}{8} \text{ preuſs. Fuſs}$$

$$r = 860 \text{ geogr. Ml.}$$

M kann $= 1$ gesetzt werden, daher

$$F = \frac{(\frac{1}{16})^2 \,\square\text{Ml.}}{2 \cdot 15\frac{5}{8}\,(\text{pr. Fuſs}) \cdot 860 \text{ Ml.}}$$

$$= \frac{1 \,(\text{geogr. Ml.})}{2 \cdot 15\frac{5}{8} \cdot 860 \cdot 256 \,(\text{pr. Fuſs})}$$

die geogr. Ml. ist = 1970 pr. Ruthen zu 12 Fuſs, mithin

$$F = \frac{1970 \cdot 12}{2 \cdot 15\frac{5}{8} \cdot 860 \cdot 256} = 0{,}003436$$

$$= \frac{1}{291{,}032}$$

wofür $\frac{1}{291}$ gesetzt werden kann.

Die Schwerkraft äuſsert sich durch den Fall von g per Sec., die Fliehkraft F also durch die entgegengesetzt gerichtete Fallhöhe $= \frac{g}{291}$. Diese Schwungkraft vermehrt sich mit der Entfernung vom Erdmittel, und in der Entfernung von x Halbmessern wird sie $\frac{g}{291} \cdot x$

Wenn nun ein Lufttheilchen in der Entfernung x vom Erdmittel als Grenze nicht mehr auf die Erde fallen soll, so muſs dessen Schwerkraft $\frac{g}{x^2}$ mit seiner Centrifugalkraft = groſs sein, und man hat

$$\frac{g}{x^2} = \frac{g}{291} x$$

woraus $x = \sqrt[3]{291} = 6{,}6267$

d. h. die Höhe der A. beträgt 6,6267 Erdhalbmesser = 5699 geogr. Ml.

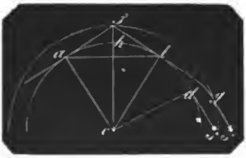
5. Nimmt man von den ad 4 und 5 gefundenen beiden Höhen der A. das Mittel $= 5644\frac{1}{4}$ geogr. Ml. $= 5644\frac{1}{4} \times 7420{,}158$ Meter und dividirt diese durch 11,5, so erhält man die Zahl 3642008, also (s. No. 2) die Höhe des Quecksilbers im Barometer

$$= 760\left(\frac{759}{760}\right)^{3342008}$$

Für diese Zahl erhält man den $log = -2080$, die Decimalstellen fortgelassen, also einen Decimalbruch von 0,000 . . . . . dessen Anzahl von Nullen hinter dem Komma 2079 beträgt, und dessen Werth höchstens 1 Nonilliontel ist; die Luft ist daher, wenn hier noch das Mariotte'sche Gesetz gilt, von einer Verdünnung, bei welcher schwerlich noch ein Körper als homogene Flüssigkeit bestehen kann.

6. Aufser mehreren anderen Bestimmungen der Höhe des Luftkreises, welche auf nur problematischen Voraussetzungen beruhen, noch anderen, denen strengere Principe zu Grunde liegen, die aber einem späteren Art. vorbehalten bleiben müssen, soll noch hier der Bestimmung der A.-höhe gedacht werden, welche man aus der Strahlenbrechung ableitet.

Fig. 102.



Es sei *c* der Mittelpunkt der Erde, *abd* ein Bogen der Erdoberfläche, *efg* die höchste Luftschicht, welche noch die Fähigkeit hat, Sonnenstrahlen zu reflectiren, so mufs offenbar die Reflection mit der Dämmerung beginnen und aufhören. Es sei *a* der Punkt, bei welchem die Dämmerung beginnt oder aufhört. Wenn der Sonnenstrahl in *b* tangirt, so mufs der höchste Punkt *f* der A., in dem der Strahl sich noch abspiegelt, so liegen, dafs $fa = fb$ ist. Wenn nun in *a* die Sonne im Horizont erscheint, so steht diese um den Bogen $bd = 33$ 46,3" noch unter dem Horizont von *b*, denn ist die Tangente *Sd* an *d* die Richtung der Sonne, also auch $Sg \mp Sd$, so wird der Lichtstrahl *Sg* durch die A. in einer Curve *gb* gebrochen, die in *b* tangirt, woher *S*, obgleich sie erst in dem Horizont *dS* steht, schon in dem Horizont von *b* erscheint. Der Bogen *dba*, der Dämmerungsbogen, wird $= 18°$ angegeben.

Setzt man $\angle acf = \alpha$

so ist $fh = ac\,(sec\,\alpha - 1) = ac \cdot tg\,\alpha \cdot tg\,\frac{\alpha}{2}$

Nun ist $ac = 860$ geogr. Ml.

$\angle acf = \alpha = \frac{1}{2}(18° - 33'\ 46{,}3'') = 8°\ 43'\ 6{,}85''$ wonach man die Höhe *fh* der A. erhält = 10,0536 geogr. Ml. Um die Ausdehnung der Luft in dieser Höhe zu finden, hat man 1 geogr. Ml. = 7420,158 Meter, mithin eine Höhe von 74599*m*. Dividirt man nun diese durch 11,5*m*, so erhält man den Exponent $n = 6269$ und die Quecksilberhöhe im Barometer, welcher die Luftsäule darüber noch das Gleichgewicht hält, $= 760\left(\frac{759}{760}\right)^{6269}$

Der *log* dieser Zahl ist

$2{,}8808136 + 6269 \times (0{,}9994282 - 1)$
$= 0{,}2961994 - 1$

die Zahl $= 0{,}1977877 = \frac{1}{5{,}056}$ Millim.

Mithin beträgt die Verdünnung der Luft in Höhe von 10,0536 geogr. Ml.

$$\frac{1}{5{,}056 \times 760} = \frac{1}{3842\frac{1}{4}}$$

7. Es wird oft die Frage aufgeworfen und beantwortet: Wie hoch würde die Atmosphäre sein, wenn sie die an der Erdoberfläche stattfindende Dichtigkeit bis an der äufsersten Grenze beibehielte. Diese Frage, welche wunderlich zu sein scheint, hat in der Aërodynamik zur Bestimmung der Ausflufsgeschwindigkeit von Luft in einen absolut leeren Raum u. s. w. Bedeutung und soll deshalb auch hier beantwortet werden.

Nach Biot und Arago wiegt 1 Kubikmeter trockene Luft bei 0° Temperatur und unter 0,76 Meter = 28 pariser Zoll Barometerstand 1,299 Kilogramme. Nun wiegt 1 Kubikmeter Wasser im Zustande seiner gröfsten Dichtigkeit 1000 Kilg., das specifische Gewicht des Quecksilbers bei 0° Temp. ist 13,598, also das Quecksilber

$$\frac{13{,}598 \times 1000}{1{,}299} = 10468 \text{ mal schwerer als}$$

die an der Erdoberfläche befindliche atmosphärische Luft, folglich hat die mit der unteren Dichtigkeit gleich dichte Luftsäule, die einerlei Barometerstand 0,76 Meter entspricht, eine Höhe von

$10468 \times 0{,}76 = 7955{,}68$ Meter
$= 3{,}186199 \times 7955{,}68 = 25348$ pr. Fufs.

Wegen der Ausdehnung der Luft durch die Wärme von 0,00366 . . . = [illegible] für jeden

Grad Celsius hat man die Höhe bei einem Wärmegrade t Celsius

25348 $(1 + \frac{1}{3}\frac{1}{8} \cdot t)$ preuſs. Fuſs.

Anmerk. 0,76 Meter sind = 28,075 par. Zoll und 28 par. Zoll sind = 0,7579 Meter; für 28 Zoll Barometerstand erhält man auch nur 25280 Fuſs Höhe der gleichförmig dichten Atmosphäre. Die Bestimmung des mittleren Barometerstandes durch 28 par. Zoll ist eine ältere, und offenbar die sehr nahe liegende ganze Zahl in Zollen gewählt, die neuere Bestimmung 0,76^m ist als richtiger anzusehen.

Atom. Kleinstes, unzertheilbares Theilchen eines einfachen Stoffes (nicht zu verwechseln mit Molekül, Massentheilchen, welches eine Summe neben einander befindlicher Atome nicht nur von einfachen, sondern auch von zusammengesetzten Stoffen ist). Die Lehre von den Atomen, die atomistische Lehre, gehört eigentlich der Chemie an, sie greift aber unmittelbar in die Physik, und zwar in die mechanische Naturlehre ein, sie bildet die Basis zum Verständniſs der allgemeinen Eigenschaften der Körper, sie veranschaulicht die Zusammensetzung der Körper aus einfachen oder zusammengesetzten Bestandtheilen in multiplen Proportionen, bildet somit die Theorie der rechnenden Chemie und gehört hierher (s. Aequivalent).

Die Atomenlehre ist hypothetisch, allein sie hat sich in allen Fällen chemischer Untersuchungen als zuverlässig bewährt, hat noch nicht widerlegt werden können und bildet die Grundlage der theoretischen Chemie. Sie behauptet hier denselben Rang wie in der theoretischen Astronomie als Grundlage die Lehre von der Attraction, die ebenfalls Hypothese ist und die ebenso noch nirgend widerlegt werden konnte.

Die Porosität, schon in den frühesten Zeiten als allgemeine Eigenschaft der Körper angenommen, gab Gelegenheit zu der Hypothese, daſs das verschiedene Verhalten verschiedener Körper nur in dem verschiedenen Verhältniſs der Poren zur wirklichen Masse ihren Grund habe, daſs Wasser z. B., weil es 7 mal leichter als Eisen ist, 7 mal so viele Poren habe als Eisen, daſs die Massen in zwei Körpern von gleichem Volumen umgekehrt wie deren Porosität sich verhalten, daſs nämlich die Materie aller Körper nur einerlei sei.

So widerstrebend diese Annahme an sich ist, so zeigt sie sich am widersprechendsten beim Vergleich zwischen Zinn und Eisen, welche beide ziemlich einerlei spec. Gew. haben, und daſs der geringe Unterschied deren Porosität allein das so äuſserst verschiedene physikalische und chemikalische Verhalten beider Metalle hervorbringen soll.

Mit Recht hat man also diese Lehre verworfen, allein man ging wieder zu weit und nahm nur Poren in den Körpern an, soweit man solche wahrnahm, wie in den organischen Körpern, und betrachtete die Körper als homogene Massen: Wasser und Gold z. B. waren Körper ohne Poren, und dies ist nicht richtig; denn wenn auch das schärfste Mikroskop im Wasser keine Poren nachweis't, so sind diese darum doch vorhanden und man begreift dies augenscheinlich an anderen Körpern durch mikroskopische Betrachtung, z. B. an einem Pflanzenblatt, welches dem Auge als eine homogene grüne Masse erscheint, während sie mikroskopisch in einzelnen Tröpfchen Zellensaft sich auflös't, welche in oft 6facher farbloser Länge aus einander liegen, und dem Auge als gleichmäſsiges Grün erscheinen, weil die leeren Räume zwischen den Tröpfchen so sehr klein sind, daſs die 6fach kleineren Tröpfchen in groſser Menge dicht an einander zu liegen scheinen.

Die Annahme dabei aber, daſs die Moleküle der einfachen Stoffe eben so verschieden sind, als die Summen der Moleküle, als die einfachen Körper selbst, wird durch die Atomentheorie als richtig bestätigt und ist auch gewiſs nur vernunftgemäſs.

Die Verwandtschaft vieler Stoffe zu einander und die Verbindung zweier derselben zu einem dritten, beiden ungleichartigen und ganz anderen Stoff, so daſs auch die besten Mikroskope im Zinnober z. B. weder Schwefel- noch Quecksilbertheilchen einzeln neben einander zeigen, widersprach offenbar der allgemeinen Eigenschaft aller Körper, der Undurchdringlichkeit, und man fühlt, daſs hier den Erscheinungen des Mikrokosmos der Natur eben so ein allgemein gültiges Gesetz zu Grunde gelegt werden muſste, wie es Newton für den Makrokosmos in der Attractionslehre gegeben hat. Dies Grundgesetz nun ist die Atomentheorie, welche Undurchdringlichkeit neben Porosität und Chemismus gestattet und veranschaulicht.

Die atomistische Theorie lehrt, daſs die Theilbarkeit, diese allgemeine Eigenschaft aller Körper, nicht, wie die dynamische Theorie lehrt, bis in's Unendliche gehe, sondern daſs sie bei jedem Körper eine Grenze habe, und zwar in kleinsten, nicht weiter theilbaren, in sich nicht weiter

änderungsfähigen, also festen, undurchdringlichen Theilchen, den **Atomen** des Stoffes, woraus der Körper besteht. Diese Atome bleiben also auch in demselben Stoff dieselben, der Körper möge starr, flüssig oder gasförmig sein, z. B. in festem, in flüssigem und in zu Dampf verflüchtigtem Golde; die in den verschiedenen Aggregatzuständen statthabenden verschiedenen specifischen Gewichte desselben Stoffs haben ihren Grund nur in den verschiedenen gegenseitigen Entfernungen der Atome, zu welchen sie durch die Kraft der Wärme auseinandergerückt werden.

Die Theorie lehrt, allen Versuchen und Beobachtungen und der menschlichen Vernunft entsprechend, dafs jedem Atom in Beziehung auf jedes ihm zunächst liegende gleichartige Atom eine Anziehungskraft und eine Abstofsungskraft inne wohnt. Die Anziehungskraft der Atome wird durch die Festigkeit des die Atome begreifenden Körpers, d. h. durch die erforderliche Kraft, um die Massentheile nach verschiedenen Richtungen von einander zu trennen, ausgesprochen; die Abstofsungskraft bildet die Porosität, d. h. die Entfernung der einzelnen Atome unter einander, und ist der Anziehungskraft und mithin auch der von dieser abhängigen Festigkeit entgegengesetzt.

Von der Gröfse, der Gestalt und dem absoluten Gewicht der Atome haben wir keine Vorstellung, weil sie ihrer Kleinheit wegen nicht wahrzunehmen sind. Dagegen ist man im Stande, das specifische Gewicht derselben in Bezug auf das Gewicht des Atoms eines bestimmten Körpers, wozu der Sauerstoff gewählt worden ist, und aus diesen relativen Gewichten, den **Atomgewichten** auch die relativen Räume, welche sie einnehmen, die **Atomvolume** sehr genau zu bestimmen.

Nach diesen nun beträgt z. B. das Atomvolum des Quecksilberdampfes etwa das 1500fache von dem Atomvolum des flüssigen Quecksilbers, und da das Atom des Quecksilbers sich nicht ändern kann, so müssen die leeren Räume zwischen den einzelnen Atomen des Dampfes 1500 mal gröfser sein als bei der Flüssigkeit und zwar ohne dafs die Homogenität des Körpers (des Dampfes) aufgehoben wird.

Meiner Ansicht nach haben diese Abstände der Atome für die Beibehaltung der Homogenität des Gases ihre bestimmte Grenze, und wüfsten wir diese, so könnten wir für jeden Barometerstand auf der Erdoberfläche die Höhe der Erd-Atmosphäre nach dem Mariotte'schen Gesetz berechnen. Wenn durch fortgesetzte Exhaustion mittelst einer Luftpumpe die Grenze der Dünnigkeit, z. B. die der atmosphärischen Luft erreicht wäre, so würde diese zugleich entweder die Grenze der Evacuation sein, oder wenn bei dem folgenden Auszuge des Stempels die Masse dem neu gebildeten leeren Raum folgte, so würden die Atome einzeln niederfallen und vollkommene Leere entstehen.

In dem Artikel Aequivalent ist erklärt, wie verschiedene einfache Stoffe chemisch zu zusammengesetzten Körpern sich verbinden, indem sie ihre Atome zu einem gleichförmigen Gemenge an einander reihen. So z. B. bildet sich unterschweflige Säure aus Schwefel und Sauerstoff, indem beide Körper in einander fliefsen, und sich der Art gleichmäfsig vermengen, dafs immer 1 At. Schwefel mit 1 At. Sauerstoff sich an einander begiebt. Dieses abwechselnde Aneinanderlegen je zweier Atome verschiedener Stoffe geschieht durch Chemismus, nämlich vermöge der chemischen Verwandtschaft zwischen beiden Stoffen, und beide sind auch nur durch Chemismus wieder zu trennen. Beide Atome, ein Doppel-Atom, bilden nun das At. des dritten, von beiden einfachen Stoffen ganz verschiedenen Körpers, der unterschwefligen Säure.

Beide Stoffe, Schwefel und Sauerstoff, haben aufser der vorigen und noch andern auch einen Grad der Verwandtschaft, vermöge welcher 2 Atome Schwefel mit 5 Atomen Sauerstoff sich zu einem At. eines von beiden verschiedenen Körpers, der Unterschwefelsäure, verbinden; das At. derselben besteht also aus 7 einfachen Atomen, die nur durch Chemismus zu trennen sind, und verhält sich in der Säure wie das einfache At. in einem einfachen Stoff.

Die Aneinanderfügung der Atome zu einem homogenen Körper geschieht also durch zweierlei Anziehungskräfte, durch die Cohäsion und durch die Verwandtschaft (Affinität s. d.). Die Cohäsion verbindet gleichartige Atome mit einander, einfache Atome zu einfachen, zusammengesetzte At. zu zusammengesetzten Körpern, dergestalt, dafs der Körper, als die Summe der Atome, mit jedem seiner At. gleichartig ist; die Verwandtschaft, Affinität, verbindet ungleichartige At. mit einander, und zwar in verschiedenen, aber jedesmal bestimmten Mengen zu einem Körper, der mit jedem der einfachen At. ungleichartig, mit dem zusammengesetzten Atom aber gleichartig ist.

Atomgewicht. In dem Artikel Aequivalent, No. 5, ist schon angegeben, dafs Aequivalent nicht immer Atom, sondern

auch ein Multiplum eines Atoms sein kann; bei den einfachen Körpern ist es in solchen Fällen nur das Doppelte, d. h. das Atom ist die Hälfte des Aequivalents und es sind dort die Aequivalente und die A—e der einfachen Stoffe alphabetisch zusammengestellt. Eben so wichtig wie die A—e der einfachen Stoffe sind die der zusammengesetzten Körper, der chemischen Verbindungen Diese sind nicht immer so leicht zu bestimmen, und es ist hierbei von den Chemikern mit vieler Vorsicht und Umsicht verfahren.

Fast sämmtliche A.-Bestimmungen haben ihr Grundprincip in der A.-Bestimmung der Säuren und Basen gefunden. Es ist nämlich das Gesetz entdeckt worden (das Gesetz der Neutralitätsreihen): Wenn die Mengen S', S'', S''' .... verschiedener Säuren die bestimmte Menge B einer Basis sättigen, und die Mengen s', s'', s''' .... derselben Säuren sättigen die bestimmte Menge b einer anderen Basis, so stehen beiderlei Mengen derselben Säuren in geradem Verhältnifs, d. h.

$$S' : S'' : S''' \ldots = s' : s'' : s''' \ldots$$

Und gegenseitig: Wenn die Mengen B', B'', B''' .... verschiedener Basen die bestimmte Menge S einer Säure sättigen, und die Mengen b', b'', b''' .... derselben Basen sättigen die bestimmte Menge s einer anderen Säure, so stehen beiderlei Mengen derselben Basen in geradem Verhältnifs, d. h.

$$B' : B'' : B''' \ldots = b' : b'' : b''' \ldots$$

Demnach hat man feststellen können, dafs die Aequivalente der Säuren und der Basen, welche zu neutralen Salzen sich verbinden, zugleich deren A—e und dafs die Summen deren Aequivalente die A—e der neutralen Salze sind; überall wo nicht unwiderleglich das Gegentheil hervorgeht:

1. Beispiel.
588,857 Kali verbinden sich mit 500,75 Schwefelsäure zu neutralem schwefelsauren Kali; da nun

588,857 Kali = 488,857 Kalium + 100 Sauerstoff,
500,75 Schwefelsäure = 200,75 Schwefel + 300 Sauerstoff

und da 100 das A. von Sauerstoff
488,857 „ „ „ Kalium
und 200,75 „ „ „ Schwefel,
so setzt man ganz richtig
588,857 das A. von Kali
500,75 „ „ „ Schwefelsäure, und
1089,607 = 588,857 + 500,75 das A. des neutralen schwefelsauren Kali.

2. Beispiel.
333,685 Eisenoxyd verbinden sich mit 500,75 Schwefelsäure zu neutralem schwefelsaurem Eisenoxyd.

Nun ist
333,685 Eisenoxyd = 233,685 Eisen + 100 Sauerstoff,
500,75 Schwefelsäure = 200,75 Schwefel + 300 Sauerstoff,
233,685 ist aber nicht das A. des Eisens, sondern
350,527, welches sich mit 100 Sauerstoff zu der niedrigsten Oxydationsstufe, zum Eisenoxydul verbindet; und da $233{,}685 = \frac{2}{3}\,350{,}527$ ist, so ist das Aequivalent 233,685 im Eisenoxyd = $\frac{2}{3}$ des A. vom Eisen. Da aber Bruchtheile von Atomen undenkbar sind, so kann 333,685 nicht das A. des Eisenoxyds sein, das Eisenoxyd kann nur aus 2 Atomen Eisen und 3 Atomen Sauerstoff bestehen, nämlich aus:

$2 \cdot 350{,}527$ Eisen + $3 \cdot 100$ Sauerstoff = 701,054 Eisen + 300 Sauerstoff,
und das A. des Eisenoxyds ist

$$701{,}054 + 300 = 1001{,}054$$

Nun ist aber auch nicht 333,685 + 500,75 = 834,435 das A. des schwefelsauren Eisenoxyds. Denn es bestände das Atom desselben aus $\frac{1}{3}$ Atom Eisenoxyd und 1 Atom Schwefelsäure, mithin kann das Atom schwefelsaures Eisenoxyd nur aus 1 Atom Eisenoxyd und 3 Atomen Schwefelsäure bestehen. Das A. des neutralen schwefelsauren Eisenoxyds ist demnach

$$1001{,}054 + 3 \cdot 500{,}75 = 2503{,}304$$

Eine weitere Erläuterung gehört nicht in die mathematischen Wissenschaften.

Atomvolum. Der Raum, den das Atom eines Körpers, der zu ihm gehörende Zwischenraum eingeschlossen, einnimmt.

Wenn man das Gewicht eines Körpers durch das Gewicht seiner Volum-Einheit, d. h. durch sein specifisches Gewicht dividirt, so erhält man zum Quotient das Volum des Körpers, und folglich findet dies auch für die Atome statt.

Man kennt von den Atomen weder die Gestalt, noch die Gröfse mit und ohne Zwischenräume, noch das absolute Gewicht, noch das Volum; die Atomgewichte sind relative Gröfsen, wie die specifischen Gewichte der Körper, abstracte Zahlen, die sich auf ein angenommenes Gewicht als Einheit, das des Sauerstoff-Atoms = 100 gesetzt, beziehen, und somit können auch die A—e nur relativ sein, und es ist natürlich, dafs man wieder das A. des Sauerstoff-Atoms zur Einheit nimmt, wonach man denn auch das spec. Gewicht des Sauerstoffs als Einheit für die spec. Gewichte aller Körper festzustellen hat. Setzt man das spec. Gewicht des Sauer-

stoffs = 100, so hat man das A. des Sauerstoffs = $\frac{\text{Atomgew.} = 100}{\text{spec. Gew.} = 100} = 1$

Für alle übrigen Körper mufs nun das spec. Gewicht auf dieselbe Einheit bezogen werden; für feste und flüssige Körper liegt das Gewicht des Wassers unter 15° R. = 1 zu Grunde, das spec. Gew. des Wassers bei 0° ist = 1,00121, das der atmosphärischen Luft bei 0° = 0,001295773; mithin ist das Wasser $\frac{1,00121}{0,001295773} = 773$ mal schwerer als atm. Luft. Das spec. Gew. des Sauerstoffs gegen atmosphärische Luft (= 1) ist 1,1026, mithin ist jedes in Bezug auf Wasser ermittelte spec. Gew. mit $\frac{773}{1,1026} \cdot 100 = 70107$ zu multipliciren. Z. B. gegossenes Gold hat das spec. Gew. gegen Wasser = 19,258, mithin gegen 100 Sauerstoff = 19,258 × 70107 = 1350120. Das Atomgew. des Goldes ist = 1229,415, mithin das A. des Goldes

$$\frac{1229,415}{1350120} = 0,00091$$

Attraction. Das Bestreben fern von einander befindlicher Massen, auf dem kürzesten Wege, also in gerader Linie zu einander hin sich zu bewegen. Sie wird auch Gravitation, Schwere genannt, sofern man die Intensität des Attractionsbestrebens (zunächst beim freien Fall eines in der Luft losgelassenen Körpers gegen die Erdoberfläche) vor Augen hat, nämlich die Gröfsen der Kraft und der Geschwindigkeit, mit welchen die Annäherung geschieht, je nach der Summe der materiellen Theile und des Raum-Abstandes zweier sich anziehender Massen.

Aus den Artikeln: Anziehung und Abstofsung, hat man schon indirect wenigstens ersehen, dafs beide Kräfte das Grundprincip, das Belebende und Erhaltende der gesammten sogenannten leblosen (wohl besser: der willenlosen) Natur ausmachen. Affinität und Cohäsion z. B. sind anziehende Kräfte, allein beide wirken als abstofsende Kräfte einander entgegen. Der A. als anziehender Kraft ist die Centrifugalkraft entgegengesetzt, diese ist aber keine mit der A. zugleich geschaffene Urkraft, sondern, wie später erhellen wird, eine Kraft, die aus dem Beharrungsvermögen der Massen in Absicht auf Richtung und Geschwindigkeit hervorgehen mufste.

2. Um möglichst verständlich zu werden, möge zuvor Folgendes zur Veranschaulichung dienen: Man denke einen unbegrenzten leeren Raum und in diesem einen starren Körper von unregelmäfsiger Gestalt, aber gleichmäfsiger Masse, so hat dieser Körper keine Ursache, seinen Ort zu ändern. Man denke hiernach den

Fig. 103.



Körper von einer Wärmemenge umgeben, welche ihn schmilzt, so erhalten die äufseren Massentheilchen das Bestreben, sich dem inneren Kern zu nähern, sie äufsern einen Druck gegen denselben, der von den am fernsten befindlichen Theilchen, wie bei *d*, *e*, *f* am gröfsten ist, und da die Massentheile zwischen *abd* und *abef* bei verminderter Cohäsion der Druckwirkung nachgeben, so entsteht von *d*, *e*, *f* aus eine Herabsenkung nach *c*, welche Erhebungen bei *a* und *b* veranlafst, also ein Zerfliefsen, welches nicht eher aufhört, als bis alle auf der Oberfläche befindlichen Massentheilchen einerlei Druck gegen die Gesammtmasse ausüben, bis also ein allen Massentheilen angehörendes Massencentrum und mit diesem die Oberfläche zur Kugel-Oberfläche sich gebildet hat.

Das Zerfliefsen der Massen von *d*, *e*, *f* aus nach *a* und *b*, also eine Bewegung von Massen gegen ruhende Massen hat mittelst Stofs auch diese in Bewegung gebracht, diese Stofswirkungen waren aber nicht nach *c* gerichtet, sie waren nicht central, sondern excentrisch, mithin hat eine Bewegung der äufseren Massen um *c*, also eine Summe von Kreisbewegungen stattgefunden; das Centrum *c* ferner ist nicht von Anfang bis Ende der Kugelbildung dasselbe geblieben, jede Gestalt-Aenderung hatte ein anderes Centrum zur Folge und die successiven Aenderungen der Gestalt und des Centrums haben auch auf die inneren Massentheilchen verschiedene Druckwirkungen und deren Orts-Aenderungen zur Folge gehabt. Welche von allen Bewegungsrichtungen durch successive Zusammensetzung von Mittelrichtungen nun die vorherrschende geworden, diese verbleibt, weil keine Aufhebungs-Ursache da ist, also eine Kreisbewegung um das Centrum *c* oder vielmehr um eine durch *c* zu denkende Axe.

3. Im Anfang war das Wort, sagt die Bibel, allein es war auch der Stoff da,

der durch das Wort belebt werden sollte: die Atome der einfachen Körper, derjenigen, welche wir zu kennen glauben; und wahrscheinlich vieler anderen, die wir **nicht** kennen. Alle diese Atome neben und durch einander befindlich konnten keine A. zu einander haben, weil es kein Massencentrum gab, oder auch weil jedes einzelne Atom Massencentrum war, jedes Atom also mit jedem anderen gleiche Fähigkeit zur Vereinigung von Massen-Elementen um sich hatte, solche Vereinigungen mithin **nicht** geschahen, weil sie in allen Atomen **zugleich** nicht geschehen konnten.

Mit dem Willen Gottes, aus den todten Massen-Elementen Leben zu schaffen, mufste durch das Wort zuerst ein Massen-Centrum geschaffen werden, entweder durch Verdichtung einer Anzahl von Atomen, denen nun als Kern die ihnen zunächst liegenden folgten, oder durch Entfernung von rund herumliegenden Atomen, so dafs die innerhalb befindlichen die Beziehung nach Aufsen verloren und sich somit nach Innen zusammenzogen, oder durch beiderlei Mittel zugleich. Mit der vermehrten Anhäufung der Atome um einen Kern geschah immer gröfsere Verdichtung und Vereinigung derselben zu Gasen, die elastisch durch Selbstbelastung nach dem Centrum zu immer dichter wurden, und die, aus gröfstentheils fossilen Stoffen bestehend, nur glühend sein konnten, womit denn das Ergebnifs des ersten Schöpfungstages, das Licht (1 Buch Mose, Cap. 1, V. 3: Und Gott sprach: es werde Licht, und es ward Licht), beiläufig seine physikalische Erklärung gefunden haben möchte.

Die allmähliche Zufliefsung von Atomen konnte schon anfangs nicht immer central sein, es entstanden Kreisbewegungen um das Centrum, und endlich durch Zusammensetzung aller Seitenwirkungen zu einer Mittelwirkung eine Kreisbewegung um eine Axe, in welche alle später hinzukommenden Atome mit hineingerissen wurden.

4. Stellt man sich vor, dafs der erste, so gebildete Gas-Körper unsere Sonne war, so hat derselbe nach Jahrtausenden einen Umfang eingenommen, der den Raum, den unser ganzes Sonnensystem jetzt einnimmt, vielleicht noch übertrifft. Die äufsersten Massentheilchen hatten also zuletzt eine ganz enorme Geschwindigkeit, und da die Richtung einer Bewegung nur geradlinig ist, jeder Punkt des in Kreisbewegung befindlichen Umfangs also in jedem Augenblick die Richtung nach der Tangente hat, so hat er zugleich in Folge des Vermögens zur Beharrung in der Bewegung nach einmal gewonnener Richtung und Geschwindigkeit, auch in jedem Augenblick das Bestreben nach der Tangente gerichtet, von der Masse sich zu entfernen, und wird davon nur durch die in dem Centrum vereint zu denkende A. der Gesammtmasse zurückgehalten.

Dies aus dem Beharrungsvermögen einer in Kreisbewegung befindlichen Masse hervorgehende Bestreben derselben, das Centrum der Gesammtmasse zu verlassen, wird angemessen mit **Centrifugalkraft** bezeichnet, während die A. in Beziehung auf jene **Centripetalkraft** genannt wird. Wird einmal die letzte von der ersteren übertroffen, so geschieht solche Massen-Entfernung von der Gesammtmasse wirklich, und man kann jeden unserer Planeten und eben so unsere Erde als eine durch Centrifugalkraft aus der Sonne geschleuderte Gas-Masse sich vorstellen, die Millionen von Jahren im kalten Weltenraum herumkreisend, nach und nach zu Flüssigkeiten und aus vielen von diesen zu starren Körpern sich condensirt hat.

Ein Gleiches ist von den Monden anzunehmen, die wiederum von den Oberflächen der Planeten, denen sie zugehören, sich entfernt haben; und bei den Kometen, die unmittelbar aus der Sonne stammen, hat man sich zu denken, dafs deren Gase aus Stoffen bestehen, die keine Verdichtung in starre Körper durch Abkühlung zulassen.

Fig. 104.



Es sei *S* die Sonnengaskugel, der Theil *ab* habe sich zu einem Planeten abgelös't, der Punkt *a* hatte gröfsere Geschwindigkeit als der Punkt *b*; *a* hat also gröfsere Intensität zur Vorwärtsbewegung als *b*, erstere bleibt die vorherrschende, und in *P*, wo das Abgelöste noch ellipsoidische Gestalt hat, wird mit dem Fortschreiten der Masse nach der

Tangente *ad* zugleich die mit dem Pfeil bezeichnete Axendrehung statthaben.

Die Masse *P* wird aber durch die bei Weitem gröfsere Masse *S* nach der Richtung *Pc* angezogen, aus beiden Richtungen *Pd* und *Pc* geht eine mittlere Richtung *Pe* hervor; hat nun die Masse *P* in *Pe* den Ort *P'* eingenommen, wo sie vermöge der A. ihrer eigenen Masse schon Kugelgestalt besitzt, so wird sie durch *S* nach der Richtung *P'c* angezogen. Aus der Richtung *P'e*, welche *P* weiter fortsetzen will, und der Richtung *P'c* geht eine Mittelrichtung *P'f* hervor; ist *P* in *P''* dieser Richtung gekommen, so geht wieder aus den beiden Richtungen *P''c* und *P''f* die Mittelrichtung *P''g* hervor, in *P'''* aus *P'''c* und *P'''g* die Mittelrichtung *P'''h*, und man ersieht, wenn man die Längen *aP*, *PP'*, *P'P''*, *P''P'''* u. s. w. sich sehr klein, mit sehr vielen zwischen inliegenden Punkten und durch die Punkte *a*, *P*, *P'*, *P''*, *P'''*.... eine stetige Curve gezeichnet denkt, wie die Planetenmasse um die Sonne eine Rundbewegung macht, während sie sich selbst um eine Axe dreht.

5.. Bei der Axendrehung der Sonnenmasse konnten solche Ablösungen nur in dem weit aufgeschwellten Aequator geschehen, die Gasplaneten mufsten also in einerlei Ebene mit dem Sonnen-Aequator fort sich bewegen. Wenn dies jetzt nicht geschieht, wenn z. B. die Bahn unserer Erde, die Ekliptik, mit der Ebene des Sonnen-Aequators einen Winkel von etwa $7\frac{1}{2}°$ bildet, so kann man sich vorstellen, dafs nach Entfernung einer Gasmasse, die heut unsere feste Erde ausmacht und die als solche einen Durchmesser haben müfste, welcher weit den der Mondbahn um unsere Erde übertrifft, die Wiederausfüllung der in der Sonnenmasse entstandenen Lücke nicht allein aus den im Aequator, sondern auch von den zu vielen Seiten rund herum befindlichen Gasen geschah, dafs einige Zeit es währte, ehe die der A. und der Schwungbewegung zugehörige Normalform der Gasmasse wieder hergestellt war, dafs die Strömungen und Stauchungen der Gase nach verschiedenen Richtungen zu einer Seitenkraft sich zusammensetzten, die mit der früher bestandenen, in der Aequator - Ebene thätig gewesenen einzigen Schwungkraft einen Winkel bildete, und dafs aus beiden Kräften eine Mittelkraft hervorging, die von der ursprünglichen Schwungkraft in Richtung um etwas abwich, dafs also die Aequator-Ebene der Sonne um etwas geändert wurde.

Die Ekliptik unserer Erde ist also in derjenigen Ebene, in welcher der Aequator der Sonne in dem Augenblick sich befand, in welchem sie aus der Sonne sich entfernte; es müfste denn, wie auch wahrscheinlich, die spätere Entfernung der Mondmasse aus der Erde deren Aequator-Ebene gleichfalls abgeändert haben.

Dafs die Bahnen aller übrigen Planeten in Ebenen liegen, die sowohl unter sich, als mit dem jetzigen Aequator der Sonne verschieden sind, ist durch die Vorstellung erklärlich, dafs die Losreifsung der einzelnen Planetenmassen zu verschiedenen Zeiten geschehen ist und dafs mit jeder solchen Losreifsung die Aenderung der Sonnen-Aequatorebene nothwendige Folge war.

6. Dafs bei den Planeten zwischen deren Aequator-Ebenen und Bahnen Abweichungen stattfinden, ist nach Obigem ganz natürlich; denn bevor *ab* als Ellipsoid nach *P* und *P* nach *P'* als Kugel gekommen ist, haben so viele verschiedene Seitenströmungen und Stauchungen in der *P*masse stattgefunden, und fanden auch wohl noch bis *P'* und weiter statt, ehe sie zu einer einzigen Mittelkraft, der Schwungkraft um eine Axe sich zusammensetzten, und es erscheint z. B. eine Abweichung unseres Erd-Aequators von der Ekliptik um etwa $23\frac{1}{2}°$ gar nicht auffallend.

7. Es ist nicht denkbar, dafs die Sonnensysteme unter einander nicht in attractorischem Verhältnifs stehen sollten. Stellt man sich die ad 4 gedachte Bildung der ersten Gaskugel vor, so kann man auch annehmen, dafs durch Centrifugalkraft eine Masse hinausgeschleudert worden, die jetzt ein ganzes Sonnensystem ausmacht; dafs ferner die ursprüngliche Gaskugel durch Anziehung von neuen Atomen wieder einen Umfang erlangte, welcher die Ausschleuderung eines zweiten Sonnensystems bedingte u. s. f. Was dann No. 4 von Planeten *P* gesagt, gilt von Sonnensystemen, die nun in attractorische Verhältnisse getreten und darin geblieben sind.

8. Augenscheinliche Beweise von A. unserer Erde sind der Fall von Körpern gegen die Erdoberfläche, das langsamere oder schnellere Abfliefsen von Wasser, je nachdem das Wasserbett weniger oder mehr geneigt ist, die Pendelschwingungen und andere Erscheinungen.

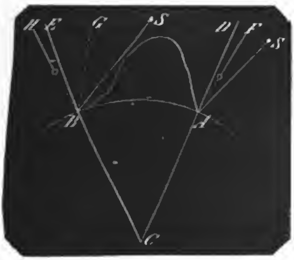
Ein Beweis von der A. anderer Weltkörper gegen unsere Erde ist die Meeresflut, als Wirkung der Anziehung des Mondes und der Sonne, woher auch bei Neumond, wo beide Weltkörper, in einerlei Richtung stehend, gemeinschaftlich

auf die Erhebung der Meereswellen wirken, die Flut am stärksten ist.

Hutton und Maskelyne vermafsen in den Jahren 1774 bis 1776 einen Theil *AB* der Erdoberfläche, zwischen welchem der 500 Fufs hohe Berg Sheshallien auf der Grenze von Hoch- und Nieder-Schottland liegt. Da der Umfang der Erdoberfläche bekannt ist, so erhielt man den Bogen *AB* oder $\angle ACB$, wenn *C* den Mittelpunkt der Erde bedeutet = 43″.

Diese geodätische Vermessung mufste mit einer astronomischen übereinstimmen, wenn die über *A* und *B* aufgestellten Bleilothe ebenfalls nach dem Mittelpunkt *C* als dem Schwerpunkt der ganzen Erdmasse gerichtet waren. Die genannten Naturforscher beobachteten nun von *A* und von *B* aus eine grofse Menge von Fixsternen; es sei *S* einer derselben, so sind *AS* und *BS* wegen der unendlichen Ferne von *S* einander ‡, sind also *DC* und *EC* die Richtungen der Bleilothe über *A* und *B*, so ersieht man, dafs $\angle EBS - \angle DAS = \angle EBG$ (wenn *GB* ‡ *DA* gezeichnet wird) $= \angle BCA$. Es fand sich

Fig. 105.



aber dieser $\angle = 54''$, also 11″ gröfser, und diese Differenz ergab sich für sämmtliche beobachteten Fixsterne. Hierfür war kein anderer Grund, als dafs die Masse des zwischen liegenden hohen Berges die Bleilothe von der wirklichen Lothlinie abgelenkt hatte. Das Bleiloth über *A* hatte nämlich eine Richtung wie *FA*, und das über *B* wie *HB*; es waren also die $\angle FAS$ und *HBS* gemessen. Nun ist

$$\angle HBS = \angle EBS + \angle EBH$$
$$\angle FAS = \angle DAS - \angle DAF$$
$$\angle HBS - \angle FAS = \angle EBS - \angle DAS + (\angle EBH + \angle DAF)$$

Die eingeklammerten Ablenkungs∠ des Bleiloths betrugen mithin obige 11″ und jede einzelne Ablenkung durch die A. der Bergmasse im Mittel $5\frac{1}{2}$ Sec.

9. Alle Massen-Elemente *m* haben einerlei Anziehungskraft. Zwei in der Entfernung *w* von einander befindliche Elemente *m* sollen gegenseitig die Kraft *p* haben, sich einander zu nähern, so kommt jedes *m* dem andern mit gleicher Kraft *p* entgegen, und die Summe der thätigen Kräfte ist $2p$.

Hat jede der beiden Massen *n* Einheiten, ist jede von beiden also $= n \cdot m$, so ist beider Annäherung wiederum gleich grofs, aber die Kräfte und also auch deren Wirkungen sind in jeder Masse $= n \cdot p$, in Summa $2n \cdot p$.

Die Einwirkung einer Masse *Nm* auf *m* ist *Np*, die von *m* auf $Nm = p$, die Summe der Thätigkeiten $= (N+1)p$; daher kommt *m* der *Nm* mit dem *N*fachen, *Nm* der *m* mit dem einfachen Annäherungsbestreben entgegen.

So ist für 2 Massen, *Nm* und *nm*, die Summe der Thätigkeiten $(N+n)m$; die Bestrebungen, mit welchen *Nm* und *nm* einander entgegenkommen, verhalten sich umgekehrt wie ihre Massen, nämlich wie $n : N$.

Die absolute Gröfse der A. eines Massen-Elements kennen wir so wenig, als die eines Massen-Elements selbst. Wir wissen nur durch Erfahrung, dafs die Masse unserer Erde eine A. auf eine andere Masse ausübt, dafs diese in der Nähe der Erdoberfläche mit einem Wege von $15\frac{1}{4}$ preufs. Fufs in der ersten Secunde sich derselben nähert.

Zugleich geht aus dem Obigen No. 9, hervor, dafs diese Aeufserung der A. (der Schwerkraft) unserer Erde dieselbe bleibt, der fallende Körper mag von noch so kleiner oder noch so grofser Masse sein (Widerstand durch die atm. Luft unberücksichtigt), welches ich deshalb erwähne, weil ganz intelligente Leute mich schon allen Ernstes gefragt haben, wie es komme, dafs ein 2 Pfund wiegender Stein nicht doppelt so schnell falle, als ein Stein, der nur 1 Pfund wiegt.

Hat die Erde die Masse *M*, der fallende Stein die Masse *m*, so kommt *M* auch der *m* entgegen, allein *m* verschwindet gegen *M*, und selbst 1000 *m* gegen *M* verschwinden, die Bewegung der Erde gegen *m* oder 1000 *m* ist = Null zu setzen. Hörte die Centrifugalkraft des Mondes auf, so würde nicht allein der Mond auf die Erde fallen, sondern die Erde würde dem Monde ebenfalls entgegenkommen, und zwar, da die Masse der Erde das 87fache der des Mondes ist, mit

$\frac{1}{87}$ der Intensität, mit welcher der Mond nach der Erde hin sich bewegt.

10. Die Gröſse der Masse ist nicht das einzige Element der A., ein zweites Element ist die Entfernung der anziehenden von der angezogenen Masse, und Newton hat aus Schlüssen bei betrachteter Bewegung des Mondes um die Erde und der Planeten um die Sonne und aus Berechnungen das der gesammten Astronomie zu Grunde liegende A.-Gesetz entdeckt, daſs die Anziehungen sich verhalten umgekehrt, wie die Quadrate der Abstände zwischen beiden sich anziehenden Massen. Z. B. die Masse der Erde kann in ihrem Mittelpunkt vereinigt gedacht werden, und sie muſs es, wenn man das Ergebniſs deren A. auf frei fallende Körper in Betracht zieht.

Nun ist der Halbmesser der Erde etwa 860 Meilen, ein über der Erdoberfläche befindlicher Körper hat also von der Erdmasse einen Abstand von 860 Meilen. Die A. der Erdmasse in dieser Entfernung wirkt aber mit solcher Kraft, daſs ein Stein in der ersten Secunde um $15\frac{5}{8}$ Fuſs sich ihr nähert. Denkt man sich denselben Stein 860 Meilen über der Erdoberfläche, so würde er zwei Mal so weit von der Erdmasse entfernt sein, und sein Fall würde in der ersten Secunde nur $\frac{1}{4} \cdot 15\frac{5}{8} = 3\frac{29}{32}$ Fuſs betragen.

11. Die später zu entwickelnden Gesetze des Falles zeigen, daſs der Körper, welcher in der ersten Sec. $15\frac{5}{8}$ Fuſs fällt, in der zweiten Sec. $= 3 \times 15\frac{5}{8}$ Fuſs, in beiden zusammengenommen also $4 \times 15\frac{5}{8}$ Fuſs, in der dritten Secunde $5 \times 15\frac{5}{8}$ Fuſs, in allen dreien zusammengenommen also $9 \times 15\frac{5}{8}$ Fuſs u. s. w. fällt, daſs überhaupt die Fallräume eines Körpers sich verhalten wie die Quadrate der von Anfang an verflossenen Zeiten; daſs z. B. ein Körper, in $9 \times 15\frac{5}{8} = 140\frac{5}{8}$ Fuſs Höhe losgelassen, 3 Sec. braucht, um die Erdoberfläche zu erreichen. Dies Fallgesetz gehört nicht zu dem Gesetz der A., sondern ist eine Folge von 2 Wirkungen, 1) der Beständigkeit des A.-Vermögens der Erde und 2) dem Beharrungszustande eines Körpers während der Bewegung.

Es wird dies deshalb erwähnt, weil es scheinen könnte, als habe das eben gedachte Fallgesetz Zusammenhang mit dem A.-Gesetz, nach welchem die A. zwischen zwei Körpern mit dem Quadrat der Entfernungen direct abnimmt.

12. Um nun die Gröſse der A. anderer Weltkörper zu finden, sei der Halbmesser der Erde $= R$, deren Masse $= M$, beide Gröſsen eines anderen Weltkörpers R' und M'; die Höhe, von der ein Körper in einer Secunde auf die Oberfläche der Erde fällt ($15\frac{5}{8}$ Fuſs) $= G$, die des anderen Weltkörpers $= G'$, so ist:

$$\frac{M}{R^2} : \frac{M'}{(R')^2} = G : G'$$

Z. B. der Halbmesser der Erde ist 860 Meilen, der des Mondes 234 Ml., die Masse der Erde = 1 gesetzt, ist die des Mondes $= \frac{1}{87}$; $G = 15\frac{5}{8}$ Fuſs. Daher

$$\frac{1}{860^2} : \frac{\frac{1}{87}}{234^2} = 15\frac{5}{8} : G'$$

woraus $G' = 2{,}42586$ Fuſs = 2 Fuſs 5 Zoll.

Denkt man sich, daſs Erde und Mond allein durch A. gegen einander wirken, so hat man den Fall des Mondes auf die Erde in der ersten Secunde bei der mittleren Entfernung der Mittelpunkte beider Körper von 51800 Meilen

$$g = \frac{860^2}{51800^2} \cdot 15\frac{5}{8} \text{ Fuſs} = 0{,}0043068 \text{ Fuſs}$$
$$= 0{,}6201792 \text{ Linien.}$$

und den Fall der Erde auf den Mond in der ersten Secunde

$$g' = \frac{234^2}{51800^2} \times 2\frac{5}{12} \text{ Fuſs} = 0{,}000049316 \text{ Fuſs}$$
$$= 0{,}0071015 \text{ Linien.}$$

13. Eine Aufgabe, die zur A. gehört, ist, zu bestimmen, in welchem Punkt zwischen Erde und Mond ein Körper eben so viel Neigung zum Fall auf die Erde als auf den Mond besitzt, so daſs er, von beiden Weltkörpern gleich stark angezogen, zu keinem von beiden sich bewegt und also in Ruhe bleibt.

Nennt man die Entfernung beider Weltkörper von Mittelpunkt zu Mittelpunkt L, setzt die Entfernung des Körpers von der Erde $= x$ Erdradien, von dem Monde y Mondradien, so ist, da

$$\frac{M}{R^2} : g = \frac{M'}{(R')^2} : g'$$

auch

$$\frac{M}{(xR)^2} : \frac{g}{x} = \frac{M'}{(yR')^2} : \frac{g'}{y}$$

die A.-Bedingungsgleichung ist also

$$\text{I.} \quad \frac{g}{x} = \frac{g'}{y}$$

und die geometrische Hülfsgleichung

$$\text{II.} \quad xR + yR' = \text{L}$$

aus I. den Werth $\frac{g'}{g} x$ für y in II. gesetzt und entwickelt, giebt

$$x = \frac{g}{gR + g'R'} \cdot \text{L}$$

Nun ist $g = 15\frac{5}{8}$ preuſs. Fuſs
$g' = 2\frac{5}{12}$ preuſs. Fuſs
$R = 860$ geogr. Meilen
$R' = 234$ geogr. Meilen
$\text{L} = 51800$ geogr. Meilen.

mithin

$$x = \frac{15\frac{5}{8}}{15\frac{5}{8} \cdot 860 + 2\frac{5}{12} \cdot 234} \times 51800$$
$$= 57,8001$$

und $y = \frac{2\frac{5}{12}}{15\frac{5}{8}} \cdot 57,8001 = 8,93975$

Die Entfernung von dem Mittelpunkt der Erde ist also

$57,8001 \times 860 = 49708$ geogr. Meilen,

und von dem Mittelpunkt des Mondes

$51800 - 49708 = 2092$ geogr. Meilen.

Die Anfangs-Geschwindigkeit des Körpers zum Fall gegen die Erde ist nun

$\frac{g}{x} = 0,27$ pr. Fuſs = $3\frac{1}{4}$ pr. Zoll,

und gegen den Mond

$\frac{g}{y} = 0,27$ pr. Fuſs = $3\frac{1}{4}$ pr. Zoll,

14. Auch die ad 8 beobachtete Gröſse der A. einer Bergmasse läſst sich in Zahlen angeben: Hat nämlich die horizontal wirkende Bergmasse m ein Pendel ca um den $\angle bca = \alpha$ aus dem Loth ca gelenkt,

Fig. 106.



so hat deren Kraft A' offenbar den Weg ad zurückgelegt. Die lothrecht wirkende Masse M der Erde hat um den Weg bd ihrer Kraft A jener Kraft nachgegeben, und da 2 Kräfte A und A' im Gleichgewicht umgekehrt wie die von ihnen zurückgelegten Wege sich verhalten, so ist

$$A : A' = ad : bd$$
$$= \sin\alpha : \text{sinvers}\,\alpha$$
$$= 1 : tg\,\frac{\alpha}{2}$$

Nun war α (No. 8) = $5\frac{1}{2}''$, mithin ist

$$A : A' = 1 : tg\,2\frac{3}{4}'' = 1 : 0,00001333$$

Ist nun der Abstand des Schwerpunkts der Masse $m = r$ Fuſs, der Halbmesser der Erde R, so hat man

$$\frac{M}{R^2} : \frac{m}{r^2} = 100000000 : 1333$$
$$= 75019 : 1$$

die A. des Berges ist also $\frac{1}{75019}$ der A. der Erde.

Hätte man durch genaue Nivellements die Form des Berges und aus dieser den Schwerpunkt ermittelt, betrüge dieser von dem Pendel $\frac{1}{2}$ Meile, also $= \frac{1}{1720} R$, so wäre die Masse m des Berges

$$= \frac{1}{75019 \times 1720^2} \times M$$
$$= \frac{1}{221936 \text{ Million}}$$

der Masse der Erde.

Atwood's Fallmaschine. Ein Apparat, mit welchem die theoretisch erwiesenen Fallgesetze veranschaulicht werden: Ein vierkantiger, etwa 6 Fuſs hoher Ständer ist in Zolle und deren Unter-Abtheilungen getheilt; über demselben dreht sich eine metallene Scheibe um eine Welle in Lagern, in deren Höhlung läuft eine Schnur, die an beiden Enden mit Häkchen zur Aufnahme von Gewichten versehen ist. Sind beide Gewichte gleich groſs, so bleiben sie in jeder Lage in Ruhe, weil beide einerlei Bestreben haben, zu fallen, mithin keins von beiden fallen kann. Nimmt man das eine Gewicht fort, so fällt das andere vermöge der Schwerkraft der Erde in der ersten Sec. $15\frac{5}{8}$ pr. Fuſs, und nimmt man nur einen Theil des einen Gewichts fort, so wird das andere mit dem Ueberschuſs gegen das erstere Gewicht zur Ueberwucht, und fällt, da es von den Massen, die es theils mit herab-, theils mit hinaufziehen muſs, an dem freien Fall gehindert wird, in der ersten Secunde durch eine geringere Höhe als $15\frac{5}{8}$ Fuſs, die aber mit diesen in bestimmtem Verhältniſs steht.

Bei der groſsen Fallhöhe von $15\frac{5}{8}$ pr. Fuſs in der ersten Secunde kann der Apparat zur Veranschaulichung der Gesetze des freien Falles unmittelbar nicht dienen, sondern nur für die des durch eine Ueberwucht veranlaſsten beschränkten Falles; allein beider Gesetze sind einerlei:

Bei der auf alle Massen-Elemente eines Körpers gleich groſsen Einwirkung der Schwerkraft unserer Erde ist die Masse eines frei fallenden Körpers gleichgültig. Bezeichnet man also die Höhe $15\frac{5}{8}$ pr. Fuſs des frei fallenden Körpers in der ersten Sec. mit g, so ist diese Höhe (Beschleunigung genannt) beim beschränkten Fall $g' = \frac{p}{m} g$; wenn p die Ueberwucht und m die durch dieselbe bewegte Masse bezeichnen. Hat man z. B. an jedem Schnur-Ende ein Gewicht q und man legt auf das eine noch ein Ge-

wicht p, so ist p die Ueberwucht, $2q+p$ die zu bewegende Masse und $g'=\frac{p}{2q+p}g$

Es sind 15⅝ pr. Fufs = 15 par. Fufs, daher man, um Brüche zu vermeiden, die Scala des Ständers in par. Maafs theilt. Hängt man nun an jedes Häkchen 7 Loth und legt dem einen 1 Loth zu, so ist $g'=\frac{1}{2\cdot7+1}g=\frac{1}{15}g$ und die 8 Loth fallen in der ersten Sec. 1 Fufs, während die auf der anderen Seite befindlichen 7 Loth 1 Fufs steigen.

Die Rolle, die Reibung deren Wellzapfen in den Lagern und das Gewicht der Schnur sind ebenfalls Bewegungs-Hindernisse, die also als Masse gegenwirken; man nimmt daher diese beständig mit zu bewegenden Theile möglichst gering, sorgt besonders für einen möglichst geringen und constanten Reibungswerth, ermittelt den Werth dieser Hindernisse durch Fall-Versuche mit sehr kleinen $2q$ und p und legt das diesem entsprechende kleine Gewicht der Ueberwuchtseite hinzu, so dafs der bewegliche Theil des Apparats vollständig balancirt ist.

Mit Beibehaltung der Ueberwucht $=1$ und der Masse $=15$ zeigt sich nun wirklich, dafs g' genau 1 Fufs ist. Man hält nämlich das Gewicht $q+p$ mittelst einer Klemme an einem Punkt fest, dafs die Unterfläche des Gewichts genau mit einem Theilstrich der Scala übereinstimmt, schraubt einen Schieber mit dessen Oberfläche gegen den 1 Fufs tiefer liegenden Theilstrich, bewegt ein Secundenpendel, läfst genau mit einem Schlag desselben $q+p$ los, und genau mit dem folgenden Pendelschlag trifft es mit einem Schlag auf den Schieber.

Ein zweites Gesetz ist: Die Fallräume verhalten sich wie die Quadrate der von Anfang an verflossenen Zeiten. Schraubt man nun den untern Schieber 4 Fufs tiefer als die Unterkante von $q+p$, so erhält man wirklich mit dem zweiten Pendelschlage den Schlag des Gewichts. Bei 3 Sec. Fallzeit müfste die Scala schon 9 Fufs Höhe haben; um also den Versuch für gröfsere Fallhöhen zu machen, mufs $\frac{p}{2q+p}$ geringer genommen werden.

Hängt man an eine Seite 22 Loth, an die andere 23 Loth, so hat man

$$\frac{p}{2q+p}=\frac{1}{2\cdot22+1}=\frac{1}{45}$$

und g' ist $=\frac{1}{45}g=\frac{1}{3}$ Fufs = 4 Zoll. Man findet nun wirklich bestätigt, dafs $q+p$ fällt

in 1 Sec.	4	Zoll	Höhe
„ 2 „	16	„	„
„ 3 „	36	„	„
„ 4 „	64	„	„

indem man die Unterkante von $q+p$ auf den Nullpunkt und die Oberkante des unteren Schiebers resp. auf 1′ 4″; 3′ und 5′ 4″ stellt.

Ein drittes Gesetz ist: Die Geschwindigkeit, die ein frei fallender Körper erlangt, ist = der Beschleunigung, multiplicirt mit der doppelten, zu seinem Fall verwendeten Zeit in Secunden, oder, wenn c die Geschw., t die Anzahl der Sec., die er von Anfang an gefallen, ist, so hat man

$$c=2gt;$$

also bei beschränktem Fall

$$c'=2g't$$

Das Gesetz über Geschwindigkeiten macht beim Studium die meiste Schwierigkeit: unter Geschwindigkeit eines in beschleunigter Bewegung begriffenen Körpers wird nämlich der Längenraum verstanden, den der Körper in der nächsten Sec. zurücklegen würde, wenn die bewegende Kraft während dieser Sec. zu wirken aufhörte. Nun kann man zwar den Fallraum in jeder einzelnen Sec. oder in einer noch kleineren Zeit beobachten, die Geschw. aber nicht abgesondert, weil dieselbe in dem Fallraum mit begriffen ist. Z. B. Ein Körper fällt in der ersten Sec. $g=15$ Fufs, in 2 Sec. $4g=4\cdot15=60$ Fufs, mithin ist er in der zweiten Sec. $3g=45$ Fufs gefallen, in diesen $3g$ steckt nun die Geschw. c mit.

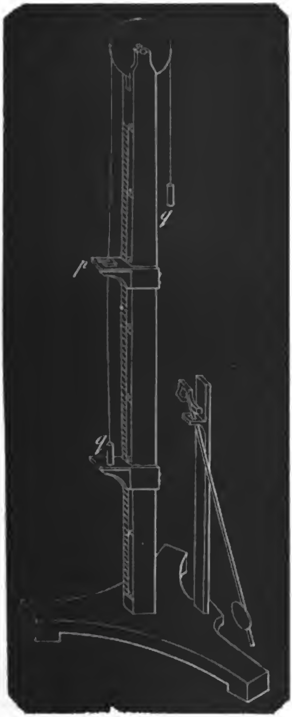
Dafs aber die Geschw. am Ende der ersten Sec. $2g=30$ Fufs gewesen ist, schliefst man folgendermafsen: Die Schwere ist eine beständige Kraft, sie wirkt also auf die Körper, sie mögen ruhen, oder, gleichviel mit welcher Schnelligkeit sich bewegen, gleich stark. Hat nun die Schwerkraft den Körper in der ersten Sec. $g=15$ Fufs lang bewegt, so kann sie den Körper in der zweiten und in jeder folgenden Sec. ebenfalls nur $g=15$ Fufs lang bewegen, er bewegt sich aber $3g=45$ Fufs, und dieses Mehr von $2g=30$ Fufs kann keine andere Ursach haben, als das Beharrungsvermögen, mit welchem der Körper die nach Verlauf einer Sec. erlangte Geschw. fortzusetzen das Bestreben hat.

Atwood ist es durch einen eben so sinnreichen als witzigen Einfall gelungen, diesen ebengedachten Schlufs als richtig zu bestätigen und die in allen Fallräumen

versteckten Geschwindigkeiten sichtbar zu machen.

Der Fall-Apparat wird nämlich zu diesem Behuf mit 2 Schiebern versehen, das Gewicht $q + p$ wird auf den Nullpunkt gestellt, der mittlere Schieber wird so gestellt, dafs es nach t Secunden aufschlägt, dagegen hat der Schieber eine mittlere Oeffnung, welche q durchläfst, das Ge-

Fig. 107.



wicht p aber ist von gröfserem Durchmesser und wird durch den Schieber aufgefangen, und das Gewicht q setzt den ferneren Weg ohne p, also ohne bewegende Kraft fort, und macht also in der folgenden Sec. einen Weg blofs vermöge seines Beharrungsvermögens, also mit der bei dem durchlochten Schieber erhaltenen Geschwindigkeit.

Ist, wie vorher, $q = 22$ Loth, $p = 1$ Loth, so wird p auf q gelegt, die Unterkante von p auf Null gestellt und das Pendel in Schwung gesetzt. Steht nun die Oberkante des Schiebers auf 4 Zoll, so wird genau mit 1 Sec. Fall das Gewicht p aufgefangen, und wird der untere zweite Schieber mit der Oberkante 8 Zoll tiefer gestellt, als die Unterkante von q, so schlägt mit dem folgenden Pendelschlage auch q auf, wonach $c' = 2g' = 8$ Zoll erwiesen wird; denn p ist mit Anfang der zweiten Sec. entfernt worden, und nur ein q abwärts und ein q aufwärts bleiben in Bewegung, also 2 Massen, die ohne hinzutretende Ueberwucht in Ruhe bleiben würden.

Steht der obere Schieber auf 16 Zoll, so schlägt p mit dem zweiten Pendelschlage auf und q mit dem dritten, wenn der untere Schieber 16 Zoll tiefer, also auf 32 Zoll Theilung steht, indem nun $c' = 2g't = 2 \cdot 4 \cdot 2 = 16$ Zoll ist.

Steht der obere Schieber auf 36 Zoll, so schlägt p mit dem dritten Pendelschlage auf und q mit dem folgenden vierten, wenn der untere Schieber 24 Zoll tiefer, also auf 5 Fufs Theilung steht, weil c' jetzt $2 \cdot 4 \cdot 3 = 24$ Zoll ist.

Auffahrt s. v. w. Appareille.

Aufgabe (Problem), ein Satz, der verlangt, einen Begriff, dessen Merkmale aus Lehrsätzen hervorgegangen sind, anschaulich zu machen.

Zählen und Numeriren gehören zu den Forderungssätzen, den Postulaten, denn ersteres beruht auf der Definition der Einheit und der Zahl, letzteres auf der des dekadischen Systems; Rechnen gehört zu den Aufgaben, weil es zufolge der Lehrsätze geschieht, die über die Werthe verschiedener Zahlen-Verbindungen vorher aufgestellt oder, wie in Elementarschulen, erzählend mitgetheilt werden. Zwischen zwei Punkten eine gerade Linie zu ziehen, ist ein Postulat, denn die Ausführung beruht auf der Definition der geraden Linie und dem Grundsatz: Zwischen zwei Punkten ist nur eine gerade Linie möglich. Aus drei gegebenen geraden Linien ein Dreieck zu zeichnen, ist eine Aufgabe, denn die Ausführung (Auflösung) beruht aufser der Definition des Kreises, wonach alle Radien desselben Kreises gleich grofs sind, auch auf dem Lehrsatz: In jedem Dreieck sind zwei Seiten zusammengenommen gröfser als die dritte.

Jede Aufgabe verlangt eine Auflösung

und diese wieder einen Beweis für die richtige Erfüllung der von der Aufgabe ausgesprochenen Forderung.

Aufgang und Untergang der Gestirne. A. ist das Hervortreten des Gestirns in dem Horizont des Beobachtungsorts, von wo ab es sichtbar an der Himmelskugel einen Bogen beschreibt; U. ist der Augenblick, wo dies Gestirn den Horizont berührt und unter demselben verschwindet. Der A. und U. ist in Absicht auf die Erscheinung derselben dreierlei Art: der senkrechte, der schiefe und der horizontale.

2. Unter dem Aequator gehen alle Gestirne senkrecht auf und unter, alle beschreiben Halbkreise und sind (die Strahlenbrechung außer Acht gelassen) 12 Stunden über dem Horizont sichtbar und 12 Stunden unter dem Horizont unsichtbar. Die in der Aequator-Ebene befindlichen Gestirne gehen zugleich durch's Zenith, wie die Sonne, wenn sie in den Nachtgleichen steht; die übrigen Gestirne beschreiben um so kleinere Halbkreise, je weiter sie von dem Aequator abstehen, der nördliche Polarstern also den kleinsten Halbkreis, nur ein in der Welt-Axe stehendes Gestirn würde einem Ort unter dem Aeq. weder auf- noch untergehen, und bis auf diesen werden alle an der Himmelskugel befindlichen Gestirne sichtbar.

In Fig. 1, pag. 2 (Art. Abendweite), ist das Gesagte in einer mit der Erdaxe parallelen Ebene dargestellt: Beschreibt das im Aeq. befindliche Gestirn S den Halbkreis vom Durchmesser Qq und geht durch die Zenithe aller in der Ebene QCq belegenen Orte, so beschreibt das unter der südlichen Abweichung FQ stehende Gestirn S'' den Halbkreis vom Durchmesser FG, erscheint während seiner ganzen sichtbaren Bewegung vom Aeq. Qq um den $\angle FCQ$ entfernt, und seine Höhe zu Mittage ist $\angle FCP'$. Je näher das Gestirn dem Südpol steht, desto kleiner wird der von ihm beschriebene Halbkreis, desto weiter erscheint es vom Aequator entfernt und desto geringer ist seine Mittagshöhe. Ein Gestirn in der Richtung CP' würde den Halbkreis vom Durchmesser = Null beschreiben, seine Höhe zu Mittag wäre $\angle P'CP'$ = Null, es wäre also das einzige Gestirn der südlichen Halbkugel, das dem Bewohner des Aeq. unsichtbar bliebe.

Das Gestirn S' unter der nördlichen Abweichung BQ beschreibt den Halbkreis vom Durchmesser BD, erscheint in der Entfernung BQ vom Aeq., seine Mittagshöhe ist $\angle PCB$; ein Gestirn in der Richtung CP, also unter der Abw. $QP = 90°$, wie in CP'.

3. Zwischen dem Aeq. und den Polen gehen alle Gestirne schief auf und unter.

Zwischen den Wendekreisen hat jeder Ort zwei Mal im Jahr die Sonne zu Mittag im Zenith, zu welchem sie in schiefem Quadrant aufsteigt und von dort eben so wieder absteigt.

Dieselbe Erscheinung haben diese Orte und die zu beiden Seiten der Wendekreise noch $5\frac{1}{4}°$ weiter liegenden zu verschiedenen Zeiten mit dem Monde.

Ein Ort O (Fig. 1), z. B. in der nördlichen Halbkugel unter der geogr. Breite CO, der sich bei der Rotation der Erde, also in dem Parallelkreise MA herumdreht, hat den A. und U. eines im Aeq. stehenden Gestirns S (also die Sonne am 21. März und 23. Septbr.) in dem Punkt M um 6 Uhr Morgens und in A um 6 Uhr Abends. Zz ist der Horizont von O, zu Mittag hat also die Sonne die Höhe ZMs (Mittagshöhe der S., zugleich Aequatorhöhe) $= \angle MCP =$ Bogen MP (Zenithdistanz vom Nordpol) und die Entfernung der S. zu Mittage vom Zenith ist der $\angle$, den sM mit der verlängerten CM bildet, $= \angle QCM$, (der geogr. Breite des Orts O) $= \angle zMp$ (der Polhöhe des Orts); die Sonne beschreibt also in Folge der schiefen Richtung Zz des Horizonts einen schief liegenden Halbkreis.

Ein Gestirn S'' der südlichen Halbkugel würde erst sehr spät für O aufgehen. Um 6 Uhr Morgens, wo es noch unter dem Horizont steht, hat es die Richtung OM'', Abends 6 Uhr die Richtung OA''; es erhebt sich bis Mittag, wo es in der Richtung OP' in dem Meridian steht, nur wenig über dem Horizont, wovon man sich überzeugt, wenn man von M aus eine Parallele mit OM'' zieht, geht erst zwischen F und P', nahe an P' auf, und eben so nahe an P' nach G hin gerichtet unter.

Ein Gestirn S' in der nördlichen Halbkugel hat in O Morgens 6 Uhr die Richtung $OM' \# CS'$, Abends 6 Uhr die Richtung OA'. Es geht aber zwischen M' und P früher auf und zwischen A' und P später unter, seine Mittagshöhe ist der fast rechte Winkel, den Zz mit Os' bildet, das Gestirn steht also zu Mittag nur wenig südlich vom Zenith entfernt.

4. Die horizontalen A. und U. finden in den Polen P und P' statt, und zwar nur für die zu unserem Sonnensystem gehörenden Körper. Fixsterne gehen weder auf noch unter: die Gestirne in der mit dem Pol gleichnamigen Halbkugel bewegen sich in horizontalen constanten

Kreisen, deren Höhen vom Horizont ihren Abweichungen gleich sind, alle 24 Stunden einmal herum; die der südlichen Halbkugel bleiben unsichtbar. Die Sonne, die Planeten und Monde bleiben dem Nordpol unsichtbar, so lange sie in der südlichen Halbkugel stehen; sowie sie in den Aeq. treten, um in die nördliche Halbkugel aufzusteigen, werden sie im Horizont sichtbar, bewegen sich horizontal herum und steigen immer höher. In dem Art. Astronomischer Horizont, No. 7, pag. 147, ist das Auf- und Niedersteigen der Sonne beschrieben; sowie nach einem halben Jahr die Sonne wieder in den Aeq. hinabsteigt, findet deren U. in fast horizontaler Richtung statt. Eben so geht der Mond auf, bleibt ½ Umlaufszeit über dem Horizont, geht unter und verschwindet während der anderen Hälfte der Umlaufszeit.

5. Man kann also die dreierlei A. und U. folgender Art zusammenfassen:

1) Unterm Aeq. laufen sämmtliche Gestirne sichtbar in Halbkreisen, die senkrecht auf dem Horizont stehen.

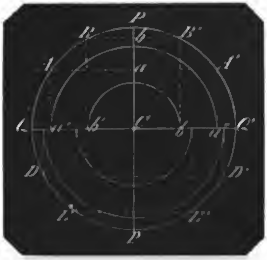
2) Unter jedem der Pole laufen die in gleichnamiger Halbkugel befindlichen Gestirne sichtbar in ganzen Kreisen, die mit dem Horizont # laufen.

3) In Orten zwischen dem Aeq. und den Polen laufen sämmtliche Gestirne sichtbar in schiefen Kreisbogen; für Gestirne im Aeq. sind die Bogen Halbkreise, für Gestirne in der mit dem Ort gleichnamigen Halbkugel sind die Bogen gröfser, für die in der ungleichnamigen Halbkugel befindlichen Gestirne kleiner als Halbkreise.

6. Man kann für jeden Ort *O* der Erde und für jedes Gestirn die Bahn, die es scheinbar alle 24 Stunden durchläuft, construiren; man erhält nur Kreise oder Ellipsen. Es hat dies aber nur Interesse, wenn man zugleich den Tagebogen, den Nachtbogen der Bahn abtheilen und noch andere ausgezeichnete Punkte darin verzeichnen kann.

Bedeutet *QPQ'P'* die Himmelskugel von unendlichem Halbmesser, so kann die Erde bei einem Halbmesser von 860 Meilen, der dagegen verschwindet, mit dem Punkt *C* zusammenfallend gedacht werden, und da scheinbarer und wahrer Horizont desgleichen zusammenfallen (vergl. astr. Horizont), so ist für jeden Bewohner des Aeq. *QQ'* die Linie *PP'* die Durchschnittslinie des Horizonts. Bewegt sich der Himmel scheinbar um *PP'* von *Q* über *C* nach *Q'*, und man denkt sich den Kreis *QPQ'P* als die Ebene des Horizonts so sind *Q*, *A*, *B*, *D*, *E* die Aufgangspunkte und *Q'*, *A'*, *B'*, *D'*, *E'* die Untergangspunkte der in den Parallelkreisen *QQ'*, *AA'* .... befindlichen

Fig. 108.



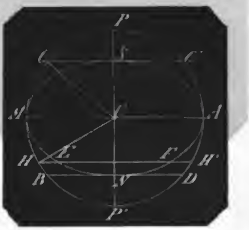
und sich bewegenden Gestirne. Denkt man sich *PP'* als Horizont, den Halbkreis *PQP'* als den senkrecht darüber und *PQ'P'* als den senkrecht darunter befindlichen Halbkreis, so sind *Q*, *A*, *B*, *D*, *E* die Culminationspunkte der gedachten Gestirne, deren Höhen *CQ*, *Aa*, *Bb*...., diese nach Norden, die Gestirne in *D*, *E*.... nach Süden immer weiter vom Zenith *Q* abstehend. Denkt man sich endlich durch *C* den Horizont gelegt und *QPQ'* als darüber befindliche Vertical-Ebene, so hat man in dem Halbkreis *QPQ'* die sichtbare Bahn eines im Aeq. befindlichen Gestirns. Die Projectionen *a'* von *A*, *b'* von *B*.... sind die Aufgangspunkte; die Projectionen *a''* von *A'*, *b''* von *B'* die Untergangspunkte der in den Parallelkreisen *AA'*, *BB'*.... sich bewegenden Gestirne, und die Halbkreise über *a'a''*, *b'b''*.... die sichtbaren Bahnen der in der nördlichen Halbkugel befindlichen Gestirne, wie die von *QQ'* nach *P'* gerichteten die der südlichen Halbkugel. Die von *P* und *P'* auf *QQ'* genommenen Projectionen fallen in dem Punkt *C* zusammen und geben keinen Kreis. Hiermit sind geometrisch die Bahnen der Gestirne für Bewohner des Aeq. nachgewiesen.

7. Die Bahnen der Gestirne für die zwischen dem Aeq. und den Polen befindlichen Bewohner verzeichnet man folgender Art; auch kann man den Tagebogen von dem Nachtbogen trennen und sonst bemerkbare Punkte in der Bahn angeben.

Bedeutet *APMP'* den Durchschnitt der Himmelskugel, ziehe durch deren Mittel-

punkt *C* die sich normal schneidenden Durchmesser *MA*, *PP'*, zeichne $\angle MCQ =$ der Aequatorhöhe des Orts, ziehe $QQ' \mp MA$, nimm $CN = CS$, so ist *MA* die grofse, *SN* die kleine Axe der Ellipse, in der die Kreisbahn eines jeden Gestirns gegen die Lothrechte des Orts in Projection erscheint. Ist also die halbe grofse Axe $CM = 1$, so ist die halbe kleine Axe $CS =$ dem *Sin* der Aequatorhöhe des Orts.

Fig. 109.



Zeichnet man $\angle MCH =$ der mit dem Ort gleichnamigen Abweichung des Gestirns, zieht $HH' \mp MA$, so ist *HH'* der Horizont, Bogen *EMSAF* der sichtbare Tagebogen; Bogen *ENF* der unsichtbare Nachtbogen.

In *E* geht das Gestirn auf, in *M* steht es Morgens 6 Uhr, in *S* zu Mittag, in *A* Abends 6 Uhr, in *F* geht es unter, in *N* steht es zu Mitternacht, Bogen *HMQ* ist seine Mittagshöhe über dem Ort, Bogen *HB* seine Mitternachtstiefe.

Für Berlin ist $QM = 37° 28' 30''$; ist $MH = 23\frac{1}{2}°$, so ist die Ellipse die scheinbare Bahn der Sonne am 21. Juni; legt man *MH* von *M* nach *Q* hin, so erhält man oberhalb *MA* den Horizont. Man hat sich also nur *N* als Mittags-, *S* als Mitternachtspunkt zu denken, so steht die Sonne 6 Uhr Morgens in *M* und Abends 6 Uhr in *A* unter dem Horizont; nach 6 Uhr Morgens geht die Sonne in *E* auf und vor 6 Uhr Abends in *F* unter, Bogen *HB* ist ihre Mittagshöhe, *ENF* ihr Tagebogen, *EMSAF* ihr Nachtbogen.

Ist am 21. Juni der Ort *O* im nördlichen Wendekreise, so ist *HH'* der Horizont, die Aequatorhöhe *MQ* wird $66\frac{1}{2}°$, um so viel rückt *S* höher, *N* tiefer. Hat ein Gestirn $37° 28' 30''$ nördliche Abweichung, dann fällt *H* in *B*, für Berlin ist *BD* der Horizont und *N* der einzige tangirende Punkt der Gestirnbahn in demselben.

8. Die Auf- und Untergangspunkte mit den Morgen- und Abendweiten lassen sich geometrisch in der Kreisbahn des Gestirns auf folgende Weise construiren.

In dem Art. Abendweite ist pag. 3 mit Hülfe von Fig. 2 erwiesen, dafs

$$\sin \left\{ \begin{matrix} \text{Morgenweite} \\ \text{oder} \\ \text{Abendweite} \end{matrix} \right\} = \frac{\sin \text{Abweichung}}{\sin \text{Aequatorhöhe}}$$

In Fig. 110, in welcher die Fig. 1 stehenden Buchstaben übereinstimmen, sei *C* der Erdmittelpunkt, *Qq* der Aeq., *CB* die Richtung des Gestirns *S'*, *O* der Ort der Erde, für welchen die Construction geschieht, so ist $\angle QCB$ (w) die nördliche Abweichung von *S'* und, wenn $OM \mp Qq$, $\angle OCM$ (h), die Aequatorhöhe von *O*. Bezeichnet man den Halbmesser *CQ* mit r, so ist $BR = r \sin w$; ziehe $BD \mp Qq$, *CE* normal auf *CM*, so ist $\angle qCE = \angle PCM = h$. Fällt man nun aus dem Durchschnittspunkt *H* zwischen *BD* und *CE* das Loth *HI*, so ist

$$HI = BR = r \sin w, \text{ aber auch}$$
$$HI = CH \sin h$$
$$CH = r \frac{\sin w}{\sin h}$$

folglich ist $CH = r \cdot \sin$ Morgenweite. Beschreibt man daher aus *C* den Bogen *HK*, zieht $KL \mp Qq$, so ist das Loth

$$LN = r \sin LCQ$$
$$= r \cdot \sin \text{Morgenweite},$$

folglich ist $\angle LCQ =$ Bogen *LQ* die Morgenweite und die Abendweite des Gestirns *S'* für den Ort *O*, und zieht man $OM' \mp LC$, so ist *OM'* die Richtung, in der *S'* aufgeht, und $Os' \mp CS'$ die Richtung, in der es Morgens 6 Uhr steht.

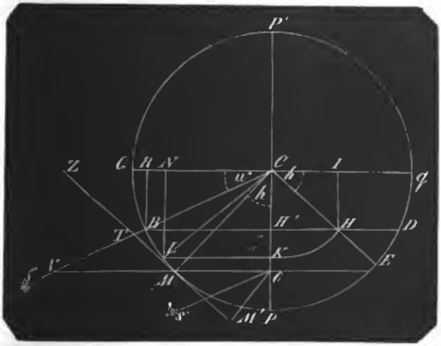
Jeder Halbkreis, also auch *QP'q* stellt den Bogen vor, den das Gestirn *S'* von 6 Uhr früh bis 6 Uhr Abends zurücklegt, also *QP'* den Quadrant von 6 Uhr früh bis Mittag, mithin ist Bogen *LQP'* der Bogen vom Aufgang bis Mittag, und $\angle \frac{LCQ}{90°} \times 6$ Stunden die Zeit, um welche das Gestirn vor 6 Uhr früh aufgeht. Ferner ist *LP* der halbe Nachtbogen und $\frac{LCP}{90°} \times 6$ Stunden die halbe Nachtzeit von *S'*.

Hat *S'* südliche Abweichung, so erhält man für *O* in der nördlichen Halbkugel durch dieselbe Construction *QP* den Bogen, den *S'* in 6 Stunden zurücklegt, *QL* den Bogen, um den es später als 6 Uhr aufgeht, *LP* den halben Tagebogen und *LQP'* den halben Nachtbogen.

Mit dieser Construction ist zugleich das bisher und im Art.: „Abendweite" Vorgetragene figürlich bestätigt und nachgewiesen, dafs wenn ein Gestirn für einen

Ort auf- und untergehen soll, die Aequatorhöhe des Orts > sein mufs als die Abweichung des Gestirns, denn die Construction verlangt einen Durchschnittspunkt H zwischen BD und CE. Für $\angle h = \angle w$ fällt H in die Peripherie, z. B. in D oder in E; zeichnet man nun den Bogen HK von H in die Richtung CP, so fällt K in P, die Morgenweite ist QP,

Fig. 110.



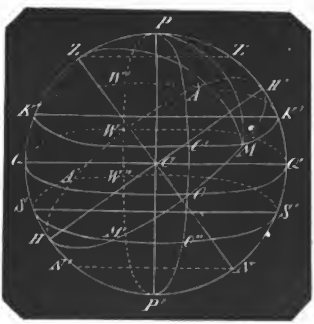
die Abendweite qP; das Gestirn tangirt zu Mitternacht den Horizont, sein Tagebogen ist 360°, es ist der äufserste Circumpolarstern. Fällt H aufserhalb der Peripherie, ist h also kleiner als w, liegt also O dem Pol näher als S' dem Aeq., so bleibt S' auch zu Mitternacht über dem Horizont von O. Ist $\angle h =$ Null, liegt also O in P oder P', so fällt H in $Qq \mp BD$; es ist kein Durchschnittspunkt zwischen beiden Linien, also auch keine Morgen- und keine Abendweite möglich ($\sin$ Morgenweite $= \frac{\sin w}{0} = \infty$), das Gestirn bleibt unter dem $\angle QCS'$ über dem Horizont von P. Ist $\angle h = 90°$, d. h. liegt O in Qq, so fällt H in H', die Morgenweite ist $= QB = w$ ($\sin$ Morgenweite $= \frac{\sin w}{\sin 90°}$ $= \sin w$).

9. Die Elemente für die Construction schief liegender Bahnen erhält man am klarsten mit Hülfe einer perspectivischen Zeichnung.

Ein Ort o, z. B. Berlin, liege zwischen dem Aeq. und dem Nordpol unter der geogr. Breite QCZ, so ist auf der der Erdkugel concentrischen Himmelskugel $QPQ'P'$ der Kreis vom Durchmesser ZZ' der dem Ort o entsprechende Parallelkreis, und zwar zugleich der geometrische Ort sämmtlicher Zenithe, welche der Ort o während seiner 24stündigen Umwälzung um PP' hinter einander erlangt, so wie der Kreis NN' der geometrische Ort sämmtlicher Nadire von o. Die Normale HH' durch C auf ZN ist der Horizont von o, der sich innerhalb der durch H und H' zu denkenden Parallelkreise ebenfalls 24stündlich um PP' herumdreht. Denkt man sich jedoch den Horizont HH' von o festliegend, dann bleibt Z das Zenith, N das Nadir von o, und die Himmelskugel dreht sich scheinbar alle 24 Stunden von Ost nach West, hier z. B. von Q' über C nach Q um PP' herum.

Der Horizont HH' und der Aequator QQ' schneiden sich in der Linie OW; da beide gröfste Kreise sind, so halbiren sie einander, und $OQW = WQ'O = OHW = WHO = 180°$. Ein im Aeq. befindliches Gestirn tritt, von Q' kommend, in O über den Horizont, es geht auf; in W tritt es unter den Horizont, es geht unter; O ist der Ostpunkt, W der Westpunkt, der Tagebogen OQW ist gleich dem Nachtbogen $WQ'O$ und jeder wird in 12 Stunden beschrieben. Dies geschieht

Fig. 111.



also von der Sonne an den Tagen der Nachtgleichen am 21. März und 23. Septbr., die Sonne hat zu Mittage in Q die Höhe QH = der Aequatorhöhe = 90° − geogr. Breite, und die Bahn der Sonne ist zu construiren durch eine Ellipse, in welcher QC die halbe grofse Axe und die Normale von Q auf HH', also *sin* Aequatorhöhe die halbe kleine Axe ist, und die grofse Axe als Horizont trennt den Tagebogen von dem ihm gleichen Nachtbogen. Für Berlin wird die halbe grofse Axe = 1, die halbe kleine = *sin* 37° 28′ 30″

Legt man durch $POP'W$ einen gröfsten Kreis, so theilt dieser die Himmelskugel für den Ort o der Erdoberfläche in eine südliche und in eine nördliche Halbkugel. Alle Gestirne, die in Parallelkreisen, wie in dem Kreise $KMK'A$ laufen, haben in dem Halbkreis POP' den östlichsten Stand, in dem Halbkreise PQP' den südlichsten, in dem Halbkreise PWP' den westlichsten und in dem Halbkreise $PQ'P'$ den nördlichsten Stand; ein innerhalb des Kreises KK' befindliches Gestirn steht also in O' im Ostpunkt, in W' im Westpunkt des Ortes o; ein im Kreise SS' befindliches Gestirn steht in O'' im Ostpunkt und in W'' im Westpunkt des Ortes o.

Das in der nördlichen Halbkugel QPQ' im Kreise KK' befindliche Gestirn geht aber schon in M vor dem Ostpunkt auf und erst in A hinter dem Westpunkt unter, sein Tagebogen MKA ist > als sein Nachtbogen $AK'M$; das in der südlichen Halbkugel QPQ' im Kreise SS' befindliche Gestirn geht erst nach dem Ostpunkt in M' auf und schon vor dem Westpunkt in A' unter, sein Tagebogen $M'SA'$ ist kleiner als sein Nachtbogen $A'S'M'$.

MO' ist die Morgenweite, AW' die ihr gleiche Abendweite des nördlichen, $M'O''$ die Morgenweite, $A'W''$ die ihr gleiche Abendweite des südlichen Gestirns für den Ort o der Erde.

10. Aus der gegebenen Aequatorhöhe QH des Orts o und der Abweichung QK eines Gestirns s läfst sich auch der halbe Tagebogen, nämlich der Bogen MOH, den s vom Aufgang bis Mittag beschreibt, finden, wenn man den Kreisbogen PM zeichnet und den Stundenwinkel, den PM mit dem Bogen $PZKQH$ bildet, also den $\angle ZPM$ ermittelt. Zeichnet man daher den Bogen ZM, so ist in dem schiefwinkligen sphärischen $\triangle PZM$

$$\cos ZPM = \frac{\cos ZM - \cos ZP \cdot \cos PM}{\sin ZP \cdot \sin PM}$$

Ist aber M der Aufgangspunkt von s für o, so hat offenbar M einen Abstand = 90° vom Zenith Z über o, d. h. $\angle ZCM$, den Z und M mit dem Mittelpunkt C der Erd- oder Himmelskugel bilden, ist 90°, mithin Bogen $ZM = 90°$, es ist $\cos ZM$ = Null und

$$\cos ZPM = -\cot ZP \cdot \cot PM$$
$$= -\cot QH \cdot tg\, KQ$$

Nun ist ZPM (P) der Stunden∠, d. h. der ∠, der sich zu 360° verhält wie die Zeit, in welcher der Bogen $MO'K$ durchlaufen wird, zu 24 Stunden, und man hat

cos Stunden∠ = − *cot* Aequatorhöhe × *tg* Abweichung.

Z. B. für Berlin am längsten Tage

$$\cos P = -\cot 37° 28' 30'' \times tg\, 23° 30'$$

Es ist

$$\log\cot 37° 28' 30'' = 10{,}1154120 - 10$$
$$\log tg\ 23° 30' = 9{,}6383019 - 10$$
$$\log - \cos P = 9{,}7537139 - 10$$
woraus $180° - P = 55° 26' 49''$
mithin $P = 124° 33' 11''$

11. Es ist Bogen $HZP = 37° 28' 30'' + 90° = 127° 28' 30''$, MOH der Bogen im Horizont vom Sonnen-Aufgang bis Mittag, $\angle HPM$ der Stunden∠ = 124° 33′ 11″, $\angle PHM$ (der ∠ zwischen dem Meridian und dem Horizont) = 90°.

Man hat also in dem rechtwinkl. sphär. $\triangle PHM$ den Bogen HM aus

$$tg\, HM = \sin PH \cdot tg\, HPM$$
$$\sin 127° 28' 30'' = \sin 52° 31' 30''$$
$$tg\ 124° 33' 11'' = -tg\, 55° 26' 49''$$
$$\log\sin 52° 31' 30'' = 9{,}8996120 - 10$$
$$\log tg\ 55° 25' 49'' = 10{,}1620044 - 10$$
$$\log(-tg\, HM) = 10{,}0616164 - 10$$
hieraus $180° - HM = 49° 3'$
also $HM = 130° 57'$
hiervon $HO = 90°$
bleiben $40° 57'$

für die Morgenweite, wie sie pag. 3 gefunden worden ist.

12. Die Mittagshöhe eines Gestirns in KK' ist Bog. $KH = QH + QK$ = Aequatorhöhe des Orts + Abweichung des Gestirns; die Mitternachtshöhe = $K'H' = Q'H' - Q'K'$ = Aequatorhöhe − Abweichung. Die Summe der Mittagshöhe und der Mitternachtshöhe eines Gestirns ist also = der doppelten Aequatorhöhe des Orts, unabhängig von der Abweichung und folglich für jedes Gestirn, aber nur für denselben Ort der Erde dieselbe.

Die Mittagshöhe eines in SS' sich bewegenden Gestirns ist $SH = QH - QS$ = Aequatorhöhe − Abweichung; die Mitternachtshöhe = $S'H' = Q'H' + Q'S'$ = Aequatorhöhe + Abweichung.

Für $QK = QH$ wird die Mitternachtshöhe = Null, das Gestirn ist der äufserste Circumpolarstern; für $QH = QS$ ist die Mittagshöhe = Null, das Gestirn tangirt

zu Mittage unterhalb den Horizont. (Vergl. astronomische Dämmerung, No. 5 und 6.)

Aufgang und Untergang der Gestirne, poetischer. So genannt, weil derselbe von den alten griechischen und römischen Dichtern uns überliefert worden ist. Diese A. und U. waren den Alten für die nothwendigen landwirthschaftlichen Verrichtungen unser heutiger Kalender, der damals bei den nur mangelhaften astronomischen Kenntnissen anders nicht existiren konnte.

Da nämlich die Fixsterne in den auf einander folgenden Tagen immer einen anderen Stand gegen den der Sonne haben, so dienten die A. und U. der Sonne als Fundamentalpunkte für die Zeitmessung, und die Zeit selbst wurde in der Anzahl der Tage festgestellt, in welcher dieser und jener Fixstern mit dem A. oder U. der Sonne zugleich auf- oder unterging.

So z. B. war der Anfang des Pharaonischen Jahres bei den Aegyptern in dem Augenblick, wo der Sirius mit der Sonne zugleich aufging, weil hiermit die fruchtbare Ueberschwemmung des Nils begann, und welches 365¼ Tage dauerte.

Man unterschied 3 verschiedene A. und 3 verschiedene U.

1) Kosmischer A. (ortus cosmicus), wenn ein Stern mit der Sonne zugleich aufgeht.

2) Kosmischer U. (occasus cosmicus), wenn der Stern mit dem Aufgang der Sonne zugleich untergeht.

3) Akronyktischer A. (ortus acronyctus), wenn der Stern mit dem Untergang der Sonne zugleich aufgeht.

4) Akronyktischer U. (occasus acronyctus), wenn der Stern mit dem Untergang der Sonne zugleich untergeht.

5) Heliacischer A. (ortus heliacus), wenn der Stern etwas früher aufgeht als die Sonne und aus den Sonnenstrahlen hervorrückt.

6) Heliacischer U. (occasus heliacus), wenn der Stern etwas später untergeht als die Sonne, sich also in deren Strahlen verbirgt.

Aufgehen beim Subtrahiren und Dividiren, wenn kein Rest bleibt, im ersten Fall also geht die Rechnung auf, wenn Minuend und Subtrahend gleich sind, im zweiten Falle, wenn der Divisor ein aliquoter Theil des Dividendus ist.

Aufhängepunkt am Pendel und an der Waage ist derjenige Punkt der festen Drehaxe, welcher mit den Richtungslinien der wirkenden Kräfte in einerlei Ebene liegt.

Aufheben der Brüche s. v. w. Abbreviren der Brüche (s. d.). Bisweilen ist es nothwendig, einen in Buchstaben ausgedrückten Bruch aufzuheben, wenn derselbe z. B. für bestimmte Zahlen, welche der Bedingung angemessen sind, einen unbestimmten Werth z. B. $\frac{0}{0}$ giebt.

Der Bruch sei $\frac{2a^2+3ab-2b^2}{6a^2-5ab+b^2}$

Dieser giebt für $b=2a$ den Werth $\frac{0}{0}$, und wenn die Bedingung $b=2a$ eine der Natur der Sache angemessene ist, so kann diese Unbestimmtheit nur daher rühren, dafs in Zähler und Nenner ein gemeinschaftlicher, für $b=2a$ Null werdender Factor vorhanden ist.

Um diesen aufzufinden, dividire (allgemein gültig) den Nenner durch den Zähler, so erhält man

$$\frac{6a^2-5ab+b^2}{2a^2+3ab-2b^2}=3-7b\cdot\frac{2a-b}{2a^2+3ab-2b^2}$$

Dividire wieder den Nenner des Restes durch den Zähler, so erhält man

$$\frac{2a^2+3ab-2b^2}{2a-b}=a+2b$$

Es ist mithin $2a-b$ ein gemeinschaftlicher Factor.

Es ist $$\frac{2a^2+3ab-2b^2}{6a^2-5ab+b^2}=\frac{(2a-b)(a+2b)}{(2a-b)(3a-b)}=\frac{a+2b}{3a-b}$$

und für $b=2a$ ist der Werth des Bruches $=5$.

Auflösung einer Aufgabe. Die Ausführung der von der Aufgabe ausgesprochenen Forderung. Die A. einer geometrischen Aufgabe geschieht synthetisch durch Zeichnung, analytisch durch Rechnung; die A. einer Gleichung algebraisch (s. Algebra, algebraische Auflösung, Gleichung, 6 etc., Analytisch etc.)

Auflösungskraft (Chemie) s. u. Anziehung.

Aufnehmen. (Feldmefsk.) einer Fläche Landes. Die Vermessung derselben mittelst Mefs-Instrumenten, oder auch, wenn die Fläche nicht sehr ausgedehnt, ziemlich eben ist, und wenn keine grofse Genauigkeit verlangt wird, durch Abschreiten. Die Hauptsache bei jedem A. ist die Abtheilung der Fläche in zusammenhangende Dreiecke, weil diese Figur der wenigsten Bestimmungsstücke (nur 3) für ihre richtige Verzeichnung bedarf. Kleine Flächen, einzelne Morgen, theilweise Feldmarken können ohne Hülfe von Winkel-Instrumenten, also blofs durch Kette und Stäbe vermessen werden (Ba-

culometrie). Hier hat man das erste △ in seinen 3 Seiten einzeln zu vermessen, die folgenden, damit verbundenen Dreiecke jedes nur in 2 Seiten.

Bei ausgedehnteren Aufnahmen, wo zur Vermeidung oder Verminderung von Fehlern, die bei der Unvollkommenheit jedes Mefs-Instruments unvermeidlich sind, möglichst grofse Haupt-Dreiecke, also lange Hauptlinien abzustecken sind, hat man Winkel-Instrumente nöthig (Boussole, Astrolabium, Sextant, Theodolit); bei unebenem Terrain müssen die vermessenen Linien auch nivellirt werden, weil die Zeichnung der vermessenen Erdfläche in horizontaler Projection darzustellen ist.

Grofse Länderstrecken werden triangulirt, d. h. es wird nur eine einzige gerade möglichst lange Linie und sehr genau wirklich vermessen, und von deren Endpunkten aus nur die Winkel, welche diese Linie mit anderen zu Dreiecken vereinigt; diese Linien werden trigonometrisch berechnet, aus deren Endpunkten wieder die ∠ neuer Linien als Seiten zu neuen anschliefsenden Dreiecken gemessen, diese Seiten trig. berechnet u. s. f. Das zwischen den gedachten Seiten des Dreiecknetzes befindliche Terrain wird speciell vermessen und in die Dreiecke eingetragen.

Aufschlagewasser. Das unmittelbar vor einem Mühlrade stehende und auf dasselbe geleitete Wasser, um durch Stofs oder Druck die mit dem Rade verbundenen Widerstände zu überwinden und durch Umdrehung desselben die Mühle zu betreiben.

Aufsteigender Knoten (☊) s. u. absteigender Knoten (pag. 17).

Aufsteigende Reihe, eine Reihe von der Form

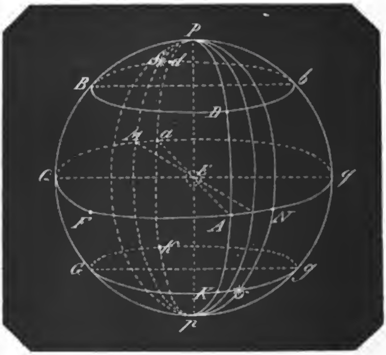
$$a \pm bx \pm cx^2 \pm \ldots . wx^n$$

in welcher also die Exponenten der Grundzahl in den auf einander folgenden Gliedern zunehmen. (Vergl. absteigende Reihe, pag. 17.)

Aufsteigendes Zeichen s. u. absteigendes Zeichen (pag. 18).

Aufsteigung und Absteigung eines Gestirns. Aufsteigung ist der Punkt des Aequators, der für einen Ort der Erde mit dem Gestirn zugleich aufgeht, sowie Absteigung (s. d. pag. 18) derjenige Punkt des Aequators, der mit dem Gestirn zugleich untergeht. Beide Punkte werden durch die Länge des Bogens angegeben, in welchem sie von dem Frühlingspunkt als Nullpunkt und von diesem ab von Abend nach Morgen gemessen abstehen.

Fig. 112.



Es sei auf der Himmelskugel, *Qq* der Aequator, *P* der Nordpol, *p* der Südpol, so ist der Kreis *PDAKpkadP* der wahre Horizont für 2 Orte der Erdoberfläche unter dem Aequator an den Endpunkten *Q*, *q* eines Erd-Durchmessers, und von denen der eine in der östlichen, der andere in der westlichen Halbkugel liegt. Ist *Aa* die Durchschnittslinie zwischen dem Horizont und dem Aequator, *q* das Zenith des Orts, *QAq* die Richtung von Westen nach Osten, in welcher die Erde um ihre Axe sich dreht, mithin *qAQ* die scheinbare Bewegung der Himmelskugel von Osten nach Westen, so gehen alle Gestirne in dem Augenblick auf, in welchem sie aus der westlichen Halbkugel *PapAQ* in den Halbkreis *Pap*, und unter in dem Augenblick, in welchem sie aus der Halbkugel *PapAq* in den Halbkreis *pAP* treten. Ein in der Aequator-Ebene befindliches Gestirn geht also in dem Punkt *a* auf, geht durch das Zenith *q* und in *A* unter.

Alle Sterne bewegen sich in Kreisen, die mit dem Aequator ∦ laufen, der Stern *S* der nördlichen Halbkugel also in dem Parallelkreise *SbDBS*, der Stern *s* der südlichen in dem Kreise *sGkgs*, und die Bewegung der Sterne ist somit eine senkrechte, eine gerade. Daher nennt man auch die Auf- und Absteigung der Gestirne für einen unter dem Aequator

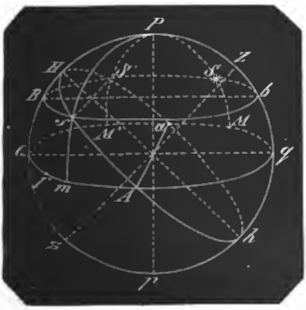
belegenen Ort gerade Aufsteigung und gerade Absteigung.

2. Es ist nun klar, dafs mit den Punkten *d* und *k* für die Gestirne *S* und *s* der Punkt *a* des Aequators zu gleicher Zeit aufgeht und mit den Punkten *D* und *K* der Punkt *A* im Aequator zugleich untergeht. Während der Stern *S* aber den Bogen *Sd* scheinbar durchläuft, durchläuft auch der Punkt *M* des Aequators, der mit *S* in demselben Scheitelkreis liegt, den Bogen *Ma*, mithin ist *M* die gerade Aufsteigung von *S*, sowie der Punkt *N* für den Stern *s* die gerade Aufsteigung ist. Da der Punkt *M* mit dem Stern *S* und *N* mit *s* nicht nur gleichzeitig auf-, sondern auch untergeht, so sind beide Punkte *M* und *N* auch die geraden Absteigungen der beiden Sterne, und gerade Aufsteigung und gerade Absteigung sind ein und dasselbe.

Bedeutet der Punkt *F* im Aequator den Frühlingspunkt, so erhält man durch die Länge des Bogens *FNqM* die gerade Aufsteigung *M* des Sternes *S*, und da mit dieser zugleich der Ort desselben in seinem Parallelkreise *SBDbS* gegeben ist, so nennt man auch besonders den Bogen *FNqM* vom Frühlingspunkt bis zum Durchschnitt des Scheitelkreises im Aequator die gerade Aufsteigung (Rectascension) des Sterns *S*. Die Rectascension des Sterns *s* ist der Bogen *FAN* (s. Ascensio n).

3. Für jeden Ort auf der Erdoberfläche aufserhalb des Aequators ist die Auf- und Absteigung der Gestirne eine schiefe. Es sei *HahA* der wahre Horizont zweier Orte der Erdoberfläche, deren gerade Verbindungslinie also so wie die ihrer Zenithe *Z* und *z* durch den Mittelpunkt der Erde

Fig. 113.



geht, und von denen der eine in der nördlichen, der andere in der südlichen Halbkugel liegt. Für den ersteren Ort gehen also alle Gestirne auf, wenn sie aus der Halbkugel *Hhz* in den Kreis *Hh* und aus diesem in die Halbkugel *HhZ* treten. *Aa* sei die Durchschnittslinie des Horizonts mit dem Aequator, so ist der Punkt *M* des Aequators mit dem Stern *S* in demselben Scheitelkreis. Jetzt geht der Stern *S* schon in dem Punkt *S'* auf und mit diesem zugleich der Punkt *a* des Aequators, folglich ist für den Horizont *Hh a* die Aufsteigung und zwar die schiefe Aufsteigung des Sterns *S* in der Entfernung *FAqa* vom Frühlingspunkt. Wenn der Stern *S* durch *SbsB* nach *S'* kommt, so ist der ihm entsprechende Punkt *M* des Aequators in *M'* und dieser liegt beim Aufgang von *S* noch um den Bogen *M'a* unter dem Horizont.

Wie *a* die schiefe Aufsteigung, so ist *A* die schiefe Absteigung des Sterns *S*, indem er in *s* untergeht; die gerade Absteigung *m* ist dann schon um den Bogen *Am* unter dem Horizont. Da der Unterschied zwischen der geraden und der schiefen Aufsteigung (der Aufsteigungs-Unterschied) eines Gestirns für einen bestimmten Ort gleich ist mit dem Unterschied der geraden und schiefen Absteigung (der Absteigungs-Unterschied) desselben Gestirns für denselben Ort, so führen beide Unterschiede den gemeinschaftlichen Namen Ascensional-Differenz.

4. Für *z* als Zenith ist der Tagebogen desselben Sterns *S=sBS'*, in *s* ist sein Aufgang, in *S'* sein Untergang. Es ist mithin *A* die schiefe Aufsteigung, *a* die schiefe Absteigung des Sterns *S*; *m* dessen gerade Aufsteigung und *M'* dessen gerade Absteigung, der Aufsteigungs-Unterschied $= mA$, der Absteigungs-Unterschied *M'a*. Hier steht die Rectascension *m* von *S* schon um die Ascensional-Differenz *mA* über dem Horizont, wenn *S* in *s* aufgeht, beim Untergang von *S* in *S'* ist die gerade Absteigung *M'* noch um dieselbe Ascensional-Differenz über dem Horizont.

Bei der letzten Betrachtung für das Zenith *z* kann man sich vorstellen, dafs *z* in der nördlichen Halbkugel liegt, dann steht der Stern *S* in der südlichen. Für das Zenith *Z* liegt *S* in derselben nördlichen Halbkugel, demnach gilt die Gleichheit der Auf- und Absteigungs-Unterschiede für alle Gestirne, sie mögen mit dem Beobachtungsort in derselben oder in der entgegengesetzten Halbkugel liegen.

Wenn für einen Zeitpunkt die Abweichung der Sonne beobachtet worden, so kann auch deren Rectascension leicht berechnet werden; denn die Abweichung (A) und die Rectascension (R) sind Katheten eines rechtwinklig sphär. △, in welchem der A gegenüber liegende ∠ die Schiefe (s) der Ekliptik ist. Man hat demnach

$$\sin \text{ Rectasc.} = \frac{tg \text{ Abweichung}}{tg \text{ Schiefe der Ekl.}}$$

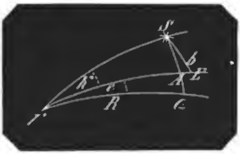
Der Ort eines Planeten wird mit Hülfe von Tafeln nach Länge und Breite angegeben (s. astr. Länge und astr. Breite), dagegen hat man es bei der Einrichtung der astr. Instrumente leichter und sicherer, die Gestirne nach Abweichung und gerader Aufsteigung anzugeben, und es geschieht dies jetzt mit den Fixsternen. Um nun aus Länge l und Breite b die Abweichung (A) und Rectascension (R) zu finden, hat man die Formeln:

$$\sin A = \frac{\sin b \cdot \sin (k+e)}{\sin k}$$

$$tg\, R = \frac{tg\, l \cdot \cos (k+e)}{\cos k}$$

worin k durch $tg\, k = \frac{tg\, b}{\sin l}$ bestimmt wird und e die Schiefe der Ekliptik bedeutet.

Fig. 114.



In dem Art. Abweichung ist die erste Formel vorläufig schon angegeben; die Herleitung Beider geschieht wie folgt:

Ist S der Fixstern, FQ der Aequator, FE die Ekliptik, F der Frühlingspunkt, also $\angle EFQ = e$ die Schiefe der Ekliptik, so ist die Normale SE auf FE die Breite b, FE die Länge l von S, die Normale SQ auf FQ die Abweichung A, FQ die Rectascension R von S. Denkt man sich den gröfsten Kreisbogen SF, so hat man 2 rechtwinklig sphär. Dreiecke SFE und SFQ; bezeichnet man $\angle SFE$ mit k, so ist

1. $tg\, k = \frac{tg\, b}{\sin l}$

$\sin SF = \frac{\sin b}{\sin k}$

$\sin A = \sin SF \cdot \sin (k+e)$, also

2. $\sin A = \frac{\sin b \cdot \sin (k+e)}{\sin k}$

Auch ist $tg\, S = \frac{tg\, l}{\cos k}$

und $tg\, R = tg\, S \cdot \cos (k+e)$

daher

3. $tg\, R = \frac{tg\, l \cdot \cos (k+e)}{\cos k}$

Die schiefe A. ist = gerader A. − Ascensional-Differenz.

Aufsteigungs-Unterschied s. Aufsteigung.

Auge, das Organ für das Sehvermögen der lebenden Geschöpfe, ist, soweit wir es wissen, von zweierlei wesentlich verschiedener Construction.

Das A. der Insecten und Crustaceen ist musivisch zusammengesetzt. Die Oberfläche der Hornhaut hat nach Aufsen die Form eines regelmäfsigen Polyeders, deren Tausende von Flächen oder Facetten durchsichtig sind; auf der convexen Netzhaut stehen eben so viele abgekürzte Kegel, deren Grundflächen durchsichtig und deren Mäntel undurchsichtig sind.

Fig. 115.



Der Lichtstrahl, welcher von a durch eine Facette auf die Oberfläche des Kegels b fällt, trifft die Netzhaut in b, die von demselben Punkt a rechts und links fallenden Lichtstrahlen treffen von aufsen und von innen die undurchsichtigen Seitenflächen der nebenstehenden Kegel, das Thier empfängt von dem Punkt a nur einen einzigen Licht-Eindruck in b, und so von jedem anderen leuchtenden Punkt nur einen Licht-Eindruck, so dafs ihm von dem Gegenstande ein mosaikartiges Bild erscheint.

2. Die Augen der Wirbelthiere bestehen in dem hauptsächlichsten Stück aus einer krystallartigen Linse, durch welche die von aufsen kommenden Lichtstrahlen aufgefangen und gebrochen auf die Netzhaut geführt werden.

Das A. des Menschen ist in Fig. 116 im Profil skizzirt: Aus dem Gehirn, dem alleinigen Sitz der Willenskraft und der Empfindung, welches mit allen Muskeln der beweglichen und mit allen empfindbaren Theilen des Körpers durch Nerven in Communication steht, entspringen auch starke, markige Sehnerven bis gegen die Augenhöhlen, vereinigen sich dort und theilen sich in zwei starke Nerven, die in die beiden Augapfel hineinreichen.

a ist einer dieser Sehnerven, er verbreitet sich als feine, weifse Markhaut, die Netzhaut, retina, über die innere hintere Kugelfläche des Augapfels, empfängt daselbst in jedem ihrer einzelnen Punkte den Licht-Eindruck von äufseren Gegenständen und bringt diese dem Gehirn zum Bewufstsein. Das bisher Gesagte vom Auge ist Physiologisches, und es ist auch nicht gut möglich, dieses von dem ferner folgenden Mathematisch-Physikalischen zu trennen. Die Construction des A. ist wie folgt:

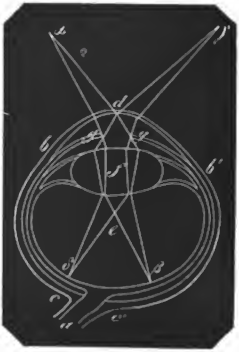
3. Der Augapfel *cbdb'c'* ist kugelförmig, nur ist der Querdurchschnitt um etwa 0,05 kürzer als die Augenaxe *dc'*. Die äufsere Umschliefsung besteht in der Haut *bcb'c'* (das Weifse im Auge), die harte Haut, weifse Haut, tunica sclerotica, aus sehnigen Fasern gebildet, aber ohne Nerven, also unempfindlich, und als Fortsetzung derselben aus der vorderen mehr gewölbten Haut *bdb'*, der Hornhaut, t. cornea; diese ist gleichfalls sehr hart, elastisch, unempfindlich, aber farblos und durchsichtig; sie besteht aus über einander liegenden Blättchen, Lamellen genannt, die von einander durch wasserhelle Flüssigkeiten getrennt sind.

Der Augapfel liegt in der aus Knochen gebildeten Augenhöhle (orbita) in fettigen Zellgeweben, ist durch 6 Muskeln, die von den Knochen nach der sclerotica sich erstrecken, beweglich befestigt, so dafs, wenn einige angespannt werden, die gegenüber liegenden um so viel sich zusammenziehen; fixirt man einen Gegenstand scharf, so werden sämmtliche Muskeln angespannt.

Die innere Fläche der Sclerotica ist mit einer dünnen aus zarten Arterien und Adern netzartig gebildeten Haut (braune Haut, Gefäfshaut, Aderhaut, t. choroidea) überzogen. Hinten ist sie mit dem Sehnerven *a* durch Zellgewebe verbunden, vorn reicht sie bis zur cornea und ist hier mit einem, etwa eine Linie breiten, aus dichtem, aber zartem Zellgewebe bestehenden Ring (Strahlenband, circulus ciliaris) befestigt und wird auf der Oberfläche der weifsen Haut *bcb'c'* durch Gefäfse und Nerven ausgespannt erhalten. Die innere Oberfläche der choroidea ist mit einem schwarzen Schleim (pigmentum nigrum) überzogen, der jede Reflexion, welche aus den inneren Seitenwänden der Sclerotica herrühren könnte, und durch die also das auf der, über der Choroidea ausgebreiteten retina sich abspiegelnde Bild undeutlich werden würde, unmöglich macht.

Ueber der auf der Choroidea befindlichen Retina liegt der grofse Körper *e*, der Glaskörper, die Glasfeuchtigkeit (humor vitreus), eiweifsartig, farblos und vollkommen durchsichtig, in einer feinen durchsichtigen Haut (Glashaut), die aus vielen Zellen mit darin befindlicher Feuchtigkeit besteht, in welche Verzweigungen des Netzhautmarkes treten und darin sich ausbreiten. Vorn ist der Glaskörper mittelst des von dem Strahlenband aus sich verbreitenden strahlenförmigen Faltenkranzes befestigt.

Fig. 116.



Vorn an dieser Glasfeuchtigkeit befestigt, liegt die Krystall-Linse *f* (lens krystallina); sie ist hinten stärker gekrümmt als vorn, verflacht sich mit zunehmendem Alter, besteht aus blättrigen Schichten und ist vollkommen durchsichtig. Sie liegt in einer feinen durchsichtigen Haut (Linsenkapsel), doch so, dafs zwischen dieser und der Linse ein wenig Flüssigkeit sich befindet, in welcher die Linse schwimmt.

Zwischen der Linse *f* und der Hornhaut *bdb'* liegt die Regenbogenhaut *gg*, Iris, von deren Farbe so genannt, in der Mitte mit einer kreisrunden Oeffnung, die Sehe, Pupille. Die Iris besteht aus Blutgefäfsen und Nerven, sie ist sehr reizbar und zieht sich bei hellerem Lichte zusammen, so wie sie bei schwächer werdendem Lichte sich erweitert. Die Hinterfläche der Iris ist ebenfalls, wie die Choroidea, mit schwarzem Pigment überzogen, damit keine Seiten-Reflexionen nach dem Innern des Auges veranlafst werden, und welcher zugleich, indem die Lichtstrahlen auf der äufseren Fläche der

Haut sich zerstreuen, die Regenbogenfarben erzeugt.

Der Raum zwischen der Hornhaut *bdb'* und der Linse *f* ist um die Iris herum mit der wässerigen Feuchtigkeit (humor aqueus), dies sind 6 bis 7 Tropfen wasserhelle farblose Flüssigkeit, ausgefüllt.

4. Die 3 Feuchtigkeiten, die wässerige, die Krystall-Linse und der Glaskörper, brechen den eintretenden Lichtstrahl und führen ihn gebrochen auf die Netzhaut. Die wässerige Feuchtigkeit hat mit dem Wasser, die Linse mit dem Krystallglase ziemlich gleiche Brechbarkeit, die der Glasfeuchtigkeit liegt zwischen beiden in der Mitte.

Das Sehen besteht nun darin, dafs von jedem äufseren leuchtenden Punkt sämmtliche innerhalb der Pupille in's Auge fallende Strahlen, durch die 3 Feuchtigkeiten gebrochen, nach einem einzigen Punkt der Retina geführt werden. So z. B. die Strahlen des Punkts α sowohl in den gezeichneten Grenzstrahlen, als auch in den zwischen ihnen liegenden Strahlen nach dem Punkt β, wie die des Punkts γ nach dem Punkt δ. Die Punkte rechts werden also links, die Punkte links werden rechts, obere Punkte unterhalb und untere Punkte oberhalb auf der Retina abgespiegelt, und es erscheint auf derselben von jedem äufseren Gegenstande ein verkehrtes Spiegelbild.

5. (Physiologisches.) Dafs der Mensch dennoch die Gegenstände nicht verkehrt, sondern richtig sieht, liegt in der innerhalb des Gehirns befindlichen Vernunft, die durch das Sehnervenmark das verkehrte Bild zur Beurtheilung empfängt. Das Kind greift schon nach dem Monde, es weifs, dafs der Gegenstand aufserhalb seiner sich befindet, es hat nur noch keine Erfahrung über dessen Entfernung, allein es wirft schon im Geiste die inneren Spiegelbilder β und δ nach α und γ, also auf dem gekommenen Wege zurück, also das Rechts nach Links u. s. w., so dafs das Linke wirklich links u. s. w. gesehen wird.

6. Die Optik lehrt (vergl. Ablenkung des Lichtstrahls), dafs die Vereinigung von Lichtstrahlen in einem Punkt, wie hier die aus α in β, aufser von den Brechbarkeitsgraden der 3 Feuchtigkeiten, noch abhängt von deren äufseren Krümmungen und von der Entfernung des Gegenstandes (α) vom A. Wenn also Gegenstände von einer bestimmten Entfernung vom A. wie α ihre Strahlen in einem Punkt β der Netzhaut vereinigen, so müfsten von ferneren Gegenständen die Vereinigungspunkte, wie β, vor die Retina fallen, sich dort durchkreuzen und auf der Retina als kleine Kreisflächen erscheinen, welche undeutliche Bilder geben. Nähere Gegenstände würden hinter der Retina liegende Vereinigungspunkte, auf der Retina also unmittelbar Kreise und undeutliche Bilder geben.

Dafs gesunde Augen nahe wie ferne Gegenstände gleich scharf sehen, liegt nun darin, dafs die Willenskraft Muskeln in Bewegung setzt, welche je nach der Entfernung des zu sehenden Gegenstandes die gedachten Krümmungen ändert; ob dies mit der Hornhaut, welche die Form der wässerigen Feuchtigkeit bestimmt, allein geschieht, oder auch mit der Krystall-Linse, ist noch nicht ermittelt. Dies Vermögen zur Aenderung der Gestalt des menschlichen Auges hat seine Grenzen; bei Raubvögeln ist es in hohem Maafse vorhanden: In grofser Höhe vom Erdboden zieht der Vogel bei Beobachtung des Küchleins die Linse ganz flach, und während er auf dasselbe herabstürzt, wird sie immer gewölbter und zuletzt zur Kugelgestalt.

A., die das Vermögen zur Gestalt-Aenderung in nur geringem Maafse haben, sind entweder kurzsichtig (myops) oder fernsichtig, weitsichtig (presbyops). Erstere sehen nur nahe Gegenstände, letztere nur ferne Gegenstände deutlich.

7. Dafs das A. achromatisch ist, dafs es die Gegenstände also ohne farbige Ränder sieht, dafs also mit der Brechung des Lichtstrahls nicht dessen Zersetzung in Farben geschieht, liegt darin, dafs die Feuchtigkeiten und Flüssigkeiten, welche der Lichtstrahl durchdringt, von verschiedener Brechbarkeit sind, wie in dem Art.: Achromatisch speciell erklärt ist.

Fig. 117.



8. Dafs ein Gegenstand *P* mit zwei Augen nur einmal gesehen wird, hat eine physiologische Ursach. Die Vernunft nämlich findet, indem beide Augen mit ihren Axen auf *P* gerichtet sind, auf beiden Netzhäuten beide Bilder gleicher Weise angeordnet, sie wirft beide Bilder für die Beurtheilung hinaus, und beide müssen daher zu einerlei *P* wieder werden. Hat man *P* fixirt, sind also die Augenaxen nach *AP* und *A'P* gerichtet, so fällt von einem

ferner befindlichen p der Lichtstrahl auf A rechts, auf A' links der Axe, beide Bilder sind also ungleicher Weise angeordnet, man sieht mit dem einfachen P zugleich ein doppeltes p.

Ist p kein Punkt, sondern eine Fläche, so sind deren Bilder beide in gleicher Weise auf der Netzhaut geordnet, nur, wie die von p gegen die Axen, um etwas verschoben; diese von der Vernunft analog der Gewohnheit hinausgeworfenen Bilder überdecken sich in p zum Theil, es entsteht ein Bild mit doppelten Rändern.

Aus dem Grunde des Doppeltsehens schliefst man wohl ein Auge, wenn man einen Gegenstand scharf fixiren will, damit das verlangte Bild durch undeutliche Doppelbilder anderer Gegenstände in seiner Reinheit nicht beeinträchtigt werde, obwohl man einen fixirten Gegenstand mit beiden A. heller sieht als mit nur einem A.

Augenaxe. Die gerade Linie zwischen der Netzhaut und der Hornhaut, nach welcher das Auge gerichtet wird, wenn es einen Gegenstand fixirt. Die A. trifft durch die Mittelpunkte der Krystall-Linse, der Pupille und der vorderen Hornhaut (s. Auge, No. 3, 8).

Augenglas, Ocularglas. Das Glas am Fernrohr, durch welches unmittelbar das Auge sieht, während das dem Auge entferntere äufsere Glas das Objectivglas ist (s. astronomisches Fernrohr).

Augenlinse s. v. w. die Krystall-Linse des Auges (s. d. No. 3); oder s. v. w. Augenglas.

Augenmaafs. Die Beurtheilung von sichtbaren Gröfsen blofs mit Hülfe des Auges. Das A. ist ein Ergebnifs der Erfahrung, die Thätigkeit der Vernunft dabei ist augenblicklich, mit der Beschauung des Gegenstandes zugleich ist das Resultat da. Das A. für Längen ist Sache der einfachen Erfahrung, zusammengesetzter ist die für Flächen und Körper, allein das A. für diese mufs so geübt werden, dafs bei ihnen die einzelnen Abmessungen nicht erst zur Ueberlegung kommen. Bei Gewichten mufs noch die Gewichts-Einheit des Stoffs, die specifische oder absolute, bekannt sein; allein auch hier fallen die Beurtheilungen von Körpermaafs und Gewicht zusammen, nämlich bei Personen, die mit einerlei Stoff, als Eisen, Werkstücke u. s. w., täglich beschäftigt sind.

Das A. ist nur so weit möglich, als die Fähigkeit des Auges reicht. Im Art.: Auge, No. 8, ist gezeigt, dafs auf einen fixirten Gegenstand die Axen beider Augen gerichtet sind; zur Fixirung von P wird also von beiden Axen der $\angle APA'$ gebildet. Je näher P dem Auge, desto gröfser wird $\angle APA'$; in der Nähe des Auges ändert sich dieser $\angle$ mit den Entfernungen von P in einem wahrnehmbaren Verhältnifs; in einer sehr grofsen Weite vom Auge mufs für eine sehr geringe Abnahme des $\angle P$ bedeutend sich entfernen, die Axen nähern sich immer mehr der Parallelität, und die Entfernungen der Gegenstände vom Auge können nicht mehr beurtheilt werden, wie z. B. Niemand ein A. für die Entfernung der Gestirne hat. Die Entfernung der Gegenstände von bekannter Höhe, z. B. von Bäumen, kann aus der dem Auge verminderten Höhe geschätzt werden. (Vergl. den folg. Art.)

Augenpunkt (Perspective). Derjenige Punkt einer perspectivischen Zeichnung, in welchem sämmtliche, mit der verlängerten Axe des beschauenden Auges parallel laufende Linien verschwinden. In den meisten Fällen ist die Augenaxe horizontal gerichtet, so dafs also der A. in der durch den Standpunkt des beschauenden Auges (Distanzpunkt, Entfernungspunkt) genommenen Horizontal-Ebene liegt.

Fig. 118.



1. Es sei Fig. 118 ein Grundrifs, S sei der Standpunkt des Auges, $S\alpha$ die Richtung der Augenaxe, GB und FA normal auf derselben, $AD \dagger BE \dagger S\alpha$

Der Punkt A macht mit $S\alpha$ den $\angle AS\alpha$, der Punkt D den $\angle DS\alpha < AS\alpha$; je ferner die Punkte in AD von A, desto kleiner werden deren $\angle$ mit $S\alpha$, und von einem ∞ fern gelegenen Punkt D^x in AD wird $\angle D^x S\alpha =$ Null, d. h. der Punkt D^x fällt in $S\alpha$ oder, wenn α ∞ fern von S gedacht wird, in α selbst.

Eben so ist $\angle ES\alpha < \angle BS\alpha$, die $\angle$ werden immer kleiner, je ferner E von B genommen wird, und ein ∞ ferner

Punkt in *BE* fällt in *α*, mithin ist *α* der Verschwindungspunkt, also der A. der horizontalen Linien *AD*, *BE* und aller mit beiden parallelen Linien, es mögen diese nahe oder fern von *Sα* sich befinden.

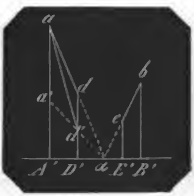
2. Gleich weit von *A* und *B* entfernte Punkte in *AD* und *BE*, wie die Punkte *D* und *E*, nähern sich perspectivisch im Verhältnifs zu *Aα* und *Bα*. Denn es sind *ad* und *ae* die perspectivischen Entfernungen der Punkte *D* und *E* von *Sα* und es ist

$$ad : ae = Dm : Em = A\alpha : B\alpha$$

Sind *D* und *E* die Endpunkte der Linien, so sind deren perspectivische Längen *Ad* und *Be*.

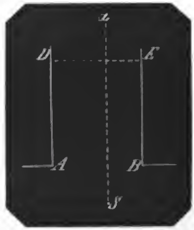
Eine schräge Linie wie *AE*, also eine Linie, die nicht ‡ der Augenaxe ist, würde die perspectivische Länge und Lage *Ae* haben; theilt man diese durch *Sα* in *An* und *En*, so fällt perspectivisch *n* in *α*, die perspectivische Länge von *An* ist *Aα*, von *En* ist sie *eα*, und es ist *α* mithin der A. auch für jede schräge, mit *S* horizontale Linie. Linien, die normal auf der Augenaxe sind, wie *AF*, *BG*, haben zur perspectivischen Länge ihre Länge selbst.

Fig. 119.



Es sei Fig. 119 der perspectivische Aufrifs des Grundrisses Fig. 120; *A'*, *α*, *B'* seien in der mit dem Auge horizontalen Ebene die Projectionen der Punkte *A*, *S* (oder *α*) und *B*; eben so *D'*, *E'* die perspectivischen Lagen (nach No. 1) der Punkte *D*, *E*. Sind *AD*, *BE* senkrechte Ebenen von den Höhen *A'a*, *B'b*, deren obere Längsseiten horizontal, also ‡ den unteren *AD* und *BE*, so werden die Winkel, welche wie ∠ *ASα* von *S* aus gebildet werden, immer kleiner, je weiter die Punkte *D* und *E* von *S* entfernt sind, in ∞ fernen Punkten = Null, d. h. die Höhen werden = Null, sie verschwinden; und da die Linien *DA* und *BE* in *α* verschwinden, so verschwinden auch deren senkrecht darüber befindlichen Parallelen in *α*. Sind *D'd* und *E'e* die Endkanten der Ebenen, so sind die nach *α* gerichte-

Fig. 120.



ten Linien *ad*, *be* die perspectivischen Lagen der oberen Grenzlinien.

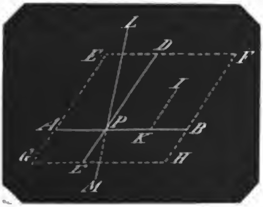
Ist *ad* nicht ‡ *A'D'*, ist *D'd* vielmehr ein bestimmter Theil von *A'a*, und man trägt diesen Theil auf *A'a* als *A'a'* ab, zieht *a'α*, so ist *D'd'* die perspectivische Höhe = *A'a'* und *ad'* die perspectivische Lage der Oberkante; Linien, die also nicht ‡ der Augenaxe sind, verschwinden nicht in dem A., sondern in einem anderen Punkt.

Ausdehnung, Extension, ist die Eigenschaft einer jeden Raumgröfse, dafs deren einzelne Theile in einerlei Zeit verschiedene Räume einnehmen können. Die äufsersten Theilchen der Gröfsen sind die Grenzen deren A. Denkt man sich diese von aufsen nach innen und in allen Richtungen immerfort abnehmend, bis sie im Verschwinden begriffen sind, dafs also innerhalb dieser letzten Grenzen kein noch so kleines Theilchen der Gröfse existirend zu denken ist, so hat man den Punkt, den Raumpunkt. Verfolgt man von diesem Punkt nach irgend einer, aber sich gleichbleibenden Richtung die ursprüngliche Grenze, und zwar nach rechts und links, so hat man in gerader Linie eine Längen-A. der Gröfse; verfolgt man von dem Punkt in einer anderen Richtung die ursprünglichen Grenzen der Gröfse, so hat man eine zweite Längen-A. der Gröfse, und so kann man von einer beliebigen Anzahl von Längen-A. der Gröfse Kenntnifs nehmen.

Es sei *P* der gedachte Punkt, *AB* die eine, *DE* die zweite Richtungslinie, und beide so ausgedehnt, dafs aufserhalb der durch deren Endpunkte gezeichneten Parallelen kein Theilchen der Gröfse sich befindet, so hat man in dem # *EFGH* die Grenzen aller Längen-A. der Gröfse

nach zweien Richtungen, und einen Grenzpunkt *I* z. B. findet man durch die Abmessungen der mit *DE* Parallelen *IK* und ihres Abstandes *PK* von *DE*.

Fig. 121.



Befinden sich Theile der Gröfse noch aufserhalb der Ebene *EFGH*, also oberhalb oder unterhalb, oder beides, über und unter derselben, so kann man alle diese Theile einschliefsen, wenn man die Ebene *EFGH*, erforderlichen Falls in gröfseren Längen-A. als durch *DE AB* gegeben sind, nach irgend einer dritten Richtung, z. B. *LM* ⫲ mit sich selbst auf- nnd abwärts bewegt, bis die äufsersten Theilchen der Gröfse oben und unten von der Ebene *EFGH* berührt werden. Es seien *L* und *M* die Endpunkte der Bewegung, so hat die Ebene *EFGH* ein Parallelepiped als Grenzraum der Gröfse construirt.

Der Grenzraum irgend einer Raumgröfse kann also nur 3 Hauptrichtungen haben, die sich zu einem Parallelepiped zusammensetzen, und wenn man die Richtungen normal auf einander nimmt, so heifsen diese als Abmessungen: Länge, Breite und Höhe, oder rechtwinklige Coordinaten-Axen, wenn durch solche die A. unregelmäfsig geformter Raumgröfsen bestimmt werden soll (s. Abscissen.)

Jede 4te Coordinaten-Axe ist durch die ersten 3 vollkommen bestimmbar, folglich gehört jeder Punkt derselben in die Abmessungen, welche jene 3 Axen durch ihre Richtungen angeben, die A. hat also nur 3 normal auf einander befindliche Richtungen, denen man aber jede beliebige Lage geben kann.

Auch der Raum selbst, diese gegebene, unendliche und daher ganz formlose A., die von jedem beliebigen Punkt aus nach jeder beliebigen Richtung eine unendliche Längen-A. in sich schliefst, die also von jedem beliebigen Punkt als Mittelpunkt aus als eine Kugel von unendlichem Halbmesser betrachtet werden kann, ist wie jede Kugel von endlichem Halbmesser als eine A. von 3 Dimensionen: Länge, Breite, Höhe, also zugleich als ein Parallelepiped von unendlich langen Seiten aufzufassen.

Ausdehnung, Expansion, Dilatation, durch die Wärme. Unter A. wird hier verstanden: Vergröfserung des Volums bei gleichbleibender Masse eines Körpers. Aufser durch die Wärme kann man die A. eines Körpers bewirken, z. B. durch Aufhebung eines Drucks, mit welchem ein Körper vermöge seiner Elasticität verdichtet worden war, wonach er nun sein früheres gröfseres Volum wieder einnimmt; durch Zuführung von Feuchtigkeit, wodurch das sogenannte Quellen, also eine Volum-Vergröfserung hervorgebracht wird, wiewohl Feuchtigkeit aus einer Summe von Wassertheilchen besteht, und mithin die Vergröfserung des Volums beim Quellen mit dem Volum des Wassers, um welche das ursprüngliche Volum des Körpers ebenfalls vergröfsert worden, in Verhältnifs stehen wird, wenn nicht zugleich ein Chemismus dabei eine Rolle spielt.

Alle diese und überhaupt diejenigen A., welche durch andere Ursachen als durch die Wärme veranlafst werden, gehören nicht hierher.

Die Wärme tritt überall als abstofsende Kraft auf, sie entfernt die Atome der Körper von einander und wirkt so auf Vergröfserung des Volums. Nur ein einziger Körper macht in dieser Beziehung eine Ausnahme, nämlich das Wasser, welches bei 4° C. am dichtesten ist, bei weiterer Wärme-Verminderung sich ausdehnt, bis es bei 0° C. gefriert, und nur von 4° C. ab folgt es mit Vermehrung von Wärme dem allgemeinen Gesetz der A.

Dafs Leder durch Hitze zusammenschrumpft, liegt in dem dabei stattfindenden Austreiben der Feuchtigkeit aus demselben, so dafs mit der Volum-Verminderung zugleich eine Massen-Verminderung verbunden ist. Dieselbe Ursach ist es, dafs Thonstücke in gröfserer Hitze schwinden, indem die Wasser-Antheile im Thon mit desto gröfserer Hartnäckigkeit verbleiben, je weniger noch darin sich befinden, und die mit Abkühlung des Thons aus der Luft sich wieder ersetzen, eine Eigenschaft, auf welche Wedgwood seine Pyrometer-Construction gegründet hat.

1. Ausdehnung fester Körper.

Die A. der Körper, namentlich der fossilischen und besonders der Metalle,

ist im Bereich der Wissenschaft sowohl, als für's bürgerliche Leben von sehr bedeutendem Einfluſs, wenngleich diese A. nur sehr gering ist, und z. B. beim Schmiedeeisen bei einem Temperatur-Unterschied von 0° bis 100° C. nur etwa $\frac{1}{800}$ der Länge beträgt. Zuerst beruht auf der verschiedenen A. verschiedener Metalle die Construction der Metall-Thermometer, auf der A. des Quecksilbers und des Weingeistes die Construction der nach diesen Stoffen genannten Thermometer. Die A. hat Einfluſs auf die Aenderung der Metall-Maaſsstäbe bei Gradvermessungen, während oft bedeutend verschiedener Temperatur-Unterschiede der Atmosphäre, und veranlaſst dabei fortdauernde Correctionen; Einfluſs auf die summarische Anzahl der Pendelschwingungen in längerer Zeit, also auch auf den richtigen Gang der Uhren; auf die Verlängerung und Verkürzung der Schienenstrecken von Eisenbahnen, welche bei nicht beobachteter Vorsicht der Baumeister den Reisenden Gefahr bringend sein würden; desgleichen auf die Verlängerung und Verkürzung von Röhrenstrecken für Gas- oder Wasserleitungen, weshalb hier hermetisch nachgebende Compensations-Muffen angebracht werden müssen, wenn nicht die Röhren und deren Verbindungen zerrissen oder zerquetscht werden sollen.

Die gedachten, verhältniſsmäſsig sehr kleinen A. verschiedener fester Körper sind gefunden worden, theils durch unmittelbare Beobachtung, indem das obere Ende einer frei hangenden längeren Stange fixirt und das untere Ende mit einem Fernrohr versehen worden, welches bei horizontal bleibender Axe vor und nach deren Erwärmung auf einen bestimmten höheren Grad nach einem sehr fern stehenden Maaſsstab zeigte, oder indem das zweite freie Ende der erwärmten Stange auf den sehr kurzen Arm eines zusammengesetzten Hebelwerks wirkte, dessen letzterer längerer Arm als Zeiger auf einer graduirten Scheibe einen wahrnehmbaren Bogen beschrieb, oder auch durch Zählung der Schwingungen eines Pendels bei verschiedenen Erwärmungen des Raums, in dem er sich befand.

Die als Beispiel oben angegebene A. von $\frac{1}{800}$ für Eisen ist die Längen-A., Linear-A. Ein Stab von der Länge $= 1$ bei der Temperatur von 0° C. erhält also bei einer Erwärmung um 100° C. die Länge $1 + \frac{1}{800}$, und da bei Erwärmungen von 0° bis 300° C. die A. mit wenig bemerkbaren Unterschieden den Wärmegraden proportional sind, so hat derselbe Stab bei 1° C. die Länge $1 + \frac{1}{80000}$.

Bezeichnet man die A. $= \frac{1}{80000}$ mit k, so hat ein Stab bei 2° C. die Länge $1 + 2k$, bei n° C. die Länge $1 + nk$.

Hat der Stab eine Breite $= 1$, so geschieht die A. um gleich viel auch nach dieser Richtung, und der Flächen-Inhalt $= 1$ wird bei 1° C. $= (1+k)(1+k) = (1+k)^2$. Diese A. ist die Flächen-A., welche in der Praxis von seltener Anwendung ist.

Hat ein Würfel die Seite $= 1$, so wird der Inhalt desselben bei 1° C. $= (1+k)^3$.

Wie gezeigt, ist k gegen 1 sehr klein, und man läſst daher, ohne einen Fehler zu begehen, die Potenzen von k weg, um die Flächen-A. und die Körper-A., die cubische A. zu bestimmen. Man nimmt also die Flächen-A. nicht $(1+k)^2 = 1 + 2k + k^2$, sondern $1 + 2k$, und für die cubische A. nicht $1 + 3k + 3k^2 + k^3$, sondern $1 + 3k$.

Daſs die cubische A. das Dreifache der linearen A. ist, erklärt die hohe Aufsteigung des Quecksilbers in einer sehr engen Thermometerröhre aus einer verhältniſsmäſsig groſsen Kugel, und eben so, daſs beim Barometer der Höhen-Unterschied bei veränderter Luft-Temperatur nur äuſserst gering ist, und daſs für die Auffindung der richtigen Luftdruckhöhe eine nur unbedeutende thermometrische Correction erforderlich ist.

Folgende Tabelle zeigt die A. verschiedener fester Körper bei einer Wärme-Vermehrung von 100° C. nach den angegebenen Beobachtern in alphabetischer Ordnung.

Stoffe.	Ausdehnung von 0° bis 100° C.		**Beobachter.**
Blei	0,00271900	$\frac{1}{368}$	Guyton-Morveau.
	0,00278560	$\frac{1}{359}$	Daniel.
	0,00284836	$\frac{1}{351}$	Lavoisier.
	0,00286667	$\frac{1}{349}$	Smeaton.
	0,00287300	$\frac{1}{348}$	Herbert.
	0,00288200	$\frac{1}{347}$	Ellicot.
	0,00290200	$\frac{1}{345}$	Horner.
	0,00295400	$\frac{2}{677}$	Prinsep.
	0,00308600	$\frac{1}{324}$	Berthoud.
Bronze.			
8 Th. Kupfer, 1 Th. Zinn . . .	0,00181667	$\frac{2}{1101}$	Smeaton.
	0,00184920	$\frac{1}{541}$	Daniel.
16 Th. Messing, 1 Th. Zinn . .	0,00190833	$\frac{1}{524}$	Smeaton.
Cement, römischer	0,00143489	$\frac{1}{695}$	Adie.
Eis	0,02451200	$\frac{1}{41}$	P. Heinrich.
Eisen.			
Schmiedeeisen	0,00110000	$\frac{1}{908}$	Guyton-Morveau.
	0,00111155	$\frac{1}{900}$	Augustin.
	0,00111545	$\frac{2}{1793}$	do.
	0,00112330	$\frac{1}{890}$	do.
	0,00113475	$\frac{1}{821}$	Dulong und Petit.
	0,00114550	$\frac{1}{873}$	Augustin.
	0,00114560	$\frac{1}{873}$	Schwerd.
	0,00114600	$\frac{2}{1745}$	Ellicot.
	0,00115600	$\frac{1}{865}$	Borda.
	0,00115600	$\frac{1}{865}$	Tralles.

Stoffe.	Ausdehnung von 0° bis 100° C.		Beobachter.
Schmiedeeisen	0,00116800	$\frac{1}{556}$	Horner.
	0,00117200	$\frac{1}{853}$	Herbert.
	0,00118080	$\frac{1}{847}$	Daniel.
	0,00118210	$\frac{1}{846}$	Dulong und Petit.
	0,00119200	$\frac{1}{839}$	Berthoud.
	0,00121500	$\frac{1}{823}$	Prinsep.
	0,00122045	$\frac{2}{1639}$	Lavoisier.
	0,00122045	$\frac{2}{1639}$	Destigny.
	0,00122400	$\frac{1}{817}$	Horner.
	0,00123504	$\frac{1}{810}$	Lavoisier.
	0,00125343	$\frac{1}{798}$	Hassler.
	0,00125833	$\frac{1}{795}$	Smeaton.
	0,00126660	$\frac{2}{1579}$	Dulong und Petit.
	0,00144600	$\frac{2}{1383}$	Hallström.
Gufseisen	0,00098500	$\frac{1}{1015}$	Navier.
	0,00107160	$\frac{1}{933}$	Daniel.
	0,00110217	$\frac{3}{2722}$	Adie.
	0,00110940	$\frac{1}{901}$	Roy.
„ Prisma	0,00111000	$\frac{1}{901}$	Roy.
	0,00114676	$\frac{1}{872}$	Adie.
Eisendraht	0,00123504	$\frac{3}{2429}$	Lavoisier.
	0,00114010	$\frac{1}{877}$	Troughton.
Glas.			
Kaliglas	0,00076170	$\frac{1}{1313}$	Rudberg.
Englisches Flintglas	0,00081166	$\frac{1}{1232}$	Lavoisier.

Stoffe.	Ausdehnung von 0° bis 100° C.		Beobachter.
Französ. (bleihaltiges) Flintglas .	0,00087199	$\frac{1}{1147}$	Lavoisier.
Weifses Glas	0,00083333	$\frac{1}{1200}$	Smeaton.
	0,00086100	$\frac{2}{2323}$	Dulong und Petit.
	0,00088446	$\frac{3}{3392}$	Muncke.
	0,00088517	$\frac{1}{1130}$	do.
	0,00099100	$\frac{1}{1009}$	Berthoud.
Glasröhre	0,00077550	$\frac{2}{2579}$	Roy.
	0,00077615	$\frac{2}{2577}$	do.
gewöhnliche	0,00087572	$\frac{1}{1142}$	Lavoisier.
von St. Gobain	0,00089089	$\frac{2}{2245}$	do.
bleifreie	0,00089649	$\frac{2}{2231}$	do.
	0,00089760	$\frac{1}{1114}$	do.
von 0,2 Linien Glasdicke . . .	0,00091300	$\frac{3}{3286}$	Horner.
	0,00091751	$\frac{1}{1090}$	Lavoisier.
dünne	0,00092100	$\frac{4}{4343}$	Horner.
Barometerröhre	0,00094400	$\frac{3}{3178}$	Herbert.
Glasstab	0,00080787	$\frac{1}{1238}$	Roy.
	0,00080833	$\frac{1}{1237}$	do.
	0,00091900	$\frac{1}{1088}$	Horner.
	0,00092500	$\frac{1}{1081}$	do.
	0,00098800	$\frac{1}{1012}$	Dunn und Sang.
	0,00124600	$\frac{2}{1605}$	Hallström.
Gold	0,00123000	$\frac{1}{813}$	Daniel.
	0,00131100	$\frac{4}{3051}$	Berthoud.
	0,00140100	$\frac{4}{2855}$	Ellicot.

Stoffe.	Ausdehnung von 0° bis 100° C.		Beobachter.
fast rein	0,00143400	$\frac{3}{2092}$	Prinsep.
feines durch Quartirung	0,00146606	$\frac{1}{682}$	Lavoisier.
	0,00147500	$\frac{1}{678}$	Guyton-Morveau.
geglüht	0,00151361	$\frac{3}{1982}$	Lavoisier.
nicht geglüht	0,00155155	$\frac{2}{1289}$	do.
	0,00156155	$\frac{3}{1921}$	do.
Granit, grauer von Aberdeen	0,00078943	$\frac{4}{5067}$	Adie.
gemeiner	0,00086850	$\frac{2}{2303}$	Bartlett.
rother von Peterhead	0,00089680	$\frac{1}{1115}$	Adie.
Graphitwaare ($\frac{3}{4}$ Gr. + $\frac{1}{4}$ Thon)	0,00029280	$\frac{3}{10246}$	Daniel.
Holz	0,00030000	$\frac{3}{10000}$	Parry.
Kalkspath in der Hauptaxe	0,00286000	$\frac{3}{1049}$	Mitscherlich.
Kalkstein, weifser	0,00025100	$\frac{1}{3984}$	Vicat.
grüner vom Ratho	0,00080890	$\frac{4}{4945}$	Adie.
Kohle von Eichenholz	0,0012000	$\frac{3}{2500}$	P. Heinrich.
von Tannenholz	0,0010000	$\frac{1}{1000}$	do.
Kupfer	0,00170900	$\frac{1}{585}$	Horner.
	0,00171000	$\frac{4}{2339}$	Ellicot.
	0,00171222	$\frac{1}{584}$	Lavoisier.
	0,00171600	$\frac{4}{2331}$	Daniel.
	0,00171733	$\frac{3}{1747}$	Lavoisier.
	0,00171820	$\frac{1}{582}$	Dulong und Petit.
	0,00172244	$\frac{1}{581}$	Lavoisier.
	0,00178400	$\frac{2}{1121}$	Borda.
	0,00179000	$\frac{3}{1676}$	Guyton-Morveau.

Stoffe.	Ausdehnung von 0° bis 100° C.		Beobachter.
Kupfer	0,00191880	$\frac{1}{521}$	Troughton.
gewalztes	0,00169100	$\frac{3}{1774}$	Prinsep.
	0,00169900	$\frac{2}{1177}$	Edingb. Encycl.
geschlagenes	0,00170000	$\frac{4}{2353}$	Smeaton.
Letternmetall	0,00203520	$\frac{3}{1474}$	Daniel.
Löthung.			
Hartloth 1 Th. Zink 2 Th. Kupfer	0,00205833	$\frac{1}{486}$	Lavoisier.
Klempnerloth od. Weichloth 1 Th. Zinn, 2 Th. Blei	0,00250533	$\frac{1}{399}$	Smeaton.
Zinkloth 1 Th. Zink, 2 Th. Kupfer	0,00205833	$\frac{1}{486}$	do.
Marmor, schwarzer	0,00040000	$\frac{1}{2500}$	London. u. Paris. Observ.
von St. Beat	0,00041810	$\frac{4}{9567}$	Destigny.
schwarzer sicil.	0,00042600	$\frac{2}{4695}$	Dunn und Sang.
„ von Galway	0,00044519	$\frac{4}{8985}$	do.
von Solst	0,00056849	$\frac{1}{1759}$	Destigny.
carrarischer.	0,00065390	$\frac{4}{6117}$	Adie.
	0,00084867	$\frac{3}{3535}$	Destigny.
weifser	0,00100000	$\frac{1}{1000}$	London. u. Paris. Observ.
gemeiner	0,00102020	$\frac{4}{3921}$	Bartlett.
carrarischer	0,00107200	$\frac{4}{3731}$	Dunn und Sang.
weifser sicil.	0,00110411	$\frac{4}{3623}$	do.
Messing, gegossen	0,00176050	$\frac{1}{568}$	Sabine.
	0,00182300	$\frac{2}{1097}$	Ellicot.
	0,00186671	$\frac{4}{2143}$	Lavoisier.
	0,00186760	$\frac{2}{1071}$	do.
	0,00187500	$\frac{3}{1600}$	Smeaton.

Stoffe.	Ausdehnung von 0° bis 100° C.		Beobachter.
Messing, gegossen	0,00188971	$\frac{1}{529}$	Lavoisier.
	0,00193400	$\frac{1}{517}$	Berthoud.
Hamburger	0,00185540	$\frac{1}{539}$	Roy.
englisches Stabmessing	0,00189280	$\frac{3}{1585}$	do.
tyroler Tafelmessing	0,00190300	$\frac{2}{1051}$	Horner.
geglühtes	0,00189163	$\frac{3}{1586}$	Hassler.
	0,00190600	$\frac{3}{1574}$	Prinsep.
$\frac{1}{4}$ Zink, $\frac{3}{4}$ Kupfer	0,00214440	$\frac{3}{1399}$	Daniel.
Palladium	0,0010000	$\frac{1}{1000}$	Wollaston.
Pewter	0,00203520	$\frac{3}{1474}$	Daniel.
Phosphor von 0° bis 39,5°	0,00142455	$\frac{1}{702}$	Erman.
Platin	0,00085655	$\frac{2}{2335}$	Borda.
	0,00085700	$\frac{1}{1167}$	Guyton-Morveau.
	0,00088200	$\frac{4}{4535}$	Daniel.
	0,00088420	$\frac{1}{1131}$	Dulong und Petit.
	0,00090000	$\frac{1}{1111}$	Wollaston.
	0,00098390	$\frac{3}{3049}$	Dulong und Petit.
	0,00099180	$\frac{4}{4033}$	Troughton.
Sandstein von Liver-Roch	0,00117430	$\frac{2}{1703}$	Adie.
gewöhnliche	0,00171570	$\frac{1}{583}$	Bartlett.
Silber	0,00190500	$\frac{1}{525}$	Berthoud.
	0,00195120	$\frac{2}{1425}$	Daniel.
	0,00197800	$\frac{2}{1011}$	Ellicot.
	0,00198800	$\frac{1}{503}$	Guyton-Morveau.
	0,00207000	$\frac{1}{483}$	Herbert.

Stoffe.	Ausdehnung von 0° bis 100° C.		Beobachter.
Silber	0,00208260	$\frac{1}{480}$	Troughton.
Pariser	0,00190868	$\frac{1}{524}$	Lavoisier.
Kapellensilber	0,00190974	$\frac{3}{1570}$	do.
+ $\frac{1}{12}$ Kupfer	0,00190400	$\frac{4}{2101}$	Prinsep.
Spiegelmetall zu Teleskopen	0,00193333	$\frac{4}{2069}$	Smeaton.
Spiefsglanz	0,00108330	$\frac{1}{923}$	do.
Stahl, gehärtet	0,00114450	$\frac{4}{3495}$	Roy.
	0,00122500	$\frac{3}{2449}$	Smeaton.
	0,00123956	$\frac{4}{3227}$	Lavoisier.
	0,00137500	$\frac{4}{2909}$	Berthoud.
Stahlstange	0,00114470	$\frac{2}{1747}$	Roy.
	0,00116000	$\frac{1}{862}$	de Luc.
bei 65° R. angelassen	0,00123956	$\frac{4}{3227}$	Lavoisier
bei 30° R. angelassen	0,00136900	$\frac{2}{1461}$	do.
	0,00138600	$\frac{2}{1443}$	do.
weicher	0,00107500	$\frac{4}{3721}$	Ellicot.
	0,00107875	$\frac{1}{927}$	Lavoisier
	0,00107915	$\frac{3}{2780}$	do.
	0,00107956	$\frac{3}{2779}$	do.
	0,00110400	$\frac{1}{906}$	Berthoud.
	0,00115000	$\frac{2}{1739}$	Smeaton.
	0,00118990	$\frac{3}{2521}$	Troughton.
Huntsmann's	0,00107400	$\frac{1}{931}$	Horner.
Fischers aus Schaffhausen	0,00111200	$\frac{4}{3597}$	do.
Steyrischer	0,00115200	$\frac{1}{868}$	do.

Stoffe.	Ausdehnung von 0° bis 100° C.		Beobachter.
Stein (Baustein), v. St. Vernon sur Seine	0,00043027	$\frac{1}{2324}$	Destigny.
von St. Leu	0,00064890	$\frac{1}{1541}$	do.
„ Caithness	0,00089470	$\frac{3}{3353}$	Adie.
„ Arbroath	0,00089850	$\frac{1}{1113}$	do.
schiefrig von Penrhyn	0,00103760	$\frac{4}{3855}$	do.
Tannenholz	0,00035200	$\frac{1}{2841}$	Struwe.
	0,00049590	$\frac{2}{4033}$	Kater.
Thon, holländ. Pfeife	0,00045730	$\frac{4}{8747}$	Adie.
Töpferzeug, braun engl.	0,00012	$\frac{3}{25000}$	Destigny.
durch Kohle porös	0,00004	$\frac{1}{25000}$	do.
Wedgwood-Stange	0,00045294	$\frac{1}{2208}$	Adie.
„ **Waare**	0,00088200	$\frac{4}{4535}$	Daniel.
Ziegel, ord.	0,00055020	$\frac{2}{3635}$	Adie.
spröde	0,00049280	$\frac{4}{8117}$	do.
Zink, gegossen	0,00294167	$\frac{1}{340}$	Smeaton.
	0,00296800	$\frac{1}{337}$	Horner.
	0,00297600	$\frac{1}{336}$	Daniel.
	0,00305100	$\frac{4}{1311}$	Guyton-Morveau.
durch Hämmern um $\frac{1}{12}$ verlängert	0,00310833	$\frac{4}{1287}$	Smeaton.
Zinn, gemeines	0,00176640	$\frac{1}{566}$	Daniel.
	0,00248330	$\frac{3}{1208}$	Smeaton.
feines	0,00209300	$\frac{4}{1911}$	Horner.
	0,00216400	$\frac{1}{462}$	Guyton-Morveau.
	0,00228330	$\frac{1}{438}$	Smeaton.
	0,00232200	$\frac{3}{1292}$	Herbert.

Stoffe.	Ausdehnung von 0° bis 100° C.		Beobachter.
Zinn, feines	0,00255700	$\frac{1}{391}$	Berthoud.
von Malakka	0,00193765	$\frac{1}{516}$	Lavoisier.
	0,00217298	$\frac{1}{460}$	do.

2. Ausdehnung der tropfbaren Flüssigkeiten.

Da Flüssigkeiten in Gefäſsen eingeschlossen sein müssen, so unterscheidet man absolute A. und relative oder scheinbare A. Erstere ist diejenige A., welche die Flüssigkeit wirklich erhält, letztere die, welche man durch Beobachtung findet, indem das Gefäſs ebenfalls sich ausdehnt; die erstere A. ist die, welche in Betracht kommt, und die man aus der letzteren mit Berücksichtigung der bekannten A. des Gefäſsstoffes oder wo möglich so bestimmt, daſs die A. der Gefäſse schon in dem Experiment ohne Einfluſs ist.

Die einfachste Weise zur Ermittelung der A. von Flüssigkeiten geschieht in einem Gefäſs, dessen Obertheil in eine calibrirte Röhre endigt. Wägt man das Gefäſs ab, füllt es bis zum Anfang der Röhre mit irgend einer Flüssigkeit, wägt wieder, erfährt also das Gewicht der Flüssigkeit, gieſst genau $\frac{1}{10}$ des Gewichts derselben hinzu, so hat man in der oberen Röhre auf die markirte Höhe $\frac{1}{10}$ des Volumens des zuerst Eingegossenen; theilt man diese Höhe in 100 gleiche Theile, so giebt jeder Theil $\frac{1}{1000}$ jenes Volumen. Füllt man nun bei einer Temperatur von 0° C. das Gefäſs bis zum untersten Theilstrich mit irgend einer Flüssigkeit, und erwärmt, so kann man die A. in Tausendteln des Ganzen ablesen. Mehrere andere Apparate und Verfahrungsweisen findet man in physikalischen Lehrbüchern beschrieben.

Das Gefäſs muſs durchsichtig, also von Glas sein; bei einer Temperatur-Erhöhung dehnen sich die Gefäſswandungen in der Länge und im Querschnitt, also cubisch aus. Ist daher die lineare A. des Glases bei 1° C. $= d$, so ist dessen cubische (s. pag. 188) $= 3d$, und das Volum V, welches den inneren cubischen Raum ausdrückt, wird bei Erhöhung der Temperatur um $n°$ C. $= V\,(1+3nd)$ ausgedehnt.

Liest man nun bei $n°$ C. die cubische A. der Flüssigkeit vom ursprünglichen Volum $V=\frac{m}{1000}$, so ist diese offenbar zu klein, denn das abgelesene Volum $V\left(1+\frac{m}{1000}\right)$ ist das ursprüngliche bei 0° C., jetzt beträgt dasselbe $V\left(1+\frac{m}{1000}\right)$ $(1+3nd)$.

Nennt man daher die wirkliche cubische A. der Flüssigkeit bei 1° C. $= D'$, so hat man

$$V(1+nD')=V\left(1+\frac{m}{1000}\right)(1+3nd)$$

$$\text{woraus } D'=3d+\frac{m}{1000}\left(\frac{1}{n}+3\,d\right)$$

und die lineare A. der Flüssigkeit bei 1° C.

$$=d+\frac{m}{1000}\cdot\frac{1+3nd}{3n}$$

Die A. der Flüssigkeiten sind gröſser als die der festen Körper und auch bei gleichen Temperatur-Unterschieden nicht so regelmäſsig, besonders nicht in der Nähe der Wärmegrade, bei welchen sie in Gasform übergehen.

Aus diesem Grunde ist man genöthigt, jede einzelne Flüssigkeit in ihrem Verhältniſs des Volums zu dem jedesmaligen Wärmegrade besonders zu untersuchen.

3. Ausdehnung des Quecksilbers.

Diese ist innerhalb des thermometrischen Fundamental-Abstandes für jeden Grad Wärme gleich groſs anzunehmen. Die Resultate der Versuche darüber weichen nur wenig von einander ab. Muschenbroek hat die geringste A. gefunden, nämlich von 0° bis 100° C. = 1,014; Dalton die gröſste = 1,02. Sämmtliche Physiker haben die beobachteten A. nach den resp. A. der Glasarten reducirt; nur

Dulong und Petit haben sie unabhängig von Gefäfswandungen gefunden, und daher hat ihre Angabe der A. des Quecksilbers das meiste Vertrauen. Sie beträgt

$$\text{von}\quad 1^\circ - 100^\circ \text{ C.} = \frac{1}{55{,}50} = 0{,}018018$$

$$\text{,,}\quad 100^\circ - 200^\circ \text{ C.} = \frac{1}{54{,}25} = 0{,}018433$$

$$\text{,,}\quad 200^\circ - 300^\circ \text{ C.} = \frac{1}{53{,}00} = 0{,}018868$$

Wegen des Quecksilber-Thermometers und der Correctionen des Barometers interessirt die A. zwischen 0° und 100° C. am meisten. Ist das Volum des Quecksilbers bei 0° C. = 1,
so ist es bei 1° C. = 1,00018
bei 100° C. = 1 + 100×0,00018 = 1,018018

Ist die Dichtigkeit des Quecksilbers bei 0° C. = 1,

$$\text{so ist sie bei}\quad 1^\circ \text{ C.} = \frac{1}{1{,}00018} = 0{,}99982$$

$$\text{bei } 100^\circ \text{ C.} = \frac{1}{1{,}018018} = 0{,}98230$$

Die Dichtigkeit des Quecksilbers bei 1° C. ist mithin um 1 − 0,99982 = 0,00018 kleiner als bei 0° C.; bei 100° C. um 1 − 0,98230 = 0,01770 kleiner als bei 0° C.

Es ist aber 0,01770 = $98\frac{1}{3}$ × 0,00018, also beinahe 100 × 0,00018

Man kann daher ohne wahrnehmbaren Fehler die Abnahme der Dichtigkeiten ebenfalls proportional den Wärmegraden annehmen.

Der Grund hiervon ist leicht einzusehen: Lös't man nämlich den Bruch $\frac{1}{1{,}00018}$ in einen Kettenbruch auf, so erhält man

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5555+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{1}{4}}}}}$$

und dieser ist sehr nahe

$$= \frac{1}{1+\frac{1}{5555}} = \frac{5555}{5555+1} = 0{,}999820$$

bei 2° C. sehr nahe

$$= \frac{1}{1+\frac{2}{5555}} = \frac{5555}{5555+2} = 0{,}999640$$

bei 100° C. sehr nahe

$$= \frac{1}{1+\frac{100}{5555}} = \frac{5555}{5555+100} = 0{,}982317$$

Bei der 100theiligen (Celsius) Scala ist hiernach sehr leicht für jeden Grad Wärme Volumen und Dichtigkeit zu finden.

Bei der 80theiligen (Réaumur) hat man die A. des Quecksilbers für jeden Grad

$$= 1 + \frac{0{,}018018}{80} = 1{,}000225225$$

Ist also das Volum des Quecks. bei 0° R. = 1, so ist es bei 1° R. = 1,000225
bei 80° R. = 1,018018

Ist die Dichtigkeit des Quecksilbers bei 0° R. = 1,

$$\text{so ist sie bei}\quad 1^\circ \text{ R.} = \frac{1}{1{,}000225} = 0{,}999775$$

$$\text{bei } 80^\circ \text{ R.} = \frac{1}{1{,}018018} = 0{,}98230$$

Die Dichtigkeit des Quecks. ist mithin kleiner als bei 0° R.
Bei 1° R. um 0,000225
,, 80° R. um 0,01770

Es ist aber 0,01770 = $78\frac{2}{3}$ × 0,000225, also beinahe = 80 × 0,000225

Man kann also auch hier die Abnahme der Dichtigkeiten proportional den Wärmegraden annehmen, und zwar erhält man für 1° R. als Kettenbruch

$$\frac{1}{1{,}000225} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4444+\cfrac{1}{2+\frac{1}{4}}}} = \text{sehr nahe}$$

$$= \frac{1}{1+\frac{1}{4444}} = \frac{4444}{4444+1} = 0{,}999775$$

$$\text{für } 80^\circ \text{ R.} = \text{sehr nahe } \frac{4444}{4444+80} = 0{,}982317$$

Bei der 180theiligen Scala (Fahrenheit: 0° C. = 0° R. = 32° F.; 100° C. = 80° R. = 212° F.) hat man die A. des Quecksilbers für jeden Grad

$$= 1 + \frac{0{,}018018}{180} = 1{,}0001001$$

Ist also das Volum des Quecks. bei 32° F. = 1,
so ist es bei 1° F. = 1,0001001
bei 212° F. wieder = 1,018018

Ist die Dichtigkeit des Quecksilb. bei 32° F. = 1,

$$\text{so ist sie bei}\quad 33^\circ \text{ F.} = \frac{1}{1{,}0001} = 0{,}99990$$

$$\text{bei } 212^\circ \text{ F.} = \frac{1}{1{,}018018} = 0{,}98230$$

Die Dichtigkeit des Quecks. ist mithin kleiner als bei 32° F.; bei 33° F. um 0,0001
bei 212° F. um 0,01770

Nun ist wieder 0,01770 = 177 × 0,0001; beinahe = 180 × 0,0001; die Abnahme der Dichtigkeiten des Quecksilb. also wieder proportional den Wärmegraden.

Bei allen 3 Scalen kann man eben so für die Grade unter dem Gefrierpunkt des Wassers die Abnahme der Volume und die Zunahme der Dichtigkeiten des Quecks. proportional den Wärmegraden, und zwar in den oben aufgeführten Verhältnissen annehmen. In Schubarth's Tabellen etc. befindet sich unter No. 36, pag. 50 die Tabelle über Dichte und Volumen des Quecks. nach Dulong und Petit von − 20° bis 30° C. (aus Baumgartners Naturlehre, Suppl. S. 924, entnommen). Folgende Tabelle enthält dieselbe in mehreren Rechnungsfehlern corrigirt und bis 100° C. fortgesetzt.

Tabelle

über Volumen und Dichtigkeit des Quecksilbers nach Dulong und Petit von − 20° C. bis + 100° C.

Temperatur.	Volumen.	Dichtigkeit.	Temperatur.	Volumen.	Dichtigkeit.
− 20° C.	0,99640	1,00362	+ 20° C.	1,00360	0,99641
19	0,99658	1,00344	21	1,00378	0,99623
18	0,99676	1,00325	22	1,00396	0,99605
17	0,99694	1,00307	23	1,00414	0,99587
16	0,99712	1,00289	24	1,00432	0,99569
15	0,99730	1,00271	25	1,00450	0,99552
14	0,99748	1,00253	26	1,00468	0,99534
13	0,99766	1,00235	27	1,00486	0,99516
12	0,99784	1,00217	28	1,00504	0,99498
11	0,99802	1,00199	29	1,00522	0,99480
10	0,99820	1,00181	30	1,00541	0,99462
9	0,99838	1,00162	31	1,00559	0,99445
8	0,99856	1,00144	32	1,00577	0,99427
7	0,99874	1,00126	33	1,00595	0,99409
6	0,99892	1,00108	34	1,00613	0,99391
5	0,99910	1,00090	35	1,00631	0,99373
4	0,99928	1,00072	36	1,00649	0,99356
3	0,99946	1,00054	37	1,00667	0,99338
2	0,99964	1,00036	38	1,00685	0,99320
1	0,99982	1,00018	39	1,00703	0,99302
0	1,00000	1,00000	40	1,00721	0,99284
+ 1	1,00018	0,99982	41	1,00739	0,99267
2	1,00036	0,99964	42	1,00757	0,99249
3	1,00054	0,99946	43	1,00775	0,99231
4	1,00072	0,99928	44	1,00793	0,99213
5	1,00090	0,99910	45	1,00811	0,99196
6	1,00108	0,99892	46	1,00829	0,99178
7	1,00126	0,99874	47	1,00847	0,99160
8	1,00144	0,99856	48	1,00865	0,99143
9	1,00162	0,99838	49	1,00883	0,99125
10	1,00180	0,99820	50	1,00901	0,99107
11	1,00198	0,99802	51	1,00919	0,99089
12	1,00216	0,99784	52	1,00937	0,99072
13	1,00234	0,99766	53	1,00955	0,99054
14	1,00252	0,99748	54	1,00973	0,99036
15	1,00270	0,99730	55	1,00991	0,99019
16	1,00288	0,99713	56	1,01009	0,99001
17	1,00306	0,99695	57	1,01027	0,98983
18	1,00324	0,99677	58	1,01045	0,98966
19	1,00342	0,99659	59	1,01063	0,98948

Temperatur.	Volumen.	Dichtigkeit.	Temperatur.	Volumen.	Dichtigkeit.
+ 60° C.	1,01081	0,98930	+ 80° C.	1,01441	0,98579
61	1,01099	0,98913	81	1,01459	0,98562
62	1,01117	0,98895	82	1,01477	0,98544
63	1,01135	0,98878	83	1,01496	0,98527
64	1,01153	0,98860	84	1,01514	0,98510
65	1,01171	0,98842	85	1,01532	0,98492
66	1,01189	0,98825	86	1,01550	0,98474
67	1,01207	0,98807	87	1,01568	0,98457
68	1,01225	0,98790	88	1,01586	0,98439
69	1,01243	0,98772	89	1,01604	0,98422
70	1,01261	0,98754	90	1,01622	0,98404
71	1,01279	0,98737	91	1,01640	0,98387
72	1,01297	0,98719	92	1,01658	0,98369
73	1,01315	0,98702	93	1,01676	0,98352
74	1,01333	0,98684	94	1,01694	0,98335
75	1,01351	0,98667	95	1,01712	0,98317
76	1,01369	0,98649	96	1,01730	0,98300
77	1,01387	0,98632	97	1,01748	0,98282
78	1,01405	0,98614	98	1,01766	0,98265
79	1,01423	0,98597	99	1,01784	0,98247
			100	1,01802	0,98230

4. Ausdehnung des Wassers.

Diese ist so unregelmäfsig, dafs bis jetzt noch kein Gesetz aufgefunden worden, welches sich als allgemein gültig bewährt hätte. Bei 0° C. gefriert das Wasser, bei 100° C. ist dessen Siedepunkt, allein seine gröfste Dichtigkeit hat es einige Grade über 0, und auch dieser Punkt der gröfsten Dichtigkeit ist noch streitig: er wird von 3,75° C. bis 4,40° C. angegeben.

Nach den Beobachtungen von de Luc soll folgende Formel ziemlich genau die Ausdehnung des Wassers bei allen Graden von 0 bis 80° (Réaumur) angeben.

$$DT = -0{,}16\,t + 0{,}0185\,t^2 - 0{,}00005\,t^3$$

Mit dieser in Gehler's Wörterbuch, Bd. 1, pag. 609, angegebenen, aber dort unklar gelassenen Formel hat es folgende Bewandtnifs.

Man denke sich 2 Thermometer, das eine mit Quecksilber, das andere mit Wasser gefüllt; in beiden der Stand bei 0° und bei 80° Temperatur vermerkt, und in beiden die so erhaltenen Fundamental-Abstände in 80 gleiche Theile getheilt, so giebt DT den Grad des Wasser-Thermometers an, wenn das Quecksilber-Thermometer den Grad t zeigt. Die Formel giebt für $t = 0$, auch $DT = 0$, und für $t = 80$, auch $DT = 80$.

Das Minimum des Wasserstandes erhält man aus

$$\frac{\partial DT}{\Delta t} = 0 = -0{,}16 + 0{,}037\,t - 0{,}00015\,t^2$$

geordnet

$$t^2 - \frac{740}{3}\,t + \frac{3200}{3} = 0$$

woraus

$$t = +\frac{370}{3} - \frac{356{,}8}{3} = 4{,}3$$

Da das Quecksilber mit seinen gleichförmigen Ausdehnungen die gleichförmige Zunahme der Wärmemenge angiebt, so zeigt sich die unregelmäfsige Ausdehnung des Wassers wie folgt:

Grade t des Quecksilber-Therm.	Grade DT des Wasser-Therm.	Differenz von DT
0	0	
		0,14155
1	− 0,14155	
		0,10485
2	0,2464	
		0,06845
3	0,31485	
		0,03235
4	0,3472	
		0,00271
4,3	0,34991	
		0,00616
5	0,34375	

Grade t des Quecksilber-Therm.	Grade DT des Wasser-Therm.	Differenz von DT
		0,03895
6	− 0,30480	
		0,07415
7	0,23065	
		0,10905
8	0,1216	
		0,09955
9	+ 0,02205	
		0,17795
10	0,2	
		3,6
20	3,8	
		6,7
30	10,5	
		9,5
40	20	
		12
50	32	
		14,2
60	46,2	
		16,1
70	62,3	
		17,7
80	80	

Gehler's Wörterbuch, Bd. X. 1, pag. 913, enthält eine von Hallström berechnete Tabelle für die Volumina und Dichtigkeiten, erstere (V) von 0° bis 30° C. berechnet nach der Formel:

$$V = 1 - 0{,}000057577 \cdot t + 0{,}0000075601 \cdot t^2 - 0{,}000000035091 \cdot t^3$$

nach welcher die gröfste Dichtigkeit bei 3,92° stattfinden soll. Um dies zu prüfen, hat man

$$\frac{\partial V}{\Delta t} = 0 = -0{,}000057577 + 0{,}0000151202\, t - 0{,}000000105273\, t^2$$

geordnet

$$t^2 - 143{,}628\, t + 546{,}93036 = 0$$

woraus

$$t = +71{,}814 - 67{,}899 = 3{,}915°$$

Von 30 bis 100° ist nach den Versuchszahlen von Muncke die Formel angewendet:

$$V = 1 - 0{,}0000094178\, t + 0{,}00000533661\, t^2 - 0{,}0000000104086\, t^3$$

Eine Prüfung dieser Tabelle mittelst Differenzen ergab so auffallend unregelmäfsige Intervalle, dafs sie mir als unrichtig erscheinen mufste; sie ist auch nur bis zu 30°, mit Ausnahme der 3 Zahlen für 7°, 8° und 9°, von 30° bis 100° aber nur in den Zehnern richtig. Aus diesem Grunde habe ich die Hallström'sche Tabelle durchweg corrigirt und mit Differenzen versehen.

Das Volumen für 30° giebt

nach der ersten Formel 1,004129
„ „ zweiten „ 1,004239
Gesetzt ist das Mittel 1,004184

Temperatur t	Volumen.	Differenz.	Dichtigkeit.	Differenz.
0° C.	1,000000		1,000000	
		50		50
1	0,999950		1,000050	
		35		35
2	0,999915		1,000085	
		21		21
3	0,999894		1,000106	
		12		12
3,9	0,999882		1,000118	
		6		6
4	0,999888		1,000112	
		9		9
5	0,999897		1,000103	
		22		22
6	0,999919		1,000081	
		36		36
7	0,999955		1,000045	
		50		50
8	1,000005		0,999995	
		64		64
9	1,000069		0,999931	
		76		76
10	1,000145		0,999855	
		90		90
11	1,000235		0,999765	
		103		103
12	1,000338		0,999662	
		115		115
13	1,000453		0,999547	

Temperatur t	Volumen.	Differenz.	Dichtigkeit.	Differenz.
14° C.	1,000581	128	0,999419	128
15	1,000720	139	0,999281	138
16	1,000872	152	0,999128	153
17	1,001035	163	0,998966	162
18	1,001210	175	0,998792	174
19	1,001397	187	0,998605	187
20	1,001594	197	0,998409	196
21	1,001802	208	0,998201	208
22	1,002022	220	0,997982	219
23	1,002251	229	0,997754	228
24	1,002491	240	0,997515	239
25	1,002741	250	0,997266	249
26	1,003001	260	0,997008	258
27	1,003271	270	0,996740	268
28	1,003549	278	0,996463	277
29	1,003837	288	0,996178	285
30	1,004184	347	0,995833	345
31	1,004526	342	0,995494	339
32	1,004822	296	0,995201	293
33	1,005127	305	0,994899	302
34	1,005440	313	0,994589	310
35	1,005761	321	0,994272	317
36	1,006092	331	0,993945	327
37	1,006430	338	0,993611	334
38	1,006777	347	0,993269	342
39	1,007132	355	0,992919	350
40	1,007496	364	0,992560	359
41	1,007867	371	0,992195	365
42	1,008247	380	0,991820	375
43	1,008635	388	0,991439	381
44	1,009031	396	0,991050	389
45	1,009434	403	0,990654	396
46	1,009846	412	0,990250	404
47	1,010265	419	0,989839	411
48	1,010691	426	0,989422	417
49	1,011127	436	0,988995	427
50	1,011570	443	0,988562	433

Temperatur t	Volumen.	Differenz.	Dichtigkeit.	Differenz.
51° C.	1,012020	450	0,988123	439
52	1,012477	457	0,987677	446
53	1,012942	465	0,987223	454
54	1,013414	472	0,986764	459
55	1,013894	480	0,986297	467
56	1,014380	486	0,985824	473
57	1,014874	494	0,985344	480
58	1,015375	501	0,984858	486
59	1,015883	508	0,984365	493
60	1,016398	515	0,983867	498
61	1,016920	522	0,983362	505
62	1,017449	529	0,982850	512
63	1,017985	536	0,982333	517
64	1,018527	542	0,981810	523
65	1,019076	549	0,981281	529
66	1,019632	556	0,980746	535
67	1,020194	562	0,980206	540
68	1,020763	569	0,979659	547
69	1,021338	575	0,979108	551
70	1,021920	582	0,978550	558
71	1,022508	588	0,977988	562
72	1,023102	594	0,977420	568
73	1,023702	600	0,976847	573
74	1,024309	607	0,976268	579
75	1,024921	612	0,975685	583
76	1,025539	618	0,975097	588
77	1,026164	625	0,974503	594
78	1,026794	630	0,973905	598
79	1,027430	636	0,973302	603
80	1,028072	642	0,972694	608
81	1,028719	647	0,972083	611
82	1,029372	653	0,971466	617
83	1,030031	659	0,970845	621
84	1,030695	664	0,970219	626
85	1,031364	669	0,969590	629
86	1,032039	675	0,968956	634
87	1,032719	680	0,968318	638

Temperatur t	Volumen.	Differenz.	Dichtigkeit.	Differenz.
88° C.	1,033405	686	0,967675	643
89	1,034096	691	0,967028	647
90	1,034791	695	0,966379	649
91	1,035492	701	0,965725	654
92	1,036198	706	0,965067	658
93	1,036908	710	0,964406	661
94	1,037624	716	0,963740	666
95	1,038344	720	0,963072	668
96	1,039069	725	0,962400	672
97	1,039799	730	0,961724	676
98	1,040533	734	0,961046	678
99	1,041272	739	0,960364	682
100	1,042016	744	0,959678	686

Despretz hat die Volume des Wassers bestimmt, indem er zwischen den Temperaturen von 4° C. (den er als Punkt der gröfsten Dichtigkeit annimmt) bis 100° C. 19 eigene Beobachtungen zu Grunde legte und die für die zwischen liegenden Temperaturen mit Hülfe graphischer Interpolation auffand.

Folgende Tabelle enthält diese Volume mit den von mir berechneten Dichtigkeiten und den Differenzen.

Temperatur.	Volumen.	Differenz.	Dichtigkeit.	Differenz.
4° C.	1,0000000		0,0000000	
5	1,0000082	82	0,9999917	83
6	1,0000309	227	0,9999691	226
7	1,0000708	399	0,9999292	399
8	1,0001216	508	0,9998784	508
9	1,0001879	663	0,9998120	664
10	1,0002684	805	0,9997316	804
11	1,0003598	914	0,9996403	913
12	1,0004723	1125	0,9995280	1123
13	1,0005862	1139	0,9994142	1138
14	1,0007146	1284	0,9992860	1282
15	1,0008751	1605	0,9991256	1604
16	1,0010215	1464	0,9989795	1461
17	1,0012067	1852	0,9987949	1846

Temperatur.	Volumen.	Differenz.	Dichtigkeit.	Differenz.
		1833		1849
18° C.	1,00139		0,99861	
		19		19
19	1,00158		0,99842	
		21		21
20	1,00179		0,99821	
		21		21
21	1,00200		0,99800	
		22		22
22	1,00222		0,99778	
		22		21
23	1,00244		0,99757	
		27		27
24	1,00271		0,99730	
		22		22
25	1,00293		0,99708	
		28		28
26	1,00321		0,99680	
		24		24
27	1,00345		0,99656	
		29		29
28	1,00374		0,99627	
		29		28
29	1,00403		0,99599	
		30		30
30	1,00433		0,99569	
		30		30
31	1,00463		0,99539	
		31		31
32	1,00494		0,99508	
		31		30
33	1,00525		0,99478	
		30		30
34	1,00555		0,99448	
		38		38
35	1,00593		0,99410	
		31		30
36	1,00624		0,99380	
		37		37
37	1,00661		0,99343	
		38		37
38	1,00699		0,99306	
		35		35
39	1,00734		0,99271	
		39		38
40	1,00773		0,99233	
		39		38
41	1,00812		0,99195	
		41		41
42	1,00853		0,99154	
		41		40
43	1,00894		0,99114	
		44		43
44	1,00938		0,99071	
		47		46
45	1,00985		0,99025	
		35		35
46	1,01020		0,98990	
		47		46
47	1,01067		0,98944	
		42		41
48	1,01109		0,98903	
		48		47
49	1,01157		0,98856	
		48		47
50	1,01205		0,98809	
		43		42
51	1,01248		0,98767	
		49		47
52	1,01297		0,98720	

Temperatur.	Volumen.	Differenz.	Dichtigkeit.	Differenz.
53° C.	1,01345	48	0,98673	47
54	1,01395	50	0,98624	49
55	1,01445	50	0,98576	48
56	1,01495	50	0,98527	49
57	1,01547	52	0,98477	50
58	1,01597	50	0,98428	49
59	1,01647	50	0,98380	48
60	1,01698	51	0,98330	50
61	4,01752	54	0,98278	52
62	1,01809	57	0,98223	55
63	1,01862	53	0,98172	51
64	1,01913	51	0,98123	49
65	1,01967	54	0,98071	52
66	1,02025	58	0,98015	56
67	1,02085	60	0,97958	57
68	1,02144	59	0,97901	57
69	1,02200	56	0,97847	54
70	1,02255	55	0,97795	52
71	1,02315	60	0,97737	58
72	1,02375	60	0,97680	57
73	1,02440	65	0,97618	62
74	1,02509	69	0,97552	66
75	1,02562	53	0,97502	50
76	1,02631	69	0,97436	66
77	1,02694	63	0,97377	59
78	1,02761	67	0,97313	64
79	1,02823	62	0,97255	58
80	1,02885	62	0,97196	69
81	1,02954	69	0,97131	65
82	1,03022	68	0,97067	64
83	1,03090	68	0,97003	64
84	1,03156	66	0,96941	62
85	1,03225	69	0,96876	65
86	1,03293	68	0,96812	64
87	1,03361	68	0,96748	64
88	1,03430	69	0,96684	64

Temperatur.	Volumen.	Differenz.	Dichtigkeit.	Differenz.
		70		66
89° C.	1,03500		0,96618	
		66		61
90	1,03566		0,96557	
		73		68
91	1,03639		0,96489	
		71		66
92	1,03710		0,96423	
		72		67
93	1,03782		0,96356	
		70		65
94	1,03852		0,96291	
		73		68
95	1,03925		0,96223	
		74		68
96	1,03999		0,96155	
		78		72
97	1,04077		0,96083	
		76		70
98	1,04153		0,96013	
		75		69
99	1,04228		0,95944	
		87		81
100	1,04315		0,95863	

5. Ausdehnung des Weingeistes.

Diese zu bestimmen, ist deshalb von grofser Wichtigkeit, weil der W. zu Thermometern angewendet wird und zur Bestimmung hoher Kältegrade nicht entbehrt werden kann, denn er gefriert erst bei − 56° C., aber er siedet schon bei 78,4° C. und ist also zur Bestimmung hoher Wärmegrade nicht anwendbar.

Zu Thermometern wird der W. nicht absolut genommen, er ist immer mit wenigem Wasser und auch mit Farbestoff vermischt, und der Gefrierpunkt des absoluten W. scheint noch tiefer zu liegen.

Gehler's physik. Wörterbuch, Bd. X. 1, pag. 921, erwähnt der Versuche von Muncke mit W., dessen spec. Gew. bei 20° C. (statt 0,791 für abs. W.) 0,801 betrug, von 5° zu 5° C., denen die Formel für die Volume entsprach:

$$V = 1 + 0{,}000989666\,t + 0{,}00000303489\,t^2 - 0{,}0000000395924\,t^3 + 0{,}00000000036364\,t^4$$

wonach t für die gröfste Dichtigkeit des W. − 56,5 betragen soll. Um dies zu prüfen, hat man für's Minimum des V, also für's Maximum der Dichtigkeit

$$\frac{\partial V}{\partial t} = 0 = 0{,}000989666 + 0{,}00000606978\,t - 0{,}0000001187772\,t^2 + 0{,}00000000145456\,t^3$$

und geordnet:

$$t^3 - 81{,}6585\,t^2 + 4172{,}932\,t + 680388{,}6 = 0$$

Um das zweite Glied fortzuschaffen, verwandelt man die Gleichung in

$$(t - 27{,}2195)^3 + 1950{,}228\,(t - 27{,}2195) + 753639{,}8 = 0$$

woraus nach der Cardanischen Formel

$$t - 27{,}2195 = -91{,}0174 + 7{,}1400 = -83{,}8774$$

woraus $t = -56{,}658°$ C.

Die vorstehende, auf Versuchsreihen gegründete Formel ist auch wohl der Grund, dafs der Gefrierpunkt des W. auf 56,5° C. angegeben wird, denn es hat zu viel Schwierigkeiten, so hohe Kältegrade mit Sicherheit angeben zu können. Nach jener Formel ist im Gehler, Bd. X, das. pag. 922, eine Tabelle der A. des gedachten, nicht absol. W. von − 50° bis + 50° C. von 2 zu 2° berechnet, welche hier folgt, und der ich die Differenzen zugefügt habe.

Tabelle

der Volume und Dichtigkeiten des Weingeistes von dem spec. Gew. 0,801 bei + 20° C.

Temperatur.	Volumen.	Differenz.	Dichtigkeit.	Differenz.
− 50° C.	0,965326		1,035920	
		471		506
48	0,965797		1,035414	
		582		624
46	0,966379		1,034790	
		686		734
44	0,967065		1,034056	
		787		841
42	0,967852		1,033215	
		882		941
40	0,968734		1,032274	
		972		1034
38	0,969706		1,031240	
		1057		1123
36	0,970763		1,030117	
		1139		1207
34	0,971902		1,028910	
		1215		1285
32	0,973117		1,027625	
		1288		1358
30	0,974405		1,026267	
		1356		1426
28	0,975761		1,024841	
		1421		1490
26	0,977182		1,023351	
		1482		1550
24	0,978664		1,021801	
		1539		1604
22	0,980203		1,920197	
		1592		1654
20	0,981795		1,018543	
		1643		1701
18	0,983438		1,016840	
		1690		1744
16	0,985128		1,015096	
		1734		1783
14	0,986862		1,013313	
		1775		1819
12	0,988637		1,011494	
		1813		1852
10	0,990450		1,009642	
		1849		1881
8	0,992299		1,007761	
		1881		1907
6	0,994180		1,005854	
		1912		1931
4	0,996092		1,003923	
		1941		1952
2	0,998033		1,001971	
+ 2° C.	1,001991		0,998013	
		2014		2002
4	1,004005		0,996011	
		2034		2014
6	1,006039		0,993997	
		2054		2025
8	1,008093		0,991972	
		2071		2034
10	1,010164		0,989938	
		2088		2042
12	1,012252		0,987896	
		2103		2048
14	1,014355		0,985848	
		2118		2054
16	1,016473		0,983794	
		2131		2059
18	1,018604		0,981735	
		2145		2062
20	1,020749		0,979673	

Temperatur.	Volumen.	Differenz.	Dichtigkeit.	Differenz.
+ 22° C.	1,022905	2156	0,977608	2065
24	1,025073	2168	0,975540	2068
26	1,027253	2180	0,973470	2070
28	1,029444	2191	0,971398	2072
30	1,031647	2203	0,969324	2074
32	1,033861	2214	0,967248	2076
34	1,036087	2226	0,965170	2078
36	1,038325	2238	0,963090	2080
38	1,040575	2250	0,961007	2083
40	1,042839	2264	0,958920	2087
42	1,045118	2279	0,956830	2090
44	1,047411	2293	0,954735	2095
46	1,049721	2310	0,952634	2101
48	1,052048	2327	0,950527	2107
50	1,054394	2346	0,948412	2115

Auch in dieser Tabelle haben die **Dichtigkeiten** für die Temperaturen − 26 bis − 20 so auffallende Intervalle in den Differenzen gezeigt, dafs ich dieselben, als unrichtig sich erweisend, berichtigt habe.

Der vollkommen absolute W. verhält sich offenbar ganz anders, Gehler, Bd. X, pag. 923, giebt für solchen (spec. Gew. bei 20° C. = 0,791108) die Formel:

$$V = 1 + 0{,}0010151148\,t + 0{,}0000030884\,t^2 - 0{,}0000000192458\,t^3$$

für das Minimum der Volume hat man wieder:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = 0 = 0{,}0010151148 + 0{,}0000061768\,t - 0{,}0000000577374\,t^2$$

oder geordnet:

$$t^2 - 106{,}981\,t - 17581{,}58 = 0$$

woraus $t = +53{,}49 - 142{,}98 = -89{,}49°$ C., wie im Gehler mit − 89,5 richtig angegeben ist.

Nach der vorstehenden Formel ist in Gehler's phys. Wörterb., Bd. X, pag. 923, eine Tabelle der Volumina von − 100° bis + 66° von 2 zu 2° berechnet, der ich hier die Dichtigkeiten und die Differenzen zufüge, wobei ich noch bemerke, dafs das Volumen für + 14°, dort unrichtig angegeben, von mir berichtigt worden ist.

Tabelle

der Volumina und Dichtigkeiten des absoluten Weingeistes von − 100° bis + 66° C.

Temperatur.	Volumen.	Differenz.	Dichtigkeit.	Differenz.
− 100° C.	0,948618	325	1,054165	361
98	0,948293	254	1,054526	283
96	0,948039	185	1,054809	206
94	0,947854		1,055015	

Temperatur.	Volumen.	Differenz.	Dichtigkeit.	Differenz.
		118		131
– 92° C.	0,947736	50	1,055146	56
90	0,947686	16	1,055202	18
88	0,947702	81	1,055184	90
86	0,947783	146	1,055094	163
84	0,947929	209	1,054931	232
82	0,948138	273	1,054699	304
80	0,948411	333	1,054395	370
78	0,948744	394	1,054025	437
76	0,949138	454	1,053588	504
74	0,949592	513	1,053084	569
72	0,950105	571	1,052515	632
70	0,950676	628	1,051883	694
68	0,951304	684	1,051189	756
66	0,951988	740	1,050433	815
64	0,952728	793	1,049618	873
62	0,953521	847	1,048745	931
60	0,954368	899	1,047814	986
58	0,955267	951	1,046828	1041
56	0,956218	1002	1,045787	1095
54	0,957220	1051	1,044692	1146
52	0,958271	1100	1,043546	1196
50	0,959371	1147	1,042350	1245
48	0,960518	1195	1,041105	1294
46	0,961713	1240	1,039811	1339
44	0,962953	1286	1,038472	1385
42	0,964239	1329	1,037087	1427
40	0,965568	1373	1,035660	1470
38	0,966941	1415	1,034190	1512
36	0,968356	1457	1,032678	1551
34	0,969813	1496	1,031127	1589
32	0,971309	1537	1,029538	1626
30	0,972846	782	1,027912	826
29	0,973628	793	1,027086	838
28	0,974421	801	1,026250	842
27	0,975222	811	1,025408	852
26	0,976033	820	1,024556	861
25	0,976853	829	1,023695	867
24	0,977682		1,022828	

Temperatur.	Volumen.	Differenz.	Dichtigkeit.	Differenz.
− 23° C.	0,978520	838	1,021952	876
22	0,979367	847	1,021068	884
21	0,980223	856	1,020176	892
20	0,981087	864	1,019278	898
19	0,981960	873	1,018371	907
18	0,982841	881	1,017459	912
17	0,983730	889	1,016539	920
16	0,984628	898	1,015612	927
15	0,985533	905	1,014679	933
14	0,986446	913	1,013740	939
13	0,987368	922	1,012794	946
12	0,988297	929	1,011842	952
11	0,989233	936	1,010884	958
10	0,990177	944	1,009920	964
9	0,991128	951	1,008951	969
8	0,992086	958	1,007977	974
7	0,993052	966	1,006997	980
6	0,994025	973	1,006011	986
5	0,995004	979	1,005021	990
4	0,995990	986	1,004026	995
3	0,996983	993	1,003026	1000
2	0,997982	999	1,002022	1004
1	0,998988	1006	1,001013	1009
0	1,000000	1012	1,000000	1013
+ 1	1,001018	1018	0,998983	1017
2	1,002042	1024	0,997962	1021
3	1,003073	1031	0,996936	1026
4	1,004109	1036	0,995908	1028
5	1,005150	1041	0,994876	1032
6	1,006198	1048	0,993840	1036
7	1,007250	1052	0,992802	1038
8	1,008309	1059	0,991759	1043
9	1,009372	1063	0,990715	1044
10	1,010441	1069	0,989667	1048
11	1,011514	1073	0,988617	1050
12	1,012593	1079	0,987564	1053
13	1,013676	1083	0,986509	1055

Temperatur.	Volumen.	Differenz.	Dichtigkeit.	Differenz.
+ 14° C.	1,014764	1088	0,985451	1058
15	1,015857	1093	0,984391	1060
16	1,016954	1097	0,983329	1062
17	1,018055	1101	0,982265	1064
18	1,019160	1105	0,981200	1065
19	1,020270	1110	0,980133	1067
20	1,021384	1114	0,979064	1069
21	1,022501	1117	0,977994	1070
22	1,023622	1121	0,976923	1071
23	1,024747	1125	0,975851	1072
24	1,025876	1129	0,974777	1074
25	1,027007	1131	0,973703	1074
26	1,028142	1135	0,972628	1075
27	1,029281	1139	0,971552	1076
28	1,030422	1141	0,970476	1076
29	1,031566	1144	0,969400	1076
30	1,032713	1147	0,968323	1077
31	1,033863	1150	0,967246	1077
32	1,035016	1153	0,966169	1077
33	1,036170	1154	0,965093	1076
34	1,037328	1158	0,964015	1078
35	1,038487	1159	0,962939	1076
36	1,039649	1162	0,961863	1076
38	1,041978	2329	0,959713	2150
40	1,044314	2336	0,957566	2147
42	1,046657	2343	0,955423	2143
44	1,049005	2348	0,953284	2139
46	1,051357	2352	0,951152	2132
48	1,053713	2356	0,949025	2127
50	1,056071	2358	0,946906	2119
52	1,058431	2360	0,944795	2111
54	1,060791	2360	0,942693	2102
56	1,063152	2361	0,940599	2094
58	1,065511	2359	0,938517	2082
60	1,067868	2357	0,936445	2072
62	1,070222	2354	0,934386	2059
64	1,072572	2350	0,932338	2048
66	1,074917	2345	0,930304	2034

6. Ausdehnung der Gase.

Die A. der atmosphärischen Luft und der Gasarten ist den Versuchen der Physiker zufolge von — 36° C. bis 360° C. ganz gleichmäſsig; auch ist die Gröſse der A. aller Gase so sehr wenig unterschieden, daſs man sie mit der von Rudberg gefundenen, allgemein als richtig geltenden A. der trocknen atmosph. Luft = 0,00365 für jeden Grad C. gleich groſs annehmen kann. Die zu Flüssigkeiten comprimirbaren Gase haben eine etwas gröſsere, aber ebenfalls gleichmäſsige A.

Folgende von mir berechnete Tabelle zeigt die Volume und die Dichtigkeiten der trockenen atm. Luft und der permanenten Gase von — 30° bis + 100° nach Rudberg.

Temperatur.	Volumen.	Dichtigkeit.	Temperatur.	Volumen.	Dichtigkeit.
— 30° C.	0,89050	1,12296	+ 17° C.	1,06205	9,94158
29	0,89415	1,11838	18	1,06570	0,93835
28	0,89780	1,11383	19	1,06935	0,93515
27	0,90145	1,10932	20	1,07300	0,93197
26	0,90510	1,10485	21	1,07665	0,92881
25	0,90875	1,10041	22	1,08030	0,92567
24	0,91240	1,09601	23	1,08395	0,92255
23	0,91605	1,09164	24	1,08760	0,91946
22	0,91970	1,08731	25	1,09125	9,91638
21	0,92335	1,08301	26	1,09490	0,91333
20	0,92700	1,07875	27	1,09855	0,91029
19	0,93065	1,07452	28	1,10220	0,90728
18	0,93430	1,07032	29	1,10585	0,90428
17	0,93795	1,06615	30	1,10950	0,90131
16	0,94160	1,06202	31	1,11315	0,89835
15	0,94525	1,05792	32	1,11680	0,89542
14	0,94890	1,05385	33	1,12045	0,89250
13	0,95255	1,04981	34	1,12410	0,88960
12	0,95620	1,04581	35	1,12775	0,88672
11	0,95985	1,04183	36	1,13140	0,88386
10	0,96350	1,03788	37	1,13505	0,88102
9	0,96715	1,03397	38	1,13870	0,87819
8	0,97080	1,03008	39	1,14235	0,87539
7	0,97445	1,02622	40	1,14600	0,87260
6	0,97810	1,02239	41	1,14965	0,86983
5	0,98175	1,01859	42	1,15330	0,86708
4	0,98540	1,01482	43	1,15695	0,86434
3	0,98905	1,01107	44	1,16060	0,86162
2	0,99270	1,00735	45	1,16425	0,85892
1	0,99635	1,00366	46	1,16790	0,85624
0	1,00000	1,00000	47	1,17155	9,85357
+ 1	1,00365	0,99636	48	1,17520	0,85092
2	1,00730	0,99275	49	1,17885	0,84828
3	1,01095	0,98917	50	1,18250	0,84567
4	1,01460	0,98561	51	1,18615	0,84306
5	1,01825	0,98208	52	1,18980	0,84048
6	1,02190	0,97857	53	1,19345	0,83791
7	1,02555	0,97509	54	1,19710	0,83535
8	1,02920	0,97163	55	1,20075	0,83281
9	1,03285	0,96819	56	1,20440	0,83029
10	1,03650	0,96479	57	1,20805	0,82778
11	1,04015	0,96140	58	1,21170	0,82529
12	1,04380	0,95804	59	1,21535	0,82281
13	1,04745	0,95470	60	1,21900	0,82034
14	1,05110	0,95138	61	1,22265	0,81790
15	1,05475	0,94809	62	1,22630	0,81546
16	1,05840	0,94482	63	1,22995	0,81304

Temperatur.	Volumen.	Dichtigkeit.	Temperatur.	Volumen.	Dichtigkeit.
+ 64° C.	1,23360	0,81064	+ 83° C.	1,30295	0,76749
65	1,23725	0,80824	84	1,30660	0,76535
66	1,24090	0,80587	85	1,31025	0,76321
67	1,24455	0,80350	86	1,31390	0,76109
68	1,24820	0,80115	87	1,31755	0,75898
69	1,25185	0,79882	88	1,32120	0,75689
70	1,25550	0,79650	89	1,32485	0,75480
71	1,25915	0,79419	90	1,32850	0,75273
72	1,26280	0,79189	91	1,33215	0,75067
73	1,26645	0,78961	92	1,33580	0,74862
74	1,27010	0,78734	93	1,33945	0,74658
75	1,27375	0,78508	94	1,34310	0,74455
76	1,27740	0,78284	95	1,34675	0,74253
77	1,28105	0,78061	96	1,35040	0,74052
78	1,28470	0,77839	97	1,35405	0,73853
79	1,28835	0,77619	98	1,35770	0,73654
80	1,29200	0,77399	99	1,36135	0,73456
81	1,29565	0,77181	100	1,36500	0,73260
82	1,29930	0,76965			

Ausdehnungs-Coefficient (gewöhnlich mit a bezeichnet) für einen bestimmten Körper, ist das Maaſs seiner Linear-Ausdehnung (s. pag. 188), wenn er erwärmt wird (s. Ausdehnung pag. 187). Dieses Maaſs besteht meistens in der Zahl, welche angiebt, um den wievielsten Theil seiner Länge bei 0° C. ein Körper sich ausdehnt, wenn er bis zu 100° C. erwärmt wird; aber auch in dem Theil seiner Länge, um welchen er bei seiner Erwärmung bis 1° C. ausgedehnt wird.

In der Tabelle pag. 189 wären also zugleich die A. der festen Körper angegeben, wenn sie von 0° bis 100° C. gelten. Der A. für Blei = 0,002719. Soll A. von 0° bis 1° C. gelten, dann ist A. für Blei = 0,00002719.

Das Quecksilber dehnt sich von 0° bis 100° C. gleichförmig aus; da nun in der Tabelle pag. 199 die Ausdehnung

bei 0° C, = 1,00000
bei + 1° C. = 1,00018
und bei + 100° C. = 1,01802

angegeben worden, so hat man den A. für Quecksilber entweder = 0,01802 oder 0,00018.

Die Ausdehnung des Wassers (s. pag. 200) geschieht äuſserst unregelmäſsig: Aus der Tabelle pag. 201 entnimmt man den A. desselben von 0° C. bis 100° C. = 0,042016, also für 0° bis 1° (aber nur im Mittel) = 0,00042016.

Aus der Tabelle pag. 204 hat man den A. von + 4° C., dem Punkt der gröſsten Contraction des Wassers, bis 100° C. = 0,04315.

Für Wasser kann also seiner Natur nach eigentlich kein A. angegeben werden; ein Gleiches gilt vom Weingeist (s. pag. 207), der schon unter dem Temperaturgrade 100° C. in Dampfform übergeht.

Die Gase haben wieder eine gleichförmige Ausdehnung (s. pag. 213) und für alle Gase ziemlich dieselbe. Die Tabelle pag. 213 zeigt den A. der trockenen atmosphärischen Luft und der übrigen Gase nach Rudberg

von 0° bis 1° C. = 0,00365
von 0° bis 100° C. = 0,365

Ausdruck. Jede aus mehreren allgemeinen oder aus allgemeinen und bestimmten Zahlen bestehende und in solchen dargestellte Gröſse. Z. B. $a^2 - x^2$ ist ein A. und zwar der A. für das Product $(a+x)(a-x)$. Der A. ist algebraisch, wenn er in algebraischen Verbindungen besteht (wie $a^2 - x^2$); transcendent, wenn er logarithmische oder trigonometrische Functionen enthält, wie $n \cdot log\, x$; $m \cdot sin\, x$. Jeder A. ist analytisch; A., welche der höheren Analysis angehören, sind Differenziale und Integrale.

Auseinanderlaufende Linien sind gerade, nicht parallele, in einer Ebene befindliche Linien, nach der der Lage ihres Durchschnittspunkts entgegengesetzten Richtung; nach der Richtung der Lage des Durchschnittspunkts hin betrachtet, heiſsen sie zusammenlaufende Linien.

Ausfluſs ist das Heraustreten einer in einem Behälter eingeschlossenen Flüssig-

keit aus einer oder mehreren, in den Wandungen befindlichen Oeffnungen.

Die Gröfse und Form der Oeffnungen, die Geschwindigkeit, mit welcher die Flüssigkeit daraus fliefst, die Zeit des Ausfliefsens und die Menge der ausfliefsenden Flüssigkeiten stehen in einem Zusammenhang, welchen die mechanischen Wissenschaften untersuchen und als Gesetze feststellen. Mit dem A. der tropfbaren Flüssigkeiten beschäftigt sich die Hydrodynamik, mit dem der gasförmigen die Pneumatik.

Ausflufs tropfbarer Flüssigkeiten. In einem Gefäfs befinde sich eine Flüssigkeit, so erleidet der horizontale Boden einen Druck, der von der Höhe der Flüss. abhängt, der Art, dafs wenn deren Höhe $H = 2h$ beträgt, jener Druck doppelt so grofs ist, als wenn die Höhe h betrüge; die Druckwirkungen auf den Boden verhalten sich also wie die Höhen H und h derselben Flüss., und jede Flächen-Einheit desselben erhält einen gleich grofsen Druck $= h\gamma$, wenn h die Höhe der Flüss. und γ das Gewicht der Körper-Einheit der Flüssigkeit bezeichnet.

Befindet sich nun in dem Boden eine Oeffnung von dem Querschnitt a, so wirkt auf dieselbe ein Druck $= ah\gamma$. Denkt man sich als Bodenstärke die sehr kleine Höhen-Einheit $= 1$ und innerhalb a nur diese mit der Flüss. angefüllt, also weiter keine Flüss. im Gefäfs, so fällt nach Lehren der Mechanik die innerhalb der Oeffnung befindliche Masse $a\gamma$ in der ersten Secunde vermöge der Schwerkraft der Erde um den Weg $g = 15\frac{5}{8}$ Fufs. Hierbei ist die bewegte Masse $= a\gamma$, die auf dieselbe wirkende bewegende Kraft die Masse selbst $= a\gamma$, die beschleunigende Kraft $= \frac{a\gamma}{a\gamma} = 1$ und die Beschleunigung ist $= g$.

Hat aber die Flüss. im Gefäfs die Höhe h, dann ist die bewegende Kraft als Wirkung auf die sehr kleine untere Schicht $a\gamma =$ dem Gewicht $ha\gamma$, die bewegte Masse $a\gamma$, die beschleunigende Kraft $= \frac{ha\gamma}{a\gamma} = h$, also $h$mal gröfser als beim freien Fall, und die Beschleunigung $= G = gh$.

Nun lehrt die Mechanik, dafs ein Körper, wenn er von der Höhe h frei herabfällt, die Endgeschwindigkeit erreicht $= 2\sqrt{gh}$; für $h = 1$, also die Geschwindigkeit $= 2\sqrt{g}$, und bei nicht freiem, bei beschränktem oder verstärktem Fall $= 2\sqrt{G}$. Beim Ausflufs von der Höhe h ist $G = gh$, mithin dessen Geschwindigkeit c beim Fall durch die sehr kleine Höhe $= 1$ innerhalb der Bodenstärke $= 2\sqrt{G} = 2\sqrt{gh}$; mithin ist die Ausflufsgeschwindigkeit c einer Flüss. bei der Druckhöhe $h =$ derjenigen Geschw., die ein Körper erreichen würde, wenn er vom Wasserspiegel bis zur Ausflufsöffnung frei herabfiele; dies Gesetz heifst das Torricelli'sche Gesetz.

2. Wenngleich die bei der Entwickelung des Torricelli'schen Gesetzes angewendeten Begriffe: Beschleunigung, Geschwindigkeit u. s. w., der reinen Mechanik angehören, und in dem dieser gewidmeten Art. ihre Erklärung finden, so ist, wie ich aus Erfahrung weifs, der Anfänger nicht oft genug auf den Unterschied zwischen Beschleunigung und Geschwindigkeit aufmerksam zu machen, besonders hier, wo beide Begriffe Wege in der ersten Secunde bezeichnen:

Die Einwirkung der bewegenden Kraft $ha\gamma$ auf die kleine Masse $a\gamma$, also auch die beschleunigende Kraft h auf das Massen-Element 1 veranlafst die Beschleunigung G des Elements, d. h. dafs das Element in der ersten Sec. den Weg G zurücklegt. Bei diesem Wege ist die Anfangsgeschwindigkeit = Null, der Weg in dem ersten $n$tel Sec. sehr klein, in dem zweiten $n$tel Sec. etwas gröfser, in dem letzten $n$tel Sec. am gröfsten, und alle diese n immer gröfser werdenden Wege in Summa machen die Beschleunigung G aus.

Die Geschwindigkeit c der ersten kleinen Masse $a\gamma$ und aller auf einander folgend in die Oeffnung a tretenden kleinen Massen von der Gröfse $a\gamma$ ist der Weg, den jede dieser einzelnen Massen in der ersten Secunde durch alle n $n$tel derselben gleichförmig zurücklegen würde, wenn die Schwerkraft der Erde zu wirken aufhörte, sobald die Masse $a\gamma$ die Oeffnung a verlassen hat. Denkt man sich daher die gesammte, in der ersten Sec. ausfliefsende Wassermenge M in Zusammenhang, so bildet diese ein Prisma von dem Querschnitt a und der Länge c.

Bleibt die Höhe h im Gefäfs dieselbe, wie z. B. in einer oberschlächtigen Arche, so ist auch in jeder folgenden Sec. c dieselbe.

3. Ist in einem Gefäfs die Höhe des Wasserspiegels über der Ausflufs-Oeffnung $= h$ und wird mittelst einer Scheibe mit darauf gelegtem Gewicht auf die obere Wasserfläche noch ein Druck p ausgeübt, so ist dies Gewicht p auf eine Säule von derselben Flüssigkeit zu reduciren, welche den Querschnitt der oberen Wasserfläche zum Querschnitt hat; findet man die Höhe dieser Säule $= H$, so ist die Druck-

höhe $H+h$ und die Geschwindigkeit, mit der die Flüssigkeit ausströmt, $= 2\sqrt{g\,(H+h)}$

Es sei z. B. die Flüssigkeit Wasser, der Querschnitt des Wasserspiegels im Gefäfs $= 30\,\square''$, die Höhe desselben über der Ausflufs Oeffnung = 2 Fufs, und dessen Belastung durch ein aufgelegtes Gewicht 5 Pfund, so findet man die Höhe x der 5 Pfund schweren Wassersäule, weil $30\,\square'' = \frac{5}{24}\,\square'$ und 1 cub.′ Wasser = 66 Pfund wiegt, aus der Proportion:

$\frac{5}{24} \cdot x$ cub.′ : 1 cub.′ = 5 Pfund : 66 Pfund,

woraus

$$x = \tfrac{4}{11} \text{ Fufs,}$$

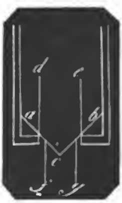
daher die Ausflufsgeschwindigkeit

$$= 2\sqrt{2\tfrac{4}{11}\,g}$$

4. Die Beschleunigung G und die Geschwindigkeit c sind, wie aus No. 1 hervorgeht, unabhängig von dem spec. Gew. der Flüssigkeiten, und z. B. beim Quecksilber wie beim Weingeist dieselben. Vorausgesetzt wird aber die vollkommene Flüssigkeit, so dafs keine Cohärenz das Zerfliefsen der Masse hindert; Oele, Fette, Syrupe haben dasselbe G, allein ein geringeres c. Auch Wasser, Quecksilber, Weingeist haben nicht eine vollkommene Zerfliefsbarkeit und es wird auch bei diesen c um etwas geringer, als die obige Formel ergiebt.

Eine Verminderung erfährt c ferner durch die Adhäsion der Flüss. an den Wandungen: Wasser in sehr engen Röhren fliefst nicht mehr aus, weil die Adhäsion, hier Capillarität genannt, die Wirkung der Schwerkraft übertrifft, und die also mit derselben, wenn auch nur geringen Kraft dem Ausfliefsen einer Wassermasse aus grofsen Oeffnungen widersteht.

Fig. 122.



Ein noch gröfseres Hindernifs bildet die Reibung des Wassers an den Gefäfs-Wandungen, und das gröfste sind scharfe Ecken und Kanten an der inneren Seite der Ausflufsöffnung, indem die Wasserstrahlen sich daran brechen, und eine Richtung nach der Mitte der Oeffnung annehmen und den Ausflufs-Querschnitt vermindern. Die Strahlen aus a und b, welche durch den von den Gefäfswandungen her erhaltenen gröfseren Wasserdruck ebenfalls ausfliefsen wollen, nehmen die Richtungen ac und bc an; die innerhalb d und e senkrecht herabfliefsenden Strahlen treiben ac und bc wieder zum Theil aus einander und es entspringt daraus ein Ausflufs-Querschnitt fg, welcher geringer ist als die zwischen den Wänden befindliche Ausflufsöffnung.

Man nennt diese Erscheinung die Zusammenziehung oder die Contraction des Wasserstrahls, und die kleinere abstracte Zahl, welche in jedem besonderen Falle je nach Gröfse und Form der Ausflufs-Oeffnung statt $2\sqrt{g}$ in den Ausdruck $2\sqrt{gh} = 2\sqrt{g}\cdot\sqrt{h}$ gesetzt werden mufs, um die Ausflufsgeschwindigkeit zu erhalten, den Contractions-Coefficient. Dieser wird in allen Fällen mit α bezeichnet, und die Ausflufsgeschwindigkeit ist dann $\alpha\sqrt{h}$

In den Coeff. α werden übrigens zugleich alle Hindernisse, die, wie oben bemerkt, in Reibung, Adhäsion etc. bestehen, mit eingeschlossen, so dafs die Formel $\alpha\sqrt{h}$ jedesmal die wirkliche Ausflufsgeschwindigkeit angiebt, während die Gröfse $2\sqrt{g}\sqrt{h}$ die theoretische, angemessener (mit Eytelwein) die hypothetische Ausflufs-Geschwindigkeit genannt wird.

5. Es ist oft zweckmäfsig, für besondere Fälle die hypothetische Geschw. zu ermitteln, und dann für $2\sqrt{g}$ das angemessene α einzusetzen.

Werthe für α giebt Eytelwein in seiner Hydraulik, pag. 115, wie folgt:

1) Freier Fall der Körper . . $\alpha = 7{,}91$
2) Mündungen von der Gestalt des zusammengezogenen Strahls . . . . $\alpha = 7{,}646$
3) Breite Gerinne. Freischleusen mit Flügel-Wänden. Schräge Einbaue. Spitze Brückenpfeiler . . . . $\alpha = 7{,}54$
4) Schmale Gerinne. Schützöffnungen mit Flügelwänden. Steile Einbaue. Gerade Brückenpfeiler . . . . $\alpha = 6{,}76$
5) Kurze Ansatzröhren . . . . $\alpha = 6{,}42$
6) Schützöffnungen ohne Flügelwände . . . . $\alpha = 5{,}00$
7) Oeffnungen in dünnen Wänden . . . . $\alpha = 4{,}89$

Ein Näheres über den Contractions-Coefficient in: Contraction des Wasserstrahls.

Ausflufs des Wassers aus Oeffnungen bei unveränderlicher Druckhöhe.

1. Die Hydrostatik lehrt, dafs eingeschlossenes Wasser auf jedes Element e senkrechter oder schiefer Seitenwandungen einen Druck ausübt $= eh\gamma$, mithin ist die Ausflufsgeschw. aus Oeffnungen in Seitenwänden gleich der in horizontalem Boden, wenn in beiden Fällen die Druckhöhe h dieselbe ist.

In horizontalem Boden kann die Oeff-

nung jede Form und Gröfse haben, die Höhe h ist für jedes Flächen-Element der Oeffnung dieselbe; in Seitenwänden dagegen ist in dem untersten Punkt der Oeffnung die Geschw. am gröfsten, in dem obersten am kleinsten, und es ist hier die mittlere Geschw. zu finden, d. h. diejenige, welche für alle durch die Oeffnung ausfliefsenden Strahlen angenommen, dieselbe Wassermenge per Sec. giebt, welche bei den verschiedenen Geschwindigkeiten der einzelnen Strahlen wirklich ausfliefst, und man sieht, dafs jene mittlere Geschw. auch von der Form der Oeffnung, ob rund, drei- oder mehreckig u. s. w., abhängt.

Bezeichnet man diese mittlere Geschw. mit c, die Oeffnung mit a, die Wassermenge, welche in einer Secunde ausfliefst, mit M, so ist allgemein

$$M = ac$$

Hierbei ist hypothetisch $c = 2\sqrt{g} \cdot \sqrt{h}$

$$\text{und} \quad h = \frac{c^2}{4g}$$

$$\text{wirklich} \quad c = \alpha \cdot \sqrt{h}$$

$$\text{und} \quad h = \frac{c^2}{\alpha^2}$$

also $M = 2a\sqrt{g}\sqrt{h}$ oder $\alpha a \sqrt{h}$

2. Ist die Ausflufsöffnung (a) gegen den Querschnitt (A) des Wasserbehälters sehr gering (als beim Sammelteich), so kann das Wasser vor a als stillstehend betrachtet werden. Ist dagegen der Unterschied zwischen A und a wahrnehmbar (wie bei schmalen Gerinnen), so mufs durch A und durch a eine gleiche Wassermenge M fliefsen; sinkt nun der Wasserspiegel nicht, bleiben also A und h constant, so hat man, wenn C die Geschw. in A bezeichnet:

$$M = CA = ca$$

$$\text{woraus} \quad C = c\frac{a}{A}$$

Die hierzu gehörige Druckhöhe, d. h. diejenige, welche bei stillstehendem Wasser die Geschw. C veranlassen würde, sei H, so wirkt auf die Geschw. des Wassers in a die Druckhöhe $h + H$ und es ist hypothetisch

$$\text{I.} \quad c = 2\sqrt{g}\sqrt{h + H} = 2\sqrt{gh + \frac{C^2}{4}}$$

wirklich

$$\text{II.} \quad c = \alpha\sqrt{h + H} = \alpha\sqrt{h + \frac{C^2}{\alpha^2}},$$

Das erste α bezieht sich auf die Ausflufsöffnung, das zweite auf die Bewegung des Wassers im Gerinne, beide haben also verschiedene Werthe, weshalb das zweite α mit α_1 bezeichnet worden.

Drückt man C durch c aus, so erhält man

$$\text{III.} \quad c = \frac{\alpha\sqrt{h}}{\sqrt{\left(1 - \left[\frac{\alpha}{\alpha_1} \cdot \frac{a}{A}\right]^2\right)}}$$

Beispiel. In einem Gerinne von 4 Fufs Breite sei der Wasserstand von der im Boden befindlichen Schützöffnung für ein oberschlächtiges Wasserrad = 2' 6", die Schützöffnung 3 Fufs lang, 3 Zoll breit.

In Anwendung kommt (pag. 216)
für die Schützöffnung α No. 6 = 5
für's Gerinne α_1 No. 4 = 6,76

Ohne Rücksicht auf die Geschw. des Wassers im Gerinne ist $c = 5\sqrt{2\frac{1}{2}} = 7{,}9057$

Diese Geschw. ist also zu gering; um sie nach Formel III. zu berechnen, hat man

das Gerinneprofil $A = 4' \times 2\frac{1}{2}' = 7\,\square'$
die Schützöffnung $a = 3' \times 3'' = 0{,}75\,\square'$

$$\text{mithin} \quad \frac{a}{A} = \frac{0{,}75}{7} = \frac{3}{28}$$

$$\frac{\alpha}{\alpha_1} = \frac{5}{6{,}76}$$

folglich

$$\left(\frac{\alpha}{\alpha_1} \cdot \frac{a}{A}\right)^2 = \left(\frac{5}{6{,}76} \cdot \frac{3}{28}\right)^2 = 0{,}0062802$$

$$c = \frac{7{,}9057}{\sqrt{0{,}9937198}} = 7{,}9306 \text{ Fufs.}$$

Der Unterschied ist also in allen ähnlichen Fällen der Praxis so gering, dafs man die Geschw. C des Wassers im Gerinne aufser Acht lassen kann.

3. Es sei in der senkrechten Seitenwand eines Behälters von dem Wasserspiegel A herab bis zur Tiefe H eine rechtwinklige Oeffnung, so ist in der untersten horizontalen Wasserschicht B die Geschw.

$$C = 2\sqrt{g} \cdot \sqrt{H}$$

in der horizontalen Schicht D von der Tiefe h die Geschw.

$$c = 2\sqrt{g}\sqrt{h}$$

$$\text{mithin} \quad C : c = \sqrt{H} : \sqrt{h}$$

$$\text{oder} \quad C^2 : c^2 = H : h$$

und eben so verhalten sich alle vom Wasserspiegel A aus genommenen Tiefen wie die Quadrate der zu ihrer Schicht gehörenden Geschwindigkeiten. Denkt man sich sämmtliche Geschwindigkeiten von der in $A = 0$ bis zu der in $B = C$ als gerade Linien senkrecht auf AB aufgetragen und verbindet deren Endpunkte, so erhält man eine Curve, deren Abscissen, z. B. AD, AB, wie die Quadrate der zugehörigen Ordinaten DE, BG sich verhalten, also eine Parabel, und die Fläche $ABEG$ drückt in der Summe

sämmtlicher Geschwindigkeiten zugleich den Querschnitt der per Secunde ausfliefsenden Wassermenge M aus. Diese

Fig. 123.



als Parabelfläche ist aber $= \frac{2}{3} AB \cdot BG = \frac{2}{3} H \cdot C$. Setzt man die Breite der Oeffnung $= B$, so hat man die Wassermenge

$$M = \tfrac{2}{3} BHC$$

also die hypothetische Wassermenge

$$M = \tfrac{4}{3} \sqrt{g} \cdot BH \cdot \sqrt{H}$$

und die wirkliche

$$M = \tfrac{2}{3} \alpha BH \cdot \sqrt{H}$$

Ist AD geschlossen, hat also die Oeffnung die Höhe $H - h$, so wäre

M' aus $AB = \frac{4}{3} \sqrt{g} \cdot BH \cdot \sqrt{H}$

M'' aus $AD = \frac{4}{3} \sqrt{g} B \cdot h \sqrt{h}$

folglich ist die aus DB ausfliefsende Wassermenge

hypothetisch $= \frac{4}{3} \sqrt{g} \cdot B (H \sqrt{H} - h \sqrt{h})$

wirklich $= \frac{2}{3} \alpha B (H \sqrt{H} - h \sqrt{h})$

4. Bezeichnet man die Höhe $H - h$ der Oeffnung mit E, so erhält man einen einfachen Näherungswerth für M, wenn man die Höhe $H - \frac{1}{2}E$ bis zum Schwerpunkt der Oeffnung als mittlere Geschwindigkeitshöhe annimmt. Alsdann ist

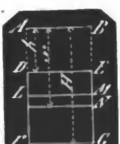
M' (hypothetisch) $= 2 \sqrt{g} \cdot BE \sqrt{H - \frac{1}{2}E}$

wirklich $\alpha BE \sqrt{H - \frac{1}{2}E}$

und dieser Werth kommt dem wirklichen um so näher, je kleiner E gegen H ist.

5. Die ad 3 gedachten und noch andere interessante Aufgaben lassen sich mit Hülfe der höheren Analysis lösen. Bezeichnet man nämlich eine zwischen H und h befindliche Höhe mit x, so ist die Geschw. in der zu x gehörenden horizontalen Linie LM von der Breite $B = 2 \sqrt{g} \cdot \sqrt{x}$

Fig. 124.



Daher die Wassermenge, welche durch den Streifen von der sehr kleinen Höhe $MN = \Delta x$ fliefst $\Delta M_x = 2 \sqrt{g} \cdot B \Delta x \cdot \sqrt{x}$ und folglich die Wassermenge aus der Oeffnung $DELM =$

$$M_x = 2 \sqrt{g} \cdot B \cdot \int \sqrt{x}\, \partial x + C$$

Nun ist allgemein $\int x^n \partial x = \frac{x^{n+1}}{n+1}$

folglich $\int \sqrt{x}\, \partial x = \int x^{\frac{1}{2}} \partial x = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} x \sqrt{x}$

mithin $M_x = \frac{4}{3} \sqrt{g} \cdot Bx \sqrt{x} + C$

Zur Bestimmung der Constante C hat man $M = 0$ für $x = h$

also $M^0_h = 0 = \frac{4}{3} \sqrt{g}\, Bh \sqrt{h} + C$

woraus $C = - \frac{4}{3} \sqrt{g} Bh \sqrt{h}$

und $M^h_x = \frac{4}{3} \sqrt{g} \cdot B (x \sqrt{x} - h \sqrt{h})$

für $x = H$ gesetzt, hat man die Wassermenge aus der Oeffnung $DEFG$

M^h_H (hypothetisch) $= \frac{4}{3} \sqrt{g} \cdot B (H \sqrt{H} - h \sqrt{h})$

M^h_H (wirklich) $= \frac{2}{3} \alpha B (H \sqrt{H} - h \sqrt{h})$

6. Setzt man $h = 0$, so hat man die Wassermenge aus der Oeffnung $ABFG$

M^0_H (hypothetisch) $= \frac{4}{3} \sqrt{g} \cdot BH \sqrt{H}$

wirklich $\frac{2}{3} \alpha BH \sqrt{H}$

7. Besteht die Ausflufsöffnung aus einem Dreieck mit horizontaler Grundlinie B, deren Tiefe unter dem Wasserspiegel $= H$, die Tiefe deren Spitze $= h$, so hat man, wie in No. 5, die Geschw. in der Tiefe x zwischen h und $H = 2 \sqrt{g} \sqrt{x}$; die zu x gehörende, mit B parallele Linie ist

Fig. 125.



$$= \frac{x - h}{H - h} \cdot B$$

das unter derselben befindliche Trapez von der sehr kleinen Höhe Δx kann im Verschwinden als Rectangel angesehen werden, dann ist der Flächen-Inhalt des Streifens

$$= \frac{x - h}{H - h} B \cdot \Delta x$$

die Wassermenge durch den sehr niedrigen Streifen

$$\Delta M_x = 2 \sqrt{g} \sqrt{x} \cdot \frac{x - h}{H - h} B \cdot \Delta x$$

und die Wassermenge durch das über x befindliche Dreieck

$$M_x = \frac{2 \sqrt{g} \cdot B}{H - h} \int (x - h) \sqrt{x}\, \partial x + C$$

$$= \frac{2 \sqrt{g} \cdot B}{H - h} \left(\tfrac{2}{5} x^2 \sqrt{x} - \tfrac{2}{3} hx \sqrt{x}\right) + C$$

für $x = h$ wird $M = 0$

daher $C = + \frac{4}{15} \frac{2 \sqrt{g} \cdot B}{H - h} h^2 \cdot \sqrt{h}$

und $M_x^h = \frac{2\sqrt{g}\cdot B}{H-h}[\frac{2}{5}x^2\sqrt{x} - \frac{2}{3}hx\sqrt{x} + \frac{4}{15}h^2\sqrt{h}]$

für $x = H$ hat man die Wassermenge durch das ganze Dreieck

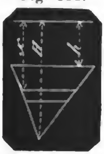
$$M_H^h = \frac{2\sqrt{g}B}{H-h}(\frac{2}{5}H^2\sqrt{H} - \frac{2}{3}H\cdot h\sqrt{H} + \frac{4}{15}h^2\sqrt{h})$$
$$= \frac{4\sqrt{g}B}{15(H-h)}(3H^2\sqrt{H} - 5Hh\sqrt{H} + 2h^2\sqrt{h})$$

8. Setzt man $h=0$, liegt also die Dreiecksspitze im Wasserspiegel, so ist die Wassermenge

$$M_B^0 \text{ (hypothetisch)} = \frac{4}{5}\sqrt{g}\cdot B\cdot H\sqrt{H}$$
$$\text{(wirklich)} = \frac{4}{5}\alpha BH\cdot\sqrt{H}$$

9. Liegt das Dreieck mit der horizon-

Fig. 126.



talen Grundlinie B oben, die Spitze unten, so ist die zu x gehörige Horizontale

$$= \frac{H-x}{H-h}B$$

der Flächen-Inhalt des Streifens

$$= \frac{H-x}{H-h}B\cdot\Delta x$$

die Wassermenge durch den Streifen

$$\Delta M_x = 2\sqrt{g}\cdot\sqrt{x}\cdot\frac{H-x}{H-h}\cdot B\cdot\Delta x$$

durch das über x liegende Trapez

$$M_x = \frac{2\sqrt{g}}{H-h}B\int(H-x)\sqrt{x}\cdot\partial x + C$$

hieraus

$$M_H^h = \frac{4\sqrt{g}\cdot B}{15(H-h)}(2H^2\sqrt{H} - 5Hh\sqrt{h} + 3h^2\sqrt{h})$$

Dieses Resultat erhält man, wenn man in M_H^h, No. 7, H mit h vertauscht, weil beide Aufgaben allgemein in die Eine zusammen gefafst werden können: die Wassermenge zu bestimmen, welche durch eine dreieckige Oeffnung fliefst, deren horizontale Grundlinie um die Tiefe H und deren Spitze um die Tiefe h unter dem Wasserspiegel liegt.

10. Für $h=0$, wenn also B im Wasserspiegel liegt, erhält man

$$M_H^0 = \begin{cases}\frac{8}{15}\sqrt{g}B\cdot H\cdot\sqrt{H}\\ \frac{8}{15}\alpha BH\cdot\sqrt{H}\end{cases}$$

11. Um die Wassermengen M_H^0 in No. 8 und 10 zu finden, kann man unmittelbar verfahren, also in No. 8 die Spitze, in No. 10 die Basis in den Wasserspiegel legen. Dann ist der zu x gehörende Streifen

$$\text{ad } 8 = \frac{B}{H}x\Delta x;\ \text{ad } 10 = \frac{B}{H}(H-x)\Delta x$$

$$\Delta M_x = \begin{cases}2\sqrt{g}\sqrt{x}\frac{B}{H}x\cdot\Delta x\\ 2\sqrt{g}\sqrt{x}\frac{B}{H}(H-x)\Delta x\end{cases}$$

$$M_x = \begin{cases}2\sqrt{g}\cdot\frac{B}{H}\int x\sqrt{x}\,\partial x + C\\ 2\sqrt{g}\,\frac{B}{H}\int(H-x)\sqrt{x}\,\partial x + C\end{cases}$$

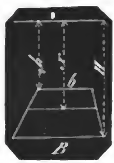
$$M_x = \begin{cases}\frac{4}{5}\sqrt{g}\,\frac{B}{H}x^2\sqrt{x} + C\\ \frac{4}{15}\sqrt{g}\frac{B}{H}(5H-3x)x\sqrt{x} + C\end{cases}$$

In beiden Fällen wird die Constante (mit $x=0$) $= 0$

$$\text{Daher } M_H^0 = \begin{cases}\frac{4}{5}\sqrt{g}BH\sqrt{H}\\ \frac{8}{15}\sqrt{g}B\cdot H\sqrt{H}\end{cases}$$

12. Ist die Ausflufsöffnung ein Trapez, dessen horizontale Grundlinien b und B

Fig. 127.



in den Tiefen h und H unter dem Wasserspiegel, so ist die zu der Höhe x gehörige Länge

$$= \frac{B(x-h)+b(H-x)}{H-h}$$

$$\text{daher } \Delta M_x = 2\sqrt{g}\cdot\sqrt{x}\frac{B(x-h)+b(H-x)}{H-h}\cdot\Delta x$$

$$M_x^h = \frac{2\sqrt{g}}{H-h}\int[B(x-h)+b(H-x)]\times\sqrt{x}\,\partial x + C$$

$$= \frac{4}{15}\frac{\sqrt{g}}{H-h}[3x(B-b)+5(bH-Bh)]x\sqrt{x}+C$$

$$= \frac{4}{15}\frac{\sqrt{g}}{H-h}([3x(B-b)+5(bH-Bh)]x\sqrt{x} - [5bH-3bh-2Bh]h\sqrt{h})$$

für $x=H$ erhält man

$$M_H^h = \frac{4}{15}\,\frac{\sqrt{g}}{H-h}[(3BH+2bH-5Bh)H\sqrt{H} - (5bH-3bh-2Bh)h\sqrt{h}]$$

für $h=0$, wenn also b im Wasserspiegel liegt

$$M_H^0 = \tfrac{4}{15}\sqrt{g}(3B+2b)H\cdot\sqrt{H}$$

13. Liegt in dem Beispiel No. 12 die gröſsere Grundlinie B über der kleineren b, so ist die zu x gehörige horizontale mittlere Länge

$$=\frac{b(x-h)+B(H-x)}{H-h}$$

Es ist also hier gegen No. 12 nur b mit B vertauscht, und so entstehen auch M_H^h und M_H^0, wenn man in den Formeln dafür b mit B vertauscht.

Auch in No. 11, 12 und 13 wird α für $2\sqrt{g}$ gesetzt, wenn statt der hypothetischen die wirkliche Ausfluſsgeschw. gefunden werden soll.

14. In No. 4 ist eines Näherungswerthes für die Ausfluſsgeschw. c gedacht worden, der darin besteht, daſs man als mittlere Geschwindigkeitshöhe die Höhe vom Wasserspiegel bis zum Schwerpunkt der Ausfluſsöffnung nimmt.

Multiplicirt man diese Geschw. c' mit dem Querschnitt der Ausfluſsöffnung, so erhält man die Wassermenge M'.

Folgende Beispiele sollen den Grad der Annäherung darlegen:

1) Das Beispiel No. 6, wenn $h=0$ gesetzt wird, giebt offenbar die gröſste Differenz der Wassermenge.

Nach der richtigen Formel ist

$$M=\tfrac{2}{3}\sqrt{g}\cdot BH\sqrt{H}$$

nach der Näherungsformel, weil der Schwerpunkt auf der Höhe $\frac{1}{2}H$ liegt, ist

$$c'=2\sqrt{g}\sqrt{\tfrac{1}{2}H}$$

und $M'=2\sqrt{g}\sqrt{\frac{1}{2}H}\cdot B\cdot H$

also $M:M'=1:\frac{3}{4}\sqrt{2}=1:1{,}0605$

so daſs näherungsweise die Wassermenge höchstens $0{,}0605=\frac{3}{50}$ zu groſs berechnet wird.

2) Beispiel 2, No. 5, sei $B=1$; $H=10'$; $h=8'$; $2\sqrt{g}$ ist immer $=2\sqrt{15\frac{5}{8}}'=7{,}91'$; so ist nach der Formel

$$M=\tfrac{2}{3}\,7{,}91\cdot1\,(10\sqrt{10}-8\sqrt{8})=47{,}4389$$

Näherungsweise

$$M'=7{,}91\sqrt{10-\tfrac{1}{2}2}\cdot1\cdot2=47{,}4600$$

3) Beispiel No. 7 sei $B=20'$; $h=10'$; $H=18'$; so ist nach der Formel:

$$M=\frac{2\cdot7{,}91\cdot20}{15(18-10)}(3\cdot18^2\sqrt{18}-5\cdot18\cdot10\sqrt{18}+2\cdot10^2\sqrt{10})=2467{,}00\text{ cub.}'$$

Näherungsweise hat man die Höhe bis zum Schwerpunkt

$$=h+\tfrac{2}{3}(H-h)=10+\tfrac{2}{3}(18-10)=15\tfrac{1}{3}'$$

den Inhalt des Dreiecks $=\frac{1}{2}B(H-h)=\frac{1}{2}\cdot20\cdot(18-10)=80\,\square'$, also die Wassermenge näherungsweise

$$M'=7{,}91\cdot80\sqrt{15\tfrac{1}{3}}=2477{,}89\text{ cub.}'$$

4) Wenn in dem vorigen Beispiel $h=0$ ist, wenn also die Spitze des Dreiecks im Wasserspiegel liegt, und $H=18'$ bleibt, so ist nach der Formel No. 8:

$$M=\tfrac{2}{5}\cdot7{,}91\cdot20\cdot18\sqrt{18}=4832{,}49\text{ cub.}'$$

Näherungsweise aus dem 18' hohen Dreieck:

$$M'=7{,}91\cdot\sqrt{\tfrac{2}{3}18}\cdot\tfrac{1}{2}20\cdot18=4932{,}19\text{ cub.}'$$

5) In dem Beispiel No. 9 soll eben so $h=10'$; $H=18'$; $B=20'$ sein. Dann ist nach der Formel

$$M=\frac{2\cdot7{,}91\cdot20}{15(18-10)}(2\cdot18^2\sqrt{18}-5\cdot18\cdot10\sqrt{10}+3\cdot10^2\sqrt{10})=2245{,}98\text{ cub.}'$$

Näherungsweise, weil die Höhe bis zum Schwerpunkt des Dreiecks

$=h+\frac{1}{3}(H-h)=10+\frac{8}{3}=12\frac{2}{3}$ Fuſs ist.

$$M'=7{,}91\cdot\sqrt{12\tfrac{2}{3}}\cdot\tfrac{1}{2}20\cdot8=2252{,}15\text{ cub.}'$$

6) Wenn in dem vorigen Beispiel $h=0$ ist, die Basis des Dreiecks also im Wasserspiegel liegt, $H=18'$ bleibt, ist nach der Formel

$$M=\tfrac{4}{15}\cdot7{,}91\cdot20\cdot18\sqrt{18}=3221{,}66\text{ cub.}'$$

Näherungsweise aus dem 18' hohen Dreieck:

$$M'=7{,}91\times\sqrt{\tfrac{1}{3}18}\cdot\tfrac{1}{2}20\cdot18=3487{,}60\text{ cub.}'$$

7) In dem Beispiel No. 12 sei $H=18'$; $h=10'$; $B=20'$; $b=12'$; dann ist nach der Formel:

$$M=\frac{2\cdot7{,}91}{15(18-10)}[(3\cdot20\cdot18+2\cdot12\cdot18-5\cdot20\cdot10)18\cdot\sqrt{18}-(5\cdot12\cdot18-3\cdot12\cdot10-2\cdot20\cdot10)10\sqrt{10}]=3820{,}59\text{ cub.}'$$

Näherungsweise, da der Schwerpunkt des Trapezes von der Basis B entfernt ist um

$$\tfrac{1}{3}(H-h)\frac{B+2b}{B+b}$$

die Höhe vom Wasserspiegel bis zum Schwerpunkt, also

$$H-\tfrac{1}{3}(H-h)\frac{B+2b}{B+b}$$

$$=18'-\tfrac{1}{3}(18-10)\frac{20+2\cdot12}{20+12}=14\tfrac{1}{3}'$$

$$M'=7{,}91\cdot\sqrt{14\tfrac{1}{3}}\cdot\frac{20+12}{2}(18-10)$$

$$=3833{,}18\text{ cub.}'$$

8) Wenn $h=0$ ist, wenn also die obere Grundlinie des Trapezes im Wasserspiegel liegt, sei $H=12'$, die obere Grundlinie

$b = 6'$, die untere $B = 15'$, dann ist nach der Formel:

$$M = \tfrac{2}{15} \cdot 7{,}91 \cdot (3 \cdot 15' + 2 \cdot 6') \cdot 12\sqrt{12} = 2498{,}74 \text{ cub.}'$$

Für das näherungsweise M' hat man die Höhe vom Wasserspiegel bis zum Schwerpunkt:

$$h = \tfrac{1}{3} H \cdot \frac{b+2B}{b+B} = \tfrac{1}{3} 12 \cdot \frac{6+2 \cdot 15}{6+15} = 6\tfrac{6}{7}'$$

also

$$M' = 7{,}91 \cdot \sqrt{6\tfrac{6}{7}} \cdot \tfrac{1}{2}(6+15)12 = 2609{,}87 \text{ cub.}'$$

9) Liegt die längere Grundlinie $B = 15'$ im Wasserspiegel, so ist

$$M = \tfrac{2}{15} \cdot 7{,}91 (3 \cdot 6 + 2 \cdot 15) \cdot 12\sqrt{12} = 2104{,}40$$

das näherungsweise

$$M' = 7{,}91 \cdot \sqrt{5\tfrac{1}{7}} \cdot \tfrac{1}{2}(6+15) \cdot 12 = 2260{,}25$$

15. In den Beispielen No. 14, ad 2, 3, 5 und 7, sind die Unterschiede zwischen der richtigen und der näherungsweise berechneten Wassermenge nur gering, und überall, wo die Ausflufsöffnungen ganz unter Wasser liegen.

No. 14, ad 1, ist allgemein gezeigt, dafs die näherungsweise M' höchstens $1{,}0605 \cdot M$ betragen kann, wenn die Ausflufsöffnung bis zum Wasserspiegel reicht; dies gilt aber nur für rechtwinklige Oeffnungen.

Ad 4 ist die Oeffnung ein Dreieck, dessen Spitze im Wasserspiegel liegt,

$$M = \tfrac{4}{5} \sqrt{g}\, BH\sqrt{H}$$

$$M' = 2\sqrt{g}\sqrt{\tfrac{2}{3} H} \cdot \frac{BH}{2}$$

also $M : M' = 1 : \tfrac{5}{12}\sqrt{6} = 1 : 1{,}0206$

In diesem Fall ist also M' in noch geringerem Verhältnifs unterschieden als ad 1 bei rechtwinkligen Oeffnungen.

In dem Beispiel ist auch

$$M' = 4932{,}19 \text{ cub.}' = 1{,}0206 \cdot M = 1{,}0206 \cdot 4832{,}49 \text{ cub.}'$$

No. 14, ad 6, liegt die Grundlinie des Dreiecks im Wasserspiegel. Es ist

$$M = \tfrac{8}{15}\sqrt{g} \cdot B \cdot H\sqrt{H}$$

$$M' = 2\sqrt{g} \cdot \sqrt{\tfrac{1}{3} H}\, \frac{BH}{2}$$

hieraus $M : M' = 1 : \tfrac{5}{8}\sqrt{3} = 1 : 1{,}08256$ also M' in gröfserem Verhältnifs als ad 1 bei rechtwinkligen Oeffnungen, und es findet dies überall statt, wo die Ausflufsöffnungen nach oben sich verbreitern.

In dem ad 6 aufgeführten Beispiel ist auch

$$M' = 3487{,}60 \text{ cub.}' = 1{,}08256 \cdot M = 1{,}08256 \cdot 3221{,}66 \text{ cub.}'$$

16. Dafs die näherungsweise Wassermenge M' um so gröfser wird, als die nach der jedesmaligen Formel richtig berechnete M, je mehr sich die Oeffnung nach oben erweitert, zeigt sich ganz allgemein aus dem Beispiel No. 14, ad 8 und 9.

Die Wassermenge aus dem Trapez ist

$$M = \tfrac{4}{15}\sqrt{g}(3B + 2b) H \cdot \sqrt{H}$$

die näherungsweise

$$M' = 2\sqrt{g}\sqrt{\tfrac{1}{3} H \cdot \frac{b+2B}{b+B}} \cdot \tfrac{1}{2}(b+B) H$$

also $M : M' = 1 : \dfrac{5\sqrt{3}}{8}\sqrt{1 - \left(\dfrac{B}{3B+2b}\right)^2}$

Je gröfser b wird, desto kleiner wird der Subtrahend der Wurzel, desto gröfser die Wurzel und mit ihr die Wassermenge M'.

Für $B = 0$, also bei einem Dreieck, dessen Basis b im Wasserspiegel liegt, ist M' am gröfsten; man hat nämlich

$$\sqrt{1 - \left(\frac{B}{3B+2b}\right)^2} = \sqrt{\frac{(3B+2b)^2 - B^2}{(3B+2b)^2}}$$

wenn $B = 0$ gesetzt wird $= \sqrt{\dfrac{4b^2}{4b^2}} = 1$

mithin $M : M' = 1 : \tfrac{5}{8}\sqrt{3}$

wie ad 6 schon ermittelt worden.

17. Bei kreisförmigen und elliptischen Ausflufsöffnungen ist es also gerechtfertigt, die Höhe vom Wasserspiegel bis zum Mittelpunkt der Oeffnung als Geschwindigkeitshöhe anzunehmen.

Ausflufs des Wassers aus Oeffnungen bei veränderlicher Druckhöhe.

1. Ein Gefäfs sei auf seine Höhe H mit Wasser gefüllt, so geschieht der Ausflufs desselben aus einer im Boden befindlichen Oeffnung nach No. 1 des vor. Art. mit der Geschwindigkeit $= 2 \cdot \sqrt{g} \cdot \sqrt{H}$

Erhält das Wasser keinen Zuflufs, so sinkt der Wasserspiegel, die Höhe wird immer geringer; ist sie noch h, so ist die Geschw. des Wassers noch $2\sqrt{g}\sqrt{h}$, und zuletzt, in dem Augenblick der gänzlichen Ausleerung, wird die Geschw. $= 2\sqrt{g}\sqrt{0} =$ Null.

Die Geschwindigkeiten nehmen also gleichförmig ab, und zwar gerade so, wie wenn, nach Lehren der Mechanik, ein Körper mit der Anfangsgeschw. $c = 2\sqrt{g}\sqrt{H}$ senkrecht in die Höhe geworfen wird, wobei er ebenfalls, zur gröfsten Höhe H gelangend, die Endgeschwindigkeit $=$ Null hat. Oder es ist auch der umgekehrte Fall von dem, wenn ein Körper von der Höhe H ab mit der Anfangsgeschw. $= 0$ frei herabfällt, wo er die Endgeschw. $= 2\sqrt{g}\sqrt{H}$ erhält; und Fallen und Steigen geschieht in einerlei Zeit.

Setzt man diese Zeit des Fallens oder des Steigens $= t$ Secunden, so ist

$$t = \frac{c}{2g}$$

und die Höhe $H = gt^2$

Aus $t = \frac{c}{2g}$ hat man $c = 2gt$

Wenn also ein Körper t Sec. lang mit unveränderter Geschw. c fiele, so würde er die Höhe $H' = ct = 2gt \cdot t = 2gt^2$ also die Höhe $2H$ fallen.

Bleibt nun in einem prismatischen Gefäfs vom Querschnitt A die Wasserhöhe H, also auch die Geschwindigkeitshöhe für eine im Boden des Gefäfses befindliche Oeffnung a unverändert, und fliefst die Wassermenge $M = A \cdot H$ in t Sec. aus, so fliefst dieselbe Wassermenge AH in $2t$ Sec. aus, wenn während des Ausfliefsens kein Zuflufs stattfindet, oder, was dasselbe ist, das Gefäfs wird in $2t$ Secunden entleert.

Bei gleichbleibender Höhe H ist die Ausflufsgeschwindigkeit $c = 2\sqrt{g}\sqrt{H}$ der Ausflufsquerschnitt $= a$ mithin die Wassermenge per Secunde

$$M = 2a\sqrt{g} \cdot \sqrt{H}$$

die Gesammt-Wassermenge $= A \cdot H$ mithin die Zeit, in der M ausfliefst

$$t = \frac{A \cdot H}{2a\sqrt{g}\sqrt{H}} = \frac{A \cdot \sqrt{H}}{2a\sqrt{g}}$$

folglich die Zeit der Entleerung des Gefäfses

$$T = 2t \text{ (hypothetisch) } = \frac{A\sqrt{H}}{a\sqrt{g}}$$

$$\text{(wirklich) } = \frac{2A \cdot \sqrt{H}}{\alpha a}$$

Wäre die Wasserhöhe im Gefäfs $= h$, so wäre die Zeit des Entleerens

$$T'' = \frac{A\sqrt{h}}{a\sqrt{g}} \text{ oder } \frac{2A\sqrt{h}}{\alpha a}$$

mithin die Zeit, in welcher so viel Wasser ausfliefst, dafs die Höhe H auf die Höhe h herabsinkt:

$$T' \text{ (hypothetisch) } = \frac{A}{a\sqrt{g}}[\sqrt{H} - \sqrt{h}]$$

$$\text{(wirklich) } = \frac{2A}{\alpha a}[\sqrt{H} - \sqrt{h}]$$

2. Die vorstehenden Formeln erhält man mit Hülfe der höheren Analysis (wie vor. Art. No. 5) folgender Art:

Wenn das Wasser von der Höhe H auf die Höhe x gesunken ist, so ist die im Gefäfs vorhandene Wassermenge $= Ax$. Denkt man sich die Höhe x um die sehr kleine Höhe $\triangle x$ vermehrt, so ist die Wassermenge in dem Gefäfs $= A(x + \triangle x)$.

Fig. 128.



War nun die Zeit, in welcher die Höhe H auf die Höhe x herabging, $= t$, so hat man t um eine sehr kleine Zeit $\triangle t$ zu vermindern, um die Zeit $t = \triangle t$ zu erhalten, in der die Wasserhöhe H auf die Höhe $x + \triangle x$ und die Wassermenge AH auf die Menge $A(x + \triangle x)$ herabgegangen ist.

Daher beträgt in der Verminderung der Zeit t um die sehr kleine Zeit $\triangle t$ oder innerhalb des kleinen Wachsthums der Zeit t um $(-\triangle t)$ der Wachsthum der Wassermenge $A \triangle x$.

Während der sehr kleinen Zeit $(-\triangle t)$ aber und erst recht im Verschwinden desselben kann die Wasserhöhe als unveränderlich angesehen werden. Dann ist die Wassermenge, welche per Sec. ausfliefsen würde, $= 2\sqrt{g} \cdot a \cdot \sqrt{x}$ und die in der sehr kleinen Zeit $(-\triangle t)$ ausfliefsende Wassermenge

$$A \triangle x = 2\sqrt{g} \cdot a\sqrt{x}(-\triangle t)$$

woraus

$$\triangle t = -\frac{A}{2\sqrt{g} \cdot a\sqrt{x}} \triangle x$$

und die Zeit, in welcher die Höhe H auf die Höhe x herabgesunken ist,

$$t_x = -\frac{A}{2\sqrt{g} \cdot a} \int x^{-\frac{1}{2}} \partial x + \text{Const.}$$

$$= -\frac{A}{2\sqrt{g} \cdot a} 2\sqrt{x} + \text{Const.}$$

Für $t = 0$ ist der Wasserstand $= H$, d. h. $x = H$, mithin

$$t_H = 0 = -\frac{A\sqrt{H}}{\sqrt{g} \cdot a} + \text{Const.}$$

woraus $C = +\frac{A\sqrt{H}}{a\sqrt{g}}$

folglich $t_x = \frac{A}{a\sqrt{g}} \cdot (\sqrt{H} - \sqrt{x})$

$$t = \left(t_h^H\right) = \frac{A}{a\sqrt{g}}(\sqrt{H} - \sqrt{h}) \text{od. } \frac{2A}{\alpha a}(\sqrt{H} - \sqrt{h})$$

und die Zeit des gänzlichen Entleerens für $h = 0$

$$T = t_0^H = \frac{A\sqrt{H}}{a\sqrt{g}} \text{ oder } \frac{2A\sqrt{H}}{\alpha a}$$

Beispiel. Ist der Querschnitt des prismatischen Gefäfses . . . . . $A = 30□'$
die Ausflufsöffnung . . . . $a = \frac{1}{4}□'$
die ganze Höhe des Gefäfses . $H = 10'$
und nach pag. 216, No. 7 . . . $\alpha = 4{,}89$
so hat man für die gänzliche Entleerung des Gefäfses

$$T = \frac{2 \cdot 30\sqrt{10}}{4{,}89 \cdot \frac{1}{4}} = 155{,}20 \text{ Secunden}$$

die Zeit, in welcher das Wasser zur Hälfte, also bis auf 5 Fufs Höhe ausfliefst

$$T' = \frac{2 \cdot 30}{4{,}89 \cdot \frac{1}{4}}(\sqrt{10} - \sqrt{5}) = 45{,}45 \text{ Secunden,}$$

so dafs zum Ausflufs der zweiten Hälfte 109,65 Secunden gehören.

Denkt man sich in der Aufgabe die Zeit T der völligen Entleerung in m gleiche Theile getheilt, so hat man die Höhe h' des Wassers im Gefäfs, welches darin zurückgeblieben, nachdem der Ausflufs $\frac{n}{m} T$ gedauert hat, aus

$$\frac{n}{m} \frac{A \sqrt{H}}{a \sqrt{g}} = \frac{A}{a \sqrt{g}} (\sqrt{H} - \sqrt{h'})$$

$$\text{woraus } h' = \left(1 - \frac{n}{m}\right)^2 H$$

Nach $\frac{1}{10}$ der Zeit T ist $h = (\frac{9}{10})^2 H = 0{,}81 \cdot H$

„ $\frac{2}{10}$ „ „ T „ $h = (\frac{8}{10})^2 H = 0{,}64 \cdot H$

. . . .

„ $\frac{9}{10}$ „ „ T „ $h = (\frac{1}{10})^2 H = 0{,}01 \cdot H$

4. Denkt man sich in der vorigen Aufgabe die Höhe H in m gleiche Theile getheilt, so erhält man die Zeit t', nach deren Ausflufs das Wasser im Gefäfs noch die Höhe $\frac{n}{m} H$ einnimmt.

$$t' = \frac{A \sqrt{H}}{a \sqrt{g}} \left(1 - \sqrt{\frac{n}{m}}\right)$$

$$\text{oder } \frac{2A \sqrt{H}}{\alpha a} \left(1 - \sqrt{\frac{n}{m}}\right)$$

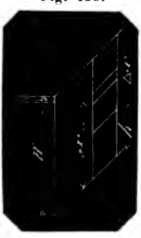
5. In der verticalen Seitenwand eines prismatischen Gefäfses vom horizontalen Querschnitt A und der Höhe H befindet sich eine von oben bis unten offene rechtwinklige Oeffnung von der Breite b; die Zeit t in Secunden zu bestimmen, in welcher das Wasser im Gefäfs noch die Höhe h hat, in welcher also der Wasserspiegel um die Höhe $H - h$ gesunken ist.

In der Zeit t_x sei der Wasserspiegel bis auf die Höhe x herabgesunken, so ist nach pag. 217, No. 3, die Wassermenge, die in der nächsten Secunde ausfliefsen würde, wenn der Wasserspiegel ungeändert bliebe,

$$M_x = \tfrac{2}{3} \alpha b x \sqrt{x}$$

Geschieht nun in der nächstfolgenden

Fig. 129.



sehr kleinen Zeit $\triangle t$ die Senkung des Wasserspiegels um die sehr kleine Höhe $\triangle x$, so dafs mit der Zeit $t + \triangle t$ der Wasserspiegel auf die Höhe $x - \triangle x$ gekommen ist, so ist für das Verschwinden von $\triangle t$ und $\triangle x$ der Wasserspiegel als unverändert zu betrachten; die während der Zeit $\triangle t$ ausfliefsende Wassermenge ist (s. No. 3):

$$\triangle M_x = A(-\triangle x) = \tfrac{2}{3} \alpha b x \sqrt{x} \cdot \triangle t$$

$$\text{woraus } \triangle t_x = \frac{3A}{2\alpha b} \cdot \frac{-\triangle x}{x \sqrt{x}}$$

$$\text{und } t_x = \frac{3A}{2\alpha b} \int \frac{-\partial x}{x^{\frac{3}{2}}} + \text{Const.}$$

$$= -\frac{3A}{2\alpha b} \int x^{-\frac{3}{2}} \cdot \partial x + C$$

$$= + \frac{3A}{\alpha b \sqrt{x}} + C$$

Für $t = 0$ ist das Wasser auf der ursprünglichen Höhe H geblieben, $x = h$ und

$$t_H = 0 = + \frac{3A}{\alpha b \sqrt{H}} + C$$

$$\text{woraus } C = - \frac{3A}{\alpha b \sqrt{H}}$$

$$\text{und } t_h = \frac{3A}{\alpha b} \left(\frac{1}{\sqrt{h}} - \frac{1}{\sqrt{H}}\right)$$

und wenn man die Klammergröfse mit Hh multiplicirt und dividirt

$$t_h = \frac{3A}{\alpha b} \cdot \frac{H \sqrt{h} - h \sqrt{H}}{Hh}$$

Setzt man in die vorletzte, für t_h gefundene Formel $h = 0$, so entsteht

$$t_h = \frac{3A}{\alpha b} \left(\frac{1}{0} - \frac{1}{\sqrt{H}}\right) = \infty$$

Denn mit der Abnahme der Druckhöhe bis zu der Höhe = Null, bei welcher die gänzliche Ausleerung erst geschieht, nimmt auch die Geschwindigkeit immer mehr ab, wird in der Nähe von Null Höhe unendlich klein, mithin auch die ausfliefsende Wassermenge unendlich klein, und somit findet eigentlich eine vollkommene Leerung des Gefäfses durch blofses Ausfliefsen in keiner noch so grofsen Zeit statt; die letzten Antheile von Wasser verschwinden durch Verdunstung.

Beispiel. Ein Bassin hat einen Flächenraum A von 10000 □Fufs, einen Wasserstand H von 10 Fufs, die Ausflufsschleuse hat 4 Fufs Breite mit Flügeln, diese wird auf die ganze Höhe $H = 10$ Fufs geöffnet, so ist die Zeit, in welcher das Wasser 4 Fufs tief abgelassen wird, weil hier α (pag. 216, No. 4) = 6,76 ist

$$t = \frac{3 \cdot 10000}{6{,}76 \cdot 4} \cdot \frac{10 \sqrt{10 - 4} - (10 - 4) \sqrt{10}}{10 \cdot (10 - 4)}$$

$$= 101{,}86 \text{ Sec.}$$

Wenn das Bassin 8 Fuſs tief, also bis auf 2 Fuſs Wasserstand abgelassen werden soll

$$t=\frac{30000}{27,04}\cdot\frac{10\sqrt{2}-2\sqrt{10}}{10\cdot 2}=433,66 \text{ Sec.}$$

so daſs die folgenden 4 Fuſs Tiefe erst in 331,8 Sec. ausflieſsen.

6. Theilt man die Höhe H des Behälters No. 5 in m gleiche Theile, so findet man die Zeit T', nach welcher der Wasserstand noch $\frac{n}{m}H$ beträgt, aus

$$T'=\frac{3A}{\alpha b}\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{n}{m}H}}-\frac{1}{\sqrt{H}}\right)$$

$$=\frac{3A}{\alpha b\sqrt{\frac{n}{m}H}}\left(1-\sqrt{\frac{n}{m}}\right)$$

Setzt man, um das Verfahren für Berechnung der gänzlichen Entleerung zu finden, $n=1$, so hat man

$$T=\frac{3A\sqrt{m}}{ab\sqrt{H}}\left(1-\sqrt{\frac{1}{m}}\right)$$

Je gröſser man m setzt, desto gröſser wird T, desto kleiner aber zugleich $1-\sqrt{\frac{1}{m}}$ und man hat daher für ein beliebig groſses m

$$T=\frac{3A}{\alpha b\sqrt{H}}\cdot\sqrt{m}$$

In dem Beispiel No. 5 ist $H=10$ Fuſs $=120$ Zoll $=1440$ Linien.

Man findet demnach die Zeit, in welcher das Wasser bis auf eine Linie Höhe ausgeflossen ist

$$T=\frac{3\cdot 10000}{6,76\cdot 4\sqrt{10}}\sqrt{1440}=13314 \text{ Sec.}$$
$$=3 \text{ Stunden } 41 \text{ Min. } 54 \text{ Sec.}$$

Setzt man die in dem Bassin verbleibende Höhe $=2$ Linien, also $m=720$, so erhält man

$T_1=9414$ Sec. $=2$ Std. 36 Min. 54 Sec.

so daſs der Ausfluſs des Wassers auf die zweite Linie Höhe allein 1 Std. 5 Min. gedauert hat.

7. Hat in der Aufgabe No. 1 und No. 2 die in dem Gefäſs befindliche Wassermenge AH in jeder Secunde einen Zufluſs m, welcher kleiner ist als die in der ersten Zeit per Secunde ausflieſsende Wassermenge M, so sei wieder in der Zeit t der Wasserstand von der Höhe H auf die Höhe x gesunken, mit der Abnahme von t und $\triangle t$ entsteht die Zunahme von x um $\triangle x$, welche während des Verschwindens die Höhe x unverändert läſst. Die per Secunde bei constantem x ausflieſsende Wassermenge würde sein

$$\alpha a\sqrt{x}=M$$

und in der Zeit $\triangle t$

$$\alpha a\sqrt{x}\triangle t=M_{\triangle x}$$

Diese Wassermenge würde $=A\cdot\triangle x$ sein, wenn kein Zufluſs stattfände, sie ist aber wirklich $A\triangle x+m\triangle t$ daher

$$\alpha a\sqrt{x}\cdot\triangle t=A\triangle x+m\triangle t$$

woraus, mit Berücksichtigung, daſs $\triangle x$ zu $(-\triangle t)$ gehört

$$\triangle t=-\frac{A}{\alpha a\sqrt{x}-m}\triangle x$$

$$\text{und } t=-A\cdot\int\frac{\partial x}{\alpha a\sqrt{x}-m}+\text{Const.}$$

Man setze des leichteren Integrirens wegen

$$\alpha a\sqrt{x}-m=z$$

$$\text{so ist } x=\left(\frac{z+m}{\alpha a}\right)^2$$

$$\text{und } \partial x=2\frac{z+m}{\alpha^2 a^2}\partial z$$

$$\text{folglich} \int\frac{\partial x}{\alpha a\sqrt{x}-m}=\int 2\cdot\frac{z+m}{\alpha^2 a^2}\cdot\frac{\partial z}{z}$$

$$=\frac{2}{\alpha^2 a^2}\int\left(\partial z+m\frac{\partial z}{z}\right)$$

$$t_x=-\frac{2A}{\alpha^2 a^2}(z+m\log n\, z)+\text{Const.}$$

für z den ursprünglichen Werth gesetzt

$$t_x=-\frac{2A}{\alpha a}\left[\sqrt{x}+\frac{m}{\alpha a}\left(1+ln(\alpha a\sqrt{x}-m)\right)\right]+C$$

Für $x=H$ beginnt der Ausfluſs, also $t=0$, woher

$$C=+\frac{2A}{\alpha a}\left[\sqrt{H}+\frac{m}{\alpha a}\left(1+ln(\alpha a\sqrt{H}-m)\right)\right]$$

und

$$t_h^H=\frac{2A}{\alpha a}\left(\sqrt{H}-\sqrt{h}+\frac{m}{\alpha a}ln\frac{\alpha a\sqrt{H}-m}{\alpha a\sqrt{h}-m}\right)$$

findet kein Zufluſs statt, so ist $m=0$ und

$$t_h^H=\frac{2A}{\alpha a}(\sqrt{H}-\sqrt{h})$$

wie No. 1 entwickelt worden. Die Auflösung ist nur möglich, wenn $\alpha a \sqrt{h} > m$; denn für $\alpha a \sqrt{h} = m$ entsteht

$ln(\alpha a \sqrt{H} - m) - ln\, 0$, und

$log\, 0$ ist unmöglich.

Wird $\alpha a \sqrt{H} < m$, so entsteht der *log* einer negativen Gröfse, der ebenfalls unmöglich ist. Beides geht aus der Natur der Aufgabe hervor, denn wenn H auf diejenige Höhe h' gesunken ist, dafs

$$\alpha a \sqrt{h'} = m$$

so bleibt der Wasserspiegel constant auf h' stehen, es geschieht also keine weitere Entleerung des Gefäfses.

Eben so geschieht keine Senkung des Wasserspiegels, wenn

$$m \gtreqless \alpha a \sqrt{H}$$

Beispiel. In dem Beispiel ad No. 3, pag. 222, wird das Gefäfs in 155,2 Secunden gänzlich entleert. Bei 10 Fufs anfänglicher Druckhöhe würde die Wassermenge per Sec. sein

$$M = 4{,}89 \cdot \tfrac{1}{4} \cdot \sqrt{10} = 3{,}866 \text{ cub.}'$$

Erhält das Gefäfs Zuflufs, so kann eine theilweise Entleerung desselben nur geschehen, wenn er weniger als 3,866 cub.' per Sec. beträgt. Der Zuflufs per Sec. sei $m = 2$ cub.', so hat man diejenige Höhe h, bei welcher der Ausflufs 2 cub.' Wasser beträgt, aus der Gleichung

$$2 = 4{,}89 \cdot \tfrac{1}{4} \cdot \sqrt{x}$$

woraus $x = 2{,}67647$ Fufs.

Auf dieser Höhe also bleibt das Wasser im Gefäfs stehen, weil Zuflufs und Abflufs sich gleich sind.

Um nun zu erfahren, in welcher Zeit t das Wasser bis auf die Höhe 4 Fufs sinkt, hat man

$$t = \frac{2 \cdot 30}{4{,}89 \cdot \frac{1}{4}} \left(\sqrt{10} - \sqrt{4} + \frac{2}{4{,}89 \cdot \frac{1}{4}}\, logn \frac{4{,}89 \cdot \frac{1}{4} \sqrt{10} - 2}{4{,}89 \cdot \frac{1}{4} \sqrt{4} - 2} \right) = 57{,}0454 + 80{,}294 \cdot ln \frac{1{,}865912}{0{,}445}$$

Nun ist $log\ brig\ 1{,}865912 = 0{,}2708912$

„ „ $0{,}445 = 0{,}6483600 - 1$

mithin „ „ Quotient $= 0{,}225312$

Es ist aber $log\, n\, Z = 2{,}302585 \times log\ brig\ Z$

mithin $ln \dfrac{1{,}865912}{0{,}445} = 2{,}302585 \times 0{,}225312$

Man rechne nun

log 80,294	= 1,9046831
„ 2,302585	= 0,2709073
„ 0,225312	= 0,3527843 − 1
log Product	= 1,5283747
das Product	= 33,7575
hierzu	= 57,0454
t	= 90,803 Secunden.

8. Die Bedingung in der Aufgabe No. 7, dafs nur Ausflufs möglich ist, wenn $\alpha a \sqrt{h} > m$, liegt, wie auch dort erwähnt, schon in der Formel, indem die *log* für Null oder für eine negative Gröfse beide unmöglich sind.

Es ist aber doch eine natürliche Frage, welches die Zeit t sei, in der der Wasserspiegel auf die Höhe h' als Grenzwerth, nämlich wo

$$\alpha a \sqrt{h'} = m$$

wird (im Beispiel No. 7; $h' = 2{,}6765$ Fufs), herabsinkt.

Für diese Frage findet dasselbe Verhältnifs No. 6 statt: die Zeit t ist ∞ grofs, indem die letzten sehr kleinen Höhen über h' eine immer gröfsere Zeit zum Sinken erfordern, je näher sie h' kommen.

Man setze in die Formel für t (No. 7) den Nenner von *log nat*

$$\alpha a \sqrt{h} - m = \alpha a \sqrt{h' + \frac{1}{n} h'} - m$$

$$= \alpha a \sqrt{h'} \sqrt{1 + \frac{1}{n}} - m$$

$$= m \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1 \right)$$

da nun

$$\sqrt{1 + \frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + \frac{1}{16n^3} - \ldots$$

für ein beliebig grofses n aber die Glieder mit den Potenzen von n als unbedeutend fortgelassen werden können, so ist

$$\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1 = \frac{1}{2n}$$

zu setzen; und man hat für h'

$$t = \frac{2A}{\alpha a} \left[\sqrt{H} - \sqrt{h'} + \frac{m}{\alpha a} ln \frac{\alpha a \sqrt{H} - m}{\frac{m}{2n}} \right]$$

$$= \frac{2A}{\alpha a} \left[\sqrt{H} - \sqrt{h'} + 2{,}302585 \cdot \frac{m}{\alpha a} log \frac{\alpha a \sqrt{H} - m}{m} \cdot 2n \right]$$

Nun berechne man für einen speciellen Fall den ganzen Ausdruck bis auf das beliebig zu nehmende n.

Für das Beispiel No. 7 ist die Höhe $h' = 2{,}6765$ Fufs

$$\frac{2A}{\alpha a}[\sqrt{H}-\sqrt{h'}]=\frac{2\cdot 30}{4{,}89\cdot\frac{1}{4}}[\sqrt{10}-\sqrt{2{,}6765}]=74{,}9106$$

$$\frac{2A}{\alpha a}\cdot 2{,}302585\cdot\frac{m}{\alpha a}=\frac{2\cdot 30\cdot 2}{(4{,}89\cdot\frac{1}{4})^2}\cdot 2{,}302585=$$

$$(log=2{,}2668991)\ 184{,}8839$$

$$log\,2\frac{\alpha a\sqrt{H}-m}{m}=log\,2\frac{4{,}89\cdot\frac{1}{4}\cdot\sqrt{10}-2}{2}=0{,}2708651$$

$$184{,}8839\times 0{,}2708651=50{,}0786$$

Man hat demnach

$$t=74{,}9106+50{,}0786+184{,}8830\ log\,n$$

Für n kann jede beliebige Zahl genommen werden; soll aber $\frac{1}{n}$ ein aliquoter Theil von $h'=2{,}6765$ Fuſs $=32{,}118$ Zoll $=385{,}4$ Linien werden, so erhält man für $\frac{1}{n}h'=\frac{1}{10}$ Linie, $n=3854$

log 3854	$=3{,}5859117$
log 3,5859117	$=0{,}5545996$
log 184,8839	$=2{,}2668991$
log Product	$=2{,}8214987$
letzter Summand	$=662{,}9773$
74,9106 + 50,0786	$=124{,}9892$
Summa	787,9665 Sec.
	= 13 Min. 8 Sec.

Die letzte Formel für t mit Einführung des n hat nur den Vortheil, daſs man schneller die Zeit für den Unterschied sehr kleiner Höhen berechnen kann; es ist jedoch zu bemerken, daſs dabei der Subtrahend $\sqrt{h'}$ statt $\sqrt{h}$ um $\frac{1}{n}h$ zu klein in Rechnung gestellt wird.

In dem vorstehenden Beispiel ist statt

$\sqrt{2{,}6765}$ . . . . $=1{,}636001$

die richtige Zahl $\sqrt{2{,}6765'+\frac{1}{10}'''}$

$=\sqrt{2{,}6772}$ . . . . $=1{,}636215$

zu klein um 0,000214

Der Werth von t also zu klein um

$$\frac{2\cdot 30}{4{,}89\cdot\frac{1}{4}}0{,}000214=0{,}0105 \text{ Secunden}$$

welches ohne Einfluſs ist.

9. Die vorstehende Aufgabe ist die einfachste unter der Bedingung, daſs Zufluſs stattfindet. Bei anderen ist die Auflösung schwierig und langwierig.

Wenn z. B. in der Aufgabe No. 5 ein Zufluſs an Wasser $=m$ per Secunde stattfindet, dann ist dort

$$\triangle M_x=A(-\triangle x)+m\triangle t=\tfrac{2}{3}\alpha b x\sqrt{x}\cdot\triangle t$$

woraus

$$\triangle t=-\frac{A}{\frac{2}{3}\alpha b x\sqrt{x}-m}\triangle x$$

und $$t_x=-A\int\frac{\partial x}{\frac{2}{3}\alpha b x\sqrt{x}-m}+C$$

Setzt man des leichteren Integrirens wegen

$$\tfrac{2}{3}\alpha b x\sqrt{x}-m=z$$

so ist $$x=\sqrt[3]{\left(\frac{z+m}{\frac{2}{3}\alpha b}\right)^2}$$

$$\partial x=\frac{1}{\alpha b}\sqrt[3]{\frac{\frac{2}{3}\alpha b}{z+m}}\,\partial z$$

$$t_x=-\sqrt[3]{\frac{\frac{2}{3}\alpha b}{\alpha b}}\,A\int\frac{\partial z}{z\sqrt[3]{z+m}}+C$$

Setzt man nochmals

$\sqrt[3]{z+m}=y$

so ist $z=y^3-m$

$\partial z=3y^2\partial y$

und $$t_x=-\frac{3\sqrt[3]{\frac{2}{3}\alpha b}}{\alpha b}\cdot A\int\frac{y\,\partial y}{y^3-m}+C$$

Dies Integral besteht aus 2 Summanden, von welchen der eine ein $log n$, der andere ein $arc\ tg$ ist. Hierzu die Rücksubstitution von y auf z und auf x, die Einführung der Constante bei $t=0$ für $x=H$ giebt einen sehr weitläufigen Ausdruck für t.

Ausfluſs des Wassers aus zusammengesetzten Behältern.

Es seien mehrere Gefäſse A, A', A''... durch Scheidewände von einander getrennt, in diesen aber befinden sich dicht über dem gemeinschaftlichen horizontalen Boden Oeffnungen von den Querschnitten a, a', a''...; es sind demnach die Gefäſse A und A' durch die Oeffnung a, die Gefäſse A' und A'' durch die Oeffnung a' u. s. w. communicirend verbunden, die letzte Oeffnung a'' aus dem letzten Gefäſs A'' münde frei aus.

Flieſst nun in das Gefäſs A per Secunde M Kubikfuſs Wasser und ist a nicht im Stande, diese Wassermenge durchzulassen, so steigt das Wasser in A und es würde auf eine Höhe x steigen, bei welcher $\alpha a\sqrt{x}=M$ durch a ausflieſst. und das Wasser würde in A auf der Höhe x stehen bleiben, wenn a in's Freie mündete.

Allein a mündet in das Gefäſs A'; a' ist zu klein, um M ohne Druckhöhe durchzulassen, das Wasser steigt also in A',

Fig. 130.



und wenn a' in's Freie mündet, bis zu einer Höhe x_1, daſs $\alpha a' \sqrt{x_1} = M$.

So wie aber das Wasser in A' steigt, wird die Wirkung der Druckhöhe x in A vermindert, und die Steigung des Wassers in A muſs gleichfalls zunehmen, damit der Ueberschuſs der Höhe in A über die in A' die zum Ausfluſs von M aus a erforderliche Höhe x verbleibe, und erst, wenn die Höhe in A von x auf $x+x_1$ gestiegen ist, dann verbleiben beide Höhen $x+x_1$ in A; x_1 in A' und aus jeder der beiden Oeffnungen a und a' flieſst M aus.

Mündet a' in ein drittes Gefäſs, dessen Ausfluſs-Oeffnung a'' ist, so steigt das Wasser darin bis zu der Höhe x_2, bei welcher $\alpha a'' \sqrt{x_2} = M$; in A' steigt das Wasser auf die Höhe $x'+x''$, in A auf die Höhe $x+x_1+x_2$ u. s. w. Bei n Gefäſsen ist die Wasserhöhe

in $A = x+x_1+x_2+\dots x_n$

„ $A' = x_1+x_2+\dots x_n$

. . . .

„ $A_n = x_n$

Bei diesem letzten Gefäſs A_n ist also $\alpha a_n \sqrt{x_n} = M$, woraus

$$x_n = \left(\frac{M}{\alpha a_n}\right)^2$$

Eben so ist für

$$A_{n-1}\quad x_{n-1} = \left(\frac{M}{\alpha a_{n-1}}\right)^2$$

. . . .

und für $A \quad x = \left(\frac{M}{\alpha a}\right)^2$

Die in dem ersten Gefäſs A erforderliche Gesammt-Druckhöhe $H = x+x_1+x_2+\dots x_n$ ist demnach

$$H = \frac{M^2}{\alpha^2}\left[\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{a'}\right)^2 + \dots \left(\frac{1}{a_n}\right)^2\right]$$

Sind alle Oeffnungen gleich groſs, $a = a' = a'' \dots$, so hat man $H = n\frac{M^2}{\alpha^2 a^2}$

Beispiel 1. Bei 3 mit einander verbundenen Gefäſsen hat die erste Oeffnung 5 □", die zweite 6 □", die dritte 8 □" Querschnitt, der Zufluſs in's erste Gefäſs beträgt per Sec. 400 Kubikzoll. Welches sind die 3 Wasserhöhen, nachdem der Beharrungszustand eingetreten ist?

Setzt man (nach pag. 216, No. 7) $\alpha = 4{,}89$; so hat man die dritte Druckhöhe

$$= x_2 = \left(\frac{400 (\text{cub.}'')}{4{,}89 \cdot 8 (\square'')}\ \text{Zoll}\right)^2 = \left(\frac{400}{4{,}89 \cdot 8 \cdot 12}\right)^2 \text{ Fuſs} = -'\ 8''\ 8{,}55'''$$

$$\text{die zweite } x_1 = \left(\frac{400}{4{,}89 \cdot 6 \cdot 12}\right)^2 \text{ Fuſs} \qquad = 1'\ 3''\ 5{,}87'''$$

$$\text{der Wasserstand im zweiten Gefäſs} \qquad = 2'\ -''\ 2{,}42'''$$

$$\text{die erste } x = \left(\frac{400}{4{,}89 \cdot 5 \cdot 12}\right)^2 \text{ Fuſs} \qquad = 1'\ 10''\ 3{,}65'''$$

$$\text{der Wasserstand im ersten Gefäſs} \qquad = 3'\ 10''\ 6{,}07'''$$

Beispiel 2. Die Ausfluſsöffnungen der 3 Gefäſse (Beispiel 1) 5 □", 6 □" und 8 □" sind gegeben, es wird gefragt, wie groſs der Zufluſs per Secunde in das erste Gefäſs sein müsse, damit das Wasser darin 3' 10½" hoch steige und für den Beharrungszustand so hoch darin verbleibe.

Man hat

$$3'\ 10\tfrac{1}{2}'' = \frac{M^2}{4{,}89^2}\left[\left(\frac{1}{5\square''}\right)^2 + \left(\frac{1}{6\square''}\right)^2 + \left(\frac{1}{8\square''}\right)^2\right]$$

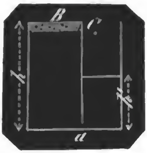
$$\text{also } M = 4{,}89 \sqrt{\frac{3\tfrac{7}{8}}{\left(\frac{144}{5}\right)^2 + \left(\frac{144}{6}\right)^2 + \left(\frac{144}{8}\right)^2}}\ \text{cub.}'$$

$$= 4{,}89 \cdot 1728 \sqrt{\frac{3\tfrac{7}{8}}{1729{,}44}} = 399{,}9776 \text{ Kubikzoll}$$

oder die im Beispiel 1 gegebenen 400 Kubikzoll.

2. Sind zwei Gefäfse, *B*, *C*, durch eine Scheidewand von einander getrennt, befindet sich in derselben am Boden eine Oeffnung vom Querschnitt a, und wird das eine Gefäfs *B* auf die Höhe h voll Wasser erhalten, so findet man die Zeit t, in welcher das Gefäfs *B* auf die ganze Höhe h oder auf eine kleinere Höhe h' mit Wasser sich anfüllt, wenn dessen Querschnitt A gegeben ist, unter derselben Betrachtung wie pag. 222 die Entleerung eines Gefäfses gefunden worden ist, wenn man statt des dortigen F a l l e n s des Wassers hier S t e i g e n sagt.

Fig. 131.



Die Zeit also, in welcher das Wasser in *C* auf die Höhe h steigt, ist

$$t = \frac{2A\sqrt{h}}{\alpha \cdot a}$$

die Zeit, in welcher es auf eine Höhe h' steigt

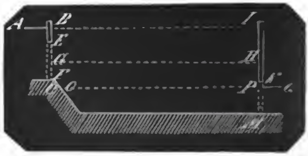
$$t' = \frac{2A}{\alpha a}\left[\sqrt{h} - \sqrt{h - h'}\right]$$

B e i s p i e l über die Füllung und Leerung einer Schleusenkammer.

Die preufsischen Schleusen haben jetzt in den Häuptern 17 Fufs, in den Kammern am Boden 30 Fufs, in den Oberkanten 32 Fufs lichte Breite, von Drempel zu Drempel 131 Fufs Länge, in der Kammer also im Mittel 4030 □Fufs Grundfläche, und bei 10 Fufs Entfernung des Ober- vom Unterwasserspiegel 40300 cub.′ Inhalt; die Füllung und Leerung geschieht meistens durch gemauerte Umläufe, deren Ausflufsöffnungen ganz unter Wasser liegen. Früher hatten die Schleusen gröfsere Dimensionen, breitere Häupter und die Füllung und Leerung der Kammern geschah durch Oeffnungen in den Schleusenthoren, die durch Aufzugvorrichtungen geöffnet und geschlossen wurden, wie dies in Eytelwein's Wasserbaukunst, Heft 4, speciell gezeichnet und beschrieben worden, und ein Beispiel zur Berechnung der Zeit, zur Füllung und Leerung der Kammer in dessen Hydraulik, pag. 144. Aus Pietät gegen diesen ausgezeichneten Mann und seine uns hinterlassenen Werke soll dasselbe Beispiel hier aufgeführt werden.

BC ist das Oberthor, *AB* der vor der Kammer stehende Oberwasserspiegel, *OQ* der Unterwasserspiegel, das Unterthor *IM* wird geschlossen, das in der Kammer befindliche Schiff soll von *OP* nach *AB* gehoben werden; die Oeffnung *EF* des Oberthors wird geöffnet und die Kammer bis zur Höhe *ABI* gefüllt. Die Höhe *OB*, der Unterschied zwischen beiden

Fig. 132.



Wasserspiegeln ist 10′, die Höhe der Schützöffnung 4′, ihre Breite $2\frac{1}{2}'$, ihr Querschnitt (a) also $4' \times 2\frac{1}{2}' = 10$□′, ihr Schwerpunkt *G* liegt 5′ unter dem Oberwasserspiegel, also auch 5′ über dem Unterwasserspiegel, der Raum *GHCP* beträgt 23000 cub.′, die Länge *GH* der Schleusenkammer 200 Fufs, deren Breite 24 Fufs, deren Grundfläche also 4800 □′ und der Raum *BIGH* bei 5′ Höhe, mithin 24000 cub.′

Der untere Raum *GHOP* wird also eben so gefüllt, als wenn das Wasser durch *EF* frei ausströmte, mithin die Wassermenge per Secunde nach der Formel (pag. 217) $M = \alpha a \sqrt{h}$

Hier ist $a = 10$□′; $h = 5'$; $\alpha = 5$ (nach Eytelwein), daher

$$M = 5 \cdot 10\sqrt{5} = 50\sqrt{5} \text{ cub.}'$$

Die Wassermenge 23000 cub.′ fliefst also aus in T Secunden, wo

$$T = \frac{23000}{50\sqrt{5}} = 205{,}72 \text{ Secunden.}$$

Die Füllung des über *GH* befindlichen Raums von 24000 cub.′ bei 5′ Höhe wird berechnet nach der letzten Formel

$$T' = \frac{2A\sqrt{h}}{\alpha a}$$

Hier ist $A = 4800$□′, $h = 5'$, $a = 10$□′, $\alpha = 5$, daher

$$T' = \frac{2 \cdot 4800 \cdot \sqrt{5}}{5 \cdot 10} = 429{,}33 \text{ Secunden.}$$

Beide Zeiten $T + T' = 205{,}72 + 429{,}33$ geben die Zeit zur Füllung der Schleusenkammer = 635,05 Secunden = 10 Minuten 35 Secunden.

Behält man die von Eytelwein gegebenen Dimensionen bei, setzt aber gemauerte Umläufe statt der Thoröffnungen,

deren Ein und Ausflufsöffnungen auch bei dem niedrigsten Wasserstande unter Wasser liegen, kreis- oder ellipsenförmig sind und deren Mündungen in Form einer Trompetenstürze Erweiterungen haben, damit die Contraction möglichst vermindert werde, so hat die Ausflufsöffnung a bei 10 □′ Querschnitt etwa $3\frac{1}{2}'$ Durchmesser, und deren Mittelpunkt mag 2′ tief unter Wasser liegen. Dann findet die Formel

$$t = \frac{2A\sqrt{h}}{\alpha a}$$

einmal, und die Formel

$$t' = \frac{2A}{\alpha a}\left[\sqrt{h} - \sqrt{h - h'}\right]$$

dreimal Anwendung. Denn der untere Raum bis GH hat bei 23000 cub.′ Inhalt und 5′ Höhe die Grundfläche $A = \frac{1}{5} \cdot 23000 = 4600$ □′; da nun der Schwerpunkt der Ausflufsöffnung 2′ unter dem Wasserspiegel liegt, so erhält man die Zeit der Füllung des unteren Raums, wenn man die Zeit der Füllung auf 7′ Höhe berechnet und von dieser die Zeit der Füllung auf 2′ Höhe, die schon stattfindet, abzieht; und hierauf berechnet man für den über GH belegenen Theil der Kammer, wo $A = 4800$ □′ ist, die Zeit, in welcher die Kammer auf 12′ Höhe gefüllt wird, und zieht von dieser die Zeit ab, in welcher die Kammer auf die schon vollen 7′ Höhe gefüllt wird.

Die oben gedachten 4fachen Formel-Anwendungen lassen sich für die Praxis abkürzen: Es sei die Höhe vom Schwerpunkt der Ausflufsöffnung bis zum Unterwasserspiegel $OP = h''$, von OP bis $GH = h'$, von GH bis $BI = h$; die Grundfläche der Schleusenkammer über $GH = A$, unter $GH = A'$. Dann hat man die Zeit zur Füllung bis OP

$$t'' = \frac{2A'}{\alpha a}\left[\sqrt{h + h' + h''} - \sqrt{h + h'}\right]$$

bis GH

$$t' = \frac{2A'}{\alpha a}\left[\sqrt{h + h' + h''} - \sqrt{h}\right]$$

und in Beziehung auf den oberen Theil

$$t_1 = \frac{2A}{\alpha a}\left[\sqrt{h + h' + h''} - \sqrt{h}\right]$$

bis BI

$$t = \frac{2A}{\alpha a}\sqrt{h + h' + h''}$$

die Zeit zur Füllung des unteren Kammerraums ist

$$t' = t'' = T = \frac{2A'}{\alpha a}\left(\sqrt{h + h'} - \sqrt{h}\right)$$

die Zeit zur Füllung des oberen Kammerraums

$$t - t_1 = T' = \frac{2A}{\alpha a}\sqrt{h}$$

woraus zugleich zu ersehen, dafs die Zeiten der Kammerfüllung von der Tiefe h'' der Ausflufsöffnung unter dem Wasserspiegel unabhängig ist.

Setzt man nun die Werthe $A' = 4600$, $A = 4800$, $h = 5$, $h' = 5$, $\alpha = 5$, $a = 10$, so hat man

$$T = \frac{2 \cdot 4600}{5 \cdot 10}\left(\sqrt{10} - \sqrt{5}\right) = 170{,}42 \text{ Sec.}$$

$$T' = \frac{2 \cdot 4800}{5 \cdot 10}\sqrt{5} \qquad = 429{,}33 \quad „$$

$$T + F' \qquad = 599{,}75 \text{ Sec.}$$

T ist bei dem Umlauf also geringer als bei einer Thoröffnung, und natürlich weil die Druckhöhe bei der ersteren Construction von Anfang bis Ende der Füllung gröfser ist als bei der letzten, während T' für beide Constructionen gleich grofs ist, weil die Art der Füllung einerlei bleibt.

Die Umläufe, besonders bei der oben beschriebenen Form deren Mündungen, gewähren aber noch den Vortheil, dafs α gröfser und zwar nach pag. 216, No. 4, für Schützöffnungen mit Flügelwänden $= 6{,}76$ gesetzt werden kann. Es ist demnach die Zeit der ganzen Kammerfüllung

$$= \frac{5}{6{,}76} \times 599{,}75 = 443{,}60 \text{ Secunden}$$
$$= 7 \text{ Min. } 23{,}6 \text{ Secund.}$$

Die Ausleerung der Schleusenkammer durch eine Oeffnung in dem Unterthor, welche ganz unter dem Unterwasserspiegel liegt, geschieht bei einerlei α in derselben Zeit, in welcher die Kammer durch Umläufe ausgeleert wird; in Wirklichkeit geschieht sie durch Umläufe in $\frac{5}{6{,}76}$ der Zeit durch Thoröffnungen.

Nach Eytelwein beträgt die Schützöffnung $5 \cdot 2\frac{1}{2} = 12\frac{1}{2}$ □′, demnach die Zeit der Ausleerung durch eine Thoröffnung von BI bis GH

$$= \frac{2 \cdot 4800}{5 \cdot 12\frac{1}{2}} \cdot \left(\sqrt{10} - \sqrt{5}\right) = 142{,}26 \text{ Sec.}$$

von GH bis OP

$$= \frac{2 \cdot 4600}{5 \cdot 12\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{5} \qquad = 329{,}15 \quad „$$

die Zeit der Entleerung $= 471{,}41$ Sec.
$= 7$ Min. $51\frac{1}{2}$ Sec.

die Zeit der Entleerung durch Umläufe

$$\frac{5}{6{,}76} \times 471{,}41 = 348{,}68 \text{ Sec.}$$
$$= 5 \text{ Min. } 48\frac{2}{3} \text{ Sec.}$$

Die Vortheile, welche die Umläufe für die längere Dauer und die geringeren

Unterhaltungskosten des Schleusenbauwerks gewähren, gehören nicht hierher.

Ausfluſs der Luft. Es wird hier Bezug genommen auf die Artikel: Aërostatik, pag. 39, und Aërodynamische Gesetze, pag. 38. Nach dem ersten Art. ist Luft im Gleichgewicht, wenn jedes Theilchen derselben von allen Seiten einerlei Druck erhält. Luft kann also nur ausflieſsen, wenn sie nach der Ausfluſsrichtung hin einen geringeren Gegendruck erfährt, als der ist, dem sie von allen anderen Seiten her ausgesetzt ist. Wenn z. B. die Ausfluſsöffnung in einen absolut leeren Raum mündet oder in einen Raum, der eine Luft von geringerer Dichtigkeit enthält, als die Dichtigkeit der eingeschlossenen Luft beträgt.

Befindet sich in einem Gefäſs mit Oeffnung Luft von einerlei Dichtigkeit mit der äuſseren, so daſs Gleichgewicht stattfindet, und wird eine an die Gefäſswandungen anschlieſsende Scheibe nach der Oeffnung hin bewegt, so wird die Luft zum Ausfluſs gebracht, und zwar dadurch, daſs der innere mit Luft erfüllte Raum vermindert, dieselbe Luftmenge also auf einen geringeren Raum eingeengt, d. h. verdichtet wird, wonach sie von der vor der Oeffnung befindlichen äuſseren Luft einen geringeren Gegendruck empfängt, als ihre einzelnen Theile und nach allen Richtungen auf einander selbst ausüben und mit einer diesem Ueberschuſs an Druck entsprechenden Geschwindigkeit ausflieſst.

2. Die Erscheinungen beim Ausfluſs der Luft sind mit denen beim Ausfluſs der tropfbaren Flüssigkeiten einerlei:

Luft in einem mit Oeffnung versehenen Gefäſs, welche die Dichtigkeit der äuſseren Luft hat, verhält sich wie das Oberwasser vor dem geöffneten Schütz des Oberthors (pag. 228 u. Fig. 132), wenn die Schleusenkammer gefüllt ist; es ist kein Ausfluſs möglich, weil Gleichgewicht da ist.

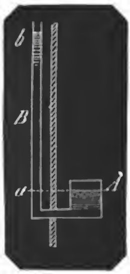
Wasser, welches aus einer in dem freistehenden Boden befindlichen Oeffnung, ohne also in einer anderen Flüssigkeit ein Hinderniſs zu finden, ausflieſst, verhält sich wie eingeschlossene Luft, wenn sie aus einer Oeffnung in den absolut leeren Raum ausströmt.

Strömt dichte Luft aus einem Raum in einen anderen, mit dünnerer Luft gefüllten Raum, so hat man denselben Fall, wenn Wasser aus einem Gefäſs in ein anderes mit ihm communicirendes Gefäſs so lange aufsteigt, bis die Wasserspiegel beider Gefäſse in der Waage stehen.

Aus dem Gesagten geht hervor, daſs **für den Ausfluſs der Luft deren Dichtigkeit**, also nach dem Art. Aërodynamische Gesetze, No. 2 und 5, deren Elasticität, **dieselbe Bedeutung hat, wie für den Ausfluſs tropfbarer Flüssigkeiten deren Druckhöhe.**

3. Das Maaſs der Elasticität von Gasen besteht in einer tropfbaren Flüssigkeit, z. B. Quecksilber, deren Gewicht der Spannung oder der Druckkraft des Gases das Gleichgewicht hält. Befindet sich ein Knierohr mit dem kurzen offenen Schenkel A in dem zu messenden Gase, mit dem langen offenen Schenkel B in einem luftleeren Raum, oder ist dieser lange Schenkel oben geschlossen und der Raum darin über der Flüssigkeit luftleer, so erhebt sich die in dem Rohr befindliche Flüssigkeit in dem langen Schenkel um so mehr, je gröſser die Spannung des Gases ist.

Fig. 133.



Es sei $ab = h$ die Höhe, um welche die Flüssigkeit sich erhebt, das Gewicht deren Kubik-Einheit $= q$, der Querschnitt des in A offenen Flüssigkeitsspiegels $= a$, so ist nach hydrostatischen Gesetzen das Gewicht, welches dem auf eine Fläche $= a$ wirkenden Druck des Gases das Gleichgewicht hält, $= ahq$, wobei der Querschnitt des Schenk. B gleichgültig ist; also der Druck des Gases auf die Flächen-Einheit $= hq$. Ist der Querschnitt des Spiegels $= na$, so ist der Druck des Gases der Flüssigkeitssäule entgegen, das $n$fache des vorigen Drucks $= nahq$, aber auf eine $n$fache Fläche na und wieder der Druck des Gases auf die Flächen-Einheit $= hq$, die Höhe h also von dem Querschnitt des offenen Spiegels in A unabhängig, und h in Vereinigung mit q das Maaſs der Elasticität des Gases.

Hat die Kubik-Einheit der Flüssigkeit das Gewicht mq, so stellt sie sich bei derselben Elasticität des Gases auf eine Höhe h', daſs $h'mq = hq$, also auf die Höhe $h' = \frac{h}{m}$ **und die messenden Höhen der Flüssigkeiten stehen mit deren specifischen Gewichten in umgekehrtem Verhältniſs.** Ist z. B. die Flüssigkeit Wasser, dessen Höhe $h = 14$ Zoll, so würde Quecksilber im Rohr nur etwa 1 Zoll hoch stehen, weil Queck-

silber ungefähr 14 mal schwerer als Wasser ist.

Das so eben beschriebene Mefs-Instrument heifst Manometer, die messende Flüssigkeit die manometrische Flüssigkeit, für welche man, um möglichst kurze Röhren anwenden zu können, in der Regel Quecksilber nimmt. Mündet der offene Schenkel B in einen mit dünnerem Gase gefüllten Raum, so giebt die Höhe h die Differenz der Druckwirkungen beider Gase auf die Flächen-Einheit.

Das Manometer, welches den Druck der über der Erdoberfläche befindlichen atmosphärischen Luft in einer Quecksilbersäule mifst und angiebt, wird Barometer genannt.

4. Um beim Ausflufs von Luft die Berechnung über die Geschwindigkeit und die Menge der ausströmenden Luft anstellen zu können, ist der Art.: Ausflufs tropfbarer Flüssigkeiten, Satz 3, pag. 215, in Erwägung zu nehmen.

Steht die Flüssigkeit über der Ausflufsöffnung h Fufs hoch, so ist deren Ausflufsgeschwindigkeit $=2\sqrt{gh}$, und dieselbe Geschwindigkeit erhält man durch ein Gewicht p, welches dem Gewicht derselben Flüssigkeit von der Höhe h gleich ist. In dem Satz 3, pag. 215, ist die dem Gewicht = 5 Pfund entsprechende Wasserhöhe $\frac{1}{11}$ Fufs gefunden worden; für Weingeist wäre die Höhe und die Geschwindigkeit gröfser, für Quecksilber kleiner geworden.

Ein prismatisches Gefäfs habe 10□″ Querschnitt, in demselben stehe eine Flüssigkeit 1 Fufs hoch, und man lege auf den Flüssigkeitsspiegel ein Gewicht von 100 Pfund.

Ist nun die Flüssigkeit Quecksilber, dessen specifisches Gewicht $=13{,}6$, so hat 1 cub.′ desselben ein Gewicht von $13{,}6\times 66=897{,}6$ Pfund und 100 Pfund Quecksilber sind $\frac{100}{897{,}6}$ cub.′ Bezeichnet man nun die dem Gewicht von 100 Pfund entsprechende Höhe des Quecksilbers in dem Gefäfs mit h, so ist

$$\frac{10}{144}\cdot h=\frac{100}{897{,}6}$$

woraus $h=1{,}6$ Fufs

und die Ausflufsgeschwindigkeit des Quecksilbers aus einer im Gefäfsboden befindlichen Oeffnung $=2\sqrt{g\cdot 2{,}6}$

Ist die Flüssigkeit Wasser, so wiegt 1 cub.′ derselben 66 Pfund, folglich für 100 Pfund Wasser $\frac{100}{66}$ cub.′ $=\frac{10}{144}\cdot h$ cub.′

woraus $h=21{,}9$

und die Ausflufsgeschwindigkeit des Wassers $=2\sqrt{g\cdot 22{,}9}$

Durch ein und dasselbe aufgelegte Gewicht werden also verschiedene Ausflufsgeschwindigkeiten von tropfbaren Flüssigkeiten hervorgebracht, wenn diese verschiedenen specifischen Gewichten zugehören, und zwar verhalten sich deren Ausflufs-Geschwindigkeiten umgekehrt wie die Quadratwurzeln aus deren specifischen Gewichten.

Dasselbe Verhältnifs hat man für den Ausflufs luftförmiger Flüssigkeiten von verschiedenen Dichtigkeiten.

5. Die No. 3 aufgeführte Manometersäule mufs als das Gewicht betrachtet werden, welches nach No. 4 auf eine Flüssigkeit gelegt und in eine gleich schwere Säule von derselben Flüssigkeit ausgedrückt, deren Höhe als Druckhöhe ergiebt.

Ist das Quecksilber n mal schwerer als das Gas und ist die manometrische Druckhöhe h, so ist die Geschwindigkeitshöhe des Gases $=nh$, und dessen Ausflufsgeschwindigkeit $=2\sqrt{g\cdot nh}$. Nach dem Art. Atmosphäre, No. 7, pag. 162, ist das Quecksilber 10468 mal schwerer als trockene atmosphärische Luft bei 0° C. Temperatur und 0,76 Meter Barometerstand, und deren Geschwindigkeitshöhe, wenn die Luft in einen absolut leeren Raum strömt, = 7955,68 Meter = 25348 preufs. Fufs.

6. Bei der atmosphärischen Luft verhalten sich die Elasticitäten oder Druckwirkungen wie deren Dichtigkeiten, also wie deren specifische Gewichte oder deren absolute Gewichte für die Kubik-Einheit. Es sei nun für die atm. Luft bei irgend einer Dichtigkeit der Manometerstand $=b$, für die Kubik-Einheit deren Gewicht $=q$, das Gewicht des Quecksilbers $=Q$, die Geschwindigkeitshöhe der Luft also $\frac{Q}{q}\cdot b$; es sei ferner für Luft von anderer Dichtigkeit deren Manometerstand b', deren Gewicht $=q'$, also deren Geschwindigkeitshöhe $=\frac{Q}{q'}\cdot b'$

so hat man $q:q'=b:b'$

woraus $q'=q\cdot\frac{b'}{b}$

also die Geschwindigkeitshöhe

$$\frac{Q}{q'}\,b'=\frac{Q}{q}\,\frac{b}{b'}\cdot b'=\frac{Q}{q}\,b$$

Es ist mithin bei der atmosphärischen Luft und überhaupt bei einerlei Luftart die Geschwindigkeitshöhe von

der Dichtigkeit der Luftart unabhängig und constant.

Wenn also atmosphärische Luft aus einem verschlossenen Gefäfs in einen unbegrenzt leeren Raum strömt, so behält sie die nach No. 5 ermittelte Geschwindigkeitshöhe 25348 Fufs, wenngleich sie mit jedem folgenden Zeitaugenblick dünner wird.

7. Hat ein Gas gegen atm. Luft (Gewicht = 1 gesetzt) das spec. Gewicht η, so ist nach No. 6 beim Manometerstand b dessen Gewicht einer Kubik-Einheit $= \eta q$ und die Geschwindigkeitshöhe des Gases bei jeder beliebigen Dichtigkeit $= \frac{Q}{\eta q} \cdot b$

Beispiel. Nach Schubarth's Tabellen, pag. 29, ist das spec. Gew. des Wasserstoffgases = 0,0688; das spec. Gew. der Luft von 0° C. gegen Wasser ist 0,001299 also 1 cub.' Luft von 0° = 66 · 0,001299 = 0,085734 Pfund.

Der Barometerstand für dieselbe 0,76 Meter = 0,76 × 3,1862 = 2,4215 pr. Fufs.

Das spec. Gew. des Quecksilbers = 13,598
1 cub.' Quecksilber = 13,598 · 66 = 897,468 Pfund.

1 cub.' Wasserstoffgas = 0,0688 × 0,085734 = 0,0058985 Pfund
hieraus die Geschwindigkeitshöhe des Wasserstoffgases

$$= \frac{897{,}468}{0{,}0058985} \cdot 2{,}4215 = 368436 \text{ pr. Fufs.}$$

Nach No. 5 ist $\frac{Q}{q} \cdot b = 25348$ Fufs,

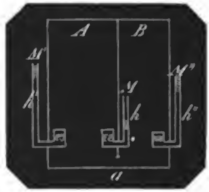
also $\frac{Q}{\eta q} \cdot b = \frac{25348}{0{,}0688} = 368430$ Fufs;

die geringe Verschiedenheit beider Resultate liegt in der Vernachlässigung der letzten Decimalen bei der ersten Rechnung.

8. Fliefst aber Luft von einer bestimmten Dichtigkeit D aus einem Raum A in einen Raum B, der mit dünnerer Luft derselben Art, also mit Luft von geringerer Dichtigkeit d angefüllt ist, so findet die erstere Luft vor der Ausflufsöffnung a in der zweiten Luft einen Gegendruck, und es geschieht die Ausströmung, als wenn Luft von der Dichtigkeit $(D-d)$ aus A in einen luftleeren Raum strömte.

Die Druckkraft der Luft in A zeige sich an dem Manometer M' in der Quecksilberhöhe h', die der Luft in B an dem Manometer M'' in der Quecksilberhöhe h'', indem die langen Schenkel oben verschlossen und über h' und h'' luftleer sind, so wird ein drittes, in beiden Schenkeln oben offenes, in der Wandung zwischen beiden Räumen A und B angebrachtes Manometer M eine Höhe $h = h' - h''$ als Ueberschufs des Drucks zwischen beiden Luftmengen angeben, und der auf den Ausflufs wirkende manometrische Druck sein.

Fig. 134.



Dieser Druck h Quecksilber als Gewicht (s. No. 5) ist demnächst in eine Säule der dichteren ausfliefsenden Luft zu verwandeln, um die entsprechende Geschwindigkeitshöhe H zu erhalten.

Setzt man, wie in No. 6, für die Kubik-Einheit das Gewicht des Quecksilbers $= Q$, das Gewicht der atm. Luft bei dem Barometerstand $b = q$; das Gewicht der unter dem Manometerdruck h ausströmenden atm. Luft $= q'$, so hat man nach No. 6 deren Geschwindigkeitshöhe $H = \frac{Q}{q'} \cdot h$

Die Dichtigkeit D der ausströmenden Luft wird gemessen durch die Quecksilberhöhe h', es ist mithin $b : h' = q : q'$

woraus $q' = \frac{h'}{b} q$

$$\text{daher } H = \frac{Qb}{q} \cdot \frac{h}{h'} = \frac{Qb}{q} \cdot \frac{h' - h''}{h'}$$
$$= \frac{Qb}{q}\left(1 - \frac{h''}{h'}\right)$$

nach No. 5 ist $\frac{Q}{q} b = 25348$ Fufs

mithin $H = 25348 \cdot \left(1 - \frac{h''}{h'}\right)$

und die Ausflufsgeschwindigkeit

$$C = 2\sqrt{g \cdot 25348\left(1 - \frac{h''}{h'}\right)}$$

Sind beide Räume A, B unbegrenzt, so bleiben h', h'' und H constant, der Ausflufs geschieht also fortdauernd gleichförmig.

Ist B unbegrenzt (z. B. unsere Atmosphäre), A begrenzt, so bleibt h'' constant, h' vermindert sich mit jedem folgenden Zeittheilchen, bis es $= h''$ wird, H und C nehmen gleichmäfsig ab, bis sie = Null werden.

Ist A unbegrenzt, B begrenzt, so ist

h' constant, h'' wird immer gröfser, bis es $= h'$ wird; H und C werden immer kleiner und zuletzt = Null.

Sind A und B begrenzt, so nimmt h' fortdauernd ab, h'' fortdauernd zu, bis beide gleich grofs werden; H und C nehmen ab, bis sie = Null werden.

9. Bei dem bisher Vorgetragenen ist der Ausflufs von Luft dem von tropfbaren Flüssigkeiten analog behandelt, also unter der Voraussetzung, dafs die Luftsäulen ebenfalls wie die der tropfbaren Flüssigkeiten von gleichförmiger Dichtigkeit sind. Dies ist aber nicht der Fall: In jedem Gefäfs drückt gleich dichte Luft auf jede Flächen-Einheit der Wandung gleich stark, allein die oberste Luftschicht drückt die zunächst untere, diese wieder die unter ihr befindliche u. s. f. Demnach ist die oberste Schicht am dünnsten, die unterste am dichtesten, und die Seitenwände werden oben am wenigsten, unten am stärksten gedrückt.

Bei der Atmosphäre (s. d. No. 2) ist auf 11,5 Meter Höhe der Druck schon um 1 Millimeter Quecksilbersäule geringer, bei 83 Fufs beträgt die Druckverminderung schon eine Linie Quecksilberhöhe. Bei sehr hohen Gefäfsen ist also die Dichtigkeit an der Decke geringer als am Boden, und das Manometer, welches die Elasticität oder die Druckwirkung mifst, ist mit dem offenen Quecksilberspiegel in die Waage der Ausflufsöffnung zu stellen; dann erhält man in der manometrischen Höhe das dort befindliche, die als gleichförmige Flüssigkeit zu denkende Luft belastende Gewicht, welches nun in die ihr gleichförmige gleichdichte Luftsäule von der Höhe $\frac{Q}{q}h$ verwandelt wird.

10. Multiplicirt man die Ausflufsgeschwindigkeit C mit der Ausflufsöffnung a, so erhält man die per Secunde ausströmende Luftmenge $M = ca$ von der Dichtigkeit der ausströmenden Luft. Aendert sich die Dichtigkeit der Luft während der Zeit des Ausströmens, so ist auch die ausfliefsende Luftmenge M in jedem Zeittheilchen eine andere.

Jede Luftmenge M besteht aus einer Anzahl von Luft-Elementen, und da diese nicht anzugeben ist, so kann die Angabe von M immer nur vergleichungsweise geschehen. Jedes M nämlich besteht aus einem Volumen v und einer Dichtigkeit d; das Volumen v bei der Ausströmung ist das obige Product ca, nämlich Ausflufsgeschwindigkeit mal Ausflufsquerschnitt, die Dichtigkeit d aber kann nur mit Luft derselben Art von einer als Einheit anzunehmenden Dichtigkeit $D = 1$ verglichen werden.

In der Regel nimmt man für atm. Luft als Einheit die mittlere Dichtigkeit (D) der auf der Erdoberfläche befindlichen Luftschicht, nämlich der trockenen Luft, welche bei 0° C. einer Quecksilbersäule von $b = 0{,}76$ Meter entspricht. Da nun die Dichtigkeiten von Luft sich direct wie deren Elasticitäten, also auch wie deren manometrischen Quecksilbersäulen verhalten, so hat Luft von h Meter Quecksilberdruck $\frac{h}{b} D = \frac{h}{0{,}76} D$ Dichtigkeit, oder $D = 1$ gesetzt, die Dichtigkeit d

$$= \frac{h}{b} = \frac{h}{0{,}76}$$

Das No. 7 als Beispiel aufgeführte Wasserstoffgas hat das spec. Gew. 0,0688 gegen atm. Luft, d. h. bei einem Druck von $b = 0{,}76$ Meter Quecksilber beträgt dessen Gewicht nur $\frac{688}{10000}$ der untern atm. Luftschicht. Die Dichtigkeiten dieses Gases sind also mit der der atm. Luft nicht zu vergleichen, und es mufs bei demselben die Dichtigkeit D bei b Manometerdruck als Einheit angenommen werden. Dasselbe findet bei allen übrigen verschiedenen Gasen statt.

11. Die bisher betrachteten Geschwindigkeitshöhen, Geschwindigkeiten, Dichtigkeiten und Luftmengen gelten nur für Luftarten von 0° Celsius Temperatur. In dem Art. Ausdehnung der Gase, pag. 213, ist erklärt, dafs durch die Wärme die Gase ganz gleichförmig ausgedehnt werden, und dafs dieselbe mit jedem höheren Grad Celsius 0,00365 oder ziemlich nahe $\frac{1}{274}$ beträgt, so dafs eine Luftart von $t°$ C. Temperatur ein Volumen von $(1 + 0{,}00365\,t)$ mal derselben Luftart von 0° C. hat.

Mit der Vergröfserung des Volumens wird das Gas um so viel dünner, also um so viel leichter als die manometrische Flüssigkeit; ist mithin H die Geschwindigkeitshöhe des Gases bei 0° C., so ist sie bei $t°$ C. $= (1 + 0{,}00365\,t)\,H$

12. Es sollen nun die bis jetzt ermittelten Erkenntnisse zusammengefafst werden.

A. Atmosphärische Luft von jeder beliebigen Dichtigkeit, aber von 0° C. Temperatur hat (s. No. 5 u. 6) beim Ausflufs in einen absolut leeren Raum die Geschwindigkeitshöhe $H = 25348$ Fufs; mithin die Geschwindigkeit

$$C = 2\sqrt{25348 \cdot g} = 2\sqrt{25348 \cdot 15\tfrac{5}{8}}$$
$$= 1258{,}67 \text{ preufs. Fufs.}$$

B. Dieselbe bei t^0 C. Temperatur hat die Geschwindigkeitshöhe $(1+0{,}00365\,t)\,H$ also die Geschwindigkeit

$$C = 1258{,}67\sqrt{1+0{,}00365\cdot t}$$

C. Gas von dem specifischen Gewicht φ (zu atm. Luft $= 1$) von jeder beliebigen Dichtigkeit, aber von 0° C. Temperatur (s. No. 7) beim Ausflufs in einen absolut leeren Raum die Geschwindigkeits-Höhe $H = \frac{1}{\varphi}\,25348$ Fufs, und die Geschwindigkeit

$$C = 1258{,}67\sqrt{\frac{1}{\varphi}}$$

D. Dasselbe bei t^0 C. Temp. die Geschwindigkeitshöhe

$$25348\,\frac{1+0{,}00365\cdot t}{\varphi}$$

die Geschwindigkeit

$$C = 1258{,}67\sqrt{\frac{1+0{,}00365\cdot t}{\varphi}}$$

E. Atmosphärische Luft von der manometrischen Quecksilberspannung h', die in einen, mit atm. Luft von der Spannung h'' angefüllten Raum strömt, hat, wenn die dichtere ausströmende Luft von 0° C. Temperatur ist, die Geschwindigkeitshöhe

$$25348\cdot\left(1-\frac{h''}{h'}\right)$$

und die Geschwindigkeit

$$C = 1258{,}67\sqrt{1-\frac{h''}{h'}}$$

F. Hat die dichtere ausströmende Luft (ad 5) t^0 C. Temperatur, so ist die Geschwindigkeit

$$C = 1258{,}67\sqrt{\left(1-\frac{h''}{h'}\right)(1+0{,}00365\cdot t)}$$

G. Gas statt atmosphärischer Luft giebt in dem Fall ad 5 die Geschwindigkeit

$$C = 1258{,}67\sqrt{\frac{1}{\varphi}\left(1-\frac{h''}{h'}\right)}$$

in dem Fall 6

$$C = 1258{,}67\sqrt{\frac{1}{\varphi}\left(1-\frac{h''}{h'}\right)(1+0{,}00365\cdot t)}$$

H. Diese Geschwindigkeiten in jedem besondern Fall mit der Ausflufsöffnung multiplicirt, geben die Luftmengen in dem Sinne, wie sie in No. 10 erklärt worden sind.

13. Die No. 12 gedachten Geschwindigkeiten und Luftmengen sind wie beim Ausflufs tropfbarer Flüssigkeiten (s. pag. 215, No. 3) die hypothetischen; die wirklichen Geschwindigkeiten und Luftmengen hangen von der Beschaffenheit der Ausflufsöffnungen ab, und auch bei Luft giebt es einen Contractionscoefficienten α als aliquoten Theil von $2\sqrt{g}$; oder hier vielmehr, wo die Höhe der Atmosphäre in Verbindung mit $2\sqrt{g}$ zu einer bestimmten Zahl zusammengefafst ist, α als Bruchtheil der hypothetischen Geschwindigkeit. Nach d'Aubuisson's Versuchen (s. dessen Hydraulik, übersetzt, §. 436, pag. 519) ist

1) für Oeffnungen in dünnen Wänden . . . . $\alpha = 0{,}65$
2) für cylindrische Ansatzröhren . . . . $\alpha = 0{,}93$
3) für konische Ansatzröhren vom Neigungswink. 6° 26′ — $\alpha = 0{,}938$
   11° 24′ — $\alpha = 0{,}947$
   18° 54′ — $\alpha = 0{,}917$
   28° 4′ — $\alpha = 0{,}880$
   53° 8′ — $\alpha = 0{,}798$

14. Bestimmung der Zeit *T*, in welcher ein absolut leerer Raum vom Volumen *V* mit äufserer Luft von constanter Dichtigkeit *D* durch eine Einflufsöffnung *a* bis zu derselben Dichtigkeit *D* ausgefüllt wird.

Nimmt man der Einfachheit wegen vorläufig atmosphärische Luft von 0° C., so ist nach No. 12, *A*, bei jeder Dichtigkeit *D* die Anfangsgeschwindigkeit = 1258,67 Fufs = *C*
die Endgeschwindigkeit = Null
und nach Verlauf der Zeit *t*, wo die Dichtigkeit der inneren Luft bereits *d* ist, die Geschwindigkeit

$$c = C\cdot\sqrt{1-\frac{d}{D}}$$

oder wenn die Dichtigkeiten durch manometrische Höhen *H* und *h* ausgedrückt werden

$$c = C\cdot\sqrt{1-\frac{h}{H}}$$

Der Raum *V* ist in diesem Augenblick mit der Luftmenge $V\cdot d$ ausgefüllt, in der folgenden, sehr kleinen Zeit $\triangle t$ mit der Luftmenge
$V(d+\triangle d)$, und deren Vermehrung $= V\triangle d$
Während der sehr kleinen Zeit $\triangle t$ strömt aber hinzu die Luftmenge $a\cdot D\cdot c\cdot\triangle t$, mithin ist

$$aDc\triangle t = V\triangle d$$

oder

$$aDC\sqrt{1-\frac{d}{D}}\cdot\triangle t = V\cdot\triangle d$$

woraus für die Grenzwerthe

$$\partial t = \frac{V\,\partial d}{aDC\sqrt{1-\frac{d}{D}}}$$

Sondert man, um integriren zu können,

die constanten Gröfsen von den veränderlichen, so hat man

$$\partial t = \frac{V}{aC\sqrt{D}} \cdot \frac{\partial d}{\sqrt{D-d}}$$

mithin

$$t = \frac{V}{aC\sqrt{D}} \int \frac{\partial d}{\sqrt{D-d}} + \text{Const.}$$

$$= -\frac{2V}{aC\sqrt{D}} \cdot \sqrt{D-d} + \text{Const.}$$

Zur Bestimmung der Constante hat man für $t=0$ auch $d=0$, indem dann noch V vollkommen luftleer ist, daher

$$0 = -\frac{2V}{aC\sqrt{D}} \sqrt{D} + \text{Const.}$$

also vollständig

$$t = \frac{2V}{aC\sqrt{D}} \left[\sqrt{D} - \sqrt{D-d}\right]$$

für $d=D$ ist die vollständige Füllung des Gefäfses geschehen, daher die Zeit der Anfüllung

$$T = \frac{2V\sqrt{D}}{aC\sqrt{D}} = 2\frac{V}{aC}$$

wo $C = 1258{,}67$ Fufs ist.

Die Zeit der Füllung eines luftleeren Gefäfses mit Luft ist also von der Dichtigkeit der einströmenden Luft unabhängig.

15. Die Formel für die Zeit der Füllung eines Gefäfses mit Wasser aus einem Nebengefäfs mit gleich hoch bleibendem Wasserspiegel (pag. 228)

$$t = \frac{2A\sqrt{h}}{\alpha a}$$

läfst sich auch schreiben

$$t = \frac{2Ah}{\alpha a\sqrt{h}}$$

Da hier Ah der Inhalt V und $\alpha a\sqrt{h}$ die Anfangsgeschwindigkeit C ist, so sind die Zeiten für die Füllung eines leeren Gefäfses mit Wasser oder mit Luft einander gleich.

16. Hat in No. 14 die atmosphärische Luft die Temperatur t° C., so ist die Anfangsgeschwind. $1258{,}67 \cdot (1 + 0{,}00365\,t)$ also auch

$$T = \frac{2 \cdot V}{(1 + 0{,}00365\,t) a \cdot C}$$

$$= \frac{2V}{(1 + 0{,}00365\,t) 1258{,}67 \cdot a}$$

Beim Einströmen von Gas, dessen spec. Gew. gegen Luft φ ist, hat man die Anfangsgeschw. $= 1258{,}67 \sqrt{\frac{1}{\varphi}} = C\sqrt{\frac{1}{\varphi}}$ daher

$$T = \frac{2 \cdot V\sqrt{\varphi}}{aC}$$

und hat das Gas zugleich t° C. Temperatur, so ist

$$T = \frac{2V\sqrt{\varphi}}{(1 + 0{,}00365 \cdot t)\, aC}$$

17. Bestimmung der Zeit, in welcher aus einem Gefäfs vom Volumen V die darin befindliche Luft von der Dichtigkeit D aus einer Oeffnung vom Querschnitt a in den absolut leeren Raum ausfliefst.

Nach No. 12, A, ist die Ausflufsgeschwindigkeit während der ganzen Zeit des Ausströmens constant $= 1258{,}67$ Fufs $= C$, wenn V mit atm. Luft von 0° C. Temp. angefüllt ist; die Dichtigkeit wird mit jedem folgenden Augenblick geringer, zuletzt unendlich gering, und man ersieht, dafs die Zeit T zur vollständigen Entleerung des Raumes V unendlich grofs sein mufs. Es stimmt dieser Fall mit dem beim Ausflufs des Wassers, No. 5, pag. 223, wo die Geschwindigkeit immer kleiner und zuletzt unendlich klein wird.

Demnach kann man auch nur die Zeit t bestimmen, in welcher die Dichtigkeit D der in V befindlichen Luft auf die Dichtigkeit d vermindert wird.

Zu Anfang ist im Gefäfs die Luftmenge $V \cdot D$

nach verflossener Zeit t die Luftmenge $V \cdot d$

Mit der Zunahme von t um die sehr kleine Zeit $\triangle t$ ändert sich d in $d - \triangle d$, also in $\triangle t$ um $-\triangle d$, und die Luftmenge um $-V\triangle d$

In derselben kleinen Zeit $\triangle t$ aber fliefst die Luftmenge aus $adC \cdot \triangle t$, daher hat man für die Grenzwerthe

$$adC\,\partial t = -V\partial d$$

woraus $$\partial t = -\frac{V\partial d}{adC} = \frac{V}{aC} \cdot \left(-\frac{\partial d}{d}\right)$$

und $$t = -\frac{V}{aC} \log n\, d + \text{Const.}$$

Zur Bestimmung der Const. hat man für $t=0$, $d=D$, mithin

$$0 = -\frac{V}{aC} \ln D + \text{Const.}$$

woraus $$C = \frac{V}{aC} \ln D$$

mithin vollständig

$$t = \frac{V}{aC} \log n \frac{D}{d}$$

für trockene atm. Luft von 0° hat man

$$t = \frac{V}{1258{,}67\, a} \ln \frac{D}{d}$$

für Luft von der Temperatur T

$$t = \frac{V}{1258{,}67 \cdot a\sqrt{1 + 0{,}00365\, T}} \cdot \ln \frac{D}{d}$$

für Gas von dem spec. Gew. φ und der Temperatur T

$$t=\frac{V\sqrt{\varphi}}{1258{,}67\,a\sqrt{1+0{,}00365\,T}}\cdot ln\frac{D}{d}$$

18. Bestimmung der Zeit T, in welcher in einem Gefäfs vom Volumen V eingeschlossene Luft von höherer Dichtigkeit D durch eine Oeffnung vom Querschnitt a in die atm. Luft sich entleert.

Die äufsere Luft habe die constant bleibende Dichtigkeit d, so ist nach No. 12, E, wenn die innere Luft die Temperatur 0^0 hat, und wenn man das Verhältnifs der manometrischen Quecksilberhöhen durch das ihm gleiche Verhältnifs der Dichtigkeiten ausdrückt, die Anfangsgeschwindigkeit

$$C=1258{,}67\sqrt{1-\frac{d}{D}}$$

Ist in Folge des Ausströmens nach Verlauf der Zeit t die Dichtigkeit D auf die Dichtigkeit D' gesunken, dann ist die Geschwindigkeit

$$c=1258{,}67\sqrt{1-\frac{d}{D'}}$$

$$\text{also } c:C=\sqrt{1-\frac{d}{D'}}:\sqrt{1-\frac{d}{D}}$$

$$\text{und } c=C\cdot\sqrt{\frac{1-\frac{d}{D'}}{1-\frac{d}{D}}}=C\sqrt{\frac{(D'-d)\,D}{D'\,(D-d)}}$$

Wie in No. 17 ist nun die in dem Differenzial der Zeit t ausströmende Luftmenge

$$=a\cdot D'\,C\sqrt{\frac{(D'-d)\,D}{D'\,(D-d)}}\,\partial t=-V\cdot\partial D'$$

$$\text{woraus } \partial t=-\frac{V\,\partial D'}{aD'\,C}\sqrt{\frac{D'\,(D-d)}{(D'-d)\,D}}$$

und des Integrirens wegen die unveränderlichen Gröfsen von den veränderlichen getrennt:

$$\partial t=-\frac{V}{aC}\sqrt{\frac{D-d}{D}}\,\frac{\partial D'}{\sqrt{D'\,(D'-d)}}$$

$$\text{mithin } t=-\frac{V}{aC}\sqrt{\frac{D-d}{D}}\int\frac{\partial D'}{\sqrt{D'\,(D'-d)}}+\text{Const.}$$

Schreibt man in $\int\frac{\partial D'}{\sqrt{D'\,(D'-d)}}$

x für D' und b für d, also $\int\frac{\partial x}{\sqrt{-bx+x^2}}$

so findet man das Integral aus der allgemeinen Integralformel:

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{a+bx+cx^2}}=\frac{1}{\sqrt{c}}\,logn\left[\frac{b+2cx}{2\sqrt{c}}+\sqrt{a+bx+cx^2}\right]$$

Wenn man $a=0$; $b=-b$ und $c=1$ setzt:

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{-bx+x^2}}=logn\left[\frac{-b+2x}{2}+\sqrt{-bx+x^2}\right]$$

$$\text{mithin}\int\frac{\partial D'}{\sqrt{D'\,(D'-d)}}=logn\left[-\frac{d}{2}+D'+\sqrt{D'\,(D'-d)}\right]+\text{Const.}$$

$$\text{also } t=-\frac{V}{aC}\sqrt{\frac{D-d}{D}}\,logn\left[D'-\frac{d}{2}+\sqrt{D'\,(D'-d)}\right]+\text{Const.}$$

Zur Bestimmung der Constante hat man für $t=0$; $D'=D$

$$\text{daher Const}=\frac{V}{aC}\sqrt{\frac{D-d}{D}}\,logn\left[D-\frac{d}{2}+\sqrt{D(D-d)}\right]$$

und vollständig

$$t=\frac{V}{aC}\sqrt{\frac{D-d}{D}}\,logn\,\frac{D-\frac{d}{2}+\sqrt{D(D-d)}}{D'-\frac{d}{2}+\sqrt{D'\,(D'-d)}}$$

Die Ausströmung der Luft ist vollendet, wenn $D'=d$ wird,

$$\text{daher } T=\frac{V}{aC}\sqrt{\frac{D-d}{D}}\,logn\,\frac{D-\frac{d}{2}+\sqrt{D(D-d)}}{\frac{1}{2}d}$$

wo C die oben bestimmte Anfangsgeschwindigkeit ist.

19. Bestimmung der Zeit, in welcher Luft von verschiedenen Dichtigkeiten D und d, die in Behältern von den Volumen V und v eingeschlossen, durch eine Oeffnung vom Querschnitt a sich in's Gleichgewicht setzen.

Die Anfangsgeschwindigkeit ist wie No. 18

$$C = 1258{,}67 \sqrt{1 - \frac{d}{D}}$$

und wenn nach Verlauf der Zeit t die Dichtigkeit D in Δ vermindert und die Dichtigkeit d in δ vermehrt worden, die Geschwindigkeit

$$c = 1258{,}67 \sqrt{1 - \frac{\delta}{\Delta}} = C \sqrt{\frac{1 - \frac{\delta}{\Delta}}{1 - \frac{d}{D}}}$$

$$= C \sqrt{\frac{(\Delta - \delta)\, D}{\Delta\,(D - d)}}$$

In diesem Ausdruck sind zwei veränderliche Gröfsen Δ und δ; es ist aber offenbar, da die Luftmenge in beiden Gefäfsen zusammengenommen constant bleibt,

$$VD + vd = V\Delta + v\delta$$

$$\text{woraus } \delta = \frac{V(D - \Delta) + vd}{v}$$

Diesen Werth von δ in den Ausdruck für c gesetzt, giebt

$$c = C \sqrt{\frac{(V+v)\Delta - (VD + vd)}{\Delta} \cdot \frac{D}{v(D-d)}}$$

$$= \sqrt{\frac{(V+v)\Delta - (VD+vd)}{v\Delta}}$$

$$= 1258{,}67 \sqrt{\frac{(V+v)\Delta - (VD+vd)}{v\Delta}}$$

die in der folgenden sehr kleinen Zeit ∂t ausfliefsende Luftmenge ist nun wie No. 17

$$a \cdot c \cdot \Delta \cdot \partial t = - V \partial \Delta$$

$$\text{woraus } \partial t = - \frac{V \partial \Delta}{ac\Delta}$$

Schreibt man für c seinen Werth, und trennt das Veränderliche von dem Unveränderlichen, so hat man

$$\partial t = -\frac{V}{aC} \sqrt{\frac{v(D-d)}{D}} \times \frac{\partial \Delta}{\sqrt{(V+v)\Delta^2 - (VD+vd)\Delta}}$$

folglich

$$t = -\frac{V}{aC} \sqrt{\frac{v(D-d)}{D}} \cdot \int \frac{\partial \Delta}{\sqrt{(V+v)\Delta^2 - (VD+vd)\Delta}} + \text{Const.}$$

Aus der No. 18 angegebenen allgemeinen Integralformel erhält man, wenn man $a = 0$, $b = -b$ setzt und c beibehält:

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{-bx + cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\, ln\left(\frac{-b + 2cx}{2\sqrt{c}} + \sqrt{-bx + cx^2}\right)$$

also $(V+v) = c$ und $(VD + vd) = b$ gesetzt:

$$\int \frac{\partial \Delta}{\sqrt{(V+v)\Delta^2 - (VD+vd)\Delta}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{V+v}}\, ln\left[\frac{-(VD+vd) + 2(V+v)\Delta}{2\sqrt{V+v}} + \sqrt{(V+v)\Delta^2 - (VD+vd)\Delta}\right]$$

mithin ist

$$t = -\frac{V}{aC} \sqrt{\frac{v(D-d)}{D(V+v)}}\, ln\left[\frac{-(VD+vd) + 2(V+v)\Delta}{2\sqrt{V+v}} + \sqrt{(V+v)\Delta^2 - (VD+vd)\Delta}\right] + \text{Const.}$$

Da nun für $t = 0$, $\Delta = D$ wird, also

$$\text{Const.} = + \frac{V}{aC} \sqrt{\frac{v(D-d)}{D(V+v)}}\, ln\left[\frac{-(VD+vd) + 2(V+v)D}{2\sqrt{V+v}} + \sqrt{(V+v)D^2 - (VD+vd)D}\right]$$

so ist

$$t = \frac{V}{aC} \sqrt{\frac{v(D-d)}{D(V+v)}}\, ln\left[\frac{-(VD+vd) + 2(V+v)D + 2\sqrt{V+v}\sqrt{(V+v)D^2 - (VD+vd)D}}{-(VD+vd) + 2(V+v)\Delta + 2\sqrt{V+v}\sqrt{(V+v)\Delta^2 - (VD+vd)\Delta}}\right]$$

$$\text{für } t = T \text{ ist } \Delta = \frac{VD+vd}{V+v}$$

daher

$$T = \frac{V}{aC} \sqrt{\frac{v(D-d)}{D(V+v)}}\, ln\left[\frac{-(VD+vd) + 2(V+v)D + 2\sqrt{V+v}\sqrt{(V+v)D^2 - (VD+vd)D}}{VD+vd}\right]$$

Ist $V = v$, so hat man

$$T = \frac{V}{aC} \sqrt{\frac{D-d}{2D}}\, ln\, \frac{3D - d + 2\sqrt{2D(D-d)}}{D+d}$$

Da $C=1258{,}67\sqrt{\frac{D-d}{D}}$, so hat man

$$T=\frac{V}{1780\cdot a}\ln\frac{3D-d+2\sqrt{2D(D-d)}}{D+d}$$

Ausflufsgeschwindigkeit ist die Geschwindigkeit ausfliefsender, also flüssiger Körper innerhalb der Oeffnung, durch welche sie ausfliefsen. Bei tropfbaren Körpern ist die A. abhängig von der Höhe des Flüssigkeitsspiegels über der Ausflufsöffnung, das Gesetz darüber s. den Art. Ausflufs tropfbarer Flüssigkeiten, pag. 215.

Ist die Ausflufsöffnung nicht horizontal, so hat der Spiegel verschiedene Höhen über derselben, die kleinste Höhe bis zur oberen, die gröfste bis zur unteren Kante der Oeffnung, die A. sind verschieden grofs, und man hat eine mittlere A. zu finden; das Nähere hierüber s. pag. 217, No. 1. Die A. hängt ferner ab von dem Grade der Flüssigkeit des ausfliefsenden Körpers, von der Form der Ausflufsöffnung, den Reibungswiderständen und der Adhäsion, die A. ist also immer geringer, als sie ohne die letztgedachten Umstände sein würde. Jene A. heifst die hypothetische A., diese die wirkliche A., das Nähere darüber s. pag. 218, No. 4 u. 5.

Bei luftförmigen Körpern ist die A. abhängig von deren Dichtigkeit und specifischem Gewicht; wie aus beiden die ihnen entsprechende Geschwindigkeitshöhe und aus dieser die A. gefunden wird, s. den Art. Ausflufs der Luft, No. 1 bis 8.

Ausflufsmenge ist das Volumen eines flüssigen Körpers, welches in einer Zeit-Einheit aus einer Oeffnung ausfliefst, und man erhält dieselbe als Product aus der auf dieselbe Zeit-Einheit bezogenen Ausflufsgeschwindigkeit mit dem Querschnitt der Ausflufsöffnung. Ein Näheres darüber s. von pag. 217, No. 2, ab bis zum Schlufs des Art. Bei luftförmigen Körpern ist zugleich auf die Dichtigkeit der ausfliefsenden Luftart zu sehen, und sie mufs auf die Luft derselben Art von der Dichtigkeit = 1 reducirt werden. S. das Nähere pag. 233, No. 10.

Ausflufsöffnung. Die Oeffnung, durch welche Flüssigkeiten aus einem Raum in den anderen ausfliefsen.

Ausgehender Winkel (hohler W.), ein W., der kleiner ist, als 2 rechte W.

Ausmessung. Die Bestimmung oder Ermittelung von Dimensionen durch Mefsinstrumente.

Auspeilen. Die Ermittelung der Tiefen möglichst vieler Punkte einer mit Wasser bedeckten Erdfläche bis zum Wasserspiegel. Bei kleinen Seen, Kolken, Wasserlöchern will man für deren ganze oder theilweise Ausfüllung die Menge des dazu erforderlichen Erdmaterials, bei sehr breiten Strömen und Seen die sicherste Schifffahrtsstrafse erfahren. Bei geringen Wassertiefen genügen lange Maafsstäbe, bei gröfseren Tiefen geschieht das A. mittelst des Senkbleies.

Ausrechnen. Eine der niederen Arithmetik angehörende Rechnung ausführen.

Ausschnitt einer Figur (sector). Der Flächenraum der Figur, welcher zwischen je zweien von einem innerhalb derselben befindlichen Punkt nach dem Umfang gezogenen geraden Linien und dem zwischenliegenden Theil des Umfangs begrenzt wird. Es wird daher jede Figur durch einen Ausschnitt jedesmal in 2 Ausschnitte getheilt, wiewohl man in der Regel die von beiden kleinere ausgeschnittene Fläche der Figur mit Ausschnitt bezeichnet. Unter A. eines Kreises versteht man denjenigen A., welcher durch zwei Radien gebildet wird; unter A. einer Ellipse den durch zwei Radii vectoren von einerlei Brennpunkt aus.

Ausschnitt eines Körpers ist der Raum, der von einem innerhalb des Körpers befindlichen Punkt aus durch Seitenebenen einer Pyramide oder einen Kegelmantel und den durch denselben begrenzten Theil der Körper-Oberfläche eingeschlossen wird. Der A. einer Kugel wird durch einen Kegelmantel begrenzt, dessen Spitze in dem Mittelpunkt der Kugel liegt.

Aufsenwerke einer Festung. Die zum unmittelbaren Schutz des Hauptwalls vor demselben, aber noch innerhalb des Hauptgrabens befindlichen Befestigungswerke, zum Unterschied der vorliegenden Werke und der detaschirten Werke, die beide aufserhalb des Hauptgrabens liegen, erstere innerhalb, letztere aufserhalb der von der Festung aus gemessenen Schufsweite, also isolirt, und der Selbst-Vertheidigung sich überlassen.

Aufsenwinkel, s. Aeufsere Winkel, No. 2, pag. 41; auch versteht man darunter äufsere Polygonwinkel (pag. 41).

Aufserrechter Winkel, die nicht sehr gebräuchliche Bezeichnung für den Aufsenwinkel eines ihm rechten inneren Nebenwinkels.

Aufserspitzer Winkel, die nicht sehr gebräuchliche Bezeichnung für den Aufsenwinkel eines ihm spitzen inneren Nebenwinkels.

Aufserstumpfer Winkel, die nicht sehr gebräuchliche Bezeichnung für den Aufsenwinkel eines ihm stumpfen inneren Nebenwinkels.

Ausspringender Winkel s. v. w. **ausgehender, hohler Winkel.** In der Kriegsw. ein W., dessen Oeffnung nach dem Innern des Festungswerks zeigt, dessen Spitze also nach Aufsen herausspringt, als Gegensatz zum einspringenden W., dessen Spitze in's Innere des Werks einspringt. Je spitzer der a. W. ist, desto weniger Raum gewährt er den Vertheidigern; er wird daher selten unter 60° angelegt.

Austritt, Emersion eines Gestirns, ist dessen Wiederhervortreten, wenn es von einem der Erde näher befindlichen Gestirn ganz oder zum Theil bedeckt und dem Anblick entzogen gewesen ist. Fixsterne bedecken einander nicht, sondern bleiben in einerlei gegenseitigen Entfernung von einander, sie werden dagegen von Planeten des Sonnensystems und diese mit deren Monden unter einander bedeckt. Bei einer Sonnenfinsternifs (Bedeckung der Sonne durch den Mond) fängt der A. des Mondes an in dem Augenblick, in dem das Maximum der bedeckten Sonnenfläche sich wieder zu vermindern anfängt, und er ist mit der Finsternifs selbst beendet in dem Augenblick, wo die Sonnenscheibe anfängt, wieder ganz sichtbar zu werden.

Dieselbe Bezeichnung hat man bei einer Mondfinsternifs (Bedeckung des Mondes von dem durch die Sonne erzeugten Schatten der Erde), wo der Schatten anstritt. Bei Fixsternen und bei Planeten von sehr kleinem Durchmesser findet Anfang und Ende des Austritts in einerlei Augenblick statt. Austritt ist dem Eintritt eines Gestirns entgegengesetzt, so dafs jede Finsternifs mit dem Anfang des Eintritts beginnt und mit dem Ende des A. aufhört.

Bei einer ringförmigen Sonnenfinsternifs beginnt der Eintritt in dem Augenblick, wo die äufseren Ränder von Sonne und Mond zum ersten Mal sich berühren. Der Eintritt endet in dem Augenblick, wo der äufsere Rand des Mondes den inneren Rand der Sonne zum ersten Mal berührt, um ihn zu verlassen und innerhalb einen dunklen Kreis zu bilden. Der Austritt beginnt mit der zweitenmaligen Berührung des gegenüberliegenden inneren Sonnenrandes von dem äufseren Rand des Mondes und der Austritt endet in dem Augenblick, wo die äufseren Ränder beider zum zweiten Mal sich berühren und sich nach Aufsen verlassen.

Austrittswinkel eines gebrochenen Lichtstrahls, s. u. **Ablenkung des Lichtstrahls** (pag. 6), **Achromatisch** (pag. 22).

Ausweichung, Digression, Elongation eines Planeten ist in irgend einem Ort seiner Bahn die scheinbare Entfernung desselben von der Sonne. Sie wird gemessen durch den Winkel, den die geraden Linien vom Mittelpunkt der Sonne und von dem Planeten mit dem Auge des auf der Erde befindlichen Beobachters bilden. Denkt man sich durch eine gerade Linie zwischen Sonne und Planet das Dreieck geschlossen, so ist der Winkel, dessen Spitze die Sonne ist, die Commutation, und der dritte Winkel am Planeten die Parallaxe.

Für astronomische Berechnungen wird die auf unsere Ekliptik reducirte A. angewendet; fällt man nämlich von einem Planeten auf die Ebene der Ekliptik ein Loth, so ist der Standpunkt dieses Loths in der Ekliptik der (auf die Ekliptik) reducirte Ort des Planeten, und der Winkel, der von diesem reducirten Ort und dem Sonnenmittelpunkt mit dem Mittelpunkt der Erde gebildet wird, die reducirte A. Verbindet man nun das Sonnenmittel mit dem reducirten Ort des Planeten, so erhält man ein Dreieck, welches in der Ebene der Ekliptik liegt; der Winkel an der Sonne ist die (reducirte) Commutation, der an dem Planeten die (reducirte) Parallaxe.

Ausziehen einer Wurzel.

I. Aus Zifferzahlen.

1. Weifs man von einer Zahl, dafs sie die Potenz einer rationalen Wurzel ist, so kann man durch Aufsuchen der Factoren die Wurzel finden. Weifs man z. B., dafs 2460375 der Kubus einer rationalen $\sqrt{}$ ist, so sieht man zuerst, dafs die Zahl 5 darin aufgeht, es mufs also auch $5^3 = 125$ ein Factor sein, und man hat durch Division:

$$2460375 = 5^3 \times 19683$$

Aus der Summe der Ziffern ergiebt sich, dafs die 9 aufgeht, mithin mufs auch $3^3 = 27$ aufgehen; durch Division erhält man:

$$19683 = 3^3 \times 729$$

In 729 geht wiederum die 9 auf, also auch $3^3 = 27$; man erhält:

$$729 = 3^3 \times 27 = 3^3 \times 3^3$$

es ist also

$$2460375 = 5^3 \cdot 3^3 \cdot 3^3 \cdot 3^3$$

und $\sqrt[3]{2460375} = 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 135$

Besteht die Wurzel in einer oder mehreren grofsen Primzahlen, dann ist ein allmähliches Probiren mit 7, 11, 13, 17 u. s. w. langwierig.

2. Dekadische Zahlen mit einer Null, z. B. 37940 haben keine rationale $\sqrt{}$; mit 2 Nullen ist nur eine rationale $\sqrt[2]{}$ möglich, mit 3 Nullen nur eine rationale

$\sqrt[2]{}$, mit 4 Nullen nur eine rationale $\sqrt[4]{}$ oder eine rationale $\sqrt[2]{}$; eine dekadische Zahl mit 6 Nullen kann nur eine rationale $\sqrt[2]{}$ oder $\sqrt[3]{}$ oder $\sqrt[6]{}$ haben u. s. w.

Ist die letzte Ziffer eine gerade Zahl und geht nicht zugleich die 4 auf, ist die letzte Ziffer 5 und geht nicht zugleich die 25 auf, so hat die Zahl keine rationale $\sqrt{}$. Ist die Summe der Ziffern einer Zahl durch 3 und nicht zugleich durch 9 ohne Rest theilbar, so hat die Zahl keine rationale $\sqrt{}$.

3. Ausziehen einer Quadratwurzel.

Aus der Zahl 61009 die $\sqrt[2]{}$ zu ziehen: Das empirische Verfahren ist Folgendes:

$$\sqrt[2]{6|10|09|} = 247$$

```
 4
 ---
 210
  44
 176
 ----
  3409
   487
  3409
```

Theile die Zahl von der Rechten zur Linken in Klassen zu 2 Ziffern, die erste Klasse links wird dann eine oder zwei Ziffern enthalten. Suche das zunächst kleinere Quadrat der ersten Klasse (=4), schreibe dies darunter, die Wurzel daraus (2) rechts des Gleichheitszeichens; ziehe ab (6 − 4 = 2), setze den Rest (2) unter den Strich, schreibe rechts dazu die zweite Klasse (10); setze die gefundene $\sqrt{}$(2) doppelt genommen (2 × 2 = 4) unter die zweite Stelle (1), dividire damit in die obere, aus den beiden links stehenden Ziffern bestehende Zahl (21); der gröfste Quotient $\left(\frac{21}{4} = 5 +\right)$ ist zu grofs, denn er mufs rechts neben (4) gesetzt und die so gebildete Zahl (45) mit demselben Quotient (5) multiplicirt, eine Zahl (45×5 = 225) geben, die kleiner ist als die zunächst obere Zahl (210). Daher der zunächst kleinere Quotient $\left(\frac{21}{4} = 4 +\right)$ neben (4) gesetzt und die so gebildete Zahl (44) mit dem Quotient (4) multiplicirt (44 × 4 = 176) darunter gesetzt, von der oberen (210) abgezogen, den Rest (210 − 176 = 34) untergeschrieben und die dritte Klasse (09) rechts zugeschrieben. Da der Quotient (4) der richtige ist, wird er zugleich als $\sqrt{}$ neben die erste $\sqrt{}$(2) geschrieben, und die bis jetzt erhaltene $\sqrt{}$(24) doppelt genommen (48) unter die vorletzten Ziffern (340) der oberen Zahl gesetzt, damit in diese dividirt (340 : 48 = 7 +), den Quotient (7) neben gesetzt, damit die ganze Zahl (487) multiplicirt, (487 × 7 = 3409) darunter geschrieben und von der zunächst oberen (3409) abgezogen. Beide Zahlen gehen mit einander auf, der letzte Quotient (7) als richtige $\sqrt{}$ wird neben die ersten beiden (24) geschrieben, und man hat

$$\sqrt[2]{61009} = 247$$

4. Um die Theorie dieses Verfahrens zu verstehen, hat man zuerst Folgendes zu beachten:

Die kleinste einziffrige Zahl (1) hat zum Quadrat die kleinste einziffrige Zahl (1)

Die kleinste zweiziffrige Zahl (10) hat zum Quadrat die kleinste dreiziffrige Zahl (100) u. s. w.; überhaupt die kleinste $n$ziffrige Zahl, 1 mit $(n-1)$ Nullen, hat zum Quadrat die kleinste $(2n-1)$ziffrige Zahl, nämlich 1 mit $2(n-1)$ Nullen. Mithin haben alle Quadrate von 1 bis 99, nämlich alle ein- und zweiziffrigen Quadrate eine einziffrige $\sqrt{}$, alle Quadrate von 100 bis 9999, nämlich alle drei- und vierziffrigen Quadrate eine zweiziffrige $\sqrt{}$ u. s. w., und allgemein alle $(2n-1)$- und $(2n)$ziffrigen Quadrate eine $n$ziffrige $\sqrt{}$, und folglich hat das obige $5 = (2 \cdot 3 - 1)$ziffrige Quadrat 61009 eine dreiziffrige $\sqrt{}$. Sucht man diese $\sqrt{}$ eben so wie die Resultate der 4 Species mit Berücksichtigung des dekadischen Systems, so kann diese $\sqrt{}$ allgemein bezeichnet werden mit $100 \cdot a + 10 \cdot b + c$, und, wie oben ausgerechnet, ist $a = 2$, $b = 4$ und $c = 7$. Macht man ferner die obige Klassentheilung, so erhält man sogleich in der Anzahl der Klassen die Anzahl der Ziffern für die $\sqrt{}$, und als höchste dekadische Zahl (2) derselben, deren Quadrat (4) der Zahl (6) in der ersten Klasse zunächst kommt.

Nun ist allgemein $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$. Setzt man die sofort gefundene erste dekadische Zahl $= A$, das noch zu findende $10b + c = B$, so hat man

$$\begin{aligned} A^2 + 2AB + B^2 &= 6|10|09 \quad \Big\} A = a \\ A^2 &= -4\ 00\ 00 \quad \Big\} = 200 \\ \text{bleibt } 2AB + B^2 &= 2\ 10\ 09 \end{aligned}$$

Da $2A$ bedeutend gröfser ist als B, so erhält man B näherungsweise, wenn man mit $2A$ in $2AB + B^2$, hier 21009 durch 400 dividirt; man erhält $\frac{21009}{400} = 50 +$, ersieht aber durch Probiren, dafs 50 zu grofs ist (wie solches beim partiellen Dividiren auch mitunter vorkommt) und dafs man nur 40 nehmen kann.

Dies näherungsweise $B' = 40$ ist aber von $B = 10b + c$ der erste Summand $10b$. Subtrahirt man nun von

$$\left.\begin{array}{ll} 2AB+B^2= & 2|10|09 \\ 2AB'+B'^2=(2A+B') & (44) \\ \times B'=440\times 40 & 17600 \end{array}\right\} b=40$$

so erhält man

$$(A+B)^2-(A+B')^2=(A+B'+c)^2-(A+B')^2$$
$$=2(A+B')c+c^2$$
$$=[2(A+B')+c]c \quad =3409$$

dividirt man daher mit

$$\left.\begin{array}{ll} 2(A+B')=2\times 240 & =480 \\ \text{so erhält man für } c & =7 \\ \text{also } 2\times 240+7 & =487 \end{array}\right\} c=7$$
$$\times 7 \qquad =3409$$

$100a+10b+c=247$

Durch ein umgekehrtes Verfahren, nämlich durch partielles Quadriren der $\sqrt{\ }=247$, erhält man dieselben Zahlen, welche beim $\sqrt{\ }$ ausziehen vorkommen:

Es ist nämlich

$247^2=(200+40+7)^2=$

$200^2+2\cdot 200\cdot 40+40^2+2\cdot(200+40)\cdot 7+7^2=$

$200^2+(2\cdot 200+40)40+(2\cdot 240+7)\cdot 7$

$$\begin{array}{ll} 200^2 & =40000 \\ (2\cdot 200+40)\cdot 40 & =17600 \\ (2\cdot 240+7)\cdot 7 & =\ \ 3409 \\ 247^2 & =61009 \end{array}$$

5. Ist die $\sqrt{\ }$ irrational, wie z. B. $\sqrt[2]{245}$, so nähert man sich derselben durch Decimalstellen, und hängt demzufolge wirklich oder in Gedanken als Decimalen Nullen an, von denen je 2 zu einer Klasse gehören, als:

2|45|00|00|00| u. s. w.

$\sqrt{0,5}$ schreibt man $\sqrt{0,|50|00|}$ u. s. w.

$\sqrt{1,579}$ „ „ $\sqrt{1,|57|90|00|}$ u. s. w.

$\sqrt{12,00075}=$ $\sqrt{12,|00|07|50|}$ u. s. w.

Beispiele.

$\sqrt{16|07|44|86|49|}=40093$

```
16
 074486
   8009
  72081
   240549
    80183
   240549
```

$\sqrt{22|}=4,69041$

```
16
 ,600
   86
  516
   8400
    929
   8361
    390000
     93804
    375216
     1478400
      938081
      54031900 u. s. w.
```

$\sqrt{0,014}$ schreibe

$\sqrt{0,|01|40|}=0,1183$

```
1
 40
 21
 1900
  228
 1824
   7600
   2363
   7089 u. s. w.
```

6. Die $\sqrt[2]{\ }$ aus einer durch Exponent angezeigten Potenz kann erst ausgezogen werden, wenn die Potenz berechnet ist

$$\sqrt[2]{7^3}=\sqrt[2]{343}$$

oder es müfste die $\sqrt{\ }$ der Potenz ein Quadrat sein, als

$$\sqrt[2]{25^3}=\sqrt[2]{5^6}=5^3=125$$

7. Aus Brüchen zieht man die $\sqrt[2]{\ }$, indem man sie in Decimalbrüche verwandelt oder rationale Nenner macht, z. B.

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}}=\sqrt{0,5}=\sqrt{\tfrac{2}{4}}=\tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$
$$\sqrt{25\tfrac{3}{4}}=\sqrt{25,75}=\sqrt{\frac{103}{4}}=\tfrac{1}{2}\sqrt{103}$$

8. Näherungsweisen.

A. Hat man aus dem gegebenen Quadrat $(a+b)^2$, a bestimmt und zieht a^2 ab, so bleibt $2ab+b^2$

Es ist aber

$$\frac{2ab+b^2}{2a}=b+\frac{b^2}{2a}$$

vernachlässigt man $\frac{b^2}{2a}$, so erhält man b näherungsweise, und um so näher, je kleiner b gegen a ist.

Das 3. Beispiel, No. 5, weiter ausgeführt, giebt

$$\sqrt{0,014}=0,11832159566199\ldots$$

für $a=0,1$ bleibt $2ab+b^2=0,004$; also näherungsweise $b=\frac{0,014-0,1^2}{2\cdot 0,1}=\frac{0,004}{0,2}$ $=0,02$ und $\sqrt{0,014}$ nahe $=0,1+0,02=0,12$

Hat man a bis 0,118 bestimmt, so erhält man b näherungsweise $=\frac{0,014-0,118^2}{2\cdot 0,118}$ $=\frac{0,000076}{0,236}=0,000322$, also $\sqrt{0,014}$ nahe $=0,118322$

Hat man a bis 0,1183 bestimmt, so wird b nahe $=\frac{0,0511}{2366}=0,000021597\ldots$ und $\sqrt{0,014}$ nahe $=0,118321597\ldots$

B. Schreibt man $\sqrt{0,014}=\sqrt{0,0144-0,0004}$ so hat man $\sqrt{0,014}=0,12-B$ daher $-0,24\,B+B^2=-0,0004$

daher B nahe $= \frac{0{,}0004}{0{,}24} = \frac{0{,}01}{6}$ und

$\sqrt{0{,}014}$ nahe $=0{,}12-0{,}001666\ldots=0{,}11833\ldots$

9. Die Ausziehung der Kubikwurzel.

Diese beruht auf denselben Principien wie die der $\sqrt[2]{\ }$, und besteht in dem umgekehrten Verfahren der allmählichen Kubirung. Z. B.

345^3 ist $=(300+40+5)^3$
$=300^3+3\cdot300^2\cdot40+3\cdot300\cdot40^2+40^3+$
$3\cdot(300+40)^2\cdot5+3(300+40)\cdot5^2+5^3$

Schreibt man behufs der Summirung die einzelnen Glieder des Kubus nach dekadischem System, so erhält man

300^3	$=27000000$
$3\cdot300^2\cdot40$	$=10800000$
$3\cdot300\cdot40^2$	$=\ \ 1440000$
40^3	$=\ \ \ \ 64000$
340^3	$=39304000$
$3\cdot340^2\cdot5$	$=\ \ 1734000$
$3\cdot340\cdot5^2$	$=\ \ \ \ 25500$
5^3	$=\ \ \ \ \ \ 125$
345^3	$=41063625$

Ist nun dieser Kubus gegeben und man soll dessen $\sqrt{\ }$ finden, so hat man die oben nach und nach an einander gefügten Summanden hier nach und nach fortzunehmen. Zuerst geschieht eine Klassentheilung von rechts nach links von je 3 Ziffern; die erste Klasse links erhält 1, 2 oder 3 Ziffern.

$\sqrt[3]{41|063|625|}$ $A=300$

der zunächst kleinere Kubus A^3 mit 6 Nullen ist nun 27

es bleibt 14|063|625

um die nächstfolgende Zehnerziffer (B) zu erhalten, hat man in dem Rest 14|063|625 den gröfsten Summand $3\cdot300^2\cdot10\cdot B$ $2700000\times B$

Dividirt man demnach mit 27 in 140, so erhält man $B=5$, welches aber, wie eine Probe ergiebt, zu grofs ist, weshalb $B=4$ gesetzt werden mufs.

Nun hat man bereits 300^3 abgezogen, und um 340^3 abzuziehen, hat man noch abzuziehen

$3\cdot300^2\cdot40$	$=10800000$
$3\cdot300\cdot40^2$	$=\ \ 1440000$
40^3	$=\ \ \ \ 64000$
Summa	12304000
von dem obigen Rest	14063625
bleibt	1|759|625

Bezeichnet man die Einerziffer mit C, so ist in dem Rest 1|759|625 der gröfste Summand
$=3\cdot340^2\cdot C=$ $346\,800\times C$

Dividirt man daher 17596 durch 3468, so erhält man $C=5$, und wenn 345 die gesuchte $\sqrt[3]{\ }$ ist, so mufs der letzte Rest noch enthalten

$3\cdot340^2\cdot5$	$=1734000$
$3\cdot340\cdot5^2$	$=\ \ \ 25500$
5^3	$=\ \ \ \ \ \ 125$
in Summa	1759625

wie dies der Fall ist.

Man ersieht, dafs die Ausziehung der $\sqrt[3]{\ }$ eine mühsame und langwierige Arbeit ist, besonders wenn bei irrationalen Wurzeln viele Decimalen verlangt werden.

Decimalen theilt man, wie bei der $\sqrt[2]{\ }$, vom Komma aus ab

$\sqrt[3]{0{,}4}$ schreib $\sqrt[3]{0{,}|400|000|}$ u. s. w.

$\sqrt[3]{12{,}05}$ „ $\sqrt[3]{12{,}|050|000|}$ u. s. w.

10. Ist eine Zahl zu potenziren und die $\sqrt[3]{\ }$ auszuziehen, so mufs (wie ad 6) das Erstere zuvor geschehen $\sqrt[3]{7^4}$ rechne $\sqrt[3]{2401}$. Oder es müfste die $\sqrt{\ }$ der Potenz ein Kubus sein, als $\sqrt[3]{125^2}=5^2=25$

11. Aus Brüchen zieht man die $\sqrt[3]{\ }$, indem man sie in Decimalbrüche verwandelt oder rationale Nenner macht. Z. B.

$$\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}}=\sqrt[3]{0{,}5}=\sqrt[3]{\tfrac{4}{8}}=\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{4}$$

$$\sqrt[3]{25\tfrac{3}{4}}=\sqrt[3]{25{,}75}=\sqrt[3]{\frac{206}{8}}=\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{206}$$

vergl. No. 7.

12. Annäherungsweisen, die aus dem No. 9 gedachten Verfahren entspringen, wie bei der $\sqrt[2]{\ }$ No. 8 angegeben worden, sind nicht gut zur Anwendung geeignet, weil, wenn man statt

$$\frac{3a^2b+3ab^2+b^3}{3a^2}=b+\frac{b^2}{a}+\frac{b^3}{3a^2}$$

näherungsweise b setzt, der zweite Summand $\frac{b^2}{a}$ in vielen Fällen zu grofs ist, um fortgelassen werden zu können.

13. Die $\sqrt[4]{\ }$ zieht man am leichtesten aus, wenn man erst die $\sqrt[2]{\ }$, und aus der erhaltenen $\sqrt[2]{\ }$ wiederum die $\sqrt[2]{\ }$ auszieht; die $\sqrt[6]{\ }$, indem man zuerst die $\sqrt[2]{\ }$ und aus dieser die $\sqrt[3]{\ }$ auszieht. Andere höhere Wurzeln nach den obengedachten Regeln auszuziehen, ist nicht gerathen: Man bedient sich dazu der Logarithmen und mit gleichem Vortheil auch für's Ausziehen der Quadrat und der Kubikwurzel.

Man hat nämlich

$$\log \sqrt[n]{m} = \frac{1}{n} \log m$$

mithin $\sqrt[n]{m} = num \frac{1}{n} \log m$

1. Beispiel.

$\log \sqrt[5]{24} = \frac{1}{5} \log 24 = \frac{1}{5} \cdot 1{,}3802112$
$= 0{,}27604224$

und $\sqrt[5]{24} = num\, 0{,}27604224$
$= 1{,}888175$

2. Beispiel.

Die ad 9 gedachte $\sqrt[3]{41063625}$ erhält man

$\log 41063000$	$= 7{,}6134507$
die Differenz gegen $\log 41064000$ ist (s. unter $P \cdot P$ in den Tafeln) $0{,}0000106$, mithin kommt hinzu $0{,}0000106 \times 0{,}625$	$= 0{,}000006625$
giebt $\log 41063625$	$= 7{,}613457325$
$\frac{1}{3}$ desselben	$= 2{,}537819108$

deren Numerus $= \sqrt[3]{41063625}$ findet man in den Tafeln $= 537$, wie ad 9 elementar berechnet worden.

14. Eine Erläuterung bedarf noch die A. einer $\sqrt{\ }$ aus trigonometrischen Zahlen mit Hülfe der Logarithmen.

1. Beispiel.

Irgend eine Aufgabe verlange, dafs man $\angle x$ finde, und man erhalte
$\sin^2 x = 0{,}479$
so ist $\sin x = \sqrt{0{,}479}$
man findet $\log 0{,}479 = 0{,}6803355 - 1$
und da $\log \sqrt{0{,}479} = \frac{1}{2} \cdot 0{,}6803355 - 1$
so schreibe man, um eine ganze Zahl als Charakteristik zu bekommen,

$\frac{1}{2} \times 1{,}6803355 - 2$

nun mit 2 dividirt, giebt

$\log \sin x = 0{,}84016775 - 1$

und da in den Tafeln die Charakteristik -10 fortgelassen worden

$\log \sin x = 9{,}84016775$

woraus man in den Tafeln findet

$x = 43° 47' 47''$

2. Beispiel.

Findet man zur Bestimmung von $\angle x$ in Folge des Gebrauchs der Tafeln

$\log tg^2 x = 9{,}1543284$

so ist dieser Logarithmus in Wirklichkeit

$9{,}1543284 - 10 = 0{,}1543284 - 1$

Will man nun $\log tg\, x$ finden, um die Tafeln gebrauchen zu können, so mufs man wieder einen $\log$ finden, dessen Charakteristik $= -10$ ist, und da man den obigen $\log$ mit 2 zu dividiren hat, so rechne

$\frac{1}{2} \times 19{,}1543284\,(-20)$

und man erhält

$\log tg\, x = 9{,}5771642\,(-10)$

und findet in den Tafeln

$x = 20° 41' 32''$

3. Beispiel.

Erhält man in Folge des Gebrauchs der Tafeln

$\log tg^3 x = 9{,}9543503\,(-10)$

so rechne man, um $\log tg\, x$ zu finden,

$\log tg\, x = \frac{1}{3} \times 29{,}9543503\,(-30)$

und erhält $\log tg\, x = 9{,}9847501\,(-10)$

u. s. w.

Eine Anwendung hiervon findet man in dem Art.: Algebraische Gleichung, No. 23 bis 25.

15. Mit Hülfe des binomischen Satzes kann man jede irrationale Wurzel durch Reihen-Entwickelung und Gliedersummirung bestimmen, und zwar auf jede beliebige Anzahl von Decimalen, während man bei Anwendung der Logarithmen darin beschränkt ist. So wie nämlich

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$
$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4$

so ist allgemein:

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} b + \frac{n \cdot (n-1)}{1. \quad 2} \cdot a^{n-2} b^2 + \frac{n \cdot (n-1)(n-2)}{1. \quad 2. \quad 3} a^{n-3} b^3 + \ldots + nab^{n-1} + b^n$$

wo n jede beliebige ganze, gebrochene, positive oder negative Zahl sein kann.

Hat man nun aus der Zahl Z die $n$te $\sqrt{\ }$ zu ziehen,

so ist $\sqrt[n]{Z} = Z^{\frac{1}{n}}$

Zerlegt man ferner Z in 2 Zahlen, von denen die eine eine $n$te Potenz ist, $(Z = a^n \pm b)$ wo man b möglichst klein gegen a^n wählt,

so hat man $\sqrt[n]{Z} = \sqrt[n]{(a^n \pm b)}$

Es gereicht zum Vortheil, a^n als gemeinschaftlichen Factor aus der $\sqrt{\ }$ stellen zu können, und daher hat man $b = a^n \times x$, woraus $x = \frac{b}{a^n}$ gefunden wird.

Nun ist

$$\sqrt[n]{Z} = \sqrt[n]{a^n(1 \pm x)} = a \sqrt[n]{1 \pm x} = a(1 \pm x)^{\frac{1}{n}} = a \left[1 \pm \frac{1}{n} x - \frac{1 \cdot (n-1)}{n. \quad 2n} x^2 \pm \frac{1 \cdot (n-1)(2n-1)}{n. \quad 2n. \quad 3n} x^3 - \frac{1 \cdot (n-1)(2n-1)(3n-1)}{n. \quad 2n. \quad 3n. \quad 4n} x^4 \pm \ldots \right] \quad 1$$

Beispiel. $\sqrt[4]{95}$ setze $\sqrt[4]{3^4+14}$

und da $x=\frac{14}{3^4}=\frac{14}{81}$, so ist

$$\sqrt[4]{95} = 3\left[1+\tfrac{1}{4}\cdot\frac{14}{81}-\frac{1\cdot3}{4\cdot8}\left(\frac{14}{81}\right)^2 + \frac{1\cdot3\cdot7}{4\cdot8\cdot12}\left(\frac{14}{81}\right)^3 - \frac{1\cdot3\cdot7\cdot11}{4\cdot8\cdot12\cdot16}\left(\frac{14}{81}\right)^4+\dots\right]$$

Man erhält die Klammergröfse:

$$\begin{aligned}
&+1 &&= +1{,}00000\ 000000\\
&+\frac{1}{4}\cdot\frac{14}{81} &&= +0{,}04320\ 987654\\
&-\frac{1\cdot3}{4\cdot8}\left(\frac{14}{81}\right)^2 &&= -0{,}00280\ 064015\\
&+\frac{1\cdot3\cdot7}{4\cdot8\cdot12}\left(\frac{14}{81}\right)^3 &&= +0{,}00028\ 236907\\
&-\frac{1\ldots7\cdot11}{4\ldots12\cdot16}\left(\frac{14}{81}\right)^4 &&= -0{,}00003\ 355311\\
&+\frac{1\ldots11\cdot15}{4\ldots16\cdot20}\left(\frac{14}{81}\right)^5 &&= +0{,}00000\ 434948\\
&-\frac{1\ldots15\cdot19}{4\ldots20\cdot24}\left(\frac{14}{81}\right)^6 &&= -0{,}00000\ 059514\\
&+\frac{1\ldots19\cdot23}{4\ldots24\cdot28}\left(\frac{14}{81}\right)^7 &&= +0{,}00000\ 008449\\
&-\frac{1\ldots23\cdot27}{4\ldots28\cdot32}\left(\frac{14}{81}\right)^8 &&= -0{,}00000\ 001232\\
&+\frac{1\ldots27\cdot31}{4\ldots32\cdot36}\left(\frac{14}{81}\right)^9 &&= +0{,}00000\ 000183\\
&-\frac{1\ldots31\cdot35}{4\ldots36\cdot40}\left(\frac{14}{81}\right)^{10} &&= -0{,}00000\ 000028\\
&+\frac{1\ldots35\cdot39}{4\ldots40\cdot44}\left(\frac{14}{81}\right)^{11} &&= +0{,}00000\ 000004
\end{aligned}$$

Das Positive ist $= +1{,}04349\ 668145$
Das Negative ist $= -0{,}00283\ 480100$
Summa $= +1{,}04066\ 188045$
mit 3 multiplicirt
giebt $\sqrt[4]{95} = 3{,}12198\ 564135$

16. Hätte man $\sqrt[4]{2}$ zu bestimmen, so würde bei der Abtheilung $\sqrt[4]{1+1}$, also $x=\frac{1}{1}$ die Reihe nur äufserst langsam convergiren; man multiplicire daher 2 mit einer geeigneten 4ten Potenz, so dafs das Product einer anderen 4ten Potenz nahe kommt. Zweckmäfsig z. B. ist $5^4=625$

$$\begin{aligned}
\text{denn es ist } 2\cdot5^4 &= 1250\\
6^4 &= 1296\\
\text{daher } 6^4-2\times5^4 &= 46
\end{aligned}$$

man hat also $\sqrt[4]{2\cdot5^4}=5\sqrt[4]{2}=\sqrt[4]{6^4-46}$

$$x=\frac{46}{6^4}=\frac{23}{648}$$

und $5\sqrt[4]{2}=6\sqrt[4]{1-\frac{23}{648}}$

$$=6\left[1-\frac{1}{4}\cdot\frac{23}{648}-\frac{1\cdot3}{4\cdot8}\left(\frac{23}{648}\right)^2-\frac{1\cdot3\cdot7}{4\cdot8\cdot12}\left(\frac{23}{648}\right)^3-\dots\right]$$

Die Klammergröfse ist:

$$\begin{aligned}
&+1 &&= +1{,}00000\ 00000\ 00\\
&-\frac{1}{4}\cdot\frac{23}{648} &&= -0{,}00887\ 34567\ 90\\
&-\frac{1\cdot3}{4\cdot8}\left(\frac{23}{648}\right)^2 &&= -0{,}00011\ 81073\ 53\\
&-\frac{1\cdot3\cdot7}{4\cdot8\cdot12}\left(\frac{23}{648}\right)^3 &&= -0{,}00000\ 24453\ 81\\
&-\frac{1\ldots7\cdot11}{4\ldots12\cdot16}\left(\frac{23}{648}\right)^4 &&= -0{,}00000\ 00596\ 72\\
&-\frac{1\ldots11\cdot15}{4\ldots16\cdot20}\left(\frac{23}{648}\right)^5 &&= -0{,}00000\ 00015\ 88\\
&-\frac{1\ldots15\cdot19}{4\ldots20\cdot24}\left(\frac{23}{648}\right)^6 &&= -0{,}00000\ 00000\ 45\\
&-\frac{1\ldots19\cdot23}{4\ldots24\cdot28}\left(\frac{23}{648}\right)^7 &&= -0{,}00000\ 00000\ 01
\end{aligned}$$

Das Negative beträgt $-0{,}00899\ 40708\ 30$
Die Summa $+0{,}99100\ 59291\ 70$

diese Zahl mit 6 multiplicirt, giebt

$$5\sqrt[4]{2}=5{,}94603\ 557502$$

daher $\sqrt[4]{2}=1{,}18920\ 71150$

17. Auch die $\sqrt[n]{\ }$ läfst sich nach der ad 16 gedachten Methode auf eine beliebige Anzahl von Decimalen ausziehen.

1. Beispiel. $\sqrt[3]{2}$

Schreibe $4\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2 \cdot 4^3} = \sqrt[3]{128} = \sqrt[3]{5^3 + 3}$

Es ist $x = \frac{3}{125} = 0{,}024$

man hat $4\sqrt[3]{2} = 5\sqrt[3]{1 + 0{,}024}$

und $\sqrt[3]{2} = \frac{5}{4}\sqrt[3]{1 + 0{,}024}$

2. Beispiel. $\sqrt[3]{3}$

Schreibe $7\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3 \cdot 7^3} = \sqrt[3]{1029} = \sqrt[3]{10^3 + 29}$

Es ist $x = \frac{29}{1000} = 0{,}029$

man hat $\sqrt[3]{3} = \frac{10}{7}\sqrt[3]{(1 + 0{,}029)}$

Oder:

Schreibe $9\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3 \cdot 9^3} = \sqrt[3]{2187} = \sqrt[3]{13^3 - 10}$

Es ist $x = \frac{10}{2197}$

Man hat $\sqrt[3]{3} = \frac{13}{9}\sqrt[3]{1 - \frac{10}{2197}}$

3. Beispiel. $\sqrt[3]{4}$

Schreibe $5\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{4 \cdot 5^3} = \sqrt[3]{500} = \sqrt[3]{8^3 - 12}$

$$x = \frac{12}{512} = \frac{3}{128}$$

man hat $\sqrt[3]{4} = \frac{8}{5}\sqrt[3]{\left(1 - \frac{3}{128}\right)}$

Schreibt man $10\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{4000} = \sqrt[3]{16^3 - 96}$

$$x = \frac{96}{4096} = \frac{3}{128}$$

Man hat wieder $\sqrt[3]{4} = \frac{8}{5}\sqrt[3]{\left(1 - \frac{3}{128}\right)}$

4. Beispiel. $\sqrt[3]{5}$

Schreibe $6\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{6^3 \cdot 5} = \sqrt[3]{1080} = \sqrt[3]{10^3 + 80}$

$$x = \frac{80}{1000} = 0{,}08$$

$$\sqrt[3]{5} = \frac{10}{6}\sqrt[3]{(1 + 0{,}08)}$$

Diese $\sqrt[3]{\ }$ soll auf 10 Decimalen bestimmt werden.

$$\sqrt[3]{1 + 0{,}08} = 1 + \frac{1}{3}0{,}08 - \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 6}0{,}08^2 + \frac{1 \cdot 2 \cdot 5}{3 \cdot 6 \cdot 9}0{,}08^3 - \ldots$$

$+1$	$= +1{,}00000\ 00000\ 00$
$+\frac{1}{3} \cdot 0{,}08$	$= +0{,}02666\ 66666\ 67$
$-\frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 6} \cdot 0{,}08^2$	$= -0{,}00071\ 11111\ 11$
$+\frac{1 \cdot 2 \cdot 5}{3 \cdot 6 \cdot 9} \cdot 0{,}08^3$	$= +0{,}00003\ 16049\ 38$
$-\frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 8}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12} \cdot 0{,}08^4$	$= -0{,}00000\ 16855\ 97$
$+\frac{1 \ldots 8 \cdot 11}{3 \ldots 12 \cdot 15} \cdot 0{,}08^5$	$= +0{,}00000\ 00988\ 88$
$-\frac{1 \ldots 11 \cdot 14}{3 \ldots 15 \cdot 18} \cdot 0{,}08^6$	$= -0{,}00000\ 00061\ 53$
$+\frac{1 \ldots 14 \cdot 17}{3 \ldots 18 \cdot 21} \cdot 0{,}08^7$	$= +0{,}00000\ 00003\ 98$
$-\frac{1 \ldots 17 \cdot 20}{3 \ldots 21 \cdot 24} \cdot 0{,}08^8$	$= -0{,}00000\ 00000\ 27$
$+\frac{1 \ldots 20 \cdot 23}{3 \ldots 24 \cdot 27} \cdot 0{,}08^9$	$= +0{,}00000\ 00000\ 02$
Summa	$1{,}02598\ 55680\ 05$

Diese Zahl mit $\frac{10}{6}$ multiplicirt, giebt

$\sqrt[3]{5} = 1{,}70997\ 59467$

18. Die $\sqrt[2]{\ }$ desgleichen wie die $\sqrt[3]{\ }$ in No. 16.

1. Beispiel. $\sqrt{2}$

Schreibe $5\sqrt{2} = \sqrt{2 \cdot 5^2} = \sqrt{50} = \sqrt{7^2 + 1}$

$$x = \tfrac{1}{49}$$

$$\sqrt{2} = \tfrac{7}{5}\sqrt{(1 + \tfrac{1}{49})}$$

2. Beispiel. $\sqrt{3}$

Schreibe $4\sqrt{3} = \sqrt{3 \cdot 4^2} = \sqrt{48} = \sqrt{7^2 - 1}$

$$x = \tfrac{1}{49}$$

$$\sqrt{3} = \tfrac{7}{4}\sqrt{(1 - \tfrac{1}{49})}$$

3. Beispiel. $\sqrt{5}$

Schreibe $4\sqrt{5} = \sqrt{5 \cdot 4^2} = \sqrt{80} = \sqrt{9^2 - 1}$

$$x = \tfrac{1}{81}$$

$$\sqrt{5} = \tfrac{9}{4}\sqrt{(1 - \tfrac{1}{81})}$$

Dies Beispiel soll hier auf 10 Decimalen durchgeführt werden:

$$\sqrt{(1-\tfrac{1}{81})} = 1 - \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{81} - \frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}\cdot(\tfrac{1}{81})^2 - \frac{1\cdot1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}(\tfrac{1}{81})^3 - \ldots$$

1	$= + 1{,}00000\ 00000\ 00$
$-\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{81}$	$= - 0{,}00617\ 28395\ 06$
$-\frac{1\cdot1}{2\cdot4}\left(\frac{1}{81}\right)^2$	$= - 0{,}00001\ 90519\ 74$
$-\frac{1\cdot1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}\left(\frac{1}{81}\right)^3$	$= - 0{,}00000\ 01176\ 05$
$-\frac{1\cdot1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\left(\frac{1}{81}\right)^4$	$= - 0{,}00000\ 00009\ 07$
$-\frac{1\ldots5\cdot7}{2\ldots8\cdot10}\left(\frac{1}{81}\right)^5$	$= - 0{,}00000\ 00000\ 08$
Summa	$= + 0{,}99380\ 79900\ 00$

Diese Zahl mit $\frac{9}{4}$ multiplicirt, giebt

$$\sqrt[2]{5} = 2{,}23606\ 79775$$

19. Man hat für die Ausziehung einer $\sqrt{\ }$ noch andere Reihen. Setzt man z. B. in dem allgemeinen binomischen Satz No. 15:

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1.\ 2}a^{n-2}b^2 + \frac{n\cdot(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}a^{n-3}b^3 + \ldots$$

$-n$ für n, 1 für a und $-b$ für b, so erhält man

$$(1-b)^{-n} = 1 + \frac{n}{1}b + \frac{n(n+1)}{1.\ 2}b^2 + \frac{n(n+1)(n+2)}{1.\ 2.\ 3}b^3 + \ldots$$

hierin $\frac{b}{a+b}$ für b gesetzt,

erhält man

$$\left(1-\frac{b}{a+b}\right)^{-n} = \left(\frac{a}{a+b}\right)^{-n} = \left(\frac{a+b}{a}\right)^n = 1 + \frac{n}{1}\,\frac{b}{a+b} + \frac{n\cdot(n+1)}{1.\ 2}\left(\frac{b}{a+b}\right)^2 + \ldots$$

und hieraus

$$(a+b)^n = a^n\left(1 + \frac{n}{1}\,\frac{b}{a+b} + \frac{n(n+1)}{1.\ 2}\cdot\left(\frac{b}{a+b}\right)^2 + \frac{n(n+1)(n+2)}{1.\ 2.\ 3}\left(\frac{b}{a+b}\right)^3 + \ldots\right) \quad \text{II}$$

Diese allgemeine Reihe, welche in Klügels mathem. Wörterbuch, Bd. 1, pag. 336, No. 17, aufgeführt, und pag. 338 nach derselben ein Beispiel berechnet worden, ist für jeden Werth von n, für eine ganze, gebrochene, positive und negative Zahl gültig. Setzt man, um die Anwendbarkeit derselben zur Ausziehung einer $\sqrt{\ }$ zu prüfen, $\frac{1}{n}$ für n, so erhält man

$$(a+b)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}}\left[1 + \frac{1}{n}\,\frac{b}{a+b} + \frac{1\cdot(n+1)}{n.\ 2n}\left(\frac{b}{a+b}\right)^2 + \frac{1\cdot(n+1)(n+2)}{n.\ 2n.\ 3n}\left(\frac{b}{a+b}\right)^3 + \ldots\right] \quad \text{III}$$

In der Formel No. 15:

$$\sqrt[n]{a^n+b} = a\sqrt[n]{\left(1+\frac{b}{a^n}\right)} = a\sqrt[n]{(1+x)} = a\left(1 + \frac{1}{n}x + \frac{1\cdot(n-1)}{n.\ 2n}x^2 + \ldots\right)$$

sind die Coefficienten kleiner, die Veränderliche x gröfser, als in der vorstehenden Formel,

nämlich $x = \frac{b}{a}$ anstatt $\frac{b}{a+b}$

und hat man $(a-b)^{\frac{1}{n}}$, so erhält man

$$(a-b)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}}\left[1 - \frac{1}{n}\,\frac{b}{a-b} + \frac{1\cdot(n+1)}{n.\ 2n}\cdot\left(\frac{b}{a-b}\right)^2 + \frac{1\cdot(n+1)(n+2)}{n.\ 2n.\ 3n}\cdot\left(\frac{b}{a-b}\right)^3 - \ldots\right]$$

wo auch die Veränderliche $\frac{b}{a-b} > \left(x = \frac{b}{a}\right)$ wird, wo also die Formel No. 15 bestimmt convergirender ist als die vorstehende.

Für das Beispiel (No. 15) $\sqrt[4]{95}$ erhält man

$$\sqrt[4]{95} = 3\left[1 + \frac{1}{4}\cdot\frac{14}{95} + \frac{1\cdot5}{4\cdot2\cdot4}\left(\frac{14}{95}\right)^2 + \frac{1\cdot5\cdot9}{4\cdot8\cdot12}\left(\frac{14}{95}\right)^3 + \ldots\right]$$

1	$= + 1{,}00000\ 00000\ 00$
$\frac{1}{4}\cdot\frac{14}{95}$	$= + 0{,}03684\ 21052\ 63$
$\frac{1\cdot5}{4\cdot8}\left(\frac{14}{95}\right)^2$	$= + 0{,}00339\ 33518\ 01$
$\frac{1\cdot5\cdot9}{4\cdot8\cdot12}\left(\frac{14}{95}\right)^3$	$= + 0{,}00037\ 50546\ 73$

u. s. w.

woraus hervorgeht, dafs die Formel No. 15 als convergirender früher zum Resultat führt. Bei dem Beispiel (No. 16)

$$\sqrt[4]{2} = \tfrac{1}{5}\sqrt[4]{1250} = \tfrac{1}{5}\sqrt[4]{1296-46}$$

ist wegen des $-b$ (-46) die Formel No. 15 noch viel mehr geeigneter; ein

Gleiches findet für das 4te Beispiel No. 17 und für das 3te No. 18 statt.

20. Man entwickelt aus dem binomischen Satz eine noch viel mehr convergirende Reihe für die $\sqrt{\ }$-Ausziehung als die in No. 15 angegebene, wie folgt: Multiplicirt man die binomische Reihe

$$x=(a+b)^n=a^n+\frac{n}{1}a^{n-1}b+\frac{n\cdot(n-1)}{1.\ \ 2}a^{n-2}b^2+\ldots$$

auf beiden Seiten mit $1+\frac{b}{a}y$, so entsteht

$$x\left(1+\frac{b}{a}y\right)=a^n+na^{n-1}b+\frac{n\cdot(n-1)}{1.\ \ 2}a^{n-2}b^2+\frac{n\cdot(n-1)(n-2)}{1.\ \ 2.\ \ 3}a^{n-3}b^3+\ldots$$
$$+a^{n-1}by+na^{n-2}b^2y+\frac{n\cdot(n-1)}{1.\ \ 2}a^{n-3}b^3y+\ldots$$

Wird nun y so bestimmt, dafs die b^2 enthaltenden Glieder verschwinden, dafs also

$$\frac{n(n-1)}{1.\ \ 2}a^{n-2}b^2+na^{n-2}b^2y=0$$

so erhält man $y=-\frac{n-1}{2}$

Diesen Werth in die Reihe für $x\left(1+\frac{b}{a}y\right)$ gesetzt und reducirt, giebt

$$x\left[1-\frac{n-1}{2}\,\frac{b}{a}\right]=a^n+\frac{n+1}{2}a^{n-1}b-\frac{n+1}{6}\cdot\frac{n(n-1)}{1.\ \ 2}a^{n-3}b^3$$
$$-\frac{2(n+1)}{8}\,\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ \ 2.\ \ 3}a^{n-4}b^4-\frac{3(n+1)}{10}\,\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ \ 2.\ \ 3.\ \ 4}a^{n-5}b^5$$
$$-\frac{4(n+1)}{12}\,\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.\ \ 2.\ \ 3.\ \ 4.\ \ 5}a^{n-6}b^6-\ldots.\qquad\text{IV}$$

Hieraus entsteht

$$x=(a+b)^n=\frac{2a}{2a-(n-1)b}\left[a^n+\frac{n+1}{2}a^{n-1}b-\frac{n+1}{6}\,\frac{n\cdot(n-1)}{1.\ \ 2}a^{n-3}b^3\right.$$
$$-\frac{2(n+1)}{8}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ \ 2.\ \ 3}a^{n-4}b^4-\frac{3(n+1)}{10}\cdot\frac{n\ \ldots(n-3)}{1.\ldots\ 4}a^{n-5}b^5$$
$$\left.-\frac{4(n+1)}{12}\cdot\frac{n\ \ldots(n-4)}{1.\ldots\ 5}a^{n-6}b^6-\ldots\right]\qquad\text{V}$$

Das $m$te Glied der Klammergröfse ist:

$$\frac{m-2}{2m}(n+1)\frac{n(n-1)\ldots(n-m+2)}{1.\ \ 2.\ \ \ldots\ \ (m-1)}a^{n-m}b^m$$

Giebt man dieser Formel die Form (No. 15) I, setzt also $a=1$, $b=x$, $n=\frac{1}{n}$, so erhält man

$$(1+x)^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{1+x}=\frac{2n}{2n+(n-1)x}\left[1+\frac{n+1}{2n}x+\frac{(n+1)(n-1)}{12n^3}x^3-\frac{(n+1)(n-1)(2n-1)}{24n^4}x^4\right.$$
$$\left.+\frac{(n+1)(n-1)(2n-1)(3n-1)}{80n^5}x^5-\ldots.\right]\qquad\text{VI}$$

Das $m$te Glied der Klammergröfse ist:

$$\pm\frac{m-2}{2m}(n+1)\frac{(n-1)(2n-1)\ldots[(m-2)n-1]}{1.\ \ 2.\ \ \ldots\ \ (m-1)n^m}x^m$$

wo das Vorzeichen (+) für ein ungerades m, das Vorzeichen (−) für ein gerades m gilt. Hieraus hat man:

$$\sqrt[2]{1+x}=\frac{4}{4+x}\left[1+\tfrac{3}{4}x+\frac{x^3}{32}-\frac{3x^4}{128}+\frac{9x^5}{512}-\frac{7x^6}{512}+\frac{45x^7}{4096}-\frac{297x^8}{32768}+\ldots\right]$$
$$\sqrt[3]{1+x}=\frac{3}{3+x}\left[1+\tfrac{2}{3}x+\frac{2x^3}{81}-\frac{5x^4}{243}+\frac{4x^5}{243}-\frac{88x^6}{6561}+\frac{220x^7}{19683}-\frac{187x^8}{19683}+\ldots\right]$$

$$\sqrt[4]{1+x} = \frac{8}{8+3x}\left[1+\tfrac{5}{8}x+\frac{5x^3}{256}-\frac{35x^4}{2048}+\frac{231x^5}{16384}-\frac{385x^6}{32768}+\frac{5225x^7}{524288}-\frac{72105x^8}{8388608}+\ldots\right]$$

u. s. w.

Die Entwickelung der vorstehenden Reihen und deren Fortsetzungen geschieht sehr leicht, wenn man beobachtet, dafs von dem 4ten Gliede ab jedes $m$te Glied gefunden wird, indem man das vorhergehende ($m-1$te) Glied mit

$$\frac{(m-2)[(m-2)n-1]}{m(m-3)n}x$$

multiplicirt und wo n den Grad der $\sqrt{\ }$ bedeutet. Ein Gesetz, welches auch die Ausrechnung der Reihenglieder in Decimalen bei gegebenen Zahlenbeispielen sehr erleichtert.

1. Beispiel (No. 15)

$$\sqrt[4]{95}=\sqrt[4]{3^4+14}=3\sqrt[4]{1+\tfrac{14}{81}}$$

Es ist $\sqrt[4]{1+\frac{14}{81}}$, wenn der gemeinschaftliche Factor $\frac{8}{8+3\cdot\frac{14}{81}}=\frac{648}{690}$ zu jedem einzelnen Gliede hinzugenommen wird, die Summe der folgenden Zahlenreihe, wobei zu bemerken, dafs

das 4te Glied	=	$\frac{49}{4\cdot 81}$	× dem	3.	Gliede
„ 5te „	=	$\frac{77}{540}$	× „	4.	„
„ 6te „	=	$\frac{35}{3\cdot 81}$	× „	5.	„
„ 7te „	=	$\frac{95}{8\cdot 81}$	× „	6.	„
„ 8te „	=	$\frac{161}{1080}$	× „	7.	„
„ 9te „	=	$\frac{49}{324}$	× „	8.	„
„ 10te „	=	$\frac{62}{405}$	× „	9.	„
„ 11te „	=	$\frac{245}{1584}$	× „	10.	„
„ 12te „	=	$\frac{13\times 35}{36\cdot 81}$	× „	11.	„

Das 1. Glied	= + 0,93913 04347 82609
„ 2. „	= + 0,10144 92753 62319
„ 3. „	= + 0,00009 47076 37798
Das 4. Glied	= − 0,00001 43230 68680
„ 5. „	= + 0,00000 20423 63497
„ 6. „	= − 0,00000 02941 67581
„ 7. „	= + 0,00000 00431 26420
„ 8. „	= − 0,00000 00064 29031
„ 9. „	= + 0,00000 00009 72292
„ 10. „	= − 0,00000 00001 48845
„ 11. „	= + 0,00000 00000 23022
„ 12. „	= − 0,00000 00000 03591
Summa	+ 1,04066 18804 50229

21. Die Reihe VI, No. 20, für $\sqrt[4]{1+x}$ convergirt in den ersten drei Gliedern wegen der fortgelassenen b^2 enthaltenden Glieder der ursprünglichen Reihe bedeutend, und in den folgenden Gliedern ebenfalls mehr als die aus der allgemeinen Reihe I, No. 15, entwickelte Reihe. Denn durch 12 Glieder ist die 11te Decimalstelle (5) schon richtig gefunden worden, und dafs die 11te Stelle (No. 15) mit dieser übereinstimmt, ist Zufall; als zuverlässig richtig konnte sie dort nicht angesehen werden; daher ist hier

$$\sqrt[3]{95}=3\sqrt[4]{1+x}=3{,}12198\ 56414$$

auf 10 Decimalen richtig gefunden worden, wenn man damit abbrechen will, weil das folgende 13te Glied in $\sqrt[4]{1+x}$ positiv in der 12ten Decimale etwa 5 geben wird, und numerisch gröfser ist als alle ihm nachfolgenden Glieder zusammengenommen.

Die Reihe VI, No. 20, ist also der I, No. 15, vorzuziehen. Aus dem Beispiel $\sqrt[4]{95}$ ist zu ersehen, dafs sie schon in den ersten drei Gliedern eine sehr bedeutende Annäherung giebt, nämlich = + 1,04067 44..
während das 4te Glied = − 0,00001 43..
einen Prüfstein für den Grad der Genauigkeit gewährt:

Demnach kann man, wenn wenige Decimalen genügen, die Reihe V unmittelbar, und zwar in den 3 ersten Gliedern als Formel anwenden, also:

$$(a+b)^n=\frac{2a}{2a-(n-1)b}\left[a^n+\frac{n+1}{2}a^{n-1}b-\frac{n+1}{b}\cdot\frac{n(n-1)}{1.\ 2}a^{n-3}b^3\right]$$

und wenn man $\frac{1}{n}$ für n setzt:

$$(a+b)^{\frac{1}{n}}=\frac{2na}{2na+(n-1)b}\left[\sqrt[n]{a}+\frac{n+1}{2n}\frac{b\sqrt[n]{a}}{a}+\frac{(n+1)(n-1)}{12n^3}\frac{b^3\sqrt[n]{a}}{a^3}\right]$$

und reducirt:

$$\sqrt[n]{(a+b)} = \frac{2na+(n+1)b}{2na+(n-1)b}\sqrt[n]{a} + \frac{(n+1)(n-1)b^3\sqrt[n]{a}}{6n^2a^2[2na+(n-1)b]} \qquad \text{VII}$$

hieraus

$$\sqrt[2]{a+b} = \frac{4a+3b}{4a+b}\sqrt{a} + \frac{b^3\sqrt{a}}{8a^2(4a+b)}$$

$$\sqrt[3]{a+b} = \frac{3a+2b}{3a+b}\sqrt[3]{a} + \frac{2b^3\sqrt[3]{a}}{27a^2(3a+b)}$$

$$\sqrt[4]{a+b} = \frac{8a+5b}{8a+3b}\sqrt[4]{a} + \frac{5b^3\sqrt[4]{a}}{32a^2(8a+3b)}$$

$$\sqrt[5]{a+b} = \frac{5a+3b}{5a+2b}\sqrt[5]{a} + \frac{2b^3\sqrt[5]{a}}{25a^2(5a+2b)}$$

u. s. w.

Die beiden Glieder des Ausdrucks sind zusammengezogen die 3 ersten Glieder der Reihe V, No. 20.

Setzt man in dem 4ten Gliede $\frac{1}{n}$ für n, so wird das Glied negativ, und da es zugleich gröfser ist als das nachfolgende positive 5te Glied, so ist die aus der Formel VII gefundene $\sqrt{}$ deren gröfster Werth. Um aber auch noch die Grenze des kleinsten Werths zu finden, läfst sich aus der Reihe V die Bestimmung ableiten, dafs das 4te Glied

$= \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{b}{a}$ mal dem dritten ist.

1. Beispiel. $\sqrt[2]{2}$

Schreibe $5\sqrt{2} = \sqrt{50} = \sqrt{49+1}$

$$= \frac{4\cdot 49+3}{4\cdot 49+1}\cdot 7 + \frac{7}{8\cdot 49^2(4\cdot 49+1)}$$

das 1. Glied $= +7{,}07106599$

„ 2. „ $= +0{,}00000185$

der gröfste Werth $= 7{,}07106784$

die folgende negative Zahl

ist $-\frac{2\cdot 2-1}{4}\cdot\frac{1}{49}\cdot 0{,}00000185$

$= -0{,}00000003$

also der kleinste Werth $= 7{,}07106781$

Ohne Berücksichtigung der Decimalstellen, welche dem 2ten Gliede angehören, ist

$5\sqrt{2} = 7{,}07106$

und $\sqrt{2} = 1{,}41421$

der gröfste Werth von

$\sqrt{2} = \frac{1}{5}\cdot 7{,}07106784 = 1{,}41421356$

der kleinste Werth von

$\sqrt{2} = \frac{1}{5}\cdot 7{,}07106781 = 1{,}41421356$

mithin richtig

$\sqrt{2} = 1{,}41421356$

2. Beispiel. $\sqrt[3]{2}$

Schreibe $4\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{128} = \sqrt[3]{125+3}$

$$= \frac{3\cdot 125+2\cdot 3}{3\cdot 125+3}\cdot 5 + \frac{2\cdot 3^3\cdot 5}{27\cdot 125^2(3\cdot 125+3)}$$

das 1. Glied $= +5{,}03968\ 253968$

„ 2. „ $= +0{,}00000\ 169331$

der gröfste Werth von

$4\sqrt[3]{2}$ $= +5{,}03968\ 423299$

die folgende negative gröfste Zahl

$\frac{2\cdot 3-1}{2\cdot 3}\cdot\frac{3}{125}\cdot 0{,}00000169$

$= +0{,}00000\ 003386$

der kleinste Werth $= 5{,}03968\ 419913$

Ohne Berücksichtigung der dem 2ten Gliede zugehörigen Decimalen ist

$\sqrt[3]{2} = 1{,}25992$

der gröfste Werth $= 1{,}25992\ 1058$

der kleinste Werth $= 1{,}25992\ 1048$

mithin richtig

$\sqrt[3]{2} = 1{,}25992\ 105$

3. Beispiel. $\sqrt[4]{2}$

Schreibe $5\sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{1250} = \sqrt[4]{1296-46}$

$$= \frac{8\cdot 1296-5\cdot 46}{8\cdot 1296-3\cdot 46}\cdot 6 - \frac{5\cdot 46^3\cdot 6}{32\cdot 1296^2(8\cdot 1296-3\cdot 46)}$$

das 1. Glied ist $= +5{,}94604\ 10557$

„ 2. „ „ $= +0{,}00000\ 53108$

Da die folgende hinzukommende Zahl positiv ist, so ist das erste Glied der gröfste Werth,

die algebraische Summe beider Glieder $= 5{,}94603\ 57449$;

der kleinste Werth von $5\sqrt[4]{2}$.

Mithin der gröfste Werth von

$\sqrt[4]{2} = 1{,}18920\ 82111$

der kleinste Werth $= 1{,}18920\ 71490$

also richtig $\sqrt[4]{2} = 1{,}189207$

Rücksichtigt man auf die noch folgende, von da ab gröſste positive Zahl, so hat man dieselbe

$$\frac{2\cdot 4-1}{2\cdot 4}\cdot\frac{46}{1296}\cdot 0{,}00000\ 53108$$
$$= +\ 0{,}00000\ 01650$$

und man hat noch näher den gröſsten Werth von $5\sqrt[4]{2} = 5{,}94603\ 59099$ und der gröſste Werth von

$$\sqrt[4]{2} = 1{,}18920\ 71820$$

also richtig $\sqrt[4]{2} = 1{,}1892071$

4. Beispiel. $\sqrt[5]{2}$

Schreibe $7\sqrt[5]{2} = \sqrt[5]{33614} = \sqrt[5]{32768+846}$

$$= \frac{5\cdot 32768 + 3\cdot 846}{5\cdot 32768 + 2\cdot 846}\cdot 8 + \frac{2\cdot 846^3\cdot 8}{25\cdot 32768^2\,(5\cdot 32768 + 2\cdot 846)}$$

das 1. Glied ist	$= +\ 8{,}04088\ 635$
„ 2. „ „	$= +\ 0{,}00000\ 022$
der gröſste Werth von $7\sqrt[5]{2}$	$= +\ 8{,}04088\ 657$

das nachfolgende negative Glied ist

$$\frac{10-1}{10}\cdot\frac{846}{32768}\times 0{,}00000\ 022 = \quad 0{,}00000\ 006$$

der kleinste Werth von $7\sqrt[5]{2} = 8{,}04088\ 651$

der gröſste Werth von $\sqrt[5]{2} = 1{,}14869\ 808$

der kleinste Werth von $\sqrt[5]{2} = 1{,}14869\ 807$

also richtig

$$\sqrt[5]{2} = 1{,}14869\ 807$$

II. Ausziehen einer Wurzel aus Buchstabengröſsen.

1. Wurzeln aus eingliedrigen Gröſsen.

Es ist $\sqrt[n]{a^n} = a$ 1.

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \qquad 2.$$

$$\sqrt[n]{a^{mn}} = a^m \qquad 3.$$

$$\sqrt[n]{a^{m-n}} = a^{\frac{m-n}{n}} = a^{\frac{m}{n}-1} \qquad 4.$$

$$\sqrt[n]{a^{-n}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a^n}} = a^{-1} = \frac{1}{a} \qquad 5.$$

$$\sqrt[n]{a^{-nm}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a^{mn}}} = a^{-m} = \frac{1}{a^m} \qquad 6.$$

$$\sqrt[n]{\frac{a^m\cdot b^{nm}}{c^{n-m}}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}\,b^m}{c^{1-\frac{m}{n}}} \qquad 7.$$

2. Wurzeln aus mehrgliedrigen vollständigen Potenzen.

$$\sqrt{a^2+2ab+b^2} = \pm(a+b) \qquad 1.$$
$$\sqrt{(a^2-2ab+b^2)} = \pm(a-b) \qquad 2.$$
$$\sqrt[3]{(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)} = a+b \qquad 3.$$
$$\sqrt[3]{(a^3-3a^2b+3ab^2-b^3)} = a-b \qquad 4.$$
$$\sqrt[4]{(a^4\pm 4a^4b+6a^2b^2\pm 4a^2b^3+b^4)} = a\pm b \qquad 5.$$

u. s. w.

$$\sqrt[n]{\Big[a^n \pm \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1.\ \ 2}b^{n-2}b^2 \pm \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ \ 2.\ \ \ 3}a^{n-3}b^3 + \ldots \pm \frac{n(n-1)}{1.\ \ 2}a^2b^{n-2} (+\pm)\frac{n}{1}ab^{n-1}(+\mp)b^n\Big]} = a\pm b \qquad 6.$$

3. Hat man aus einer mehrgliedrigen Gröſse die $n$te $\sqrt{\ }$ zu ziehen, so muſs sie, wenn sie eine vollständige $n$te Potenz ist, mindestens 2 Glieder enthalten, die $n$te Potenzen sind, und es ist am einfachsten, diese aufzusuchen, und aus ihnen in Beziehung auf die Vorzeichen alle Glieder zu bilden, die, dem binomischen Satz (No. 2, Formel 6) zufolge, zur vollständigen $n$ten Potenz gehören.

1. Beispiel.

$$\sqrt[5]{\Big[x^5 - 10xy^2(x^2-4y^2) - 80\frac{y^6}{x^3}(x^2-y^2) - \frac{32y^{10}}{x^5}\Big]}$$

Das 1te und das 4te Glied sind 5te Potenzen, deren Wurzeln $+x$ und $-\frac{2y^2}{x}$

Es ist also zu untersuchen, ob die mittleren Glieder die beiden äuſseren zu einer vollständigen 5ten Potenz ergänzen.

Nun ist nach No. 2, 6

$$(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$$

daher

$$\left(x - \frac{2y^2}{x}\right)^5 = x^5 - 10x^3y^2 + 40xy^4 - 80\frac{y^6}{x} + 80\frac{y^8}{x^3} - \frac{32y^{10}}{x^5}$$

$$= x^5 - 10xy^2(x^2-4y^2) - 80\frac{y^6}{x^3}(x^2-y^2) - 32\frac{y^{10}}{x^5}$$

folglich die $\sqrt[5]{\ }$ gefunden.

2. Beispiel. (Meier Hirsch, pag. 39, No. 22.)

$$\sqrt[2]{\left[\frac{9a^{2m-2}c^2}{4d^{6p}} - \frac{3a^{m+n-1}b^{2n-1}c}{d^{3p-3}} - \frac{2^8 a^{m-1}b^x c}{d^{3p}} + a^{2n}b^{4n-2}d^6 + \frac{2^9}{3}a^n b^{x+2n-1}d^3 + \frac{2^{16}b^{2x}}{9}\right]}$$

Dieser Ausdruck enthält 3 Quadrate:

$+\frac{9a^{2m-2}c^2}{4d^{6p}}$; Wurzel $=\frac{3a^{m-1}c}{2d^{3p}}$

$+a^{2n}b^{4n-2}d^6$; Wurzel $=a^n b^{2n-1}d^3$

$+\frac{2^{16}b^{2x}}{9}$; Wurzel $=\frac{2^8 b^x}{3}$

Nun hat

$$\left(\frac{3a^{m-1}c}{2d^{3p}} \pm a^n b^{2n-1}d^3\right)^2$$

das doppelte Product ($2ab$ in 1 und 2, No. 2).

$$2\cdot\frac{3a^{m-1}c}{2d^{3p}} \times a^n b^{2n-1}d^3 = \pm\frac{3a^{m+n-1}b^{2n-1}c}{d^{3p-3}}$$

und da diese Gröſse in dem obigen Quadrat als 2tes Glied mit − steht, so sind die beiden ersten Glieder der $\sqrt{\ }$ entweder

$$+\frac{3a^{m-1}c}{2d^{3p}} - a^n b^{2n-1}d^3 \text{ oder}$$

$$-\frac{3a^{m-1}c}{2d^{3p}} + a^n b^{2n-1}d^3$$

Setzt man diese beiden Glieder als ersten Theil der $\sqrt{\ }$, die 3te $\sqrt{\ } = \frac{2^8 b^x}{3}$ als 2ten Theil derselben, so hat man das doppelte Product

$$= 2\left[\pm\frac{3a^{m-1}c}{2d^{3p}} \mp a^n b^{2n-1}d^3\right] \times \frac{2^8 b^x}{3}$$

$$= \pm\frac{2^8 a^{m-1}b^x c}{d^{3p}} \mp \frac{2^9}{3}a^n b^{x+2n-1}d^3$$

das erste Glied ist mit −, das zweite mit + in dem obigen Quadrat, daher

die $\sqrt{\ } = -3a^{m-1}c + a^n b^{2n-1}d^3 + \frac{2^8}{3}b^x$

oder $= +3a^{m-1}c - a^n b^{2n-1}d^3 - \frac{2^8}{3}b^x$

3. **Beispiel.** (Meier Hirsch, pag. 40, No. 9.)

$$\sqrt[3]{\left(b^3 + \frac{3a^2b^2}{2c^2}x^{-2} + \frac{3a^4b}{4c^4}x^{-4} + \frac{a^6}{8c^6}x^{-6}\right)}$$

Es sind hier 2 Glieder, das erste und das letzte Cubi, deren Wurzeln $= b$ und $\frac{a^2x^{-2}}{2c^2}$; alle Glieder sind positiv, es ist also nur zu untersuchen, ob die beiden mittleren Glieder den Cubus vervollständigen.

Nun ist $3\cdot b^2 \times \frac{a^2x^{-2}}{2c^2} = \frac{3a^2b^2x^{-2}}{2c^2}$

Das 2te Glied,

und $3\cdot b\left(\frac{a^2x^{-2}}{2c^2}\right)^2 = \frac{3a^4bx^{-4}}{4c^4}$

Das 3te Glied,

folglich die $\sqrt[3]{\ } = b + \frac{a^2x^{-2}}{2c^2} = b + \frac{a^2}{2c^2x^2}$

4. **Quadratwurzeln aus unvollständigen Quadraten.**

Diese werden am zweckmäſsigsten in eine Reihe entwickelt.

Beispiel. $\sqrt[2]{a^2+x^2}$

das erste Glied der $\sqrt{\ }$ ist $= a$.

Nennt man den zweiten Theil derselben B, so ist

$$a^2 + x^2 = a^2 + 2aB + B^2$$

und um B näherungsweise zu finden, ziehe a^2 ab, dividire den Rest x^2 durch $2a$, so erhält man näherungsweise $B = \frac{x^2}{2a}$ welches zugleich das 2te Glied der $\sqrt{\ }$ ausmacht.

Zieht man nun ab von a^2+x^2

$$\left(a+\frac{x^2}{2a}\right)^2 = a^2 + x^2 + \frac{x^4}{4a^2}$$

so ist der Rest $-\frac{x^4}{4a^2}$

Bezeichnet man das zu $\left(a+\frac{x^2}{2a}\right)$ Fehlende der $\sqrt{\ }$ mit C, so ist dieser Rest

$$= 2\left(a+\frac{x^2}{2a}\right)C + C^2$$

man dividire wieder den Rest durch $2a$, und man erhält näherungsweise

$$C = -\frac{x^4}{4a^2} : 2a = -\frac{x^4}{8a^3}$$

welches zugleich das 3te Glied ist.

Also abgezogen von $-\frac{x^4}{4a^2}$

$$2\left(a+\frac{x^2}{2a}\right)\left(-\frac{x^4}{8a^3}\right) + \left(\frac{x^4}{8a^3}\right)^2 = -\frac{x^4}{4a^2} - \frac{x^6}{8a^4} + \frac{x^8}{64a^6}$$

bleibt Rest $+\frac{x^6}{8a^4} - \frac{x^8}{64a^6}$

Um nun das 4te Glied zu finden, betrachtet man die 3 ersten Glieder

$$a + \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3}$$

als ersten Theil der $\sqrt{\ }$, dividirt also in

das erste Glied $+\frac{x^6}{8a^4}$ des Restes mit $2a$ und erhält $\frac{x^6}{16a^5}$

Nun mufs der Rest

$$\frac{x^6}{8a^4}-\frac{x^8}{64a^6}$$

enthalten

$$2\left(a+\frac{x^2}{2a}-\frac{x^4}{8a^3}\right)\frac{x^6}{16a^5}+\left(\frac{x^6}{16a^5}\right)^2$$

$$=\frac{x^6}{8a^4}+\frac{x^8}{64a^6}-\frac{x^{10}}{64a^8}+\frac{x^{12}}{256a^{10}}$$

abgezogen bleibt der Rest

$$-\frac{5x^8}{64a^6}+\frac{x^{10}}{64a^8}-\frac{x^{12}}{256a^{10}}$$

Dies ist der Rest, nachdem die $\sqrt{\ }$ in den 4 Gliedern:

$$a+\frac{x^2}{2a}-\frac{x^4}{8a^3}+\frac{x^6}{16a^5}$$

bestimmt worden ist. Um das 5te Glied zu finden, hat man wieder $-\frac{5x^8}{64a^6}$ durch $2a$ zu dividiren, und man erhält als 5tes Glied $-\frac{5x^8}{128a^7}$

Fährt man auf diese Weise fort, so wird die Rechnung immer weitläufiger, weil man in jedem folgenden Rest kein Glied vernachlässigen darf, bevor man nicht das Gesetz, nach welchem die Reihe fortschreitet, entdeckt hat, so dafs dann das allgemeine Glied ohne weitere Rechnung ermittelt werden kann.

5. Eine leichtere Methode zur Entwickelung der $\sqrt{\ }$ aus einem unvollständigen Quadrat in eine Reihe gewährt die Lehre von den unbestimmten Coefficienten.

Man setze, nachdem man sich überzeugt hat, dafs a das erste Glied wird und dafs x in Potenzen mit nur geraden Exponenten in den übrigen Gliedern vorkommt,

$$\sqrt{a^2+x^2}=a+Ax^2+Bx^4+Cx^6+Dx^8 + Ex^{10}+Fx^{12}+\ldots$$

wo a das bestimmte erste Glied ist, A, B, $C\ldots$ bestimmte, aber noch unbekannte Zahlen sind. Dann ist, auf beiden Seiten quadrirt,

$$a^2+x^2=(a+Ax^2+Bx^4+Cx^6+\ldots)^2$$

Die Klammer aufgelöst und a^2 beiderseits subtrahirt, giebt

$$\begin{aligned}x^2=2aAx^2&+A^2x^4\\&+2aBx^4+2ABx^6+B^2x^8\\&\qquad+2aCx^6+2ACx^8+2BCx^{10}+C^2x^{12}\\&\qquad\quad+2aDx^8+2ADx^{10}+2BDx^{12}+\ldots\\&\qquad\qquad+2aEx^{10}+2AEx^{12}+\ldots\\&\qquad\qquad\quad+2aFx^{12}+\ldots\end{aligned}$$

Bringt man x^2 von der linken Seite auf die rechte, reducirt also die Gleichung auf Null und ordnet, so hat man

$$0=(2aA-1)x^2+(A^2+2aB)x^4+2(AB+aC)x^6 +(B^2+2AC+2aD)x^8+2(BC+AD+aE)x^{10} +(C^2+2BD+2AE+2aF)x^{12}+\ldots$$

Dividirt man die Gleichung durch x^2, so entsteht

$$0=2aA-1+(A^2+2aB)x^2+2(AB+aC)x^4+\ldots$$

Da nun die Gleichung für jedes reelle x Geltung hat, so kann die rechte Seite nur $=0$ werden, wenn $2aA-1=0$ ist. Diesen Werth eingesetzt, entsteht:

$$0=(A^2+2aB)x^2+2(AB+aC)x^4+\ldots$$

Diese Gleichung durch x^2 dividirt, giebt

$$0=A^2+2aB+2(AB+aC)x^2+\ldots$$

und wiederum mufs $A^2+2aB=0$ sein.

Bei fortgesetztem Verfahren und denselben Schlüssen erhält man alle Coefficienten der Reihe $=0$, also

1) $2aA-1=0$
2) $A^2+2aB=0$
3) $AB+aC=0$
4) $B^2+2AC+2aD=0$
5) $BC+AD+aE=0$
6) $C^2+2BD+2AE+2aF=0$

u. s. w.

Aus 1 erhält man $A=+\frac{1}{2a}$

Diesen Werth in No. 2 eingesetzt, giebt

$$B=-\frac{1}{8a^3}$$

und so weiter

$$C=+\frac{1}{16a^5}$$

$$D=-\frac{5}{128a^7}$$

$$E=+\frac{7}{256a^9}$$

$$F=-\frac{14}{1024a^{11}}$$

Es ist demnach gefunden

$$\sqrt{a^2+x^2}=a+\frac{x^2}{2a}-\frac{x^4}{8a^3}+\frac{x^6}{16a^5}-\frac{5x^8}{128a^7} +\frac{7x^{10}}{256a^9}-\frac{14x^{12}}{1024a^{11}}+\ldots$$

6. Kubikwurzeln aus unvollständigen Kuben.

Ein Verfahren, wie ad 4, bei der $\sqrt[3]{\ }$ führt zu noch weitläufigeren Rechnungen

wie dort und man wählt am besten die ad 5 gezeigte Methode. Z. B. $\sqrt[3]{a^3+x^3}$

Setze, nachdem man sich überzeugt, dafs a das erste Glied ist und dafs x in den Potenzen von nur durch 3 theilbaren Exponenten vorkommen kann,

$$\sqrt[3]{a^3+x^3} = a + Ax^3 + Bx^6 + Cx^9 + Dx^{12} + Ex^{15} + Fx^{18} + \ldots$$

cubire zu beiden Seiten und reducire, so erhält man

$$\begin{array}{llllll}
x^3 = 3a^2Ax^3 & + 3aA^2x^6 & + A^3x^9 & & & \\
 & + 3a^2Bx^6 & + 6aABx^9 & + 3A^2Bx^{12} & & \\
 & & & + 3aB^2x^{12} & + 3AB^2x^{15} & + B^3x^{18} + .. \\
 & & + 3a^2Cx^9 & + 6aACx^{12} & + (3A^2C + 6aBC)x^{15} & + 6ABCx^{18} + .. \\
 & & & & + & 3aC^2x^{18} + .. \\
 & & & + 3a^2Dx^{12} & + 6aADx^{15} & + (3A^2D + 6aBD)x^{18} + .. \\
 & & & & + 3a^2Ex^{15} & + 6aAEx^{18} + .. \\
 & & & & + & 3a^2Fx^{18} + ..
\end{array}$$

Diese Gleichung auf Null reducirt und geordnet, giebt:

$$\begin{aligned}
0 = & (3a^2A - 1)x^3 + 3(aA^2 + a^2B)x^6 + (A^3 + 6aAB + 3a^2C)x^9 \\
& + 3(A^2B + aB^2 + 2aAC + a^2D)x^{12} \\
& + 3(AB^2 + A^2C + 2aBC + 2aAD + a^2E)x^{15} \\
& + (B^3 + 6ABC + 3aC^2 + 3A^2D + 6aBD + 6aAE + 3a^2F)x^{18}
\end{aligned}$$

jeden dieser Coefficienten von x^3 bis $x^{18} = 0$ gesetzt und entwickelt, giebt:

$$A = +\frac{1}{3a^2}$$
$$B = -\frac{1}{9a^5}$$
$$C = +\frac{5}{81a^8}$$
$$D = -\frac{10}{243a^{11}}$$
$$E = +\frac{22}{729a^{14}}$$
$$F = -\frac{124}{6561a^{17}}$$

daher

$$\sqrt[3]{a^3+x^3} = a + \frac{x^3}{3a^2} - \frac{x^6}{9a^5} + \frac{5x^9}{81a^8} - \frac{10x^{12}}{243a^{11}} + \frac{22x^{15}}{729a^{14}} - \frac{124x^{18}}{6561a^{17}} + \ldots$$

7. Auf dem No. 5 und 6 angegebenen Wege kann auch jede $\sqrt{}$ mit höheren Exponenten aus einer unvollständigen Potenz ausgezogen werden.

8. **Ausziehen der Quadratwurzel aus einem Binom von der Form** $\sqrt{(A \pm \sqrt{B})}$

Im Laufe von Entwickelungen kommt diese Form nicht selten vor, und die Verwandlung derselben in zwei Glieder wird nicht ganz mit Recht Ausziehen der $\sqrt{}$ genannt.

Man setze $\sqrt{(A \pm \sqrt{B})} = x \pm \sqrt{y}$

so ist $A \pm \sqrt{B} = (x \pm \sqrt{y})^2 = x^2 \pm 2x\sqrt{y} + y$

Setzt man das Rationale dem Rationalen, das Irrationale dem Irrationalen gleich, so hat man aus der letzten Gleichung:

1) $A = x^2 + y$

2) $\sqrt{B} = 2x\sqrt{y}$

2 Gleichungen mit 2 unbekannten Gröfsen x und y. Aus Gl. 2 erhält man

3) $B = 4x^2y$

aus 3 und 1

4) $A = x^2 + \frac{B}{4x^2}$

geordnet

5) $x^4 - Ax^2 + \frac{B}{4} = 0$

woraus

6) $x^2 = \frac{1}{2}\left(A + \sqrt{A^2 - B}\right)$

aus 1 und 6 hat man nun

$$y = A - x^2 = \tfrac{1}{2}\left(A - \sqrt{A^2 - B}\right)$$

folglich

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}$$

Die Umwandlung ist von Nutzen, wenn $A^2 - B$ ein vollständiges Quadrat ist. Z. B.

$$1)\ \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{3 - \sqrt{8}} = \sqrt{\frac{3+1}{2}} - \sqrt{\frac{3-1}{2}} = \sqrt{2} - 1$$

$$2)\ \sqrt{\sqrt{18} - 4} = \sqrt{(\sqrt{18} - \sqrt{16})} = \sqrt{\frac{\sqrt{18} + \sqrt{2}}{2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{18} - \sqrt{2}}{2}}$$

Nun ist $\sqrt{18} \pm \sqrt{2} = \sqrt{18 + 2 \pm 2 \cdot \sqrt{36}} = \sqrt{20 \pm 12}$

also $\sqrt{(\sqrt{18} - 4)} = \sqrt{\frac{\sqrt{32}}{2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{8}}{2}} = \sqrt[4]{8} - \sqrt[4]{2}$

$$3)\ \sqrt{(a^2+b+2a\sqrt{b})} = \sqrt{(a^2+b+\sqrt{4a^2 b})}$$
$$= \sqrt{\frac{a^2+b+\sqrt{(a^2+b)^2-4a^2 b}}{2}} + \sqrt{\frac{a^2+b-\sqrt{(a^2+b)^2-4a^2 b}}{2}}$$
$$= \sqrt{\frac{(a^2+b)+(a^2-b)}{2}} + \sqrt{\frac{(a^2+b)-(a^2-b)}{2}}$$
$$= a+\sqrt{b}$$

9. Ausziehen der Quadratwurzel aus einem Binom von der Form $A+B\sqrt{-1}$ Verfahre wie No. 8; setze

$$\sqrt{(A \pm B\sqrt{-1})} = x \pm y\sqrt{-1}$$

so ist $A \pm B\sqrt{-1} = (x \pm y\sqrt{-1})^2 = x^2 - y \pm 2xy\sqrt{-1}$

Das Mögliche dem Möglichen, das Unmögliche dem Unmöglichen gleich gesetzt, giebt:

$$1)\ A = x^2 - y^2$$
$$2)\ B = 2xy$$

hieraus $A = x^2 - \frac{B^2}{4x^2}$

geordnet $x^4 - Ax^2 - \frac{B^2}{4} = 0$

woraus $x^2 = \frac{1}{2}(+A \pm \sqrt{A^2+B^2})$ 3

wo nur das + Zeichen der $\sqrt{\ }$ gelten kann, weil x^2 sonst unmöglich wäre. Es ist also

$$x = \sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2+B^2}}{2}}$$

Aus Gl. 1 hat man nun $y^2 = x^2 - A$ also mit Hülfe von Gl. 3

$$y^2 = \tfrac{1}{2}(-A+\sqrt{A^2+B^2})$$
$$\text{und } y = \sqrt{\frac{-A+\sqrt{A^2+B^2}}{2}}$$

hieraus

$$\sqrt{(A \pm B\sqrt{-1})} = \sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2+B^2}}{2}} \pm \sqrt{\frac{-A+\sqrt{A^2+B^2}}{2}}\sqrt{-1}$$

1. Beispiel.

$$\sqrt{(-3+\sqrt{-16})} = \sqrt{(-3+4\sqrt{-1})}$$
$$= \sqrt{\frac{-3+\sqrt{9+16}}{2}} + \sqrt{\frac{+3+\sqrt{9+16}}{2}}\sqrt{-1}$$
$$= 1+2\sqrt{-1}$$

2. Beispiel.

$$\sqrt{8\sqrt{-1}} = \sqrt{(0+8\sqrt{-1})} = \sqrt{\frac{+0+\sqrt{0^2+8^2}}{2}} + \sqrt{\frac{-0+\sqrt{0^2+8^2}}{2}}\sqrt{-1}$$
$$= 2(1+\sqrt{-1})$$

Axe ist eine mathematische gerade Linie, welche unter allen mit derselben in Beziehung zu denkenden, also zu irgend einem und demselben System im Raum gehörenden geraden Linien als Hauptlinie aufzufassen ist. Als solche ist sie die geeignetste gerade Linie, durch welche alle aufser ihr befindlichen Punkte, also auch Linien, Flächen und Körper, deren Ort nach bestimmbar sind, indem man deren Lage und Entfernung in Beziehung auf die Axe feststellt.

2. Es giebt Systeme im Raum, deren Natur keine Hauptlinie wahrnehmen läfst, als jede unregelmäfsige Figur, eine Anzahl im Raum zerstreuter Punkte u. s. w. Um deren Lage festzustellen, mufs man Hauptlinien wählen, diese von einem beliebigen Punkt aus gedachten Hauptlinien sind die Coordinaten-Axen (s. d. unter Abscisse, pag. 14). Aber auch für die nach bestimmtem Gesetz gebildete krumme Linie, die Evolvente *ADE*, Fig. 23, pag. 22, kann man keine gerade Linie finden, welche vorzugsweise als deren Axe gelten könnte; soll also die Lage deren Punkte bestimmt werden, so mufs man zwei in einerlei Ebene mit *ADE* zu zeichnende gerade Linien als Axen (als Coordinaten-Axen) wählen.

3. Dagegen giebt es Systeme im Raum, bei deren Anblick man sogleich eine Hauptlinie, eine Axe erkennt: Für die abgekürzte Pyramide, Fig. 6, pag. 6, ist es offenbar nur eine Linie, nämlich die gerade Verbindungslinie *A'A* der Mittelpunkte beider Endflächen, für die ganze Pyramide die gerade Verbindungslinie der Spitze und des Grundflächenmittels *A*. Desgleichen in dem abgekürzten Kegel Fig. 7, die gerade Verbindungslinie *A* der Mittelpunkte beider Endkreise. Bei der Ellipse *apqp'*, Fig. 11, pag. 12, nimmt man zwei solcher Hauptlinien wahr, die grofse Axe *aq* und die kleine Axe *pp'*. Bei der Parabel und bei der Hyperbel erkennt man wieder nur eine Hauptlinie, nämlich die gerade Linie, welche vom Scheitel aus gezogen die Fläche in 2 congruente Theile theilt.

Die eben gedachten Axen sind also nicht willkürlich gewählte, sondern in der Natur der Raumgröfsen begründete, sie sind natürliche Axen, und wenn auch durch sie die Lagen der Punkte krummer Linien, der Ecken, Kanten und Oberflächen von Körpern am einfachsten zu bestimmen sind, so sieht man von dieser Eigenschaft ab und definirt in der Geometrie: Axe als gerade Linie, um welche herum alle Punkte der Raumgröfse sich regelmäfsig gruppiren. Oder im Besonderen: Axe einer krummen Linie, die gerade Linie, durch welche die krumme in zwei gleiche und gleich liegende Theile getheilt wird. Axe von ebenen Figuren sagt man nicht. Axe eines geometrischen Körpers, die gerade Linie, in welcher die Mittelpunkte aller parallelen, einander ähnlichen Durchschnittsebenen liegen. (S. Axen der Krystalle.)

4. In den mechanischen Wissenschaften, die nur Ruhe und Bewegung, und zwar fortschreitende und drehende Bewegung als Wirkung von Kräften betrachten, ist Axe diejenige gerade Linie, um welche Drehung geschieht, oder um welche Drehung gedacht werden soll. Diese Axe ist also in dem ganzen System die einzige Linie, welche sich nicht dreht, und von welcher jeder einzelne Punkt des ganzen Systems einerlei Abstand behält. Die Axe kann aber fortschreiten, wie die Axe eines Rades am Wagen (s. Achse). Bei einem Wasserrade bleibt die Axe (die Mittellinie der Wasserradswelle, oder vielmehr die gerade Verbindungslinie der Mittellinien beider cylindrischen Wellzapfen) in Ruhe.

Ein Pendel macht seine Schwingungen um eine schwache metallene Achse; die Mittellinie derselben, welche horizontal und also zugleich auf der Schwingungsebene normal ist, ist die Axe des Pendels, und heifst Oscillationsaxe, Schwingungsaxe.

Eben so ist bei einem Balancier, z. B. bei dem einer Dampfmaschine oder einer Krämerwaage (dem Waagebalken) die horizontale Mittellinie der Zapfen die Axe.

Geometrisch betrachtet kann für einen Kreis oder eine Kugel jeder Durchmesser als Axe angesehen werden, aber weil von allen diesen Durchmessern kein einziger vor dem andern sich auszeichnet (als Hauptlinie auftritt), so werden diese Durchmesser nicht Axen genannt.

Mechanisch betrachtet haben aber Kreis und Kugel Axen: die Axe des Kreises ist die durch den Mittelpunkt auf der Kreisebene normal gedachte gerade Linie, indem man sich denkt, dafs ein Halbmesser um diese Axe gedreht mit seinem Endpunkt die Kreislinie beschrieben hat. Axe einer Kugel ist derjenige Durchmesser, um den die Kugel sich dreht oder sich drehend gedacht wird. Die Endpunkte einer Kreisaxe und einer Kugelaxe heifsen Pole. So hat die Erdkugel bei ihrer wirklichen Umdrehung einen Durchmesser, welcher von der Drehung ausgenommen ist, um den die Drehung geschieht, und dieser ist also die Erdaxe. Eine Weltaxe aber, die in jedem Augenblick mit der Erdaxe als einerlei angesehen wird, obgleich diese einen Raum von c. 40 Millionen Meilen Durchmesser durchläuft, ist nur scheinbar vorhanden, indem um diese, in dem Ort so sehr veränderliche Linie das ganze Weltgebäude sich nur zu drehen scheint, wiewohl es in Ruhe verbleibt (s. Aequator).

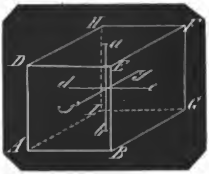
5. Sind bei einer Axendrehung die Massen nach allen Seiten hin um die Axe gleichmäfsig vertheilt, dafs also jeder einzelnen Masse eine ihr gegenüber liegende, gleich grofse und von der Axe gleich weit entfernte Masse entspricht, und dafs sich somit die Schwungkräfte einander aufheben, so empfängt oder erleidet die Axe keine Druckwirkung und heifst freie Axe. (In der Technik wird sie oft balancirte Axe genannt.)

Axen der Krystalle. Diese sind gerade Linien, die man durch die Mitte des Krystalls gelegt sich vorstellt und als Axen betrachtet, insofern um dieselben sämmtliche die Form des Krystalls bestimmenden Stücke: die Flächen, Ecken und Kanten, symmetrisch gruppirt sich befinden.

Die A. eines Krystalls sind dreierlei Art: Entweder sie verbinden zwei ent-

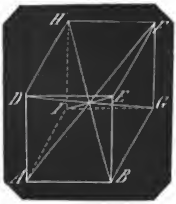
gegengesetzt liegende Ecken oder die Mitten zweier entgegengesetzt liegenden Flächen oder Kanten. Z. B. das Hexaëder

Fig. 135.



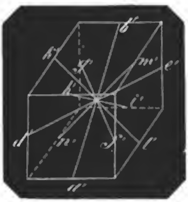
(der Würfel), eine einfache Krystallform, hat 6 Flächen, 8 Ecken, 12 Kanten, es hat also 3 A. zwischen Flächenmitten,

Fig. 136.



4 A. zwischen Ecken und 6 A. zwischen Kantenmitten.

Fig. 137.



Die Figuren 135—137 zeigen dies bildlich: In *C*, dem Mittelpunkt des Hexaëders, schneiden sich sämmtliche 13 A.; es sind nur hier statt eines Hexaëders der Deutlichkeit wegen 3 gezeichnet. Die 3 A. zwischen den Flächenmitten sind *ab*, *de*, *fg*. *a* ist die Mitte der Fläche ***DEFH*** und verbindet die Mitte *b* der Fläche ***ABGI***; *d* ist die Mitte der Fläche ***ADHI*** und verbindet die Mitte *e* der Fläche ***BEFG***; *f* ist die Mitte der Fläche ***ABDE*** und verbindet die Mitte *g* der Fläche ***GFHI***.

Die 4 A. zwischen den 8 Ecken sind ***AF***, ***BH***, ***DG***, ***EI***; die 6 A. zwischen den 12 Kantenmitten sind ***a'b'***, ***d'e'***, ***f'g'***, ***h'i'***, ***k'l'***, ***m'n'***.

Durch die Axen wird die Form eines Krystalls bestimmt; zur vollständigen Bestimmung desselben sind mindestens 3, höchstens 4 A. erforderlich.

Die A. derselben Art, die also Gleiches: als Ecken oder Kanten oder Flächen mit einander verbinden, und die in Länge und Lage einander gleich sind, heifsen unter sich gleichartig, im Gegensatz zu den übrigen A. ungleichartig. So sind beim Hexaëder die 4 A., welche die Ecken verbinden, gleich lang und in gleicher Lage, also gleichartig; dasselbe findet beim Hexaëder mit den A. zwischen den Flächenmitten und den zwischen den Kantenmitten statt.

Die A. werden durch die Mitte des Krystalls gehälftet, sie verbinden immer gleiche Ecken oder die Mitten gleicher Kanten oder gleicher Flächen, und alle gleichartigen A. schneiden sich unter gleichen Winkeln.

Wie das Hexaëder dreierlei A. und von jeder Art mehrere gleichartige hat, so giebt es mehrere Krystallformen von derselben Eigenschaft, und diese heifsen deshalb vielaxige Krystalle. Es giebt aber auch Krystallformen, in welchen eine A. keine ihr gleichartigen A. hat; auch solche, in welchen 2 oder auch 3 verschiedene A. sich befinden, von denen keine derselben eine ihr gleichartige A. hat, und solche heifsen einaxige Formen. Z. B. das Octaëder, welches aus 8 gleichseitigen Dreiecken mit 6 gleichen Ecken besteht, hat unter andern A. auch 3 A., welche die 3 Paar gleichen Ecken mit einander verbinden, und welche gleichartig sind; das Octaëder ist also eine vielaxige Form. Das Rhombenoctaëder dagegen, welches aus 8 ungleichseitigen Dreiecken mit 3 Paar je 2 und 2 gleichen Ecken besteht, hat die 3 hierzu gehörigen Eckenaxen, jede von der anderen verschieden lang und verschieden gelegen; keine derselben hat also eine ihr gleichartige A., und es ist daher das Rhombenoctaëder eine einaxige Form. (S. Axensystem.)

Axe, freie, s. u. **Axe** 5. Horizontale oder schrägliegende A. erleiden eine Druckwirkung durch die Schwere. Mit Hülfe von Gegengewichten, die, über Rollen geleitet, senkrecht aufwärts auf die Axe wirken und mit dem ganzen sich drehenden System gleich schwer sind, können

sie vollständig balancirt werden, allein sie heifsen auch freie Axen, wenn dies nicht geschieht, wenn nur die mit denselben verbundenen Massen, wie unter Axe No. 5 erklärt worden, gleichmäfsig um dieselben vertheilt sind. Aus gleichem Grunde heifsen auch die Axen der Planeten freie A., wenngleich die Schwerkraft der Sonne in jedem Augenblick eine Druckwirkung auf sie ausübt (vergl. Axendrehung.)

Axen, hexaëdrische. Diese sind in jeder Krystallform, die dem regulären System angehört, nachzuweisen; es sind deren 4, sämmtlich gleichartig und ihr Name rührt daher, dafs sie im Hexaëder am naturgemäfsesten in die Augen springen, indem sie dessen 4 Paar gegenüber liegende Ecken mit einander verbinden, wie in Fig. 136 dargestellt ist.

Unter den homoëdrischen Krystallformen verbinden sie beim Octaëder die Mittelpunkte der 4 Paar gegenüber liegenden parallelen Flächen. Beim Dodekaëder von 14 Ecken, dem Ikositetraëder von 26 Ecken und dem Triakisoctaëder von 14 Ecken verbinden sie die 4 Paar regulären dreiflächigen Ecken. Beim Tetrakishexaëder von 14 Ecken und dem Hexakisoctaëder von 26 Ecken die 4 Paar symmetrischen 6flächigen Ecken.

Unter den hemiëdrischen Formen verbinden sie beim Hemioctaëder die Mittelpunkte der 4 Flächen mit den diesen gegenüber liegenden Ecken. Beim Hemi-Ikositetraëder die 6flächigen Ecken mit den gegenüber liegenden 3flächigen Ecken. Beim Hemitriakisoctaëder von 14 Ecken, desgleichen beim Hemitetrakishexaëder von 20 Ecken und beim Hemioctakishexaëder von 14 Ecken die 4 Paar dreiflächigen regulären Ecken, und beim Hemihexakisoctaëder von 14 Ecken die 4 Paar symmetrischen 6flächigen Ecken.

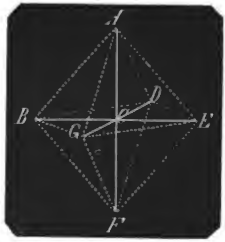
Axe, magnetische. Die gerade Verbindungslinie der beiden magnetischen Pole unseres Erdkörpers (s. Aequator, magnetischer.)

Axen, octaëdrische. Diese sind, wie die hexaëdrischen A., in jeder Krystallform, die dem regulären System angehört, nachzuweisen; es sind deren 3, sämmtlich gleichartig und ihr Name rührt daher, dafs sie im Octaëder am naturgemäfsesten in die Augen springen, indem sie dessen 3 Paar gegenüber liegende Ecken mit einander verbinden.

In Fig. 138, dem Octaëder, sind *AF*, *BE* und *DG* diese Axen.

Unter den homoëdrischen Krystallformen verbinden sie beim Hexaëder die Mittelpunkte der 3 Paar quadratischen

Fig. 138.



Flächen, wie dies Fig. 135, pag. 256 nachweist. Beim Dodekaëder von 14 Ecken und beim Ikositetraëder von 26 Ecken die 3 Paar regulären 4flächigen Ecken. Beim Tetrakishexaëder von 14 Ecken die 3 Paar regulären 6flächigen Ecken. Beim Triakisoctaëder von 14 Ecken und beim Hexakisoctaëder von 26 Ecken die 3 Paar symmetrischen 8flächigen Ecken.

Unter den hemiëdrischen Formen verbinden sie beim Hemioctaëder die Mittelpunkte der 3 Paar gegenüber liegenden Kanten, beim Hemi-Ikositetraëder von 18 Kanten die Mitten der 3 Paar gegenüber liegenden längeren Kanten und beim Hemitetrakishexaëder die der 3 Paar gegenüber liegenden Grundkanten. Beim Hemitriakisoctaëder von 14 Ecken, beim Hemihexakisoctaëder von 14 Ecken und beim Hemioctakishexaëder von 26 Ecken die 3 Paar symmetrischen 4flächigen Ecken.

Axencentrum ist in einer Krystallform der Punkt, in welchem sämmtliche Axen derselben sich schneiden und in welchem sie sich zugleich hälften.

Axendrehung. Hierunter versteht man die Bewegung von Massen um eine Axe. Die Axe kann unbeweglich sein, wie bei einer Winde, oder auch fortschreitend, wie bei einem Fuhrwerk, allein sie dreht sich nicht.

Die Drehung der Massen ist entweder eine vollständige Umdrehung oder nur eine theilweise Drehung. Erstere ist fortdauernd und nach einerlei Richtung, wie beim Wasserrade und allen Maschinenrädern; letztere bedingen eine abwechselnd

entgegengesetzte Richtung, wie bei der Waage, dem Pendel, dem Balancier an einer Maschine. Jedes Massen-Element beschreibt mit dem Abstand von der Axe als Halbmesser in dem ersten Fall einen vollständigen Kreis, im zweiten Fall einen Kreisbogen.

Eine Umdrehung (Umwälzung, Rotation) ist vollständig geschehen, wenn alle Massenpunkte wieder in die anfängliche Lage gekommen sind. In der Mechanik und der Maschinenlehre bezeichnet man entweder die Zeit, in welcher eine Umwälzung geschieht, oder die Anzahl Umdrehungen in irgend einer Zeit-Einheit; geschieht in dieser nicht eine vollständige Umdrehung, so hat man mit dem durchlaufenen Bogen in Verhältnifs zum Kreisumfang die Winkelgeschwindigkeit, welche auch in Graden angegeben wird. In der Astronomie wählt man die erstere Bezeichnung wegen der grofsen Zeitlänge, welche ein Weltkörper zu einer Rotation verlangt.

Man sagt z. B. Mercur vollendet eine Umwälzung in 24 Stunden und 5 Minuten. In der Maschinenlehre und der Technik hat man diese Bezeichnung seltener, man sagt also nicht: ein Wasserrad mache in 10 Secunden eine Umdrehung, sondern, es habe in 1 Minute 6 Umdrehungen. Eine Centrifugalmaschine in Kattunfabriken, Zuckersiedereien u. s. w. hat per Minute etwa 2000 Umdrehungen. Von einer Dampfmaschine sagt man, sie habe per Minute z. B. 30 Wechsel (30 Auf- und 30 Niedergänge, oder 30 Doppelhübe); vom Pendel, es habe per Minute 100 Schwingungen (d. h. 50 Schwingungen links und 50 rechts) gemacht.

Da die Erde in 24 Stunden einen Umschwung macht, so beträgt ihre Winkelgeschwindigkeit per Minute $\frac{1}{4}$ Grad = 15 Bogenminuten und per Secunde $\frac{1}{4}$ Bogenminute = 15 Bogensecunden.

2. Bei jeder A. ist die Untersuchung von Wichtigkeit, welchen Einflufs die sich umwälzenden Massen auf die Axe ausüben. Unter „Axe 5" und „Axe, freie" ist der Begriff freie Axe erklärt; es ist aber nicht ohne Weiteres einzusehen, dafs gleichförmig vertheilte Massen keinen Normaldruck auf die Axe ausüben, sondern dies erst nachzuweisen:

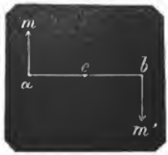
Es sei Fig. 139 *cc* die Axe eines Körpers, der um dieselbe sich herumdreht; **die Axe heifst eine freie A., wenn jedem beliebigen Massen-Element, wie z. B. *m*, der Axe normal gegenüber, ein ihm gleiches Massen-Element *m'* in derselben Entfernung *am'* = *am* sich befindet; es ist zu beweisen, dafs die A. dann von den umlaufenden Massen keine Druckwirkungen empfängt, dafs sie von allen Druckwirkungen frei bleibt.**

Fig. 139.



Ist nämlich (Fig. 140) *c* die Axe im Grundrifs, also *c* der Drehpunkt, so wirken die beiden gleichen Massen *m*, *m'* in

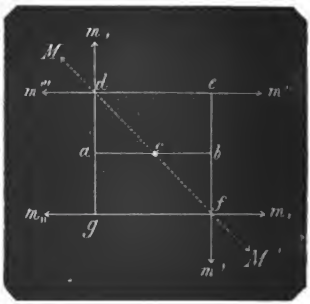
Fig. 140.



den gleichen Abständen *ac*, *bc* auf Druck nach parallelen, aber entgegengesetzten Richtungen *am* und *bm'*.

Man denke sich (Fig. 141) ‡ *ab* in *de* und *fg* in den mit *ac* und *bc* gleichen Abständen *ad* und *ag*, zwei Paar mit *m* und *m'* gleich grofse und entgegengesetzt wirkende Druckkräfte angebracht, so hätte

Fig. 141.

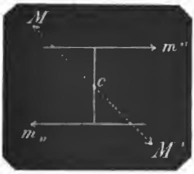


m'' mit **m'''** und **m,** mit **m,,** Gleichgewicht, und die beiden Kräfte **m** und **m'** bleiben in ihren Wirkungen ungeändert.

Setzt man die Kräfte **m** und **m'''** zu einer Mittelkraft **M** zusammen, so wird, da $m = m'''$ ist, der $\angle ade$ durch die Mittelkraft **M** halbirt, hat also die Richtung **cd**, desgleichen ist die Mittelkraft **M'** der gleich grofsen Kräfte **m'** und $m, = M$ und nach **fc** gerichtet.

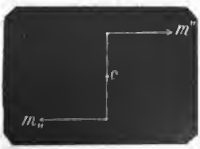
Durch die Einführung der mit den Seitenkräften gleich wirkenden Mittelkräfte ist in der Wirkung des ursprünglichen Systems wieder nichts geändert, d. h. die Wirkung ist ganz dieselbe, wie bei dem System Fig. 140, das neue System hat aber die Gestalt Fig. 142, in welchem **M**

Fig. 142.



und **M'** sich Gleichgewicht halten, und es hat mithin zugleich die Gestalt Fig. 143.

Fig. 143.



Ueben nun die gleichen Massen **m** und **m'** (Fig. 140) einen Druck **p** auf die Axe **c**, so müssen auch die ihnen gleich grofsen und von **c** gleich weit entfernten Massen **m''** und **m,,** (Fig 143) denselben Druck **p** auf die Axe **c** üben, und da die Richtung des ersten Massenpaars mit der des zweiten einen $\angle$ von 90° bildet, so mufs auch die Richtung des Drucks **p** aus dem ersten Massenpaar mit der des Drucks **p** aus dem zweiten um einen $\angle$ von 90° unterschieden sein. Da aber beide Systeme Fig. 140 und 143 in ihren Wirkungen einerlei sind, weil das System Fig. 140 durch Umwandlung in das System Fig. 143 in seiner Wirkung ungeändert geblieben ist, so können in beiden Systemen Druckwirkungen nach verschiedenen Richtungen, also überhaupt Druckwirkungen auf die Axe **c** nicht stattfinden.

Man kann sich davon aber noch auf folgende Weise überzeugen:

Fig. 144.

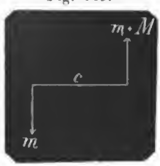


Man denke sich auf die Axe, ⊥ **am** und **bm**, 2 gleiche und entgegengesetzt wirkende Kräfte **P** und **P'** von beliebiger Gröfse angebracht, so halten letztere einander das Gleichgewicht, und das System und dessen Wirkung auf die Axe ist noch dieselbe. Man setze für **m** und **P** deren Mittelkraft $P+m = R$ und für **m'** und **P'** deren Mittelkraft **R'**, so ist $R = R'$ und deren Entfernung

$$dc = ec = \frac{m}{R}\cdot ac = \frac{m}{P+m}\cdot ac$$

Je gröfser **P**, desto kleiner wird $dc = ec$, und es können mit der Zunahme von **P** die Punkte **d** und **e** der Axe **c** beliebig nahe gebracht werden, so dafs sie als in der Axe **c** selbst wirkend zu denken sind. Da nun **P** und **P'** einander gleich und entgegengesetzt gerichtet sind, so heben sie einander auf und die Axe **c** empfängt keine Druckwirkung.

Fig. 145.



Sind dagegen in gleichen Entfernungen **a**, **a** von der Axe entgegengesetzt die Massen **m** und $M+m$, Fig. 145, so kann man die Massen **m** und **m** in Absicht des Drucks auf die Axe fortnehmen, und es bleibt auf einer Seite die Masse **M** allein wirkend. Um zu erfahren, welchen Druck dies **M** auf die Axe **c** ausübt, darf man

nur auf der andern Seite in Entfernung a die gleiche Masse M' nach einerlei Richtung mit M angebracht denken, so dafs c sich nicht drehen kann, so äufsert die Mittelkraft beider $= M' + M = 2M$, in c

Fig. 146.



thätig gedacht, denselben Druck auf $c = 2M$, wobei also die Länge von a gleichgültig ist. Mit der Abnahme von a kann man die beiden Massen M, M' der Axe c beliebig nahe, und als Mittelkraft in c selbst verlegen, deren Druck auf c ist immer $= 2M$, folglich der Druck der einen Masse M in jeder beliebigen Entfernung a von der Axe beträgt M.

Axendrehung der Erde s. u. **Aequator der Erde**, pag. 33 mit Fig. 34.

Axendrehung des Mondes ist unmittelbar nicht vorhanden, wie in dem Art. „Astronomischer Tag des Mondes" gezeigt ist; dennoch findet sie in Folge des Umlaufs des Mondes um die Erde mittelbar statt, also in der siderischen Umlaufszeit des Mondes (s. astronomischer Monat, No. 2), weil während dieser Zeit jeder Punkt der Mondoberfläche nach und nach in alle die Lagen kommt, als wenn er direct um seine Axe sich gedreht hätte.

Axendreieck. Jeder Kegelschnitt durch die Axe des Kegels, weil solcher Schnitt von der Spitze bis zur Grundfläche gehend ein geradliniges Dreieck ist.

Axensysteme der Krystalle.

Je nachdem zusammengehörige Axen in einem Krystall, nämlich Axen, die blofs Ecken oder blofs Kanten oder blofs Flächen mit einander verbinden (s. Axen der Krystalle), gleich oder ungleich in Länge, je nachdem diese recht- oder schiefwinklig gegen einander geneigt sind, unterscheidet man Systeme und zwar 6 Krystallisationssysteme oder Axensysteme.

1) Das reguläre (das tessulare, isometrische, tesserale) System, bei welchem 3 Axen gleichartig und unter einander rechtwinklig sind.

2) Das zwei- und einaxige (pyramidale, monodimetrische, tetragonale, quadratische) System, bei welchem 2 Axen gleichartig, die dritte ungleichartig ist, sämmtliche Axen jedoch unter einander rechtwinklig sind.

3) Das drei- und einaxige (rhomboëdrische, monotrimetrische, hexagonale) System, bei welchem 4 Axen sich befinden, von denen 3 mit einander gleichartig sind, unter gleichen Winkeln in einerlei Ebene sich durchschneiden, die vierte ungleichartige Axe mit den ersten dreien rechtwinklig liegt.

4) Das ein- und einaxige (prismatische, anisometrische, orthotype, rhombische) System, bei welchem 3 mit einander ungleichartige Axen unter rechten Winkeln sich schneiden.

5) Das zwei- und eingliedrige (hemiprismatische, monoklinometrische, hemiorthotype, klinorhombische, monoklinoëdrische) System, bei welchem 2 ungleichartige Axen unter rechten Winkeln sich schneiden, die dritte ebenfalls mit beiden ungleichartigen Axen mit einer der ersten Axen rechtwinklig und mit der anderen schiefwinklig geneigt ist.

6) Das ein- und eingliedrige (tetartoprismatische, klinorhomboidische, triklinometrische, anorthotype, triklinoëdrische) System, bei welchem 3 ungleichartige Axen mit einander schiefwinklig geneigt sind.

2. Bei jedem A. werden die zur Bestimmung des Krystalls zusammengehörigen Axen so gestellt, dafs eine der Axen senkrecht steht. Sind alle Axen einander gleich, so kann jede beliebige Axe dazu gewählt werden. Jede Axe, die zur senkrechten Axe gewählt werden kann, heifst Haupt-Axe, und wenn sie dazu gewählt worden, Normal-Axe, die übrigen Axen heifsen Neben-Axen. Bei gleichen Axen eines Krystalls ist also jede derselben Haupt-Axe, und der Krystall gehört dem regulären System an.

Bei den einaxigen Formen ist entweder nur eine einzige Axe, die keine ihr gleichartigen hat; hier ist dann diese Axe die einzige Haupt-Axe, und das zweite und dritte System von dieser Eigenschaft. Oder es sind mehrere Axen, von denen keine eine ihr gleichartige hat; bei solchem System kann jede dieser Axen zur Normal-Axe genommen werden, und das vierte, fünfte und sechste System ist von dieser Eigenschaft.

Die Neben-Axen, welche sich in ihren Mitten schneiden, werden von der Normal-Axe in demselben Durchschnittspunkt geschnitten. Sind nur 2 Neben-Axen, überhaupt also 3 Axen vorhanden, so liegen die ersteren in einerlei Ebene; sind 3 Neben-Axen vorhanden, so müssen diese ebenfalls in einerlei Ebene liegen.

Die Ebene der Neben-Axen heifst die Basis oder Grundebene des Krystalls.

Schneidet die Normal-Axe die Basis rechtwinklig, so liegt die Basis horizontal, die Neben-Axen haben gegen die Normal-Axe eine orthobasische Lage. Schneidet sie dieselben unter schiefem Winkel, so liegt die Basis schief, die Neben-Axen haben zur Normal-Axe eine klinobasische Lage. Man theilt daher auch die A. in 2 Haupttheile: A. mit horizontaler Basis und A. mit schief liegender Basis.

Zu dem ersteren gehören die oben aufgeführten ersten 4 A., die —axigen Systeme, zu dem letzteren die letzten beiden A., die —gliedrigen Systeme.

3. Zu genauerem Verständnifs des bisherigen Vortrags folgen hier bildliche Darstellungen, bei welchen der besseren Uebersicht wegen nur Ecken-Axen genommen sind.

1) Das reguläre System zeigt Fig. 138, pag. 257.

Die 3 gleichen in dem Krystall verzeichneten Axen, *AF*, *DG*, *BE*, hälften sich gegenseitig in ihrem gemeinschaftlichen Mittelpunkt *C*, d. h. $AC=CB=CD=CE=CF=CG\,[=a]$ und $\angle ACD=\angle ACB=\angle DCE=90°$.

Jede Axe mithin ist Haupt-Axe; wird *AF* zur Normal-Axe festgestellt, so ist *BDEG* die Basis; für *DG* als Normal-Axe ist *ABFE* die Basis, und wenn *BE* die Normal-Axe ist, *AGFD* die Basis, und die Bezeichnung der Grundform des Krystalls ist $a:a:a$.

2) Das zwei- und einaxige System. Nimmt man in Fig. 138 $BE=DG$, dagegen $AF \lessgtr DG$, ferner $\angle ACG=\angle ACE=\angle DCE=90°$, so gehört der Krystall diesem zwei- und einaxigen System an. Die beiden sich gleichen Axen *DG* und *BE* sind nun Neben-Axen; die ungleichartige Axe *AF* ist allein Haupt-Axe, wird senkrecht gestellt, die eine der Neben-Axen, z. B. *DG*, dem Beschauer zugekehrt; die andere, *BE*, ist dann ihm parallel. Die Haupt-Axe wird mit $2c$, die Neben-Axen werden mit $2a$ bezeichnet und die Bezeichnung der Grundform des Krystalls ist $a:a:c$.

3) Das drei- und einaxige System. Von den hier verzeichneten 4 Axen sind $DE=FG=HI\,[=2a]$, die in einerlei Ebene liegen und in derselben eine gleiche gegenseitige Lage haben, so dafs jeder $\angle$, den zwei benachbarte Axenhälften mit einander bilden, wie $\angle FCD=60°$ beträgt, die vierte Axe *AB* ist $\lessgtr DE\,[=2c]$. Diese letztere ungleichartige Axe ist die alleinige Haupt-Axe, die 3 vorher betrachteten sind die Neben-Axen und die Ebene *DFIEGH*,

Fig. 147.



ein regelmäfsiges Sechseck, die Basis des Krystalls. Bezeichnung der Grundform ist $a:a:\infty a:c$.

Hierbei ist Folgendes zu erörtern nothwendig: die Bezeichnung der Grundform eines Krystalls durch $a:a:a$ oder $a:a:c$, wie bei dem Krystall Fig. 138, heifst, dafs jede einzelne Fläche jede der 3 Axen in ihren Endpunkten schneidet, So z. B. schneidet die Fläche *AEF* die Axe $DE=2a$, also die halbe Axe $CE=a$ in *E*, die Axe $GF=2a$, also $CF=a$ in *F*, und die Axe $AB=2a$ oder $2c$, also $CA=a$ oder $=c$ in *A*.

Bei der Grundform, Fig. 147, dagegen schneidet jede Fläche nur 3 Axen, nämlich die Haupt-Axe *AB* und 2 Neben-Axen, mit der dritten Neben-Axe aber liegt sie $\nparallel$, d. h. sie schneidet diese Axe in unendlicher Ferne. Z. B. die Fläche *AFI* schneidet $CA=c$ in *A*, $CI=a$ in *I* und $CF=a$ in *F*, und läuft mit der Axe $DE=a$ $\nparallel$; woher die Bezeichnung des Krystalls in Folge der eben gedachten eigenthümlichen Lage jeder einzelnen Fläche zu den Axen die Bezeichnung $a:a:\infty a:c$ erhält.

4) Das ein- und einaxige System. Zur Veranschaulichung dieses Systems hat man Fig. 148. Die 3 Axen, *AB*, *DE* und *FG*, sind einander ungleich, dagegen die $\angle ACD$, *ACF* und *DCF* einander gleich und $=90°$. Da alle 3 Axen ungleich sind, so kann jede derselben zur Normalaxe genommen werden. Hat man *AB* zur Normalaxe gewählt, so wird diese senkrecht gestellt. Von den beiden andern Nebenaxen, die nun waagerecht liegen, nimmt man die kleinere *FG* als erste Nebenaxe $[2a]$, dem Beschauer zugekehrt, die gröfsere *DE* als zweite Nebenaxe $[2b]$, dem Beschauer $\nparallel$, die

Normalaxe *AB* bezeichnet man mit *c* und die Bezeichnung der Grundform ist *a*:*b*:*c*.

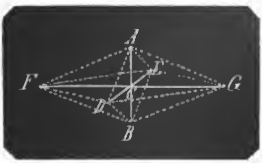
Fig. 148.



5) Das zwei- und eingliedrige System.

Da keine der 3 Axen eine ihr gleichartige hat, so ist jede derselben Hauptaxe. Man nimmt jedoch zur Normalaxe eine der beiden, welche die schiefwinklige

Fig. 149.

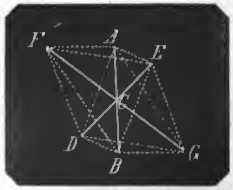


Neigung zu einander haben, so dafs, da diese senkrecht gestellt wird, die Basis nicht horizontal, sondern schief liegend ist. Bezeichnet man diese Fig. 149 mit *AB* (=2*c*), so stellt man die zweite *DE*, welche mit *AB* die beiden schiefen ∠ *ACD* und *ACE* bildet, dem Beschauer als erste Nebenaxe (2*a*) gegenüber und die rechtwinklig auf beide genannten Axen gerichtete dritte Axe *FG* ⫩ dem Beschauer als zweite Nebenaxe (2*b*). Die Bezeichnung der Grundform ist *a* : *b* : *c*.

6) Das ein- und eingliedrige System.

Zur Veranschaulichung dieses Systems hat man Fig. 150, wo aufser der Ungleichartigkeit der Axen nicht nur ∠ *ACE*, sondern auch ∠ *ACG* und ∠ *DCG* schief ist. Hier kann jede einzelne Axe Normalaxe (2*c*) und erste Nebenaxe (2*a*) und zweite Nebenaxe (2*b*) sein; die Basis ist

Fig. 150.



immer schief liegend und die Bezeichnung der Grundform ist *a* : *b* : *c*.

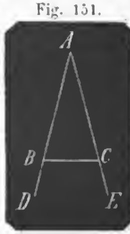
Axenwinkel (bei Krystallen), ist der Winkel, unter welchem die Axen des Krystalls sich schneiden (s. Axen der Krystalle, Axensystem).

Axiom (Grundsatz), wird in der Regel definirt als „ein Satz, der an sich so augenscheinlich ist, dafs er keines Beweises bedarf." Besser: „ein Satz, dessen Wahrheit unmittelbar durch die Anschauung erkannt wird." Wozu nämlich die Einführung des Begriffs: Beweis, als etwas, das zum A. nicht gehört?

Die Definition von A. führt aber offenbar auf die Frage: Welch ein Satz ist das, dessen Wahrheit, wenn er Wahrheit enthält, nicht unmittelbar durch die Anschauung erkannt wird, und wie wird dessen Wahrheit erkannt? — Antw.: Jeder solcher Sätze ist ein Lehrsatz, und dessen Wahrheit wird mit Hülfe des Beweises erkannt.

Z. B. Euklid 5ter Satz, Lehrsatz: „In jedem gleichschenkligen Triangel *ABC* sind die Winkel an der Grundlinie *ABC*, *ACB* einander gleich. Auch sind, wenn man die Schenkel *AB*, *AC* verlängert, die Winkel unter der Grundlinie einander gleich."

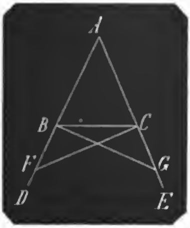
Fig. 151.



Ist die Figur richtig gezeichnet, so hat Jemand vielleicht mit Hülfe des Augenmaafses durch blofse Anschauung die Ueberzeugung von der Wahrheit des Satzes, er lehnt den Beweis ab; der obigen Definition nach ist der Satz ihm ein A. Dasselbe ist auch wohl bei einem Menschen der Fall, ohne dafs er sichtbare Zeichnung erhält, indem er sich die Figur vermöge der Einbildungskraft im Geist construirt, wo sie dann gewifs fehlerlos wird. Ein Anderer sieht es durch die blofse

Anschauung nicht ein, und es mufs ihm bewiesen werden. Euklid thut dies folgendermafsen:

Fig. 152.



Er trägt auf *AD* und *AE* zwei gleich grofse Linien *AF* und *AG* und zeichnet die geraden Linien *CF* und *BG*.

Nun ist

1)	nach Voraussetzung	$AC = AB$
2)	nach Construction	$AF = AG$
3)	vermöge Grundsatz	$\angle A = \angle A$
4)	folglich	$\triangle ACF \cong \triangle ABG$
5)	und	$FC = GB$
6)	auch	$\angle AFC = \angle AGB$
7)	und mit Hülfe von 1 und 2 vermöge Grundsatz	$BF = CG$
8)	Aus 5, 6, 7 folgt	$\triangle FCB \cong \triangle GBC$
9)	Hieraus	$\angle FCB = \angle GBC$
10)	und	$\angle FBC = \angle GCB$
11)	oder	$\angle DBC = \angle ECB$

also die Winkel unter der Grundlinie einander gleich.

12)	Aus 4 folgt	$\angle ABG = \angle ACF$
13)	Also mit Hülfe von 9 grundsätzlich	$\angle ABC = \angle ACB$

also die Winkel an der Grundlinie einander gleich.

In diesem Beweise sind die Sätze 1 und 2 als Voraussetzung, nämlich als Grundbedingung für die zu beweisende Wahrheit, und als Construction, also als eine geschehene Handlung, von Niemand als richtig zu läugnen. Satz 3 beruht auf einem Grundsatz, den Euklid nicht für werth gehalten hat, in allgemeinen Worten voranzustellen, nämlich den Satz: „Jede Gröfse ist sich selbst gleich," und er als Beweisführer verlangt, dafs von seiner Anwendung dieses allgemeinen Satzes: $\angle A = \angle A$ Niemand einen Beweis fordere, sondern als einen an sich selbst richtigen Satz betrachte.

Die Folgerung 4, dafs 2 Dreiecke, wenn je 2 Seiten und die von diesen eingeschlossenen Winkel gleich, einander congruent sind, mag Mancher an sich klar finden, auf den Beweis des Satzes verzichten, allein Euklid verlangt dies nicht, er hat den Satz als 4ten Satz und als ersten Lehrsatz vorangestellt und ihn bewiesen, wovon weiter unten. Die Sätze 5 und 6 gehören unmittelbar zu dem ebengedachten Lehrsatz; Satz 7 aber beruht auf dem von Euklid aufgestellten 3ten Grundsatz: „Von Gleichem Gleiches hinweggenommen, läfst Gleiches," und Euklid verlangt wieder, dafs Niemand den Beweis davon fordere, sondern ihn als an sich klar einsehe.

Die Sätze 8 bis 12 folgern sich aus dem oben gedachten 4ten Lehrsatz, und der 13te Satz aus dem schon gedachten Euklidischen Grundsatz.

Der Beweis von Satz 5 beruht also auf zweien Grundsätzen und einem Lehrsatz: Dieser Satz als erster Lehrsatz des ganzen Euklidischen Lehrgebäudes konnte nur mit Hülfe von Grundsätzen bewiesen werden.

Fig. 153.



Sind nämlich $AB = DE$
$AC = DF$
$\angle BAC = \angle EDF$

so beweist Euklid die Congruenz der beiden Dreiecke und die Gleichheit der übrigen Seiten und Winkel wie folgt:

Bringe den Triangel *ABC* auf den Triangel *DEF* und lege *A* auf *D* und *AB* auf *DE*. Da $AB = DE$, so fällt *B* auf *E*. Da $BAC = EDF$, so fällt *AC* auf *DF*. Da $AC = DF$, so fällt *C* auf *F*.

Diese 3 Schlüsse macht Euklid ohne weitere Begründung, er setzt also voraus, dafs Niemand einen Beweis für dieselben verlange.

Für den 1sten und den 3ten Schlufs gehört aber offenbar der Grundsatz: „Gerade Linien, die einander gleich sind, können in eine Lage gebracht werden, dafs sie sich decken," und dieser Grundsatz wird um so mehr vermifst, als Euklid den 8ten Grundsatz:

„Was sich deckt, ist einander gleich," aufgestellt hat. Der zweite Schlufs ist: Gleiche Winkel können so auf einander gelegt werden, dafs beide Schenkel über einander fallen; ein Satz, den Euklid ebenfalls stillschweigend als nothwendig wahr anerkannt wissen will.

Euklid fährt fort: Nun fällt nach Obigem auch *B* auf *E*. Folglich fällt *BC* auf *EF*. Dieser Schlufs ist mit dem 12ten Grundsatz begründet: Zwei gerade Linien schliefsen keinen Raum ein, welches aber stattfinden würde, wenn *BC* oberhalb oder unterhalb *EF* fiele. Der Schlufs aber beruht offenbar viel einfacher auf dem von Euklid nicht aufgestellten Grundsatz: „Zwischen zweien Punkten ist nur eine gerade Linie möglich." Hieraus ginge denn hervor, dafs die gerade Linie *BC* gedeckt wird, und hieraus wieder mit Hülfe des 8ten Grundsatzes, dafs beide gerade Linien einander gleich sind.

Endlich sagt Euklid ganz richtig: folglich ist (8. Grundsatz) $BC = EF$; $\triangle ABC = \triangle DEF$; $\angle ABC = \angle DEF$; $\angle ACB = \angle DFE$.

Alle folgenden Lehrsätze im Euklid werden mit Berufung auf den 4ten Satz, als den ersten Lehrsatz, und auf Grundsätze bewiesen, mithin beruht die Wahrheit des ganzen Euklidischen Lehrgebäudes nur auf Grundsätzen.

Es ist dies aber natürlicher Weise mit jedem anderen Lehrgebäude der Geometrie der Fall; auch stellt jeder Verfasser eines Lehrbuchs nicht dieselben Sätze als Grundsätze auf. So z. B. hat man in Lehrbüchern den 10. Euklidischen Grundsatz: „Alle rechte Winkel sind einander gleich," als Lehrsatz, der bewiesen wird. Wie oben erwähnt, hat Euklid die Deckung gleicher Winkel als von selbst verständlich angesehen; dieser Satz findet sich auch als Lehrsatz und wird bewiesen, nachdem die Erklärung: was unter kleineren und gröfseren Winkeln zu verstehen ist, vorausgeschickt worden.

Denn kein Mensch denkt wie der andere, es müfste denn zufällig sein, gewifs aber denkt jeder Mensch selbstständig; mithin liegt es in dem Gedankensystem eines jeden Verfassers von Lehrbüchern über Mathematik, welche Sätze er als an sich verständlich voranzustellen und sein Lehrgebäude darauf zu gründen geeignet findet.

Wenn aber Philosophen behaupten, dafs mathematische Beweise keine Beweise sind, weil sie sich auf Sätze gründen, auf Grundsätze, die nicht zu beweisen sind, so ist das ein Irrthum: Von allen den Wahrheiten, die in der Welt uns gegeben sind, bedarf für den Geist, der sie zu fassen vermag, keine einzige des Beweises. Dafs Wahrheiten uns tiefer liegen als andere, dafs jene zusammengesetzter, diese einfacher sind, liegt nicht in den Wahrheiten, sondern in uns selbst, in der Unvollkommenheit unseres Geistes. Dem Forschersinn des Menschen, der auch jene ihm tiefer liegenden Wahrheiten möglichst ergründen wollte, war es also nöthig, die zusammengesetzteren Wahrheiten aus zunächst einfacheren, von ihm erkannten Wahrheiten als nothwendig wahr abzuleiten, und um eine Wissenschaft zu gründen, zu erforschen, ob Sätze, die selbstredend wahr sind, nicht dennoch zusammengesetzt wären, und auf noch einfachere Sätze, auf Sätze, die noch viel eher selbstredend wahr sind, als Folgerungen zu begründen.

Der einfachste Satz, ein als wahr unbestreitbarer Satz (es giebt Philosophen, die Alles bestreiten, welche die Vernunft erfinden wollen und nicht daran denken, dafs sie vom Schöpfer den ihnen gebührenden Theil davon erhalten haben), also ein Grundsatz ist: „Jede Gröfse ist sich selbst gleich." Wollte nun ein Gelehrter die ganze Arithmetik auf diesem einzigen Grundsatz als Fundament aufbauen, so hätte er nur nöthig, eine beliebige Gröfse als 3 Mal einzeln vorhanden sich zu denken, und er könnte den sonst als Grundsatz geltenden, offenbar zusammengesetzteren Satz: „Wenn zwei Gröfsen einer dritten gleich sind, so sind sie unter einander gleich," als ersten Lehrsatz ganz streng beweisen.

Für die Geometrie freilich ist noch wenigstens ein Grundsatz erforderlich, denn Raumgröfsen haben einen anderen Charakter als die nur in Einheit und Vielheit bestehenden Zahlengröfsen, und der Raum, dieser Begriff ohne alle Merkmale, hat erst als in 3 Richtungen vorhanden erkannt werden müssen. Nachdem die nöthigen Erklärungen von Punkt, gerader und krummer Linie, Richtung u. s. w. aufgestellt worden, könnte der obengedachte Grundsatz sein: „Gerade Linien decken sich in allen Punkten." Dann könnte man die eine Linie von der anderen entfernen, und zwar, indem man die oberste um einen mittleren Punkt dreht: es entstehen zwei sich schneidende Linien und Winkel von verschiedener Gröfse; auf einer Seite werden sie kleiner, auf der anderen gröfser, an einem Ort beide einander gleich (rechte Winkel). Wenn man eine zunächst untere dritte Linie von der darüber befindlichen

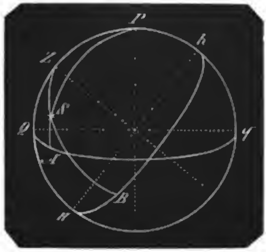
sie deckenden Linie entfernt, ohne ihre Richtung zu ändern, so entstehen Parallelen, (und da man die Linien beliebig lang denken kann), die sich nie schneiden; die oberste schneidet nun beide, und deren gleichliegende Winkel haben sich gedeckt, sind also einander gleich u. s. w.

Somit könnte, sage ich, das ganze Lehrgebäude der Arithmetik auf dem einen Axiom: „Jede Gröfse ist sich selbst gleich" und das Lehrgebäude der Geometrie mit Hülfe eines zweiten: „Gerade Linien decken sich in allen Punkten" aufgeführt werden; also auf zweien A., deren Wahrheiten wohl unmittelbar durch die Anschauung erkannt werden.

Schliefslich bemerke ich noch, dafs der 11te Euklidische Grundsatz an der Stelle, wo er steht, überraschen mufs. Ein Grundsatz sollte da seinen Platz haben, wo er in dem unmittelbar Folgenden zum ersten Male Anwendung findet; der 11te, also unmittelbar vor dem 29ten Satz im Euklid.

Azimuth eines Sterns ist der Winkel *HZB* oder Bogen *HB* zwischen dem Scheitelkreis *ZSB* des Sterns und dem Meridian *PZH* des auf der Erde befindlichen Beobachtungsorts. Da der in dem Meridian unendlich weit befindliche Punkt Südpunkt genannt wird, so sagt man für A. auch Südweite. Das A. ist, je nachdem der Stern in der östlichen oder westlichen Halbkugel sich befindet, östlich oder westlich.

Fig. 154.



Ist *Hh* der Horizont des Beobachtungsorts *O*, *Z* das Zenith, *P* der Nordpol, also Bogen *Ph* die Polhöhe (*p*) von *O*, *Qq* der Aequator, also *SA* die Abweichung des Sterns (*d*) und $\angle QPA$ der Stundenwinkel α von *S* für *O* (nämlich der $\angle$, den der Meridian *QP* des Orts und der Abweichungskreis *AP* im Nordpol *P* als Spitze mit einander bilden), so hat man zuerst in dem schiefwinkligen sphärischen $\triangle$ *ZPS*

$$PZ = 90^\circ - p$$
$$PS = 90^\circ - d$$
$$\angle ZPS = \alpha$$

hieraus

$$\cot PZS = \frac{\cos PS \cdot \sin PZ - \sin PS \cdot \cos PZ \cdot \cos \alpha}{\sin PS \cdot \sin \alpha}$$

oder $$\cot PZS = \frac{\sin d \cdot \cos p - \cos d \cdot \sin p \cdot \cos \alpha}{\cos d \cdot \sin \alpha}$$

Nun ist Azimuth $= \angle HZB = 180^\circ - \angle PZS$
also $\cot PZS = -\cot$ Azimuth
und

$$\cot \text{Azimuth} = \sin p \cdot \cot \alpha - \frac{\cos p \cdot tg\, d}{\sin \alpha}$$

Will man statt des Stundenwinkels die Höhe *SB* (*h*) des Sterns *S* über dem Horizont in die Formel einführen, so hat man $SZ = 90^\circ - h$, und in demselben $\triangle$ *PSZ*:

$$\cos PZS = \frac{\cos PS - \cos PZ \cdot \cos SZ}{\sin PZ \cdot \sin SZ}$$
$$= \frac{\sin d - \sin p \cdot \sin h}{\cos p \cdot \cos h}$$

und da $\cos PZS = -\cos$ Azimuth

$$\cos \text{Azimuth} = \frac{\sin p \cdot \sin h - \sin d}{\cos p \cdot \cos h}$$

Setzt man $h =$ Null, so hat man

$$\cos \text{Azimuth} = \frac{-\sin d}{\cos p}$$

und zwar das A. des Sterns in dem Augenblick seines Auf- oder Untergangs.

Dieses A. ± der Morgenweite oder der Abendweite des Sterns beträgt 90°, und zwar +, wenn das A. kleiner, und −, wenn es gröfser als 90° ist; daher stimmt diese Formel auch mit der für die Abendweite (pag. 3)

$$\sin \text{Abendweite} = \frac{\sin \text{Abweichung}}{\sin \text{Aequatorhöhe}}$$

weil die Aequatorhöhe und die Polhöhe jedes Orts der Erde zu einem Quadrant sich ergänzen.

Azimuth der Magnetnadel. Der Winkel, den der magnetische Meridian mit dem astronomischen M. eines Orts bildet. (Vergl. Abweichung der Magnetnadel.)

Azimuthal-Compafs. Ein Schiffs-C., der zur Beobachtung des Azimuths der Sonne oder eines Sterns mit diametral gegenüberstehenden Dioptern und einem in Grade abgetheilten Rande versehen ist, so dafs man das magnetische Azimuth der Sonne oder des Sterns unmittelbar erhält.

Azimuthalkreis ist bei einem feststehenden Winkel-Instrument ein horizontaler in Grade getheilter Kreisring, dessen Durchmesser durch 0° und 180° unverrückbar in der Mittagslinie liegt. Um diesen Kreis wird für die Beobachtung eines Gestirns das Instrument gedreht, wo dann der Winkel, den die Richtung des Gestirns mit der Mittagslinie bildet (das Azimuth), auf dem A. unmittelbar abgelesen werden kann. Ein ungefähres Bild von dem A. hat man Fig. 35, pag. 35, dem Aequatoreal, in dem Aequatorealkreis *ab*, wenn man sich denselben horizontal, und statt dafs er mit dem Instrument sich dreht, sich fest und die Säule *cd* um denselben sich drehend vorstellt.

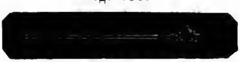
Azimuthalwinkel s. v. w. Azimuth.

B.

Baculometrie ist die Feldmeſskunst mit Hülfe von Kette und Stäben (baculus, der Stab), bei welcher man also kein Winkel-Instrument anwendet. Linien, die vermessen werden sollen, werden zuvor abgesteckt (s. Absteckung von Linien auf dem Felde, pag. 17). Eine zu vermessende Fläche wird in möglichst groſse Haupt-Dreiecke eingetheilt, indem man in die gewählten Winkelspitzen lange Stangen steckt, die der Auszeichnung wegen oben oft mit Fähnchen versehen werden, und die bis zum Ende der ganzen Vermessung stehen bleiben. Ist die Entfernung zweier solcher Punkte sehr groſs, oder coupirtes Terrain dazwischen, so werden noch Zwischenstangen einvisirt. Die Hauptstangen werden Signalstangen, Signale genannt, die Zwischenstangen Absteckstangen, Absteckstäbe. Man erleichtert die Arbeit, wenn man die Seiten der Haupt-Dreiecke nach natürlichen, weit sichtbaren Objekten richtet, als von einem gewählten Punkt aus nach einer Thurmspitze, einem hohen Baum u. s. w.

Die Länge jeder einzelnen Dreiecksseite wird mit der Kette unmittelbar vermessen. Die Kette, die Preuſsische Meſskette, hat 5 Ruthen Länge in 50 Gliedern aus Rundeisen, jedes $\frac{1}{10}$ Ruthe lang, deren Endösen durch Ringe an einander gereiht

Fig. 155.



werden. Jedes 10te und 11te Glied erhält ein Zwischenstück mit 1, 2, 3 oder 4 Spitzen in dem mittleren Steg, welche

Fig. 156.



die Anzahl Ruthen bezeichnen, und jedes 5te und 6te Glied ein ähnliches kleineres

Fig. 157.



Zwischenstück, den Steg ohne Spitze, welches $\frac{1}{2}$ Ruthe bezeichnet; die beiden Endglieder erhalten weitere Endringe, die auf runde hölzerne Kettenstangen geschoben werden, mit welchen die Kette durch 2 Kettenzieher gehandhabt wird.

Die Kettenstangen haben unten einen eisernen Beschlag, der in einem Teller, Kreuz oder Stift, worauf der Kettenring ruht, nebst starker Spitze besteht, die in

Fig. 158.



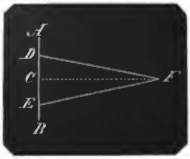
den Erdboden bis zum Teller eingestoſsen wird.

Der erste Kettenzieher hat diejenige Kettenstange, von der aus die Ruthen nach 1, 2, 3, 4 in den Zwischenstücken zählen, steckt die Spitze in den Anfangspunkt der Linie, der zweite Kettenzieher spannt die Kette möglichst gerade, tritt zur Seite der Linie, hält die Kettenstange lothrecht an der Hand, hat das Auge auf den ersten Kettenzieher, und dieser durch Winken mit der Hand nach rechts oder links visirt sie ein. Steht die Stange in der zu messenden Linie, so schlänkert der zweite die Kette zur straffen geraden Linie, steckt die Stange so ein, dafs die Kette das erste Loch der Kettenstange deckt, weil nur so die Stange in der Linie verbleibt. Nun hat der zweite vorangehende Kettenzieher an einem Drahtringe 10 Stück eisendrahtene Stäbe (Kettenstäbe, nach welchen die Bezeichnung: „Mit Kette und Stäben") von etwa 8 Zoll Länge, unten mit Spitze, oben mit etwas grofser Oese versehen; einen davon nimmt er vom Ringe ab, zieht die Kettenstange aus, steckt den Stab ein, dafs er sichtbar bleibt und geht in der Richtung der Linie weiter, bis der Erste an des Zweiten Stelle gekommen ist. Dieser nimmt den Stab heraus, setzt die Kettenstange ein, visirt die lothrecht gehaltene Kettenstange des Zweiten wieder in die Linie, dieser schlänkert die Kette straff u. s. f.; der Feldmesser geht neben dem ersten Kettenzieher mit, überwacht die Genauigkeit des Verfahrens und verzeichnet in seinem Manual Vorkommnisse, als Wege, Gräben, Grenzhügel und dergl. mit Angabe der gemessenen Totallänge der Linie, wo solche eintreten. Hat der erste Kettenzieher den 10ten Kettenstab aufgenommen, so sind 50 Ruthen vermessen, er giebt die 10 Stäbe dem vorderen Mann zurück, und der Feldmesser notirt die 50 Ruthen.

Kommen in der Linie Hindernisse vor, als Sumpf, Stromkrümmung und dergl., so mufs von der Linie abgegangen und eine derselben Parallele genommen werden. Die Parallele steckt man am leichtesten ab, wenn man in zwei möglichst fern von einander liegenden Punkten der ursprünglichen Linie auf derselben gleich lange Normallinien errichtet, deren Endpunkte durch Absteckstangen bezeichnet und diese Linie so weit durch Stangen verlängert, bis man wieder in die erste Linie eintreten kann.

Soll nun eine Normale in C auf AB errichtet werden, so mifst der Feldmesser $CD = CE = 5$ Fufs ab, die eine Kettenstange wird in D, die andere in E gesteckt, festgehalten, der Feldmesser ergreift die Kette in der Mitte, zieht straff,

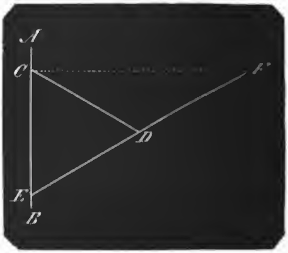
Fig. 159.



steckt in F einen Kettenstab, so ist $DF = EF = 2{,}5'$ und CF eine Normale, welche von C aus über F mit der Kette beliebig verlängert wird. Ist die Vermessung von A her bis C geschehen, so wird die Vermessung von F oder von einem anderen Punkt in CF aus unmittelbar in der Parallelen fortgesetzt.

Will man der gröfseren Genauigkeit wegen ein längeres Perpendikel als CF abstecken, so nimmt man $CE =$ der halben Kettenlänge $= 2{,}5°$, steckt die eine Kettenstange in C, die zweite in E, er-

Fig. 160.



greift die Kette in der Mitte, zieht bis D aus, steckt in D einen Stab, hält E fest, läfst C los, schwenkt mit der ganzen Kette bis über D nach F, so ist CF die Normale auf AE in C.

Denn $CE = CD = ED$
daher $\angle DCE = 60° = CDE$
also $\angle CDF = 120°$
daher $\angle FCD + CFD = 60°$
und da $CD = DF$
so ist $\angle FCD = 30°$
folglich $\angle DCE + \angle FCD = 90°$

Bei Abpfählung von Chausseestrecken, wenn man den Nummerpfahl zur Seite der Linie einzuschlagen hat, verzeichnet

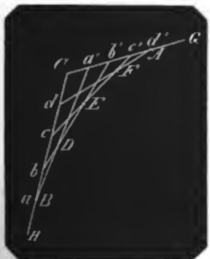
man einen rechten ∠ über C auf AE am leichtesten, und erhält zugleich den Ort für den Pfahl, wenn man von der Kettenlänge $CE = 1{,}2^\circ$ nimmt, die Kettenstangen in C und E einsetzen und festhalten läſst; man nimmt von C aus $1{,}6^\circ$ und von E aus 2°, führt beide Längen mit beiden Händen zusammen, so treffen sie in F normal über C, weil

$$20^2 = 16^2 + 12^2$$

Um eine bogenförmige Verbindung zwischen zweien unter einem Winkel zusammentreffenden Chausseerichtungen mit Kette und Stäben abzupfählen, verfährt man am einfachsten folgendermaſsen:

Man vermerke den Schneidungspunkt C der beiden zu verbindenden Richtungen AG und BH. Je nachdem die Ortsver-

Fig. 161.

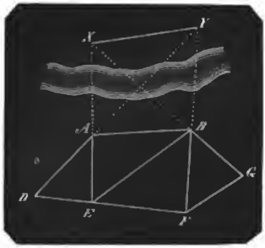


hältnisse es möglich machen, stecke von C gleiche oder ungleiche Längen CA und CB ab, theile jede dieser Längen in gleich viel. z. B. 4 gleich groſse Theile, stecke ab die geraden Linien aa', bb', cc', dd', so geben die abzupfählenden Durchschnittspunkte D, E, F, Punkte der Verbindungscurve; man messe die Linien $BD + DE + EF + FA$, die nun in die Charte ganz genau einzutragen und aus der Charte auf dem Felde wieder zu finden sind.

Hat man die Länge einer, in ganz unwegsamem Terrain liegenden Linie XY zu bestimmen und kein Winkel-Instrument bei der Hand, so stecke eine Gerade AB ab, desgleichen möglichst lange Linien AD, AE, BF, BG, als rückwärts genommene Verlängerungen der Visirlinien AX, AY, und BX, BY; verbinde DE, EF, EB und FG, messe alle diese Linien, trage die Dreiecke auf, so erhält man nach demselben Maaſsstabe auf dem Papier die gerade Linie XY, indem man EA und GB, dann DA und BF bis zu ihren Durchschnittspunkten rückwärts verlängert.

Die Vermessung mit Kette und Stäben gewährt für Feldmarken, Feldertheilung, Grenzen, Chausseen u. s. w. hinreichende

Fig. 162.



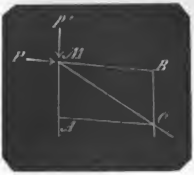
Genauigkeit, wenn man mit der Kette nicht zu schlimm umgeht und ordentliche und willige Kettenzieher hat.

Bahn ist der Weg eines sich bewegenden Punkts in Absicht auf Länge und Gestalt; also eine Linie und daher entweder eine g e r a d e oder eine k r u m m e L i n i e. B. einer Linie ist die B. des Mittelpunkts ihrer Länge, B. einer Fläche die B. des Mittelpunkts ihres Flächenraums, und B. eines Körpers die B. des Mittelpunkts des von ihm eingeschlossenen körperlichen Raums. Eine B. wird b e s c h r i e b e n oder d u r c h l a u f e n. Die B. setzt also etwas Bewegtes voraus, mit diesem eine Bewegung und deren Ursach, nämlich eine Kraft oder eine Summe zusammenwirkender Kräfte; und Körper, Flächen und Linien, die bewegt werden, können in ihren Abmessungen bis zu deren Mittel verschwindend und deren Masse in diesem einen Punkt, einen m a t e r i e l l e n P u n k t, M a s s e n p u n k t vereinigt gedacht und dessen Bewegung betrachtet werden.

Eine Kraft wirkt immer nur nach einer geraden Linie; ein Massenpunkt, von nur e i n e r Kraft angegriffen, kann also nur eine geradlinige Bahn beschreiben. Desgleichen ein Massenpunkt, der von 2 augenblicklich nur als Stoſs wirkenden Kräften nach verschiedenen Richtungen getroffen wird: Empfängt der Massenpunkt M durch die Kraft P einen augenblicklichen Stoſs, so daſs er in der ersten Zeit-Einheit (Secunde) den Weg MB zurücklegt, so wird er in jeder folgenden Secunde einen mit MB gleich groſsen Weg zurücklegen, und MB wäre die Richtung seiner B., die so lange Zeit immer weiter verfolgt wird, bis eine andere

auf M treffende Kraft sie abändert. Empfängt M durch die Kraft P' einen Stofs, der ihn in der ersten Secunde durch MA führt, so wird er in jeder folgenden Secunde den mit MA gleich grofsen Weg zurücklegen und MA ist die Richtung seiner B.

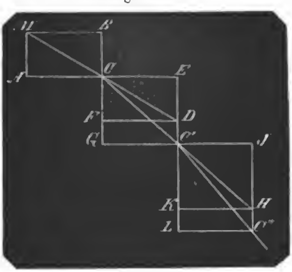
Fig. 163.



2. Wirken nun P und P' gemeinschaftlich und gleichzeitig auf M, so kann keine von beiden Richtungen MB, MA eingeschlagen werden: es wird eine mittlere Richtung zusammengesetzt. Denn die Bewegung von M geschieht offenbar so, als wenn M durch P nach B und gleichzeitig durch P' nach A, also von B nach C geführt würde; oder als wenn M durch P' nach A und zugleich durch P nach B, oder, was dasselbe ist, von A nach C geführt würde. Mithin ist C der Ort, in dem M nach Verlauf der ersten Secunde sich befindet; MC (die Diagonale des # $MABC$) der Weg von M in der ersten Secunde, und die Richtung der Bahn von M. Man nennt MA und MB die Seitengeschwindigkeiten, MC die Mittelgeschwindigkeit, $MBAC$ das Parallelogramm der Geschwindigkeiten.

3. Die Verlängerung CD $(= MC)$ von MC würde der Weg von M in der zweiten Secunde sein, wenn weiter keine Kraft-Einwirkung auf M erfolgt. Stellt man sich aber vor, dafs M, in C angekommen, noch einen Impuls nach der Richtung BC empfängt, so ist die Länge und Richtung des Weges von M in der zweiten Secunde offenbar eine andere als CD.

Fig. 164.



Um diesen Weg zu erfahren, substituirt man statt der Länge CD ihre Seitenwege $CE = AC$ und $CF = BC$ in den Verlängerungen von AC und BC, so entsteht das # $CEDF \cong MACB$. Empfängt nun M in C noch einen Impuls, der allein thätig M in einer Secunde durch den Weg FG führen würde, so sind in der zweiten Secunde die Seitengeschwindigkeiten CB und CG, und das # gebildet giebt die Diagonale CC' als Mittelgeschwindigkeit; der Massenpunkt beschreibt also in den beiden ersten Secunden die gebrochene Linie MCC'.

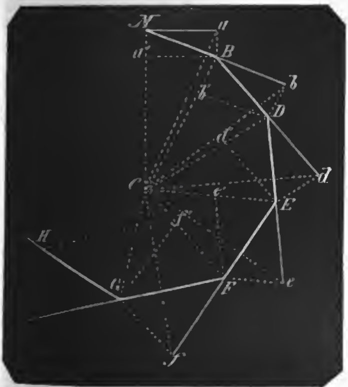
Verlängert man CC' um die gleiche Länge $C'H$, substituirt in C' wieder die Seitenwege $CI = GC'$ und $C'H = EC'$, so dafs das # $C'IHK \cong CEC'G$ entsteht, nimmt an, dafs in C' wiederum ein Impuls auf M geschehe, der allein thätig M in einer Secunde durch die Länge KL triebe, so erhält man die Diagonale $C'C''$ des # $C'LC''I$ als den Weg von M in der dritten Secunde, die bisher durchlaufene Bahn von M ist die gebrochene Linie $MCC'C''$ u. s. w.

Denkt man sich, dafs die neuen Impulse nicht von Secunde zu Secunde oder überhaupt absatzweise, sondern ohne Unterbrechung geschehen, wie in dem Art.: „Atwood's Fallmaschine" dies von der Schwerkraft der Erde nachgewiesen ist, die nach den parallelen Richtungen MA, BC, EC', IC'' ... permanent geschehen, und dafs man in einer grofsen Höhe über der Erdoberfläche die Masse M nach MB horizontal wirft, so werden die einzelnen Rechtecke AB, GE, LI ... bis zum Verschwinden nahe an einander gerückt und die gebrochene Linie $MCC'C''$ verwandelt sich in eine stetig krummlinige B. Eine ähnliche krummlinige B. entsteht, wenn man von der Erdoberfläche aus eine Masse M schräg in die Höhe wirft, M steigt in krummer Linie und fällt in krummer Linie zur Erde zurück (s. Bahn geworfener Körper).

4. Stellt man sich vor, dafs die Kraft P oder P', z. B. P' eine Zugkraft ist, deren Sitz dann unterhalb MA gedacht werden mufs, und die von einem constanten Punkt C daselbst ihre Wirkung auf M äufsert, während die andere Kraft P in nur einem augenblicklichen Stofs

der Masse *M* eine Anfangsgeschwindigkeit mittheilt, welche *M* in Folge des Beharrungsvermögens auch in den folgenden Zeiten beibehalten will, so hat man in Fig. 165 die bezügliche Darstellung.

Fig. 165.



Die Masse *M* wird durch einen einmaligen augenblicklichen Impuls in 1 Secunde durch die Gerade *Ma* getrieben; während dieser Zeit wirkt die Zugkraft (Centralkraft) in *C* (dem Kraftpunkt) auf *M*, dafs *M* den Weg *Ma'* durchlaufen würde, wenn *M* nicht zugleich durch *Ma* laufen müfste, *M* läuft also durch die Diagonale *MB* des # *MaBa'*. In Folge des Beharrungsvermögens will *M* nach *MB* geradlinig fortgehen, und in der zweiten Secunde den Weg $Bb = MB$ zurücklegen. *C* wirkt aber auf *M* in *B* nach *BC*, und will *B* durch den Weg *Bb'* führen, der Weg von *M* in der zweiten Sec. ist also *BD*. In der dritten Sec. will *M* den Weg $Dd = BD$ geradlinig fortsetzen, *C* will ihn durch *Dd'* treiben und *M* durchläuft die Linie *DE* u. s. w. Die Bahn von *M* ist *MBDEFGH* u. s. w. Da die Centralkraft nicht absatzweise, sondern permanent wirkt, so kann man jedes # für eine sehr kleine, im Verschwinden begriffene Zeit geltend betrachten, die # rücken also so nahe an einander, dafs die Bahn zu einer stetigen krummen Linie wird, und zwar der Zeichnung nach zu einer Ellipse.

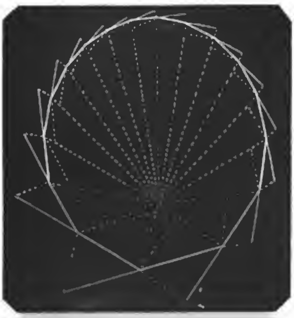
Eine Ellipse ist nämlich die Bahn eines jeden Planeten um die Sonne als Centralkraft, als Zugkraft, Anziehungskraft. Es ist ferner beobachtet, dafs diese Centralkraft um so wirksamer wird, je näher ihr die bewegte Masse *M* kommt, ein Gesetz, das später auch erwiesen worden ist, so wie im Art.: „Attraction" No. 10 angegeben worden, dafs die Wirkung der Centralkraft auf die bewegte Masse umgekehrt wie die Quadrate beider Entfernungen sich verhält. So ist denn die Zeichnung gefertigt und

$$Ff' > Ee' > Dd' > Bb' > Ma'$$

angenommen. Von *G* ab entfernt sich die Masse wieder von *C*, die Anziehungskräfte werden wieder kleiner, bis die Masse in *M* zurückkehrt, um von Neuem ihre Bahn zu durchlaufen.

5. Die ad 4 betrachtete Centralbahn, wonach dieselbe elliptisch wird, ist in der Bewegung der Weltkörper, also in der Natur begründet. Der ursprüngliche Impuls auf die Masse *M* kann aber so stark gedacht werden, dafs diese eine Curve beschreibt, die von dem Kraftpunkt sich fortdauernd entfernt. Dies führt auf eine allgemeinere Untersuchung, die in dem Artikel: Bahn der Weltkörper erfolgen soll.

Fig. 166.



6. Vorläufig mache ich auf ein äufserst wichtiges Gesetz aufmerksam, welches für alle Centralbahnen gilt, die Curve sei elliptisch oder anders gestaltet; ein Gesetz, welches aus einer einfachen geometrischen Betrachtung entspringt.

Bei allen Centralbahnen waltet die aus dem Beharrungsgesetz als nothwendig entspringende Bedingung vor, dafs durch

den ersten Impuls auf M in jedem sehr klein zu denkenden Zeittheilchen ein Weg beschrieben wird, der wie MB als gleichförmig durchlaufen zu betrachten ist, und dafs die Masse M denselben Weg wie $Bb = MB$ oder wie $Ff = FE$ in dem folgenden gleichen, sehr kleinen Zeittheilchen und nach gleicher Richtung mit dem vorher beschriebenen sehr kleinen Wege wiederum beschreiben will.

Zieht man in Fig. 165 die Geraden aC, bC, dC, eC u. s. w., so hat man

$$\triangle MCa = \triangle MCB$$

weil beide einerlei Grundlinie MC und gleiche Höhen aM, Ba' haben.

$$\triangle MBC = \triangle BbC$$

weil beide gleiche Grundlinien MB, Bb und einerlei Höhe haben.

$$\triangle BbC = \triangle BDC$$

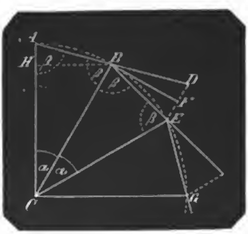
weil beide einerlei Grundlinie BC und gleiche Höhen bB, Db' haben,

$$\text{also } \triangle MBC = \triangle BDC$$

Ebenso findet man $\triangle BDC = \triangle DEC = \triangle EFC$ u. s. w., und da die Inhalte der genannten Dreiecke von der Ab- oder Zunahme der Centralkraft ganz unabhängig sind, so hat man das Gesetz: Bei jeder Centralbewegung werden in gleichen Zeiten vom Radius vector (der geraden Linie vom Kraftpunkt C nach dem jedesmaligen Ort der Masse M) gleiche Flächenräume beschrieben. Dies Gesetz ist von Kepler durch Beobachtungen gefunden und später von Newton bewiesen worden.

Man hat für die No. 4 und 5 betrachtete Centralbewegung einen eingeschränkten Fall in der Bewegung von Massen in einem Kreise, wie beim Schwungrade, oder wenn man einen Stein an einem straffen Faden im Kreise herumschwingen läfst.

Fig. 167.



Erhält nämlich die Masse M in A durch einen Impuls P (hier Schwungkraft genannt) eine Bewegung von der Geschwindigkeit V per Secunde, so dafs sie in der sehr kleinen Zeit t den Weg $AB = Vt$ zurücklegt, so würde sie in der folgenden gleichen Zeit t die Verlängerung BD zurücklegen, wenn nicht gleichzeitig die in C wirkende Centralkraft P' sie anzöge, so dafs sie einen Weg BE zurücklegen mufs. Soll nun die Bahn der Masse M ein Kreis sein, so mufs $CA = CB = CE = r$ und $BE = BD = AB$ sein, wo dann das dritte um C liegende $\triangle CEG$ und jedes folgende zu t gehörende $\triangle$ dem $\triangle CAB \cong \triangle CBE$ ebenfalls $\cong$ werden mufs.

Aus den mit β bezeichneten gleichen Winkeln geht hervor,

$$\begin{array}{ll} \text{dafs} & \angle DBE = 180^\circ - 2\beta \\ \text{und da} & 2\beta = 180^\circ - \alpha \\ \hline \text{so ist} & \angle DBE = \alpha \\ \text{folglich} & \angle BDE = \angle BED = \beta \\ \text{und} & DE \mp BC \end{array}$$

Fällt man also aus B auf DE eine Normale BF, so ist diese auch normal auf BC, und da BF die Seite DE halbirt, DF die Länge, um welche die Masse M durch die Kraft P innerhalb der Zeit t entfernt werden sollte und um welche zugleich die Centralkraft P' dieselbe zurückgeführt hat.

Da beide Kräfte die Centralkraft P' in C nnd die Schwungkraft P die Masse M in einerlei Zeit t durch einerlei Weg DF geführt haben, so sind beide Kräfte P und P' einander gleich; P' als absolute Kraft auf M wirkend, giebt die beschleunigende Kraft $\frac{P'}{M} = \frac{P}{M}$, deren Beschleunigung G ist $g \cdot \frac{P}{M}$ und der Weg DF kann ausgedrückt werden durch

$$Gt^2 = g \frac{P}{M} t^2$$

(s. Atwood's Fallmaschine, pag. 171).

Nun ist $DF = BD \cos\beta = AB \cos\beta$; also wenn man die Normale BH auf AC fällt,

$$DF = AH = \frac{AB^2}{2r} = g \frac{P}{M} t^2$$

und da $AB = vt$

$$\frac{v^2 t^2}{2r} = g \frac{P}{M} t^2$$

woraus die Schwungkraft

$$P = \frac{v^2}{2gr} M$$

$$\text{und } v^2 = 2gr \cdot \frac{P}{M}$$

In der bis zum Verschwinden kleinen Zeit t fallen die Sehnen AB, BE ... mit den Bogen zusammen, so wie auch P von t überhaupt unabhängig ist.

Die hier ermittelte Schwungkraft P und die Geschw. V werden in dem Art: Bahn der Weltkörper als äufserst wichtige Gröfsen wieder vorkommen.

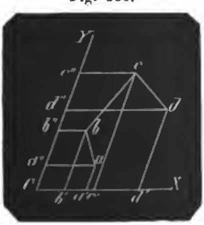
7. Eine geradlinige Bahn entsteht also, wenn auf eine Masse eine Kraft oder mehrere Kräfte durch Impuls wirken und die Masse dann dem Beharrungsstande überlassen. Für eine krummlinige B. ist jedoch aufser einem Impulse noch eine zweite während der ganzen Bewegung auf die Masse permanent einwirkende Kraft vorauszusetzen. Dieses sind freie Bahnen im Raume.

Wirkt aber auf eine Masse ein Impuls mit Beharrungsvermögen oder eine permanente Kraft oder beides zugleich, und wird deren, diesen Einwirkungen entsprechenden Bewegungen ein Hindernifs in bestimmter Gestalt als Leitung entgegengesetzt, so entsteht eine Bahn auf vorgeschriebenem Wege, eine vorgeschriebene Bahn, z. B. der beschränkte freie Fall auf schiefer Ebene, die Pendelschwingungen; auch die in No. 6 gedachte Kreisbewegung gehört hier her.

Bahnbestimmung aus relativen Bewegungen. Wenn man die Bahn eines Körpers bestimmen soll, so befindet man sich (mit seinem beobachtenden Auge) entweder innerhalb oder aufserhalb der Bahn, in beiden Fällen entweder in Ruhe oder in Bewegung. Aus diesem Grunde wird in vielen Fällen die Bahn mit Hülfe anderer, an derselben Bewegung nicht Theil nehmender Objecte, also indirect bestimmt, indem man die scheinbaren oder relativen Bewegungen dieser Hülfspunkte in Beziehung auf die bewegte Masse oder gegenseitig beobachtet, und aus diesen die wirkliche Bahn ableitet. Um solche Ableitung zu vermögen, sind die dafür aufgestellten Begriffe und Untersuchungen in Folgendem enthalten.

CX und CY seien zwei unter irgend einem $\angle$ in C zusammentreffende gerade

Fig. 168.



Linien; ein Punkt bewege sich in derselben Ebene und habe in verschiedenen Zeiten die Orte a, b, c, d. Zieht man nun $\neq CY$ nach CX die Linien aa', bb', cc', dd', $\neq CX$ auf CY die Linien aa'', bb'', cc'', dd'', so sind die relativen Wege der wirklichen Wege Ca, ab, bc, cd auf CX die Linien Ca', $a'b'$, $b'c'$, $c'd'$ und die derselben Wege auf CY die Linien Ca'', $a''b''$, $b''c''$, $c''d''$. Sind CY und CX normal auf einander, so sind die relativen Wege zugleich die Projectionen der wirklichen Wege.

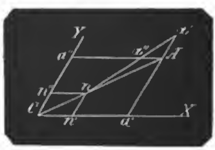
Man nennt die geraden Linien CX und CY auch die Coordinatenaxen einer Bahn, oder der Punkte, der Orte einer Bahn.

Für eine Bew. frei im Raum hat man 3 Coordinatenaxen für die relativen Bewegungen nöthig. Wenn man Fig. 15, pag. 14, die gerade Linie AP gezogen denkt und diese als wirkliche Bew. ansieht, so sind Ax, Ay, Az deren relative Bewegungen in den 3 Coordinatenaxen AX, AY, AZ.

2. Hat ein Massenpunkt eine geradlinige gleichförmige Bew., so sind auch dessen relative Bewegungen gleichförmig, und sind die relativen Bew. beide gleichförmig, so ist auch die wirkliche Bew. geradlinig und gleichförmig.

Ist z. B. der geradlinige Weg des Massenpunkts CA und hat er die Länge CA in der Zeit t gleichförmig durchlaufen, so sind auch die relativen Wege Ca' und Ca'' gleichförmig durchlaufen; denn ist

Fig. 169.



Cn die in der Zeit-Einheit durchlaufene Länge, so ist $CA = Cn \cdot t$

die relativen Wege von Cn sind Cn' und Cn''

Es ist aber $Cn' : Ca' = Cn : CA = 1 : t$

und $Cn'' : Ca'' = Cn : CA = 1 : t$

folglich $Ca' = Cn' \cdot t$ und $Ca'' = Cn'' \cdot t$

und so würde jeder Weg $Cm = \frac{n}{m} CA$ in der Zeit $\frac{n}{m} t$ die relativen Bewegungen

$Cm' = \frac{n}{m} Ca'$ und $Cm'' = \frac{n}{m} Ca'$ liefern.

Hat man umgekehrt die relativen Bewegungen Ca' und Ca'' als gleichförmig durchlaufen beobachtet, so gehört zu beiden Punkten a', a'' nur der einzige wirkliche Massenpunkt A; zieht man ferner aus den Punkten n' und n'', in welchen der Körper nach Verlauf der Zeit-Einheit durchgehend beobachtet wurde, die Parallelen, so treffen diese in dem einzigen Punkt n zusammen.

Verbindet man C mit n und n mit A durch gerade Linien, so hat man zu beweisen, dafs CnA eine gerade Linie ist. Gesetzt, die Verlängerung der geraden Linie Cn wäre nicht nA, so müfste sie entweder rechts oder links neben A vorbei gehen und folglich die geraden Linien Aa' und Aa'' in 2 verschiedenen Punkten schneiden. Es sei $Cna''a'$ diese gerade Linie, so ist

$$Cn : Ca' = Cn' : Ca' = 1 : t$$
$$Cn : Ca'' = Cn'' : Ca'' = 1 : t$$

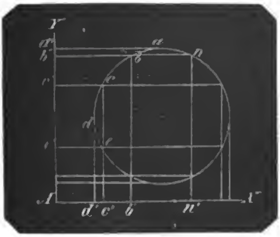
hieraus $Ca' = Ca''$

was nur möglich ist, wenn a'' und a' einerlei Punkt sind, der nur A sein kann.

3. Anders ist es bei einer krummlinigen, gleichförmig durchlaufenen Bahn.

Die Bew. geschehe gleichförmig in einem Kreise; die relativen Bew. in den Axen AX und AY gleichzeitig beobachtet, ergeben für die Bew. von n über a nach b den grofsen Weg $n'b'$ und die beiden kleinen Wege $b''a'' + a''b''$; von c über d nach e die beiden kleinen Wege $c'd' + d'c'$ und den grofsen Weg $c''e''$ u. s. w. Es

Fig. 170.



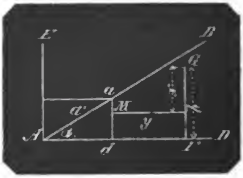
ist aber klar, dafs durch Verzeichnung der Parallelen mit AX und AY bis zu deren Durchschnittspunkten die wirkliche Bew. in dem Kreise sichtbar construirt, also auch berechnet werden kann.

4. Wenn man die Kräfte kennt, die, gemeinschaftlich auf einen Massenpunkt wirkend, dessen Bahn veranlassen, so darf man die Bewegungsaxen nur nach der Richtung dieser Kräfte nehmen, um aus den sodann bekannten Gesetzen der relativen Bewegungen die Bahn der Masse zu finden.

Z. B. die Wurfbewegung.

Es werde ein Körper von A aus nach der Richtung AB unter dem $\angle\alpha$ mit

Fig. 171.



dem Horizont AD in die Höhe geworfen, so ersieht man, dafs die senkrecht abwärts wirkende Schwerkraft den Körper in jedem Augenblick nach dem Horizont herabzuziehen strebt. Aus diesem Grunde ist die eine Seitenaxe AE der Bew. senkrecht zu nehmen, die andere normal darauf, also in der Horizontalen AD. Nach der Richtung $\# EA$ wirkt nun eine Kraft, die als absolut eine gleichförmig verzögerte Bew. veranlafst, während aus der nur in einem Augenblick thätig gewesenen Wurfkraft, die sich in der Horizontalen als zweite Seitenkraft zerlegt, eine gleichförmige Bew. hervorgeht.

Ist $Aa' = c$ der Weg der Masse in der ersten Secunde als deren Anfangsgeschwindigkeit, so ist die relative Anfangsgeschwindigkeit nach $AD = c \cos\alpha$, nach $AE = c \sin\alpha$, und wenn die negative Beschleunigung der Schwere $= g$ gesetzt wird, nach Verlauf von t Secunden der relative Weg Ad nach $AD = c \cdot \cos\alpha \cdot t$ (1)

nach $AE = da - aM = c \sin\alpha \cdot t - gt^2$

$$= gt\left(\frac{c \sin\alpha}{g} - t\right) \qquad (2)$$

so dafs der Massenpunkt unterhalb der geraden Linie AB, etwa in M sich befindet.

Da beide letzten Factoren eine constante Summe $= \frac{c \sin\alpha}{g}$ bilden, so ist das Maximum des Werths für $t = \frac{c \sin\alpha}{2g}$, mithin ist die gröfste Höhe $FG = h$ des Wurfs (aus 2)

$$= \frac{c^2 \sin^2\alpha}{4g} \qquad (3)$$

und die dazu gehörige Länge AF (aus 1)

$$= c \cdot \cos\alpha \frac{c \sin\alpha}{2g}$$

$$= c^2 \frac{\sin 2\alpha}{4g} \qquad (4)$$

beide in der Zeit $\frac{c \sin\alpha}{2g}$

Für $t = \frac{c \sin\alpha}{g}$, also für die doppelte Zeit wird die Höhe $= 0$, der Körper kommt in diesem Augenblick zur Erde, und die Länge in AD dafür (aus Gl. 1)

die Wurfweite $(2AF)$ ist $= c^2 \frac{\sin 2\alpha}{2g}$ (5)

Nimmt man GF zur Abscissenlinie, G als Anfangspunkt, die $\mp AD$ auf FG gezogenen Linien als die Ordinaten, so ist $y = dF = c \cdot \cos\alpha \cdot t_1$, wenn t_1 die Zeit ist, in welcher die relative Bew. $= dF$ ist. Es sei die relative Geschw. nach AE in $M = v$, so ist sie in G noch $v - 2gt_1$; sie ist aber in G zugleich Null, weil der Körper von dort ab zu fallen anfängt, mithin $v - 2gt_1 = 0$, und der relative Weg $x = vt_1 - gt_1^2 = 2gt_1 - gt_1^2 = gt_1^2$

Man erhält also aus

$$y = c \cos\alpha t_1$$

und $x = gt_1^2$

wenn man t_1 aus der ersten Gleichung eliminirt und den Werth $t_1 = \frac{y}{c \cos\alpha}$ in die zweite Gleichung setzt und entwickelt

$$y^2 = \frac{c^2 \cos^2\alpha}{g} x$$

die Gleichung für die Parabel, deren Axe GF und deren Scheitel G ist. (Vergl. Bahn geworfener Körper, No. 7.)

Bahn geworfener Körper. Ein Körper, der geworfen wird, erhält mit dem Wurf einen Impuls zu einer gleichförmigen Bewegung von einer Geschwindigkeit, die mit der Stärke oder der Gröfse des Impulses in Verhältnifs steht, er müfste also nach der Richtung des Wurfs mit der ihm ertheilten Anfangsgeschwindigkeit sich fortbewegen. Allein er kehrt, wie die tägliche Erfahrung lehrt, zur Erdoberfläche zurück, und die Ursache davon ist die fortdauernde Wirkung der Schwerkraft unseres kugelförmigen Erdkörpers, der Anziehungskraft seiner Masse, welche in deren Mittelpunkt vereinigt als Centralkraft wirkt, und die so grofs ist, dafs sie jeden in der Nähe seiner Oberfläche befindlichen Körper erfahrungsmäfsig 15 pariser = $15\frac{5}{8}$ preufs. Fufs in der ersten Secunde dem Erdmittelpunkt näher führt.

Diese Richtungen der Schwerkraft, die lothrechten Linien, bilden, in Summa betrachtet, Strahlen, die eine Erweiterung der Kugeloberfläche bilden, und wenn wir uns auf der Erdoberfläche eine Kreislinie denken, die von uns überall 90° entfernt ist, so hat jeder auf diesem Kreis befindliche Mensch einen Stand, der mit dem unsrigen einen rechten Winkel bildet. Da aber der Erdumkreis 5400 geogr. Meilen beträgt, so können die Lothe in dem Anfangspunkt und dem Endpunkt einer jeden Wurfweite als $\mp$ angenommen werden, denn bei dem Wurf einer 24pfündigen Kugel mit verstärkter Ladung von höchstens 12000 Fufs beträgt der Winkel, den beide Lothe in dieser Entfernung mit einander bilden, nur 2,4 Minuten.

2. Die Schwere als absolute Kraft (s. d.) bewirkt gleichförmig beschleunigte oder verzögerte Bewegung; beschleunigte, wenn die Masse dem Sitz der Schwerkraft, dem Erdmittelpunkt sich nähert, verzögerte, wenn sie von demselben sich entfernt. Die Gleichförmigkeit einer Beschleunigung besteht aber darin, dafs die Geschwindigkeit in gleichen auf einander folgenden Zeiten um gleich viel wächst. Beim freien Fall ist der Weg in der ersten Secunde $15\frac{5}{8}$ preufs. Fufs, welche (die Beschleunigung) mit g bezeichnet wird; in der zweiten Sec. fällt der Körper $3g$, die Schwere allein konnte demselben nur den Weg g mittheilen, mithin ist das Mehr von $2g$ die Wirkung des Beharrungszustandes, d. h. nach Verlauf der ersten Secunde hatte der Körper die Geschwindigkeit $= 2g$. Mithin beträgt die Zunahme der Geschwindigkeit während der zweiten Sec. wieder $2g$, die Endgeschwindigkeit nach Verlauf von 2 Sec. ist $= 4g$, nach 3 Sec. $6g$, nach Verlauf der Zeit t (Secunden) $= 2tg$, und zwar nach lothrechter Richtung.

Es fällt also lothrecht ein Körper vermöge des Beharrungsstandes der erlangten Endgeschwindigkeit während der 2ten Sec. $2g$, während der 3ten $4g$, allgemein während der $t$ten Sec. $2(t-1)g$. In Summa

$$2[1 + 2 + \ldots + (t-1)]g = t(t-1)g$$

In jeder einzelnen Sec. ertheilt ihm die Schwere den Weg der ersten Sec. $= g$, während t Sec. also den Weg tg; mithin beträgt sein ganzer Weg

$$[t + t(t-1)]g = gt^2$$

3. Wenn einer Masse M durch Wurf lothrecht aufwärts die Anfangsgeschw. c mitgetheilt wird, so würde sie in Folge des Beharrungsstandes in jeder Sec. die Höhe c ansteigen, in t Sec. also die Höhe ct erreicht haben. Allein die Schwerkraft wirkt der Bewegung entgegen und entzieht ihr (nach No. 2) in der ersten Sec. die Geschw. 2g, weil der freie Fall nach Verlauf einer Sec. die Endgeschw. $2g$ er-

langt hat; in der 2ten Sec. $4g$, weil beim freien Fall nach Verlauf zweier Sec. die Endgeschw. $4g$ ist, nach t Sec. $2gt$.

Nachdem M 1 Sec. gestiegen ist, beträgt deren Geschw. noch $c-2g$; nach 2 Sec. $c-4g$, nach t Sec. $c-2gt$. Ist nun $c-2gt=0$, so hört das fernere Steigen auf und M fängt an zu fallen. Man hat daher das Gesetz

I. Eine mit der Anfangsgeschwindigkeit c senkrecht aufwärts geworfene Masse steigt $t=\frac{c}{2g}$ Secunden lang, worauf sie zu fallen anfängt.

Z. B. ein mit 40 Fufs Geschw. aufgeworfener Körper steigt $\frac{40}{2\cdot 15\frac{5}{8}}=1{,}28$ Sec. lang; und wenn ein Körper 5 Sec. lang senkrecht aufsteigen soll, bedarf er einer Anfangsgeschw. $c=2\cdot 15\frac{5}{8}\cdot 5=156\frac{1}{4}$ Fufs.

4. Um die Zeit zu finden, in welcher der Körper wieder auf die Erdoberfläche trifft, hat man nur nöthig, die steigende Bewegung sich fortgesetzt zu denken.

Nach $(t+1)$ Sec. hat dann die Schwere dem Körper die Geschwindigkeit $2g(t+1)$ entzogen, seine Geschw. beträgt noch $c-2g(t+1)=-2g$, d. h. $-2g$ aufwärts, also $+2g$ abwärts, also diejenige Geschw., welche ein frei fallender Körper nach Verlauf einer Sec. erhält (s. No. 2) und er ist also wirklich eine Sec. lang gefallen.

Als der Körper $(t-1)$ Sec. lang gestiegen war, hatte er die Geschw.

$$c-2g(t-1)=+2g$$

also nach $(t-1)$ Sec. dieselbe Geschw. aufwärts, welche er nach noch 2 Sec., nämlich nach Verlauf von überhaupt $(t+1)$ Sec. abwärts erhält. Da nun der Körper zuletzt eine volle Sec. gefallen ist, so ist er von der Zeit $(t-1)$ ab eine volle Sec. gestiegen. So findet man, dafs der Körper nach Verlauf von $2t$ Sec. noch die Geschw. $c-4gt=-2gt=-c$ aufwärts, d. h. die Geschw. $+c$ abwärts = der Anfangsgeschw. beim Steigen hat. Man hat also das Gesetz:

II. Die Anfangsgeschwindigkeit eines t Secunden lang senkrecht aufsteigenden Körpers ist = der Endgeschwindigkeit eines t Secunden lang frei fallenden Körpers. Und ein Körper, der t Secunden lang senkrecht aufsteigt, fällt t Secunden lang senkrecht herab; er kommt, von dem Augenblick des Wurfs ab, nach $2t$ Secunden wieder zur Erde.

5. Aus No. 4 geht hervor, dafs die Gesetze beim Aufsteigen mit denen beim Fallen eines Körpers dieselben sind, und somit ist auch die beim lothrechten Ansteigen in t Secunden oder mit der Anfangsgeschwindigkeit c erlangte Höhe h gleich der Fallhöhe, zu welcher t Sec. oder die Endgeschwindigkeit c gehört, nämlich (nach No. 2) $h=gt^2$; oder da $t=\frac{c}{2g}$, $h=\frac{c^2}{4g}$

Bei $c=40$ Fufs (Beisp. No. 3) ist die Höhe h, bis zu welcher der Körper senkrecht ansteigt, $=\frac{40^2}{4\cdot 15\frac{5}{8}}=25{,}6$ Fufs. In No. 3 ist die Zeit t des Steigens $=1{,}28$ Sec. berechnet, mithin

$$h=15\tfrac{5}{8}\times 1{,}28^2=25{,}6 \text{ Fufs.}$$

Dieselbe Höhe aber fällt der Körper in 1,28 Sec. herab und erlangt dabei dieselbe Endgeschwindigkeit 40 Fufs. Man hat demnach das Gesetz:

III. Ein Körper mufs, um eine bestimmte Höhe zu erreichen, mit derselben Anfangsgeschwindigkeit steigen, welche er als Endgeschwindigkeit beim freien Fall von derselben Höhe erlangt.

6. Nach No. 3 hat ein Körper, wenn er mit der Geschw. c eine Sec. lang senkrecht aufgestiegen ist, noch die Geschw. $c-2g$; mit dieser Geschw. kann er noch steigen $\frac{(c-2g)^2}{4g}$, er ist also gestiegen $\frac{c^2}{4g}-\frac{(c-2g)^2}{4g}=c-g$, wie auch die einfache Betrachtung zeigt, dafs der Körper vermöge der Beharrung die Höhe c erreichen würde, wenn die Schwere nicht den Weg g zurück verlangte, woher die wirklich angestiegene Höhe nur $c-g$ sein kann.

Ist nun $c=g$, so ist er auf die Höhe $=0$ gestiegen; d. h. er ist in der ersten $\frac{1}{2}$ Sec. auf die Höhe $=\frac{g^2}{4g}=\frac{1}{4}g$ gestiegen und in der 2ten $\frac{1}{2}$ Sec. wieder um $\frac{1}{4}g$ gefallen. Nach t Sec. ist seine Geschw. noch $c-2gt$, er ist also gestiegen

$$\frac{c^2}{4g}-\frac{(c-2gt)^2}{4g}=ct-gt^2$$

wo ct die durch Beharrungsvermögen aufgestiegene Höhe und gt^2 die von der Schwere zurück verlangte Höhe ist.

Für $c=gt$ ist der Körper auf die Höhe $=0$ gestiegen, d. h. er ist in der Zeit $\frac{1}{2}t$ auf die Höhe $\frac{c^2}{4g}=\frac{g^2t^2}{4g}=\frac{1}{4}gt^2$ gestie-

gen und in der folgenden Zeit $\frac{1}{2}t$ auf die Höhe $\frac{1}{4}gt^2$ wieder herabgefallen.

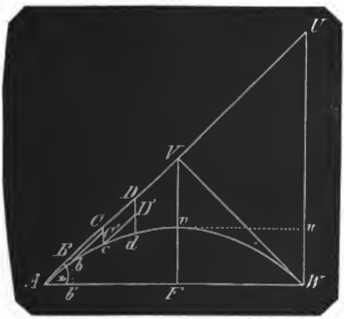
Nennt man bei der Anfangsgeschwindigkeit c diejenige Geschw. v, welche der Körper während des Aufsteigens in irgend einem Zeit-Augenblick hat, so ist die ganze Höhe, auf die er steigt,

$$h = \frac{c^2}{4g}$$

Die Höhe, welche er mit der Geschw. v noch steigen kann, $h' = \frac{v^2}{4g}$ und die Höhe $h - h'$, welche er bereits gestiegen, ist $= \frac{c^2 - v^2}{4g}$

7. Wird ein Körper M von A aus unter einem spitzen $\angle \alpha$ mit dem Horizont (dem Richtungswinkel, Elevationswinkel) in die Höhe geworfen, so dafs er die Anfangsgsschw. $= c$ erhält, so würde er nach Verlauf einer Sec. in dem Punkt B in der Entfernung c von A sein, wenn ihn die Schwere nicht um den Weg $g = Bb$ senkrecht abwärts triebe

Fig. 172.



und M befindet sich in b. In der zweiten Sec. macht er wieder durch Beharrung den Weg $bC' = c$ und $\# AC$, die Schwere jedoch führt ihn in dieser Sec. den Weg $3g = C'c$ senkrecht abwärts und er befindet sich nach Verlauf der 2ten Sec. in c. Nach Verlauf der 3ten Sec. befindet er sich in d, indem $cD' \# AD = c$ und $D'd = 5g$ beträgt. In der ersten Sec. ist M um g gefallen, in den ersten beiden von C aus um $4g$, in den ersten 3 Sec. von D aus $9g$ und nach t Sec., wo er gleichförmig den Weg $ct = AV$ zurückgelegt haben würde, ist er um $gt^2 = Vv$ gefallen und befindet sich in v.

Aus $AV = ct$ und $Vv = gt^2$

folgt $Vv = g\left(\frac{AV}{c}\right)^2 = \frac{g}{c^2} AV^2$

Eben so ist $Bb = \frac{g}{c^2} AB^2$

$$Cc = \frac{g}{c^2} AC^2$$

u. s. w.

d. h. die Quadrate der von A aus auf der um α ansteigenden geraden Linie AV genommenen Abscissen (x) verhalten sich wie die zu ihnen gehörenden lothrechten Ordinaten (y), und die Bahn des geworfenen Körpers wird bestimmt durch die allgemeine Gleichung

$$y = \frac{g}{c^2} x^2$$

Nun hat man aber für eine Parabel, wenn man die Abscissen auf einer Tangente derselben vom Berührungspunkt ab mit x, die dazu gehörigen mit der Parabelaxe $\#$ genommenen Ordinaten mit y und den $\angle$, den die Tangente mit der Axe bildet, mit β bezeichnet, die Coordinatengleichung

$$y = \frac{\sin^2\beta}{p} x^2$$

wo p der Parameter der Parabel ist.

Da nun für die Wurfcurve allgemein $y = \frac{g}{c^2} x^2$, so gehören die einzelnen Orte des unter dem $\angle \alpha$ geworfenen Körpers einer Parabel an, von welcher AV in A Tangente, deren Axe lothrecht und bei der $\angle AVv = \beta$ ist.

Aus $y = \frac{\sin^2\beta}{p} x^2$ folgt $y = \frac{\cos^2\alpha}{p} x^2$ und es ergiebt sich, dafs der Parameter der parabolischen Bahn des geworfenen Körpers $p = \frac{c^2}{g} \cos^2\alpha$ ist.

Hieraus erhellt, dafs die Axe rechts von A, $\# Vv$ liegen mufs, und wenn VF durch v selbst die Axe ist, so mufs die Parabel den Horizont in der Entfernung $AW = 2FA$ schneiden, das Parabelstück vW mufs dem Stück $vA \cong$ sein, WV die Tangente in W und VF als Subtangente $= 2vF$

8. Geht man von dieser rein geometrischen Betrachtung auf die Phoronomie zurück, so hat man den Scheitel v,

wenn $vF = ct \sin\alpha - gt^2$

ein Maximum ist, also wenn nach Lehren der Differenzialrechnung

$$c \sin\alpha - 2gt = 0$$

oder für $t = \frac{c}{2g} \sin\alpha$

Dasselbe Resultat erhält man auch, wenn man erwägt, dafs ein Steigen des Körpers nur so lange möglich ist, als die nach der Lothrechten genommene relative Geschw. von $c = c \cdot sin\,\alpha = Bb'$, die während der ganzen Bewegung für jede Secunde constant bleibt, noch die von der Schwere nach derselben Richtung ihm entzogene immer wachsende Geschw. $2gt$ übertrifft. Also für $c\,sin\,\alpha = 2gt$ bleibt der Körper in dem Höhenpunkt stehen, in dem nächsten Zeittheilchen $\triangle t$ wirkt die Schwere mit der Geschw. $2g(t+\triangle t)$, diese ist nun gröfser als $c\,sin\,\alpha$ und der Körper mufs fallen. Da er nun in der Zeit $t = \frac{c}{2g} sin\,\alpha$ gestiegen ist, so fällt er auch während der gleichen Zeit t und es ist die Zeit der Bewegung des Körpers durch seine Bahn

$$T = \frac{c}{g} sin\,\alpha$$

9. Verlängert man AV bis U, normal über W, so ist offenbar $AU = cT$ und die Wurfweite

$$W = AW = AU\,cos\,\alpha = c \cdot T \cdot cos\,\alpha$$

$$= c\,\frac{c}{g}\,sin\,\alpha\,cos\,\alpha = \frac{c^2}{g}\,sin\,\alpha\,cos\,\alpha$$

oder $W = \frac{c^2}{2g} sin\,2\alpha$

Die Wurfweiten verhalten sich also wie die doppelten Richtungswinkel.

Da $sin\,2\alpha = sin(180 - 2\alpha)$, so ist

$$W = \frac{c^2}{2g}\,sin\,2\,\alpha = \frac{c^2}{2g}\,sin\,2(90-\alpha)$$

d. h. die Wurfweiten bei einerlei Anfangsgeschwindigkeit sind für Richtungs-Winkel als Complementswinkel einander gleich.

10. Die gröfste Höhe Fv, welche der Körper erreicht, ist

$$VF - Vv = H = \tfrac{1}{2} c\,T\,sin\,\alpha - g(\tfrac{1}{2}T)^2$$

oder für T seinen Werth $\frac{c}{g} sin\,\alpha$ gesetzt

$$H = \frac{c^2}{4g} sin^2\alpha$$

11. Die gröfste Wurfweite W erhält man für $2\alpha = 90°$, also für $\alpha = 45°$. Dann ist

$$W = \frac{c^2}{2g}$$

und die zugehörige gröfste Höhe

$$H = \frac{c^2}{4g} sin^2 45°$$

$$= \frac{c^2}{4g} (\sqrt{\tfrac{1}{2}})^2 = \frac{c^2}{8g}$$

Folglich ist die gröfste Wurfweite bei einem Richtungswinkel von 45° viermal so grofs als die dazu gehörige gröfste Höhe, und doppelt so grofs als die Höhe, welche ein mit derselben Geschwindigkeit senkrecht in die Höhe geworfener Körper erlangt.

12. Für $\alpha = 90°$ erhält man $W = 0$ und $H = \frac{c^2}{4g}$, wie in No. 5 bei senkrecht gerichtetem Wurf erwiesen ist.

Für $\alpha = 0$ erhält man $W = 0$ und $H = 0$

Wenn man jedoch in einer Höhe H von der Erdoberfläche einen Körper mit der Geschw. c horizontal wirft, so hat man sich die halbe Bahn (Fig. 172) vW zu denken: denn während der Körper in der Horizontalen vu den Weg ct machen will, führt ihn die Schwere den Weg gt^2 abwärts. Ist nun $H = gt^2$, so trifft der Körper in der Zeit t die Erdoberfläche. Setzt man die Weite $FW = w$, so ist $w = ct$, woraus $t = \frac{w}{c}$

$$\text{mithin } H = g \cdot \frac{w^2}{c^2}$$

$$\text{und } w = c\sqrt{\frac{H}{g}}$$

(Vergl. Bahnbestimmung etc. No. 4.)

13. Man kann die Bahn eines geworfenen Körpers construiren, wenn c und α gegeben sind, und wenn man $g = 15\tfrac{5}{8}$ Fufs und c mit einerlei verjüngtem Maafsstab mifst:

$$\text{Aus } W = \frac{c^2}{g} sin\,\alpha\,cos\,\alpha = \frac{c^2}{2g} sin\,2\alpha$$

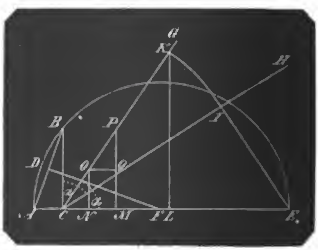
$$\text{und } H = \frac{c^2}{4g} sin^2\alpha$$

$$\text{folgt } H = \tfrac{1}{4} W\,tg\,\alpha$$

$$\text{und } W = 4H\,cot\,\alpha$$

Man kann demnach erst W und aus diesem H oder erst H und aus diesem W construiren.

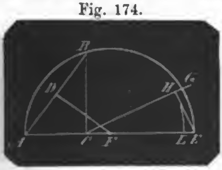
Fig. 173.



Für den ersten Fall nimm auf der geraden Linie AE, $AC=g$ die Normale $BC=c$, halbire AB in D, errichte auf AB in D das Loth DF bis in AE, beschreibe aus F den Halbkreis ABE, so ist $CE=\frac{c^2}{g}$. Zeichne die beiden $\angle GCE = ACB = \alpha$, fälle die Normale EI auf CH, so ist $\angle IEC=\alpha$ und $CI=\frac{c^2}{g}\sin\alpha$; zeichne den Bogen IK aus C, fälle die Normale KL auf CE, so ist $CL=\frac{c^2}{g}\sin\alpha\cdot\cos\alpha = W$. Halbirt man nun CL in M und CM in N, errichtet die Normalen NO und MP, so ist $NO=\frac{1}{4} W\, tg\,\alpha$ und die Normale OQ auf MP giebt den Scheitel Q der Parabel und $QM=\frac{1}{4} W\, tg\,\alpha = H$. Oder man halbirt PM und erhält Q (nach No. 7).

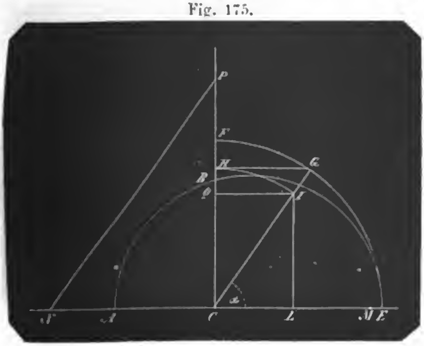
Oder nimm, um W zu construiren, $AC=2g$, die Normale $BC=g$, construire F wie vorher, zeichne aus F den Halbkreis ABE, so ist $CE=\frac{c^2}{2g}$; zeichne $\angle GCE=2\alpha$, oder wenn $2\alpha>90^\circ$, $=2\alpha-90^\circ$,

Fig. 174.



fälle die Normale EH, so ist $\angle HEC = 90-2\alpha$ oder $180-2\alpha$ und CH in beiden Fällen $=\frac{c^2}{2g}\sin 2\alpha$. Zeichne aus C den Bogen HL, so ist $CL=\frac{c^2}{2g}\sin 2\alpha = W$

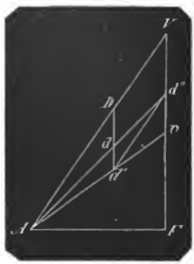
Fig. 175.



Will man zuerst H construiren, so nimm $AC=4g$, die Normale $CB=c$, zeichne durch A und B den Halbkreis ABE, $\angle GCE=\alpha$, zeichne aus C den Quadrant EF bis in die Verlängerung von CB, so ist $CF=CG=CE=\frac{c^2}{4g}$, zeichne die Normale GH auf CF, so ist $CH=CG\sin\alpha = \frac{c^2}{4g}\sin\alpha$, zeichne den Bogen HI, fälle die Normale IQ, so ist $CQ=CI\sin\alpha = \frac{c^2}{4g}\sin^2\alpha$, $QC=H$ und Q der Scheitel. Zugleich ist $QI=H\cot\alpha$. Fällt man also die Normale IL, nimmt $CM=CN=2CL$, so ist $NM=4H\cot\alpha=W$. Oder man nimmt $QP=CQ$, zieht von P aus $PN \parallel GC$, um N zu erhalten.

Hat man nun die halbe Wurfweite AF (s. zugleich Fig. 171), die größte Höhe Fv, so construirt man die Parabel am einfachsten nach dem Gesetz No. 7. Man zieht nämlich AV, nachdem man

Fig. 176.



$FV=2Fv$ gemacht hat, so ist $\angle VAF=\alpha$ und es verhalten sich die senkrechten Ordinaten wie die Quadrate, deren Abstände auf der Linie AV von A aus genommen. Um also die Ordinate Dd zu erhalten, ziehe man Av, $Dd' \parallel Vv$, $d'd'' \parallel AV$ und Ad''. Der Durchschnittspunkt d zwischen Dd' und Ad'' ist der zur Abscisse AD gehörende Parabelpunkt. Denn es soll sein $Vv : Dd = AV^2 : AD^2$ mithin $Dd = \frac{Vv\cdot AD^2}{AV^2}$.

Nun ist durch Construction

$AV : Vv = AD : Dd'$

also $Dd' = \frac{Vv \cdot AD}{AV}$

mithin $Dd = \frac{AD}{AV} \cdot Dd'$

Nun ist construirt $Vd'' = Dd'$
ferner $AV : Vd'' = AD : Dd$

woraus $Dd = \frac{AD}{AV} Vd'' = \frac{AD}{AV} Dd' = \frac{Vv \cdot AD^2}{AV^2}$

und d ein Punkt der Wurflinie.

Bahn einer Masse, welche durch die allein thätige Schwerkraft eines Weltkörpers bewegt wird. Im vor. Artikel ist die Schwere als constante Kraft angesehen worden; dies ist jedoch nur näherungsweise richtig, wenn der von der Schwerkraft ergriffene Körper nahe über der Erdoberfläche sich befindet und von dieser seine Bew. begrenzt wird. Die Schwerkraft wirkt, wie später nachgewiesen werden wird, in umgekehrtem Verhältnifs nach den Quadraten des zwischen dem angezogenen Körper und dem Sitz der Schwerkraft bestehenden Abstandes.

Jeder an der Erdoberfläche befindliche Körper ist um den Erdhalbmesser von c. 860 Meilen von dem Schwerpunkt des Erdkörpers entfernt, die Beschleunigung in dieser Entfernung beträgt (s. d. vor. Art.) $15\frac{5}{8}$ pr. Fufs; ein Körper von 860 Ml. über der Erdoberfläche, also bei zweifacher Entfernung, hat nur $\frac{1}{4}$ der Beschleunigung $= \frac{1}{4} \cdot 15\frac{5}{8} = 3\frac{29}{32}$ Fufs, d. h. er fällt in der ersten Secunde nur $3\frac{29}{32}$ Fufs, und wenn der Mond bei etwa 60 Erdhalbmessern Entfernung von der Erde frei auf dieselbe herabfiele, würde er in der ersten Sec. $\frac{15\frac{5}{8}}{60^2}$ Fufs oder in einer Minute $= 60$ Sec. nur $15\frac{5}{8}$ Fufs fallen.

Es ist also zunächst die Bahn zu untersuchen, welche ein Körper durchläuft, wenn dessen Beschleunigung in jedem Ort der Bahn stets dem Quadrate der Entfernung dieses Orts von einem bestimmten, in der Richtung seiner Bahn befindlichen Punkt (dem Centralpunkt) umgekehrt proportional ist.

Es sei A der Anfangspunkt der Bew., von dem aus also die Bew. von der Ruhe aus beginnt, C der Centralpunkt, der Abstand $AC = a$. Nach Verlauf von t Secunden befinde sich der Körper in B, der von demselben zurückgelegte Weg AB sei $= s$, seine Beschleunigung in $B = \gamma$, seine Geschwindigkeit daselbst $= v$, die Beschleunigung des Körpers in der Entfernung $= 1$ von C sei g'.

Man denke sich die Länge AB in n gleiche Theile getheilt, der erste Theil, von B ab gezählt, habe von C den Abstand a_1; der zweite den Abstand a_2; der $(m-1)$te den Abstand a_{m-1}; der $m$te den a_m; die Beschleunigungen in diesen Abständen seien γ_1; γ_2; γ_{m-1}; γ_m; die in diesen Punkten erlangten Geschwindigkeiten v_1; v_2; v_{m-1}; $v_m \ldots$; so ist nach der Voraussetzung

$$\gamma_1 = \frac{g'}{a_1^2};\ \gamma_{m-1} = \frac{g'}{a_{m-1}^2};\ \gamma_m = \frac{g'}{a_m^2};$$

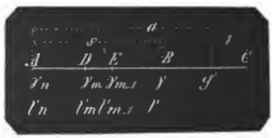
$$\gamma_n = \frac{g'}{a^2}$$

die Beschleunigungen nehmen also von A ab immer zu, und

$$\gamma_n < \gamma_{n-1} \ldots < \gamma_m < \gamma_{m-1} \ldots < \gamma_1 < \gamma$$

Wäre nun der Weg $a_m - a_{m-1} = \frac{s}{n}$ mit der kleineren Beschleunigung γ_m,

Fig. 177.



dieselbe constant gedacht, durchlaufen, so hat man nach der allgemeinen phoronomischen Formel:

$$S = \frac{C^2 - c^2}{4G}$$

für die gleichförmig beschleunigte Bewegung, in welcher S den Weg, C die Endgeschwindigkeit, c die Anfangsgeschw. und G die Beschleunigung bedeuten:

$$\frac{s}{n} = \frac{v_{m-1}^2 - v_m^2}{4\gamma_m}$$

und wäre derselbe Weg mit der gröfseren Beschleunigung γ_{m-1} durchlaufen:

$$\frac{s}{n} = \frac{v_{m-1}^2 - v_m^2}{4\gamma_{m-1}}$$

Da nun der Weg $\frac{s}{n}$ mit einer mittleren Beschleunigung durchlaufen wird, so ist der Weg $\frac{s}{n}$ das erste Mal zu grofs

und das zweite Mal zu klein ausgedrückt, also

$$\frac{s}{n} < \frac{v_{m-1}^2 - v_m^2}{4\gamma_m}$$

$$> \frac{v_{m-1}^2 - v_m^2}{4\gamma_{m-1}}$$

oder $v_{m-1}^2 - v_m^2 > 4\frac{s}{n} \cdot \gamma_m$

$$< 4\frac{s}{n} \cdot \gamma_{m-1}$$

Diese Vergleichung ist für jeden der n Abstände, also allgemein gültig, und deshalb hat man bei Zusammenstellung und Summirung sämmtlicher n Vergleichungen von $v_{n-1}^2 - v_n^2$ bis $v^2 - v_1^2$

$$\left.\begin{array}{l} v^2 - v_1^2 \begin{array}{l} < \gamma \\ > \gamma_1 \end{array} \\ v_1^2 - v_2^2 \begin{array}{l} < \gamma_1 \\ > \gamma_2 \end{array} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ v_{n-1}^2 - v_n^2 \begin{array}{l} < \gamma_{n-1} \\ > \gamma \end{array} \end{array}\right\} \times \frac{4s}{n}$$

wo links jedes additive Glied mit dem subtractiven der folgenden Vergleichung sich aufhebt, und als Summe nur übrig bleibt:

$$v^2 - v_n^2 < \frac{4s}{n}\left[\gamma + \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots \gamma_{n-1}\right]$$

$$> \frac{4s}{n}\left[\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots \gamma_n\right]$$

Mit beliebiger Zunahme von n können die beiden Gröſsen, welche $v^2 - v_n^2$ einschlieſsen, beliebig klein werden; man darf daher nur eine andere Gröſse aufsuchen, welche ebenfalls zwischen denselben Grenzen begriffen ist, welche dann $= v^2 - v_n^2$ ist.

Nun ist $\gamma_{m-1} = \frac{g'}{a_{m-1}^2} > \frac{g'}{a_m \cdot a_{m-1}}$

$$\gamma_m = \frac{g'}{a_m^2} \quad < \frac{g'}{a_m \cdot a_{m-1}}$$

und da $a \quad - a_{m-1} = \frac{1}{n} s$

so hat man

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{n} s\, \gamma_{m-1} > \\ \frac{1}{n} s\, \gamma_m \quad < \end{array}\right\} g' \frac{a_m - a_{m-1}}{a_m \cdot a_{m-1}}$$

oder

$$\left.\begin{array}{l} \frac{4}{n} s\, \gamma_{m-1} > \\ \frac{4}{n} s\, \gamma_m \quad < \end{array}\right. 4g'\left(\frac{1}{a_{m-1}} - \frac{1}{a_m}\right)$$

Schreibt man wieder die Vergleichungen von

$$\frac{4s}{n}\gamma > 4g'\left(\frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_1}\right)$$

$$\frac{4s}{n}\gamma_1 \left\{\begin{array}{l} > 4g'\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}\right) \\ < 4g'\left(\frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_1}\right) \end{array}\right.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{4s}{n}\gamma_{n-1} \left\{\begin{array}{l} > 4g'\left(\frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n}\right) \\ < 4g'\left(\frac{1}{a_{n-2}} - \frac{1}{a_{n-1}}\right) \end{array}\right.$$

$$\frac{4s}{n}\gamma_n < 4g'\left(\frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n}\right)$$

unter einander und bemerkt, daſs in jeder von beiden Vergleichungen rechts jedes subtractive Glied mit dem additiven der nächstfolgenden Vergleichung sich aufhebt, so hat man

$$\left.\begin{array}{l} \frac{4s}{n}(\gamma + \gamma_1 + \cdots \gamma_{n-1}) > \\ \frac{4s}{n}(\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots \gamma_n) < \end{array}\right\} 4g'\left(\frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_n}\right)$$

folglich ist die rechts gefundene Gröſse $4g'\left(\frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_n}\right)$ zwischen denselben Gröſsen eingeschlossen, wie die Gröſse $v^2 - v_n^2$ und es ist

$$v^2 - v_n^2 = 4g'\left(\frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_n}\right)$$

Es ist aber v_n die Geschw. in dem Punkt A, also der Voraussetzung nach = Null; ferner a_0 der Abstand zwischen B und C, also $= a - s$ und

$$a_n = AC = a$$

daher hat man

$$v^2 = 4g'\left(\frac{1}{a-s} - \frac{1}{a}\right) = 4g' \cdot \frac{s}{a(a-s)}$$

und

$$v = 2\sqrt{\frac{g's}{a(a-s)}} \qquad \text{I}$$

die Geschwindigkeit also durch die Figur ausgedrückt

in dem Punkt $D = 2\sqrt{g'}\sqrt{\frac{AD}{AC \cdot CD}}$

in dem Punkt $E = 2\sqrt{g'}\sqrt{\frac{AE}{AC \cdot CE}}$

2. Dieses Gesetz giebt ein Mittel, die während eines Weges s verflossene Zeit t zu bestimmen.

Es sei die Zeit $= \tau$, in welcher der kleine Weg DE (vor. Fig.) $= \frac{1}{n} s$, mit der Anfangsgeschw. v_m und der Endgeschw. v_{m-1} zurückgelegt wird. Da die Geschw. von A ab mit den Beschleunigungen fortwährend wachsen, so ist τ kleiner als die Zeit, in welcher der Weg DE mit der Anfangsgeschw. v_m, und gröfser als die Zeit, in welcher der Weg DE mit der Endgeschw. v_{m-1} gleichförmig zurückgelegt wird, indem also im ersten Fall die kleinere Geschw. v_m, im zweiten die gröfsere v_{m-1} während des Weges DE constant bleibt.

Nun ist nach No. I

$$v_m = 2\sqrt{g'} \cdot \sqrt{\frac{AD}{AC \cdot CD}}$$

$$v_{m-1} = 2\sqrt{g'} \cdot \sqrt{\frac{AE}{AC \cdot CE}}$$

und da bei gleichförmiger Bew. die Zeit = ist dem Quotient des Weges durch die Geschw., so ist die gröfsere Zeit $= \frac{DE}{v_m}$; die kleinere Zeit $= \frac{DE}{v_{m-1}}$; und man hat

$$\frac{DE}{2\sqrt{g'}\sqrt{\frac{AD}{AC \cdot CD}}} > \tau > \frac{DE}{2\sqrt{g'}\sqrt{\frac{AE}{AC \cdot CE}}}$$

oder

$$\frac{DE}{2\sqrt{g'}}\sqrt{\frac{AC \cdot CD}{AD}} > \tau > \frac{DE}{2\sqrt{g'}}\sqrt{\frac{AC \cdot CE}{AE}}$$

Mit Hülfe der Figur und nach No. 1 hat man

$AC = a$, $CE = CD - \frac{s}{n}$; $AE = AD + \frac{s}{n}$

mithin

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g'}} \cdot DE\sqrt{\frac{CD}{AD}} > \tau > \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g'}} \cdot DE\sqrt{\frac{CD - \frac{s}{n}}{AD + \frac{s}{n}}}$$

Mit beliebiger Vergröfserung von n, d. h. mit beliebiger Verkleinerung des Theilweges DE kann man die einschliefsenden Gröfsen einander beliebig nahe bringen, um so mehr also dem Werthe von τ. Kann man daher eine Gröfse finden, die ebenfalls zwischen den äufseren Gliedern eingeschlossen wird, so ist diese $= \tau$

Fig. 178.



Da nun die Geschw. v_m in D zu klein, die Geschw. v_{m-1} in E zu grofs ist, so giebt es jedenfalls zwischen D und E, etwa in F, eine Geschw. v'_m; mit welcher der Weg DE in der gesuchten Zeit $\tau' = \tau$ gleichförmig durchlaufen wird. Es ist dann

$$v'_m = 2\sqrt{g'}\sqrt{\frac{AF}{AC \cdot CF}}$$

und die Zeit $\tau' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g'}}\, DE\sqrt{\frac{CF}{AF}}$

Denn schreibt man in der obigen Vergleichung wieder CE für $CD - \frac{s}{n}$ und AE für $AD + \frac{s}{n}$, so ist

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g'}}\, DE\sqrt{\frac{CD}{AD}} > \tau > \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g'}}\, DE\sqrt{\frac{CE}{AE}}$$

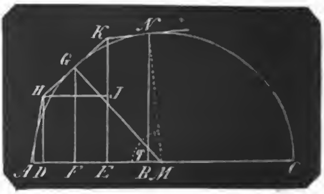
und man ersieht, dafs

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g'}}\, DE\sqrt{\frac{CF}{AF}}$$

zwischen den beiden äufseren Gliedern der Vergleichung begriffen ist.

Für jeden anderen Wegtheil zwischen AB wird die zugehörige Zeit τ_x auf dieselbe Weise bestimmt, und die Summe aller τ_x ist = der Zeit t, in welcher der Weg $AB = s$ zurückgelegt wird. Es kann aber der Weg τ' construirt werden wie folgt:

Fig. 179.



Multiplicirt man Zähler und Nenner der letzten $\sqrt{}$ mit CF, so hat man die Zeit

$$\tau' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}} \cdot DE \cdot \frac{CF}{\sqrt{AF \cdot CF}}$$

und da $\sqrt{AF \cdot CF}$ die Ordinate des Halbkreises über AC in F ist, so hat man (Fig. 179)

$$\tau' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}} \cdot DE \cdot \frac{CF}{FG}$$

Zieht man nun den Halbmesser MG, an G die Tangente HK, die Ordinaten DH, EK, und aus H die Linie $HI \mp AC$, so ist

$$\triangle HKI \infty \triangle GMF$$

und da $HI = DE$

$$DE : FG = HK : MG$$

woraus $\frac{DE}{FG} = \frac{HK}{MG}$

und $\tau' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}} \cdot CF \cdot \frac{HK}{MG}$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\, HK \cdot \frac{CM + MF}{MG}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\, HK\left(1 + \frac{MF}{MG}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\left[HK + \frac{HK \cdot MF}{MG}\right]$$

Da nun $MG : HK = MF : KI$

so ist $\tau' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\,[HK + KI]$

Die Zeit τ' für den Weg DE ist also = dem zwischen beiden in D und E rechtwinkligen Ordinaten befindlichen Tangentenstück + der Projection dieses Tangentenstücks auf der Endordinate; die Summe beider multiplicirt mit $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}$

Die Zeit $\tau_{,,}$ für jeden anderen Wegtheil wie DE wird aber eben so bestimmt, und folglich ist t = dem unveränderlichen Factor $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}$, multiplicirt mit 2 Summen, von denen die erste aus sämmtlichen Tangentenstücken besteht, die zwischen A und dem Endpunkt N der zu B gehörigen rechtwinkligen Ordinate BN begriffen sind, und die zweite aus sämmtlichen rechtwinkligen Projectionen derselben, welche Summe = der Ordinate BN ist.

Mit beliebiger Abnahme eines jeden der zwischen A und B begriffenen n Wegtheile wie DE kann aber jedes Tangentenstück dem zwischen den Ordinaten begriffenen Bogenstück beliebig nahe gebracht werden, mithin ist der Bogen AN die Werthgrenze der ersten Summe; folglich ist

$$t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\,(BN + \text{Bogen } AN)$$

Bezeichnet man $\angle AMN$ mit φ, so ist Bogen $AN = \frac{1}{2}AC \cdot \varphi = \frac{1}{2}a\varphi$

und da $\cos\varphi = \frac{MB}{MN} = \frac{\frac{1}{2}a - s}{\frac{1}{2}a} = \frac{a - 2s}{a}$

so ist Bogen $AN = \frac{1}{2}a\,arc\left(\cos = \frac{a-2s}{a}\right)$

$$BN = \sqrt{AB \cdot BC} = \sqrt{s(a-s)}$$

folglich $t =$

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\left[\frac{1}{2}a\,arc\cos\frac{a-2s}{a} + \sqrt{s(a-s)}\right]$$

3. Legt man die Schwerkraft der Erde zu Grunde, nämlich die Beschleunigung $g' = 15\frac{5}{8}$ preufs. Fufs $= g$ in Entfernung 860 Meilen $= r$ vom Erdmittelpunkt, so hat man, da in No. 1 und 2, in der Entfernung $= 1$, die Beschleunigung $= g'$ gesetzt worden,

$$1 : r^2 = g : g', \text{ woraus}$$
$$g' = r^2 g$$

und man hat aus No 1 und 2

$$v = 2r\sqrt{\frac{gs}{a(a-s)}} \qquad \text{I}$$

$$t = \frac{1}{2r}\sqrt{\frac{a}{g}}\left[\frac{1}{2}a\,arc\cos\frac{a-2s}{a} + \sqrt{s(a-s)}\right] \qquad \text{II}$$

Denkt man sich den Körper in der Entfernung a vom Mittelpunkt der Erde, so hat man die Geschw., mit welcher er die Erdoberfläche trifft, und die Zeit, in welcher dies geschieht, wenn man $s = a - r$ setzt, also

$$v = 2r\sqrt{\frac{g(a-r)}{ar}} = 2\sqrt{gr\left(1 - \frac{r}{a}\right)} \qquad \text{III}$$

und $t =$

$$\sqrt{\frac{a}{g}}\left[\frac{a}{4r}arc\cos\left(\frac{2r}{a} - 1\right) + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{r} - 1}\right] \text{IV}$$

4. Beispiel. Es soll die Zeit t gefunden werden, in welcher der Mond auf die Erde fallen würde, wenn dessen Centrifugalkraft zu wirken aufhörte, und die Geschwindigkeit v, mit welcher er die Erdoberfläche trifft.

Der Mond hat von dem Mittelpunkt der Erde je nach dem Ort seiner Bahn, in welchem er sich befindet, verschiedene Entfernungen, im Mittel und rund beträgt dieselbe $a = 50000$ Meilen, der Halbmesser r der Erde nahe 860 Meilen, der Weg $s = 50000 - 860 = 49140$ Meilen, die

Meile 24000 Fufs, $g = 15\frac{5}{8}$ Fufs: also nach Formel IV:

$$\sqrt{\frac{a}{g}} = \sqrt{\frac{50000 \cdot 24000}{15\frac{5}{8}}} = 8763{,}5609$$

$$\frac{a}{4r} = \frac{50000}{4 \cdot 860} = 14{,}53488$$

$$cos\left(\frac{2r}{a} - 1\right) = cos\left(\frac{2 \cdot 860}{50000} - 1\right)$$
$$= cos\,(-0{,}9656000$$
$$= -cos\,15^{\circ}\,4'\,19'' = cos\,164^{\circ}\,55'\,41''$$
$$arc\,164^{\circ}\,55'\,41'' = 2{,}8785376$$

daher

$$\frac{a}{4r}\,arc\,cos\left(\frac{2r}{a} - 1\right) = 14{,}53488 \times 2{,}8785376 = 41{,}83919$$

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{r} - 1} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{50000}{860} - 1} \qquad = \;\; 3{,}77954$$

$$\text{Summa} = 45{,}61873$$

$$t = 8763{,}5609 \times 45{,}61873 = 399782 \text{ Secunden.}$$
$$= 111 \text{ Stunden } 3 \text{ Minuten } 2 \text{ Secunden.}$$

Um die Endgeschw. v zu finden, hat man nach Formel III:

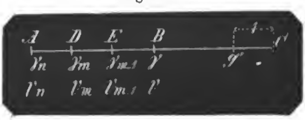
$$2\sqrt{gr\left(1 - \frac{r}{a}\right)} = 2\sqrt{\frac{125}{8}\,860 \cdot 24000 \cdot \frac{49140}{50000}} = 35606 \text{ Fufs}$$

also die Geschwindigkeit in der letzten Secunde ist nahe $1\frac{1}{2}$ Meilen.

5. Denkt man sich in der ruhenden Erde eine hinreichend weite cylindrische Oeffnung um den Durchmesser, durch welche der Mond hindurchfällt, so kann man fragen, mit welcher Geschw. er im Erdmittelpunkt ankommt, und wie er seine Bahn jenseits fortsetzt.

Hierbei ist zu bemerken, dafs die Beschleunigung im Innern der Erde, wie in dem Art.: Gravitation nachgewiesen werden wird, einem ganz anderen Gesetze folgt, dafs nämlich ein Körper, je näher er dem Mittelpunkt kommt, die über ihm befindliche Erdmasse immer gröfser wird, und eine immer gröfser werdende Anziehung nach entgegengesetzter Richtung auf ihn ausübt, so dafs die Summe der Anziehungskräfte nach vorwärts und nach rückwärts im Erdmittelpunkt = Null wird. Die Wirkung dieser Kräfte geschieht nach dem Gesetz, dafs die Beschleunigung mit der Annäherung des Körpers an den Erdmittelpunkt proportional abnimmt, und es ist die Bahn zu untersuchen, welche ein Körper durchläuft, wenn er in jedem Ort derselben stets der Entfernung dieses Orts von einem bestimmten, in der Richtung seiner Bahn befindlichen Punkt (dem Centralpunkt) proportional ist.

Fig. 180.



Es sei wieder, wie in No. 3 und Fig. 177, A der Anfangspunkt der Bew. von der Ruhe aus, C der Centralpunkt, $AC = a$. Nach t Secunden befinde sich der Massenpunkt in B, $AB = s$, seine Beschleunigung in $B = \gamma$; seine Geschwindigkeit in $B = v$; die Beschleunigung in der Entfernung $= 1$ von C sei g'. Theilt man, wie in Fig. 177, AB in n gleiche Theile, bezeichnet deren Entfernungen von C, die Beschleunigungen und Geschwindigkeiten in den Theilpunkten wie dort, so ist hier nach der Voraussetzung

$$\gamma_1 = g' \cdot a_1;\; \gamma_{m-1} = g' \cdot a_{m-1};$$
$$\gamma_m = g' \cdot a_m;\; \gamma_n = g' \cdot a$$

die Beschleunigungen nehmen also von A aus immer ab und

$$\gamma_n > \gamma_{n-1} \cdots > \gamma_m > \gamma_{m-1} \cdots > \gamma_1 > \gamma$$

und da $\gamma_n - \gamma_{n-1} = g'\left(a_n - a_{n-1}\right) = g'\,\dfrac{s}{n}$

eben so $\gamma_m - \gamma_{m-1} = g'\left(a_m - a_{m-1}\right) = g'\,\dfrac{s}{n}$

Die Differenz je zweier auf einander folgender Beschleunigungen also constant, so bilden die Beschleunigungen in den auf einander folgenden Theilpunkten von B nach A hin eine steigende arithmetische Progression von n Gliedern, deren erstes Glied γ und deren letztes γ_n ist. Eben so hat man, wie in No. 3, wenn der Weg $a_m - a_{m-1} = \dfrac{s}{n}$ mit der gröfseren unveränderten Beschleunigung γ_m durchlaufen wäre,

$$\frac{s}{n} > \frac{v_{m-1}^2 - v_m^2}{4\gamma_m}$$

und mit der kleineren unveränderten Beschleunigung γ_{m-1} durchlaufen.

$$\frac{s}{n} < \frac{v_{m-1}^2 - v_m^2}{4\gamma_{m-1}}$$

also

$$4\frac{s}{n}\gamma_{m-1} < v_{m-1}^2 - v_m^2 < 4\frac{s}{n}\gamma_m$$

und bei der Allgemeingültigkeit dieser Vergleichung für jeden der zwischen A und B belegenen n kleinen Wege

$$4\frac{s}{n}\gamma < v^2 - v_1^2 < 4\frac{s}{n}\gamma_1$$

$$4\frac{s}{n}\gamma_1 < v_1^2 - v_2^2 < 4\frac{s}{n}\gamma_2$$

$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$

$$4\frac{s}{n}\gamma_{n-2} < v_{n-2}^2 - v_{n-1}^2 < 4\frac{s}{n}\gamma_{n-1}$$

$$4\frac{s}{n}\gamma_{n-1} < v_{n-1}^2 - v_n^2 < 4\frac{s}{n}\gamma_n$$

daher summirt

$$4\frac{s}{n}(\gamma+\gamma_1+\cdots\gamma_{n-1})$$
$$< v^2 - v_n^2 < 4\frac{s}{n}(\gamma_1+\gamma_2+\cdots\gamma_n)$$

Da die einschliefsenden Klammergröfsen arithmetische Progressionen sind, so ist

$$\gamma+\cdots\gamma_{n-1} = \frac{\gamma+\gamma_{n-1}}{2}\cdot n$$

$$\text{und } \gamma_1+\cdots\gamma_n = \frac{\gamma_1+\gamma_n}{2}\cdot n$$

und da für die Bewegung von der Ruhe aus $v_n^2 = 0$ ist, so hat man

$$2s(\gamma+\gamma_{n-1}) < v^2 < 2s(\gamma_1+\gamma_n)$$

In den einschliefsenden Gröfsen ist

$$\gamma+\gamma_{n-1} < \gamma_1+\gamma_n$$

Nun ist $\gamma_1 > \gamma$ und $\gamma_n > \gamma_{n-1}$
daher ist $\gamma+\gamma_n > \gamma+\gamma_{n-1}$
und $\gamma+\gamma_n < \gamma_1+\gamma_n$
folglich ist
$2s(\gamma+\gamma_{n-1}) < 2s(\gamma+\gamma_n) < 2s(\gamma_1+\gamma_n)$
aber auch
$2s(\gamma+\gamma_{n-1}) < v^2 < 2s(\gamma_1+\gamma_n)$

Da nun mit beliebiger Zunahme von n die Differenz beider einschliefsenden Gröfsen beliebig klein werden kann, so ist

$$v^2 = 2s(\gamma+\gamma_n)$$

Nun ist $\gamma_n = g' \cdot a$ und $\gamma = g'(a-s)$
also $v^2 = 2g'(2a-s)s$
woraus $v = \sqrt{2g's(2a-s)}$
oder in Beziehung auf die Figur ausgedrückt

die Geschw. in $D = \sqrt{2g'AD(2AC-AD)}$
„ „ „ $E = \sqrt{2g'AE(2AC-AE)}$

6. Für $s = a$ hat man die Geschw. in dem Centralpunkt $C = a\sqrt{2g'}$

Da die Summe $s+(2a-s) = 2a$ beider Factoren des veränderlichen Products $s(2a-s)$ constant ist, folglich $s(2a-s)$ ein Maximum wird für $s = 2a-s$, also für $s = a$, so ist die Geschw. im Centralpunkt $C = a\sqrt{2g'}$ die gröfste Geschw. auf der ganzen Bahn von A bis C, die Geschwindigkeit von Null in A bis C also fortwährend im Zunehmen.

Setzt der Körper mit dieser Geschw. seine Bew. über C weiter fort, so nehmen, der Voraussetzung nach, weil C als Centralpunkt verbleibt, die Beschleunigungen wieder zu und zwar nach entgegengesetzter Richtung. Ist $CE' = CE$, $CD' = CD$, $CA' = CA$, so ist in E' nach der Richtung $E'C$ dieselbe Beschleunigung, wie sie in E nach der Richtung EC war, in D' nach $D'C$ hin, wie in D nach DC, in A' nach $A'C$, wie in A nach AC. Wenn

Fig. 181.



also die von A nach C abnehmenden Beschleunigungen von der Geschw. = Null in A ab das Maximum der Geschwindigkeit $= a\sqrt{2g'}$ in C hervorgebracht haben, so müssen die entgegengesetzt nach demselben Gesetz zunehmenden Beschleunigungen aus der Geschw. $a\sqrt{2g'}$ in C in A' wiederum die Geschw. $= 0$ hervorbringen; die Bew. ist also eine perpetuell pendulirende zwischen A und A'.

Es findet sich dieses Gesetz auch unmittelbar aus der Formel:

die Geschw. in D war $\sqrt{2g'AD(2AC-AD)}$

Setzt man, um die Geschw. in D' zu erhalten, $-g'$ für g, AD' für AD, so hat man

$$\sqrt{2(-g')AD'(2AC-AD')}$$
$$= \sqrt{-2g'(AA'-A'D')(AA'-AD')}$$
$$= \sqrt{-2g'(2AC-AD)A'D'}$$
$$= \sqrt{-2g'(2AC-AD)(-AD)}$$
$$= \sqrt{2g'AD(2AC-AD)}$$

und um die Geschw. in A' zu erhalten

$$\sqrt{2g'\cdot AA'(AA'-AA')} = \text{Null}.$$

7. Um die Zeit t zu finden, in welcher der Körper von A nach B den Weg s durchläuft, bezeichne man wieder, wie No. 2, die Zeit, in welcher ein Wegtheil,

z. B. $DE=\frac{s}{n}$ mit der Anfangsgeschw. v_m und der Endgeschw. v_{m-1} zurückgelegt wird, mit τ. Da nun die Geschw. von A nach B immerfort wachsen, so ist τ offenbar kleiner als die Zeit, in welcher DE mit der kleineren Geschw. v_m gleichförmig durchlaufen wird, und gröfser, als wenn DE mit der gröfseren Geschw. v_{m-1} gleichförmig durchlaufen würde.

Die erste Zeit ist

$$\frac{DE}{v_m}=\frac{DE}{\sqrt{2g'AD(AA'-AD)}}$$

die zweite ist

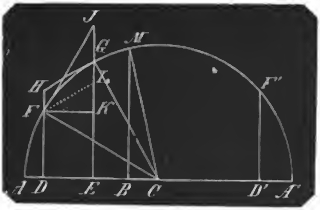
$$\frac{DE}{v_{m-1}}=\frac{DE}{\sqrt{2g'AE(AA'-AE)}}$$

und man hat die Vergleichung:

$$\frac{DE}{\sqrt{2g'AD(AA'-AD)}}>\tau>\frac{DE}{\sqrt{2g'AE(AA'-AE)}} \qquad (1)$$

Nun sind aber die Producte $AE(AA'-AE)$ u. s. w. offenbar = den Quadraten der Ordinaten in E u. s. w. bis zur Peripherie des über AA' gezeichneten Halbkreises.

Fig. 182.



Beschreibt man daher über AA' einen Halbkreis, zeichnet in D, E die Ordinaten DF, EG, so hat man

$$\frac{DE}{DF\sqrt{2g'}}>\tau>\frac{DE}{EG\sqrt{2g'}} \qquad (2)$$

Zeichnet man nun die Halbmesser CF, CG, errichtet in F, G auf CF und CG Normalen, also Tangenten FJ und GH bis in die Verlängerungen von EG und DF, zieht $FK \mp DE$, so ist, weil FK normal mit DF und FJ normal mit CF,

$$\triangle FKJ \sim \triangle FDC$$

und

$$CF:FJ=DF:FK=DF:DE$$

daher $\frac{FJ}{CF}=\frac{DE}{DF}$

eben so folgt $\frac{GH}{CG}=\frac{DE}{EG}$

Diese Werthe in die Vergleichung 2 substituirt und für $CF=CG=a$ gesetzt, giebt

$$\frac{FJ}{a\sqrt{2g'}}>\tau>\frac{GH}{a\sqrt{2g'}}$$

Zieht man die Linie $FL \mp HG$, so ist $FL=HG$, zugleich $FL<FJ$, und denkt man sich $DE=FK$ bis zum Verschwinden abnehmend, so dafs Bogen FG als gerade Linie betrachtet werden kann, so ist $FJ>FG>FL$. Da nun Bogen FG ebenfalls wie τ zwischen beiden Tangenten FJ und GH begriffen ist, und diese mit beliebiger Verminderung von DE einander beliebig nahe gebracht werden können, so ist $\tau=\frac{\text{Bogen } FG}{a\sqrt{2g'}}$

Was nun von τ zwischen D und E gilt, gilt ebenso von jedem andern τ_x zwischen jedem der n zwischen A und B befindlichen kleinen Wegtheile; die Summe sämmtlicher τ_x ($\lesssim t$) der zwischen A und B befindlichen Wegtheile ist aber $=t$, die Summe sämmtlicher Bogenstücke von A bis zum Endpunkt M der zu B gehörenden Ordinate BM ist Bogen AM; man hat also $t=\frac{\text{Bogen } AM}{a\sqrt{2g'}}$

Nun ist Bogen $AM=AC\cdot arc\cos\frac{BC}{CM}$

$$=a\cdot arc\cos\frac{a-s}{a}$$

mithin $t=\frac{arc\cos\frac{a-s}{a}}{\sqrt{2g'}}$

8. In dem Centralpunkt C, wo (nach No. 6) die Geschw. $=a\sqrt{2g'}$, hat man $s=a$, also $T=\frac{arc\cos(=0)}{\sqrt{2g'}}$

$$T=\frac{\pi}{2\sqrt{2g'}}$$

Setzt der Körper seine Bew. von C ab weiter fort, so beschreibt er, nach No. 6, den Weg mit abnehmender Geschw. bis zu dem Endpunkt A', wo dieselbe $=0$ ist, wie sie in A mit 0 angefangen hat, mithin braucht er für die Durchlaufung des Weges CA die Zeit T und für den Weg AA' die Zeit $2T=\frac{\pi}{\sqrt{2g'}}$ wie auch

die Formel lehrt, nach welcher die von A bis A' erforderliche Zeit

$$= \frac{arc\cos\frac{a-2a}{a}}{\sqrt{2g'}} = \frac{arc\cos(-1)}{\sqrt{2g'}} = \frac{\pi}{\sqrt{2g'}}$$

Ist $AD' = AD$, so ist nach No. 6 in D' dieselbe Geschw. wie in D; die Zeit für den Weg AD' ist also die, welche der Körper von A bis C gebraucht hat, + der, welche erforderlich ist, um den Körper aus der in C stattgehabten gröfsten Geschw. in die zu D gehörige geringere Geschw. zurückzuführen, in Summa also die doppelte Zeit für Durchlaufung des Weges AC — der für den Weg AD erforderlichen Zeit, d. h.

$$\frac{2\pi - arc\cos\frac{CD}{AC}}{\sqrt{2g'}} = \frac{\frac{1}{a}(\text{Bog.}AMA' - \text{Bg.}AF)}{\sqrt{2g'}}$$

$$= \frac{\frac{1}{a}\text{ Bogen } AMF'}{\sqrt{2g'}} = \frac{arc\cos\frac{CD'}{AC}}{\sqrt{2g'}}$$

welchen letzteren Ausdruck die Formel unmittelbar giebt.

9. Nimmt man für AA' den Durchmesser der Erde, wie dies auch ad 5 die vorstehende Aufgabe veranlafst hat, so ist in der Entfernung a (jetzt r), nämlich in A die Beschleunigung $= g = 15\frac{5}{8}$ Fufs, und $g : g' = r : 1$

woraus $g' = \frac{g}{r}$

Dann ist die Geschw. (s. No. 5) in dem Augenblick, wo von A nach dem Mittelpunkt C der Erde hin der Weg s durchlaufen ist,

$$v = \sqrt{2gs\frac{2r-s}{r}}$$

Die Geschw. im Mittelpunkt C der Erde (s. No. 6):

$$v = \sqrt{2gr}$$

Die Zeit, in welcher der Körper den Weg s von A aus nach C hin zurückgelegt hat (s. No. 7):

$$t = \sqrt{\frac{r}{2g}} \cdot arc\cos\frac{r-s}{r}$$

und die Zeit, nach welcher er von A aus in dem Mittelpunkt C der Erde eintrifft, (s. No. 8):

$$T = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{r}{2g}}$$

und die Zeit, in welcher der Körper den ganzen Durchmesser der Erde durchläuft,

$$2T = \pi\sqrt{\frac{r}{2g}}$$

Für die Geschw. = Null in A ist die Geschw. im Erdmittelpunkt

$$V = \sqrt{2\frac{125}{8} \cdot 860 \cdot 24000} = 25397 \text{ Fufs}$$

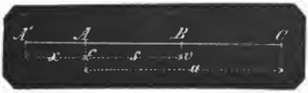
und die Zeit

$$2T = 3{,}14159\ldots\sqrt{\frac{860 \cdot 24000}{2} \cdot \frac{8}{125}}$$
$$= 2553 \text{ Secunden}$$
$$= 42 \text{ Minuten } 33 \text{ Secunden}$$

wonach der Körper denselben Weg in derselben Zeit wieder zurückkehrt.

10. In No. 5 ist angenommen, dafs der Mond durch die Erdhöhlung hindurch falle, dieser kommt aber in A mit schon bedeutender Geschw. an. Dies führt auf die Untersuchung, wie V in C und T sich ändern, wenn ein Körper von A aus mit der Geschw. c statt von der Ruhe aus durch die Erde zu fallen beginnt.

Fig. 183.



Hat der Körper im Anfangspunkt A seiner Bew. die Geschw. c, so sei A_1 der Punkt in der Entfernung $A_1A = x$ von A_1, in welchem der Körper von der Ruhe aus nach c hin sich bewegen müfste, um nach Durchlaufung des Weges x die Geschw. c zu erlangen. Dann findet man x unmittelbar aus der Formel No. 5:

$$v = \sqrt{2g's(2a-s)}$$

wenn man c für v, x für s und $(x+a)$ für a setzt. Und es ist:

$$c = \sqrt{2g'x[2(a+x)-x]}$$

also $c^2 = 2g'x(2a+x)$

woraus $x = -a + \sqrt{a^2 + \frac{c^2}{2g'}}$

Man erhält nun v, die Geschw. in B, aus derselben Formel, wenn man $(s+x)$ für s und $(a+x)$ für a setzt, nämlich

$$v = \sqrt{2g'(s+x)[2(a+x)-(s+x)]}$$
$$= \sqrt{2g'(s+x)(2a+x-s)}$$
$$= \sqrt{2g'[(2a+x)x + 2as - s^2]}$$
$$v = \sqrt{2g's(2a-s)+c^2} \qquad (1)$$

Nun findet man t für den Weg $AB = s$, wenn man in die Formel No. 7:

$$t = \frac{arc\cos\frac{a-s}{a}}{\sqrt{2g'}}$$

zuerst $a+x$ für a und x für s setzt

hierauf $a+x$ für a beibehält, $s+x$ für s setzt und den ersten Werth von dem zweiten abzieht, also:

$$t = \frac{arc\cos\frac{a+x-(s+x)}{a+x}}{\sqrt{2g'}} - \frac{arc\cos\frac{a+x-x}{a+x}}{\sqrt{2g'}}$$

$$= \frac{arc\cos\frac{a-s}{a+x} - arc\cos\frac{a}{a+x}}{\sqrt{2g'}}$$

$$= \left(arc\cos\frac{a-s}{\sqrt{a^2+\frac{c^2}{2g'}}} - arc\cos\frac{a}{\sqrt{a^2+\frac{c^2}{2g'}}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2g'}} \qquad (2)$$

11. Werden nun die beiden Formeln No. 10 für v und t auf die Erde bezogen, wie in No. 9, so erhält man für den Weg bis zum Mittelpunkt C derselben $a = r$, $s = r$,

$$g' = \frac{g}{r}$$

$$V = \sqrt{2gr + c^2} \qquad (1)$$

$$T = \sqrt{\frac{r}{2g}}\left[arc\cos 0 - arc\cos\frac{r}{\sqrt{r^2+\frac{c^2 r}{2g}}}\right]$$

$$T = \sqrt{\frac{r}{2g}}\left(\frac{\pi}{2} - arc\cos\sqrt{\frac{1}{1+\frac{c^2}{2gr}}}\right)$$

Setzt man in die Formel I, No. 10, $s = 2a$, so erhält man $v = \sqrt{0 + c^2} = c$; fällt also ein Körper mit der Anfangsgeschw. c durch die Erde, so erhält er an der entgegengesetzten Oberfläche dieselbe Anfangsgeschw. als Endgeschw., demnach ist

$$2T = 2\sqrt{\frac{r}{2g}}\left(\frac{\pi}{2} - arc\cos\sqrt{\frac{1}{1+\frac{c^2}{2gr}}}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{r}{2g}}\left(\pi - 2\,arc\cos\sqrt{\frac{1}{1+\frac{c^2}{2gr}}}\right)$$

Nun war (No. 4) die Geschw., mit welcher der Mond die Erde trifft, $= 35606$ Fufs.

Nach No. 9 ist $\pi\sqrt{\frac{r}{2g}} = 2553$ Sec.

hiervon ist abzuziehen

$$2\sqrt{\frac{r}{2g}}\,arc\cos\sqrt{\frac{1}{1+\frac{c^2}{2gr}}}$$

$$= 2\sqrt{\frac{860\cdot 24000}{2\cdot 15\frac{5}{8}}}\cdot arc\cos\sqrt{\frac{1}{1+\frac{35606^2}{2\cdot 15\frac{5}{8}\cdot 860\cdot 24000}}}$$

$log\ 2\cdot 15\frac{5}{8}\cdot 860\cdot 24000 = 8{,}8095598$
$log\ 35606^2 = 9{,}1030464$
Differenz $= 0{,}2934866$
Quotient $= 1{,}96556$
$\sqrt{\frac{1}{41{,}96556}} = 0{,}5806930$
$= \cos 54^\circ\, 30'\, 30''$
$arc\cos 54^\circ\, 30'\, 30'' = 0{,}9512190$
$2\,arc\cos 54^\circ\, 30'\, 30'' = 1{,}9024380$
$log\sqrt{\frac{860\cdot 24000}{2\cdot 15\frac{5}{8}}} = 2{,}9049298$
$log\ 1{,}902438 = 0{,}2793105$
Summa 3,1842403
Numerus ab mit 1528 S.
Zeit, in welcher der Mond durch die Erde fällt 1025 S.
= 17 Minuten 5 Secunden.

Nach No. 4 fällt der Mond bis auf die Oberfläche der Erde 111 Std. 3 Min. 2 Sec.
bis zum Mittelpunkt noch — „ 8 „ $32\frac{1}{2}$ „
in Summa 111 Std. 11 Min. $34\frac{1}{2}$ Sec.

Er hat dort sein Maximum von Geschwindigkeit (No. 11, Formel 1)

$$\sqrt{2\cdot\frac{125}{8}\cdot 860\cdot 24000 + 35606^2} = 43735 \text{ Fufs}$$

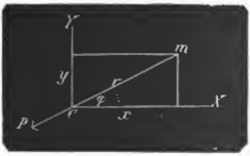
Mit dieser Geschw. entfernt sich der Mond von dem Mittelpunkt der Erde, kommt mit der verminderten Geschw. 356006 Fufs an die entgegengesetzte Erdoberfläche und geht von dort weiter, bis in Entfernung von 50000 Meilen seine Geschw. = Null wird, und fängt seine pendulirende Bew. von Neuem an.

Bahn der Weltkörper. (Allgemeine Untersuchung.) In dem Art.: „Attraction", No. 4 ist die Entstehung der Bahnen von Weltkörpern hypothetisch, in dem Art.: „Bahn", No. 4 und 5 dynamisch und geometrisch im Allgemeinen dargestellt. Aus dem Letzteren ist zu ersehen, dafs die genauere Einsicht in die Sache auf der Auflösung folgender Aufgabe beruht.

Die translatorische Bew. eines Körpers in einer Ebene wird dadurch beschränkt, dafs eine in einem und demselben Punkt befindliche Kraft auf den Körper anziehend wirkt, deren Gröfse mit dem Quadrat ihres Abstandes von dem Körper umgekehrt proportional ist; die Bahn des Körpers zu bestimmen.

Bei der folgenden Auflösung ist zu bemerken, dafs die Entwickelung und Begründung der hier als bekannt vorausgesetzten phoronomischen und dynamischen Fundamentalgesetze und Formeln den Artikeln: „Bewegung etc." vorbehalten bleiben müssen.

Fig. 184.



Es sei C der Sitz der anziehenden Kraft (der Centralpunkt), m die sich bewegende Masse; in der Entfernung R der Masse von C sei die auf dieselbe wirkende Kraft $= P$, nach Verlauf der Zeit t habe m den Abstand r von C, so ist der Voraussetzung nach in diesem Augenblick die bewegende Kraft $= \frac{R^2}{r^2} P$ und die beschleunigende Kraft $= \frac{R^2}{r^2} \cdot \frac{P}{m}$ (oder wenn man die Constante $\frac{R^2 P}{m} = A$ setzt) $= \frac{A}{r^2}$

X, Y, zwei durch C gerichtete rechtwinklige Coordinatenaxen geben also (siehe „Bahnbestimmung aus relativen Bewegungen") die beschleunigende Seitenkraft nach $X = \frac{A}{r^2} \cdot \frac{x}{r} = A \frac{x}{r^3}$

nach $Y = \frac{A}{r^2} \cdot \frac{y}{r} = A \frac{y}{r^3}$

wenn x und y die in X und Y liegenden zu r gehörenden Ordinaten bezeichnen.

Bedeutet nun G die Beschleunigung der Massen-Einheit gegen die anziehende Kraft-Einheit in der Entfernung R beider, so ist die Beschleunigung der Masse m in der Entfernung $R = G \frac{P}{m}$, d. h. der Weg, den die Masse m in der Entfernung R von der Ruhe aus in geradliniger Bewegung nach P hin gerichtet in der ersten Secunde zurücklegen würde; die Beschleunigung der Masse m in der Entfernung r von $P = G \frac{R^2}{r^2} \cdot \frac{P}{m} = G \frac{A}{r^2}$, und die Seitenbeschleunigungen nach den Richtungen CX und CY unter den Ordinaten x und y

$$= GA \frac{x}{r^3} \text{ und } GA \frac{y}{r^3}$$

Da aber mit dem Wachsthum der Zeit zugleich die Ordinaten wachsen, während die denselben entgegengesetzt wirkenden Kräfte immerfort abnehmen, so sind die Beschleunigungen negativ, und man hat die Seitenbeschleunigungen $-GA \frac{x}{r^3}$ und $-GA \frac{y}{r^3}$

Nun ist phoronomisch allgemein

$$G = \tfrac{1}{2} \frac{\partial^2 s}{\Delta t^2}$$

daher hat man

$$-GA \frac{x}{r^3} = \tfrac{1}{2} \frac{\partial^2 x}{\Delta t^2} \qquad (1)$$

$$-GA \frac{y}{r^3} = \tfrac{1}{2} \frac{\partial^2 y}{\Delta t^2} \qquad (2)$$

indem x und y als die zu dem wirklichen Weg r der Masse gehörenden Seitenwege betrachtet werden müssen. Die erste Gl. mit $4 \frac{\partial x}{\Delta t}$, die zweite mit $4 \frac{\partial y}{\Delta t}$ multiplicirt, beide Gl. addirt, giebt

$$2 \frac{\partial^2 x}{\Delta t^2} \cdot \frac{\partial x}{\Delta t} + 2 \frac{\partial^2 y}{\Delta t^2} \cdot \frac{\partial y}{\Delta t}$$
$$= -\frac{4\,GA}{r^3} \left(x \frac{\partial x}{\Delta t} + y \frac{\partial y}{\Delta t} \right)$$

und integrirt

$$\left(\frac{\partial x}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\Delta t}\right)^2=-4GA\int\frac{x\frac{\partial x}{\Delta t}+y\frac{\partial y}{\Delta t}}{r^3}\cdot\partial t \qquad (3)$$

Um das Integral auf r statt auf t als Urveränderlichen nehmen zu könneu, hat man aus der Figur:

$$r^2=x^2+y^2$$

dies differenzirt und mit 2 dividirt, giebt

$$r\frac{\partial r}{\Delta t}=x\frac{\partial x}{\Delta t}+y\frac{\partial y}{\Delta t}$$

Diesen Werth in Gl. 3 substituirt:

$$\left(\frac{\partial x}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\Delta t}\right)^2=-4GA\int\frac{\frac{\partial r}{\Delta t}}{r^2}\cdot\partial t$$

$$=-4GA\int r^{-2}\cdot\partial r$$

mithin

$$\left(\frac{\partial x}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\Delta t}\right)^2=+\frac{4GA}{r}+(K=\text{Const.}) \qquad (4)$$

Um die Gl. zu vereinfachen und statt der beiden Ordinaten x und y nur eine Veränderliche zu erhalten, setze man den Bogen für den Halbmesser $=1$ zwischen den Schenkeln des $\angle rx=\varphi$, so hat man

$$x=r\cos\varphi \qquad (5)$$

$$y=r\sin\varphi \qquad (6)$$

Beide Gl. nach t differenzirt:

$$\frac{\partial x}{\Delta t}=-r\sin\varphi\frac{\partial\varphi}{\Delta t}+\cos\varphi\frac{\partial r}{\Delta t} \qquad (7)$$

$$\frac{\partial y}{\Delta t}=r\cos\varphi\frac{\partial\varphi}{\Delta t}+\sin\varphi\frac{\partial r}{\Delta t} \qquad (8)$$

Diese beiden Gl. quadrirt und addirt, geben die Gl.

$$\left(\frac{\partial x}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\Delta t}\right)^2=r^2\left(\frac{\partial\varphi}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\partial r}{\Delta t}\right)^2$$

Mithin hat man mit Hülfe von Gl. (4)

$$r^2\left(\frac{\partial\varphi}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\partial r}{\Delta t}\right)^2=\frac{4GA}{r}+K \qquad (9)$$

Es kommt nun darauf an, aus dieser Gl. die Zeit t zu eliminiren, um eine Differenzialgleichung zwischen r und φ zu erhalten, d. h. eine Polargleichung der zu findenden Bahn, indem r der nach Verlauf der Zeit t bestehende Radius vector ist.

Multiplicirt man aber die beiden Beschleunigungsgleichungen (1) und (2), die erste mit y, die zweite mit x, und subtrahirt, so erhält man

$$\tfrac{1}{2}\left(y\frac{\partial^2 x}{\Delta t^2}-x\frac{\partial^2 y}{\Delta t^2}\right)=0 \qquad (10)$$

mithin ist

$$\int\left[y\frac{\partial^2 x}{\Delta t^2}-x\frac{\partial^2 y}{\Delta t^2}\right]=\text{einer Constante.}$$

Nach der allgemeinen Integralformel

$$\int\varphi x\cdot fx\cdot\partial x=\varphi x\int fx\cdot\partial x-\int\left[\frac{\partial\varphi x}{\Delta x}\int fx\cdot\partial x\right]$$

ist aber

$$\int y\frac{\partial^2 x}{\Delta t^2}\partial t=y\int\frac{\partial^2 x}{\Delta t^2}\partial t-\int\left[\frac{\partial y}{\Delta t}\cdot\int\frac{\partial^2 x}{\Delta t^2}\partial t\right]$$

also

$$\int y\frac{\partial^2 x}{\Delta t^2}\partial t=y\frac{\partial x}{\Delta t}-\int\left(\frac{\partial y}{\Delta t}\cdot\frac{\partial x}{\Delta t}\right)\partial t$$

Eben so

$$\int x\frac{\partial^2 y}{\Delta t^2}\partial t=x\frac{\partial y}{\Delta t}-\int\left(\frac{\partial x}{\Delta t}\cdot\frac{\partial y}{\Delta t}\right)\partial t$$

folglich beide letzten Gl. von einander subtrahirt

$$\int\left[y\frac{\partial^2 x}{\Delta t^2}-x\frac{\partial^2 y}{\Delta t^2}\right]\partial t=y\frac{\partial x}{\Delta t}-x\frac{\partial y}{\Delta t}=\text{Constante.}$$

Substituirt man hierin für y, x, $\frac{\partial y}{\Delta t}$, $\frac{\partial x}{\Delta t}$ aus den Gl. (5) bis (8) die Polarwerthe, so erhält man

$$-\tfrac{1}{2}r^2\frac{\partial\varphi}{\Delta t}=\text{Constante}$$

oder

$$\tfrac{1}{2}r^2\frac{\partial\varphi}{\Delta t}=-\text{Constante}$$

und wenn man diese subtractive Constante mit k bezeichnet

$$\frac{\partial\varphi}{\Delta t} = \frac{2k}{r^2} \qquad (11)$$

Multiplicirt man beiderseits mit $\frac{\partial r}{\Delta\varphi}$ so hat man

$$\frac{\partial r}{\Delta\varphi}\cdot\frac{\partial\varphi}{\Delta t} = \frac{2k}{r^2}\cdot\frac{\partial r}{\Delta\varphi}$$

woraus

$$\frac{\partial r}{\Delta t} = \frac{2k}{r^2}\,\frac{\partial r}{\Delta\varphi} \qquad (12)$$

Setzt man die in Gl. (11) und (12) gefundenen Werthe für $\frac{\partial\varphi}{\Delta t}$ und $\frac{\partial r}{\Delta t}$ in Gl. (9), so erhält man die von t unabhängige Gleichung

$$\frac{4k^2}{r^2} + \frac{4k^2}{r^4}\left(\frac{\partial r}{\Delta\varphi}\right)^2 = \frac{4GA}{r} + K$$

Dividirt man diese Gl. mit 4, setzt $\frac{K}{4} = C$ und ordnet nach $\frac{1}{r}$, so hat man

$$\frac{k^2}{r^4}\left(\frac{\partial r}{\Delta\varphi}\right)^2 + \frac{k^2}{r^2} - \frac{GA}{r} - C = 0 \qquad (13)$$

Setzt man nun, um leichter integriren zu können

$$r = \frac{1}{z} = z^{-1}$$

so ist

$$\frac{\partial r}{\Delta\varphi} = -z^{-2}\,\frac{\partial z}{\Delta\varphi} = \frac{-\frac{\partial z}{\Delta\varphi}}{z^2}$$

Diese Werthe für r und $\frac{\partial r}{\Delta\varphi}$ in Gl. (13) gesetzt und reducirt, giebt

$$k^2\left(\frac{\partial z}{\Delta\varphi}\right)^2 + k^2 z^2 - GAz - C = 0 \qquad (14)$$

woraus

$$\left(\frac{\partial z}{\Delta\varphi}\right)^2 = \frac{C}{k^2} + \frac{GAz}{k^2} - z^2$$

Hieraus die $\sqrt[2]{\ }$ gezogen und in 1 dividirt:

$$\frac{\partial\varphi}{\Delta z} = \frac{1}{\sqrt{\frac{C}{k^2} + \frac{GAz}{k^2} - z^2}}$$

woraus

$$\varphi = \int \frac{1}{\sqrt{\frac{C}{k^2} + \frac{GAz}{k^2} - z^2}}\,\partial z \qquad (15)$$

Nach der allgemeinen Integralformel

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{a + bx - cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\,arc\,sin\,\frac{-b + 2cx}{\sqrt{4ac + b^2}}$$

hat man

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{1}}\,arc\,sin\,\frac{-\frac{GA}{k^2} + 2z}{\sqrt{4\frac{C}{k^2} + \frac{G^2A^2}{k^4}}} + (\text{Cnst} = C^1)$$

$$= arc\,sin\,\frac{-GA + 2k^2 z}{\sqrt{4Ck^2 + G^2A^2}} + C'$$

Oder wenn man (da $GA = G\frac{R^2 P}{m}$ ist und $2k^2 z = \frac{2k^2}{r}$ mit dem Wachsthum von r gegen die Constante GA immerfort abnimmt) das constante Glied GA additiv und das variable $2k^2 z$ subtractiv nimmt

$$\varphi = arc\,cos\,\frac{GA - 2k^2 z}{\sqrt{4Ck^2 + G^2A^2}} + C'$$

Setzt man $C' = \alpha$, so erhält man

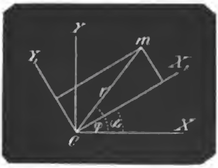
$$cos\,(\varphi - \alpha) = \frac{GA - 2k^2 z}{\sqrt{4Ck^2 + G^2A^2}}$$

Für z seinen Werth $\frac{1}{r}$ gesetzt und die Nenner fortgeschafft

$$r\left[GA - \sqrt{4Ck^2 + G^2A^2}\cdot cos\,(\varphi - \alpha)\right] = 2k^2 \qquad (16)$$

als Polargleichung der gesuchten Bahncurve.

Fig. 185.



Um diese in eine Coordinatengleichung zu verwandeln, nehme man zur neuen Coordinatenaxe der X' die von dem Centralpunkt C aus gezogene gerade Linie, welche mit der ersten Axe der X den $\angle\,\alpha$ nach M hin bildet und die Axe der Y' rechtwinklig darauf. Alsdann ist

$$x_1 = r\,cos\,(\varphi - \alpha)$$
$$y_1 = r\,sin\,(\varphi - \alpha)$$
$$r = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

mithin

$$\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\left[GA - \sqrt{4Ck^2 + G^2A^2}\cdot\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}\right] = 2k^2$$

oder

$$GA\sqrt{x_1^2+y_1^2} = 2k^2 + \sqrt{4Ck^2+G^2A^2}\cdot x_1 \qquad (17)$$

Die Gleichung quadrirt, reducirt, geordnet, und y; x für y_1; x_1 gesetzt:

$$y^2 - \frac{4Ck^2}{G^2A^2}x^2 - \frac{4k^2}{G^2A^2}x\sqrt{4Ck^2+G^2A^2} - \frac{4k^4}{G^2A^2} = 0 \qquad (18)$$

2. Die Bahn der Masse m erweist sich durch Gl. (18) als einen Kegelschnitt, für den die rechtwinkligen Ordinaten y durch die Abscissen x ausgedrückt sind, welche in dem Centralpunkt C ihren Anfangspunkt haben.

Da die Gl. ein absolutes Glied $\frac{4k^4}{G^2A^2}$ hat, so liegt der Centralpunkt als Anfangspunkt der Abscissen nicht in der Curve selbst.

Da für $x=0$, $y^2=\frac{4k^4}{G^2A^2}$, also $y=\pm\frac{2k^2}{GA}$ in zwei gleich grofsen und entgegengesetzt gerichteten Längen ausgesprochen ist, so liegt der Centralpunkt in einem Durchmesser des Kegelschnitts, und, da zugleich die Coordinaten normal auf einander sind, mit der Abscissenlinie selbst in der Axe des Kegelschnitts.

Gl. (17) mit GA dividirt, giebt

$$\sqrt{x^2+y^2} = \frac{2k^2}{GA} + \frac{x}{GA}\sqrt{4Ck^2+G^2A^2}$$

Nun ist $\sqrt{x^2+y^2}$ offenbar der Abstand der Masse m vom Centralpunkt C, durch den die Abscissenlinie gelegt ist. Dieser Abstand ist aber ganz allgemein, wie die Gl. zeigt, rational durch die Abscisse x ausgedrückt, und es hat nur ein Punkt innerhalb einer Kegelschnittsebene als Anfangspunkt der Abscissen diese Eigenschaft, nämlich der Brennpunkt. Demnach ist der Sitz der anziehenden Kraft als Centralpunkt der Bewegung der Brennpunkt des Kegelschnitts.

3. Es soll nun der Kegelschnitt selbst näher ermittelt werden, in welchem die Bahn der Masse besteht, und man ersieht, dafs derselbe sowohl in Art als auch in Form von den beiden Constanten C und k abhängt. Die zunächst wichtigste dieser beiden Bedingungsgröfsen ist offenbar die Constante C, weil diese, in einfacher Potenz unter der $\sqrt[2]{}$ stehend, durch einen negativen Werth eine Bahn ganz unmöglich machen kann, während k^2 daselbst immer positiv ist.

a) Ist C negativ, so ist eine Bahn nur möglich, wenn

$$C \leqq \frac{G^2A^2}{4k^2}$$

Für den ersten Fall, dafs $C < \frac{G^2A^2}{4k^2}$ wird das zweite Glied der Gl. (18) positiv und die Gl. ist von der Form

$$y^2+Ex^2-Bx-D=0$$

Für eine positive Abscisse x kann x nun so grofs genommen werden, dafs

$$Ex^2 > Bx+D$$

Dann wird y^2 negativ, also unmöglich.

b) Für eine negative Abscisse bleibt Ax^2 positiv, Bx wird positiv und es kann x wieder so grofs genommen werden, dafs

$$Ex^2+Bx > D$$

wo dann wieder y^2 negativ und unmöglich wird.

c) Für $Ex^2=Bx+D$ und für $E\cdot(-x)^2 - B\cdot(-x) = D$ wird $y=0$; $Ex^2 < Bx+D$ und $E\cdot(-x)^2 - B\cdot(-x) < D$ geben reelle Werthe für y. Da nun zugleich für $x=0$ ein reeller Werth für y, nämlich $y=\pm\frac{2k^2}{GA}$ entsteht, so ist die Abscisse nach beiden Richtungen in ihrer Länge beschränkt; d. h. die Bahn ist eine geschlossene Curve, also eine Ellipse oder ein Kreis.

Die Länge der Abscisse für beide Endpunkte oder für die Scheitel giebt Gl. (18) für $y=0$, nämlich

$$Cx^2 - x\sqrt{-4Ck^2+G^2A^2} - k^2 = 0$$

woraus

$$x = \frac{1}{2C}\left[\sqrt{-4Ck^2+G^2A^2} \pm GA\right]$$

zwei Abscissen, die eine positiv, die andere negativ, beide von ungleicher Länge, die Curve also eine Ellipse. Die absolute Länge der negativen Abscisse ist

$$\frac{1}{2C}\left[GA - \sqrt{-4Ck^2+G^2A^2}\right]$$

die der positiven

$$\frac{1}{2C}\left[GA + \sqrt{-4Ck^2+G^2A^2}\right]$$

Die absolute Summe beider giebt die Länge der grofsen Axe $\frac{GA}{C}$

Die Differenz beider die Excentricität (die Entfernung beider Brennpunkte)

$$\frac{1}{C}\sqrt{-4Ck^2+G^2A^2}$$

Je gröfser C ist, desto kleiner wird die Excentricität, desto mehr nähert sich die Ellipse dem Kreise; je kleiner C ist, desto kleiner ist die negative Abscisse, d. h. desto kleiner die Entfernung des Brennpunkts vom Scheitel, desto gröfser der Unterschied zwischen beiden Abscissen, und desto gestreckter die Ellipse.

4. Für den zweiten Fall, dafs $C = \frac{G^2 A^2}{4 k^2}$ wo die Excentricität der eben gedachten Ellipse = 0 wird, die Curve also ein Kreis ist, hat man dies Ergebnifs unmittelbar aus Gl. (18), denn diese verwandelt sich in

$$y^2 + x^2 - \frac{4 k^4}{G^2 A^2} = 0$$

woraus

$$y = \pm \sqrt{\left(\frac{2 k^2}{G A}\right)^2 - x^2}$$

zwei Ordinaten, beide von gleicher Länge und in entgegengesetzter Richtung.

5. Ist in Gl. (18) C positiv, also

$$\sqrt{4 Ck^2 + G^2 A^2}$$

immer möglich, so ist für jede positive und jede negative Abscisse x, die Ordinate y reell, die Curve also eine Hyperbel, sofern diese 2 Aeste hat.

Sucht man die Abscisse x, für welche die Ordinate $y = 0$ wird, so erhält man aus Gl. (18) nachdem man reducirt hat:

$$-x^2 - x \frac{\sqrt{4 Ck^2 + G^2 A^2}}{C} - \frac{k^2}{C} = 0$$

woraus hervorgeht, dafs x nicht positiv sein kann, wie auch die Natur der Hyperbel bedingt, indem von einem Brennpunkte aus die Scheitel beider Aeste der fortschreitenden Richtung der Abscissen entgegengesetzt liegen.

Für ein negatives x hat man

$$-x^2 + x \frac{\sqrt{4 Ck^2 + G^2 A^2}}{C} - \frac{k^2}{C} = 0$$

oder

$$x^2 - \frac{x}{C}\sqrt{4 Ck^2 + G^2 A^2} + \frac{k^2}{C} = 0$$

woraus

$$x = \frac{1}{2C}\left[\sqrt{4 Ck^2 + G^2 A^2} \pm GA\right]$$

also 2 Längen für beide Scheitel. Die Differenz beider Längen $\frac{GA}{C}$ ist offenbar die Entfernung beider Scheitel von einander, die Hauptaxe der beiden Hyperbeln; die kleinere Abscisse

$$\frac{1}{2C}\left[\sqrt{4 Ck^2 + G^2 A^2} - GA\right]$$

die Entfernung des Scheitels vom Brennpunkt desselben Astes.

6. Für $C = 0$ in der Gl. (18) verwandelt sich diese in

$$y^2 - \frac{4 k^2}{GA} x - \frac{4 k^4}{G^2 A^2} = 0$$

die Bahn ist eine Parabel.

$$y = \pm \frac{2 k}{GA}\sqrt{k^2 + GAx}$$

Für jedes positive x giebt es also zwei gleiche entgegengesetzt liegende Ordinaten y; die negativen Werthe von x sind jedoch beschränkt und zwar mufs $x < \frac{k^2}{GA}$ bleiben; für $x = -\frac{k^2}{GA}$ wird $y = 0$, und $\frac{k^2}{GA}$ ist die Länge vom Brennpunkt bis zum Scheitel.

7. Nach diesen allgemeinen Untersuchungen ist nun erforderlich, die Constanten C und k zu bestimmen und die obigen Bedingungen für die Art und die Form der Kegelschnittsbahnen durch dynamische Elemente auszudrücken.

1. Constante C.

Die allgemeine dynamische Gl. No 4 ist

$$\left(\frac{\partial x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\Delta t}\right)^2 = \frac{4 GA}{r} + K$$

Von Gl. (13) ab ist $C = \frac{K}{4}$

Bezeichnet man mit $\frac{\partial s}{\Delta t}$ das Differenzial des Weges in der Bahn während der Zeit t, so ist

$$\left(\frac{\partial x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\Delta t}\right)^2 = \left(\frac{\partial s}{\Delta t}\right)^2$$

und bezeichnet v die Geschw. der Masse am Ende der Zeit t, so ist $v^2 = \left(\frac{\partial s}{\Delta t}\right)^2$ folglich hat man

$$v^2 = \frac{4 GA}{r} + 4C$$

Bezeichnet man mit V die Geschw. der Masse zu Anfang der Zeit t, also bei dem Abstande R der Masse von dem Centralpunkt, so wird für $v = V$, auch $r = R$, und es ist

$$V^2 = \frac{4GA}{R} + 4C$$

$$= GR\frac{P}{m} + 4C$$

und
$$C = \frac{1}{4}\left[V^2 - 4 GR\frac{P}{m}\right] \quad (19)$$

Da nun $\frac{P}{m}$ die auf die Masse m in deren Entfernung $= R$ vom Centralpunkt wirkende beschleunigende Kraft ist, so ist: $4 GR \frac{P}{m}$ = dem Quadrat der Geschw., mit welcher die Masse m in den

Centralpunkt eintreffen würde, wenn sie in der Entfernung R von der Ruhe aus mit unveränderter beschleunigender Kraft geradlinig nach dem Centralpunkt hin sich bewegte.

Ist nun die Geschw. V nach der Richtung des Bahn-Elements in der Entfernung R vom Centralpunkt gröfser als die eben gedachte Endgeschwindigkeit bei der geradlinigen Bewegung nach dem Centralpunkt hin, so ist C positiv, die Bahn also nach No. 5 eine Hyperbel.

Ist die Geschw. V in der Bahn kleiner als die Endgeschw. bei der Bew. nach dem Centrum, so wird C negativ und die Bahn ist nach No. 3 und 4 entweder eine Ellipse oder ein Kreis.

Ist endlich $V =$ der geradlinig nach dem Centralpunkt erlangten Endgeschw., so ist $C = 0$ und die Bahn nach No. 6 eine Parabel.

8. 2. Constante k.

Die dynamische Polargleichung (9) ist

$$r^2\left(\frac{\partial\varphi}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\Delta t}\right)^2 = \frac{4GA}{r} + K$$

Aus Gl. (11) ist

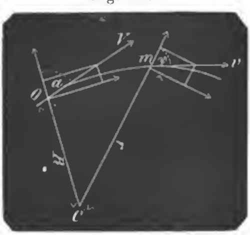
$$\frac{\partial\varphi}{\Delta t} = \frac{2k}{r^2}$$

diesen Werth von $\frac{\partial\varphi}{\Delta t}$ in die vorige Gl. eingeführt und $4C$ für K gesetzt giebt

$$\frac{4k^2}{r^2} + \left(\frac{\partial r}{\Delta t}\right)^2 = \frac{4GA}{r} + 4C \qquad (20)$$

Nun ist $\frac{\partial r}{\Delta t}$ die Geschw. in der Richtung (Cm) des Radius vector nach Verlauf der Zeit t, wenn man die Geschw. v in der

Fig. 186.



Bahnrichtung nach 2 Seitengeschw. zerlegt, von denen die eine in den Radius vector, die andere normal darauf gerichtet ist. Bezeichnet man den Winkel, den das Bahn-Element in dem Abstand r vom Centralpunkt mit dem Radius vector r bildet, mit ψ, so ist

$$\frac{\partial r}{\Delta t} = v \cos\psi$$

Die Gl. (20) gilt aber für jeden Punkt der Bahn, also auch für den Punkt O in dem Abstande R vom Centralpunkt, in welchem die Geschw. nach der Bahnrichtung $= V$ ist. Setzt man den Winkel zwischen R und dem Bahn-Element $= \alpha$, so wird

$$\frac{\partial r}{\Delta t} = \frac{\partial R}{\Delta t} = V\cos\alpha$$

folglich hat man aus Gl. 20

$$\frac{4k^2}{R^2} + V^2\cos^2\alpha = \frac{4GA}{R} + 4C$$

Für C den in Gleichung (19) gefundenen Werth gesetzt:

$$\frac{4k^2}{R^2} + V^2\cos^2\alpha = \frac{4GA}{R} + V^2 - 4GR\frac{P}{m}$$

und da

$$A = R^2\frac{P}{m}$$

$$\frac{4k^2}{R^2} + V^2\cos^2\alpha\ V^2$$

woraus

$$\frac{4k^2}{R^2} = V^2\sin^2\alpha$$

und

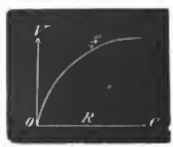
$$k = \tfrac{1}{2}RV\sin\alpha$$

Versteht man unter R den Abstand des Scheitels der Curve vom Brennpunkt, so ist

$$\alpha = 90^0 \text{ und}$$
$$k = \tfrac{1}{2}RV$$

9. Von hier ab wird also unter V die Geschw. in dem Scheitel des

Fig. 187.



Kegelschnitts verstanden, der von dem Centralpunkt, dem Brennpunkt C des Kegelschnitts um die Länge R entfernt ist, V normal auf R und V und R constant gegeben.

Ist der Kegelschnitt eine Hyperbel, so ist die Masse m (der Planet) in einem der beiden Scheitel, die Centralkraft (die Sonne) in dem diesem Scheitel zunächst liegenden Brennpunkt, also innerhalb der hohlen Curve; R ist der kleinste Radius

vector und deshalb V die gröſste Geschw. des Planeten in seiner Bahn. Der Ort O des Planeten ist das Perihelium, das Aphelium ist unendlich fern von der Sonne.

Ist der Kegelschnitt eine Parabel, so steht der Planet in dem einzigen Scheitel; alles Uebrige ist wie bei der Hyperbel.

Ist der Kegelschnitt eine Ellipse, so kann der Scheitel, in dem der Planet sich befindet, der Sonne am nächsten und am entferntesten sein, da die Ellipse zwei Brennpunkte hat. Der Consequenz wegen soll unter O das Perihelium, unter V also die gröſste Geschw. des Planeten in seiner Bahn verstanden werden.

Ist der Kegelschnitt ein Kreis, so befindet sich die Sonne im Mittelpunkt, der Planet in irgend einem Ort der Peripherie, und da alle Radii vectoren gleich lang sind, so ist die Geschw. in allen Orten der Bahn gleich groſs = V.

10. Die Bedingung für die Möglichkeit einer Bahn ist nach Gl (19) No. 7 entweder

1) $V^2 \geqq 4GR\frac{P}{m}$

oder

2) wenn $V^2 < 4GR\frac{P}{m}$

daſs $C \leqq \frac{G^2A^2}{4k^2}$

so daſs der gröſste negative Werth, den C annehmen darf $= \frac{G^2A^2}{4k^2}$ ist.

Dieser zweite einschränkende Fall ist für die Möglichkeit der Bahn nur allein zu untersuchen, und indem für C und k die dynamischen Werthe eingesetzt werden, die dynamischen Bedingungen für die Existenz einer Bahn der Weltkörper zu bestimmen. Gl. (19) besagt:

$$C = \tfrac{1}{4}\left(V^2 - 4GR\frac{P}{m}\right)$$

also wenn C negativ ist

$$C = \tfrac{1}{4}\left(4GR\frac{P}{m} - V^2\right)$$

ferner ist

$$\frac{G^2R^2}{4k^2} = \frac{G^2}{4}\,\frac{\left(R^2\frac{P}{m}\right)^2}{(\frac{1}{2}RV)^2}$$

Die Bedingung für die Existenz einer Bahn ist also

$$\tfrac{1}{4}\left(4GR\frac{P}{m} - V^2\right) \lesseqgtr \tfrac{1}{4}G^2\,\frac{R^4\frac{P^2}{m^2}}{\frac{1}{4}R^2V^2}$$

und reducirt

$$0 \lesseqgtr 4G^2R^2\frac{P^2}{m^2} - 4GR\frac{P}{m}V^2 + V^4$$

oder

$$0 \lesseqgtr \left(2GR\frac{P}{m} - V^2\right)^2$$

Da nun jedes Quadrat zwei gleiche entgegengesetzte Wurzeln hat, so ist die Bedingung

$$0 \lesseqgtr \pm\left(2GR\frac{P}{m} - V^2\right)$$

Es ist mithin nur das Gleichheitsverhältniſs

$$0 = 2GR\frac{P}{m} - V^2$$

d. h.

$$V^2 = 2GR\frac{P}{m}$$

als Bedingung für die Möglichkeit einer Bahn zuverlässig, die zweite Bedingung

$$V^2 \lesseqgtr 2GR\frac{P}{m}$$

bleibt unbestimmt. Soviel aber steht schon fest, daſs die Existenz einer Bahncurve eben so wie die Gestalt und die Natur der Curve von der Gröſse von V, der Geschw. im Perihel, einzig und allein abhängt

Da nun nach No. 6 für $C = 0$, also nach No. 7 für $V^2 = 4GR\frac{P}{m}$ dem gröſsten Werth von v^2, eine Parabel, für $V^2 < 4GR\frac{P}{m}$ eine Ellipse, und für $V^2 = 2GR\frac{P}{m}$ ein Kreis entsteht, so scheint dieser letzte Werth von V^2 die Grenze, das Minimum von $V = \sqrt{2GR\frac{P}{m}}$ anzugeben und in der obigen unbestimmt gebliebenen Vergleichung

$$V^2 > 2GR\frac{P}{m}$$

als Bedingung für die Existenz einer Bahn die richtige zu sein, wie schon der Satz No. 6 im Art. Bahn vermuthen läſst.

Man mag aber in dem maaſsgebenden Factor $\sqrt{4Ck^2 + G^2A^2}$ von x in Gl. (18), also nach Substitution der dynamischen Werthe für C und k in

$$R\sqrt{G^2R^2\frac{P^2}{m^2} - GR\frac{P}{m}V^2 + \tfrac{1}{4}V^4}$$

$V^2 >$ oder $< 2GR\frac{P}{m}$ setzen, die Gröſse unter der $\sqrt{\ }$ bleibt positiv und die Bahn in sofern möglich. Man muſs also die Untersuchung weiter ausdehnen.

11. Man setze die noch unbestimmte Gröſse allgemein

$$V^2 = nGR\frac{P}{m}$$

wo n eine positive beliebige Zahl bedeutet.

Schreibt man nun Gl. (18):

$$y^2 - \frac{4k^2}{G^2A^2}\left[Cx^2 + x\sqrt{4Ck^2 + G^2A^2} + k^2\right] = 0$$

so erhält man, für k seinen Werth $\frac{1}{2}RV$ gesetzt,

$$\frac{4k^2}{G^2A^2} = \frac{V^2}{G^2R^2\frac{P^2}{m^2}} = \frac{n}{GR\frac{P}{m}}$$

$$C = \frac{n-4}{4}\,GR\frac{P}{m}$$

$$\sqrt{4Ck^2 + G^2A^2} = \frac{n-2}{2}\,GR^2\frac{P}{m}$$

und Gl. (18) verändert sich in

$$y^2 - \frac{n(n-4)}{4}x^2 - \frac{n(n-2)}{2}Rx - \frac{n^2}{4}R^2 = 0 \quad (21)$$

Für $n < 2$ hat man

$$y^2 + \frac{n(4-n)}{4}x^2 + \frac{n(2-n)}{2}Rx - \frac{n^2}{4}R^2 = 0$$

Nun ist für $x = -R$ bedingungsmäſsig $y = 0$ die Ordinate für den dem Brennpunkt nächsten Scheitel, es muſs also für $x = +R$ die Ordinate entweder $= 0$, nämlich für den Kreis, oder eine mögliche Gröſse sein für jeden anderen Kegelschnitt. Schreibt man aber $+R$ für x, so erhält man die Gl.

$$y^2 + \frac{n(4-n)}{4}R^2 + \frac{2n(2-n)}{4}R^2 - \frac{n^2}{4}R^2 = 0$$

woraus

$$y^2 = \frac{R^2}{4}\left[-4n + n^2 - 4n + 2n^2 + n^2\right]$$

$$= nR^2(-2 + n)$$

also, da $n < 2$ ist, y^2 eine negative Gröſse, welches unmöglich ist. Die ad 10 ausgesprochene Vermuthung, daſs $2\,GR\frac{P}{m}$ die Grenze und zwar das Minimum von V^2 sein werde, sobald der Punkt für die Abscisse $x = -R$ der dem Brennpunkt **nächste** Scheitel ist, ist demnach als richtig erwiesen.

Setzt man, um die Curve (Gl. 21) näher zu untersuchen, $y = 0$, so erhält man aus Gl. 21 offenbar die Abscisse x für einen Scheitel in

$$\frac{n(4-n)}{4}x^2 + \frac{2n(2-n)}{4}Rx - \frac{n^2}{4}R^2 = 0$$

woraus

$$x^2 + \frac{2(2-n)}{4-n}Rx - \frac{n}{4-n}R^2 = 0$$

und

$$x = \frac{2-n \pm 2}{4-n}R$$

also x entweder $= R$

oder $$= -\frac{n}{4-n}R$$

da nun $n < 2$, so ist der Zähler $(n) < 2$, der Nenner $(4-n) > 2$, mithin die **negative Abscisse** gegen die **Bedingung kleiner als** R; ferner die positive Abscisse $= R$ gröſser als die negative Abscisse; Perihel und Aphel haben mit einander gewechselt, im Aphel in dem Abstande R vom Brennpunkt ist die Geschwindigkeit $= V$, die kleinste in der Bahn, während sie als die gröſste im Perihel festgesetzt worden und die gröſste Geschw. im Perihel ist nun:

$$= V \cdot \frac{R^2}{\left(\frac{n}{4-n}\right)^2 R^2} = \left(\frac{4-n}{n}\right)^2 V$$

sie wird erst für $n = 2$ mit dem Abstand R von C ebenfalls $= V$ wo die Curve zum Kreise wird.

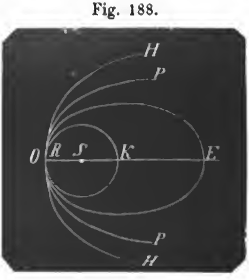
Hiernach ist erwiesen, daſs **bei einem Abstand R des Bahnscheitels die Bahngeschw. V daselbst mindestens $= 2GR\frac{P}{m}$ sein muſs.** Die Geschw. in jedem anderen Punkt der Bahn wird entweder **kleiner, indem jeder andere Radius vector gröſser als R wird, der Scheitel mithin das Perihel ist**; oder sie wird **gröſser, indem jeder andere Radius vector kleiner als R wird, der Scheitel mithin das Aphel ist**; oder die Geschw. bleibt dieselbe, indem jeder andere Radius vector $= R$ bleibt.

Bei einer Geschw. $V < 2GR\frac{P}{m}$ im Perihel, wenn der Abstand des Perihels $= R$, ist demnach keine Bahn möglich.

12. Es sind nun aus dem Vorigen folgende Gesetze für die Bahn der Planeten um deren Sonne entwickelt worden:

A. Bedeutet S die Sonne, O das Perihel einer Planetenbahn, R den Abstand AS, m die Masse des Planeten, P die anziehende Kraft der Sonne, G die Beschleunigungs-Einheit im Ab-

Fig. 188.



stand R, so ist die geringst mögliche Geschw., die der Planet in O haben kann:

$$V = \sqrt{2\,GR\frac{P}{m}}$$

und der Planet durchläuft den Kreis Ok.

B. Für $V^2 \begin{cases} > 2\,GR\frac{P}{m} \\ < 4\,GR\frac{P}{m} \end{cases}$

durchläuft der Planet eine Ellipse OE.

C. Für $V^2 = 4\,GR\frac{P}{m}$

durchläuft der Planet eine Parabel POP.

D. Für $V^2 > 4\,GR\frac{P}{m}$

durchläuft der Planet eine Hyperbel HOH.

13. In Bezug auf die Fälle A, B, C, D No. 12 hat man aus Gl. (21) die Form und Gröfse einer Planetenbahn, wenn n gegeben ist, wenn also bei gleichbleibenden P, m, R die Geschw. V im Perihel gegeben ist, wie folgt:

Für A bei $n = 2$ wird die Gl. (21)

$$y^2 + x^2 - R^2 = 0$$

woraus

$$y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$$

Für $x = \mp R$ wird $y = 0$: der Planet steht für $-R$ in O, für $+R$ in K; für $x = 0$ ist $y = \pm R$: der Planet steht entweder über oder unter S, normal auf OK genommen.

14. Für B, bei $n \gtrless {4 \atop 2}$ wird Gl. (21)

$$y^2 + \frac{n(4-n)}{4}x^2 - \frac{n(n-2)}{2}Rx - \frac{n^2}{4}R^2 = 0 \tag{22}$$

so dafs für jedes gegebene x die beiden Ordinaten y gefunden werden können.

Für $y = 0$ erhält man die beiden Scheitel der Ellipse.

Die Gl. ist

$$\frac{n(4-n)}{4}x^2 - \frac{n(n-2)}{2}Rx - \frac{n^2}{4}R^2 = 0$$

woraus reducirt und geordnet

$$x^2 - \frac{2(n-2)}{4-n}Rx - \frac{n}{4-n}R^2 = 0 \tag{23}$$

und

$$x = \frac{n-2\pm 2}{4-n}\cdot R$$

Hieraus die negative Abscisse $= -R$

$$\text{die positive Abscisse} = \frac{n}{4-n}R \tag{24}$$

Setzt man

$$n = 2 + m$$

wo $m = 1$ und jede gebrochene Zahl zwischen 0 und 2 bedeutet, so hat man die positive Abscisse für das Aphel

$$x^1 = \frac{2+m}{2-m}R$$

für $m = 0$ entsteht $x^1 = R$, die Kreisbahn; für $m = 2$ entsteht $x^1 = \infty$, die Bahn ist eine Parabel und zwar die einzige, welche existiren kann, weil für $m > 2$ also $n > 4$ eine Hyperbel entsteht.

Je kleiner m ist, desto näher kommt die Ellipse dem Kreise, je näher m an 2, desto gestreckter wird sie, und dies findet namentlich bei den Kometen statt, wo also V^2 sehr nahe der Gröfse $4\,GR\frac{P}{m}$ sein mufs; nämlich bei den bekannten wiederkehrenden Kometen, die nur im Perihel und in der Nähe desselben uns sichtbar werden. Auch möchte anzunehmen sein, dafs der Schöpfer nicht die Absicht hat, irgend einem Weltkörper bis in's Unendliche fortschreitende Bewegung zu geben, sondern jeden derselben irgend einem System als bleibend einzuverleiben, wo dann weder Parabeln noch Hyperbeln beschrieben werden würden mit Ausnahme der Fälle, wo Kometen anderen Sonnensystemen einverleibt werden sollen.

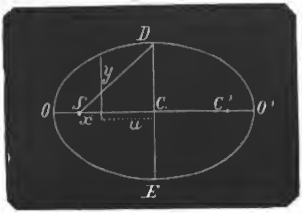
Die Hypothese (Attraction No. 4, pag. 167 mit Fig. 104) auf die ich hier mit einigen Worten zurückkomme, stimmt mit den hier streng mathematisch nachgewiesenen Gesetzen und mit der Annahme, dafs kein Weltkörper in einer anderen Bahn als einer Ellipse läuft, ganz gut. Denn die Sonnengaskugel S hatte den Halbmesser $Ca = R$, der Theil ab mufste also bei der Geschw. $V = \sqrt{2\,GR\frac{P}{m}}$ der S noch verbleiben, weil unter dieser Geschw. Gleichgewicht zwischen der Schwungkraft V und der Centripetalkraft $\frac{P}{m}$ stattfindet. Erst wenn vielleicht durch Aufschwellung und dadurch vergröfserte Entfernung von C die Masse $ab = m$ nicht mehr zu dem normalen R zurückkehren konnte, also bei $V > \sqrt{2\,GR\frac{P}{m}}$ konnte m sich entfernen.

Eine Masse m widersteht ihrem Entweichen vom Centralpunkt C um so mehr, je gröfser sie ist und die Anziehung einer schweren Masse m in ihrer Wirkung auf C ist von ebenfalls einiger Bedeutung; daher entweicht eine leichtere Masse schneller als eine schwere. Somit mufsten die

Kometen mit gröfserer Anfangsgeschw. sich entfernen; da aber bei den wiederkehrenden Kometen die eben gedachten Umstände nicht so weitgreifend sein konnten, dafs plötzlich eine Geschw. bis zu $4\,GR\,\frac{P}{m}$ und noch darüber hinaus hervorgeht, ebenfalls Ellipsen, aber gestrecktere als die Planeten beschreiben.

15. Die Ellipse als die einzige Bahn der Weltkörper ist also für uns hier die wichtigste aller Kegelschnittslinien, und sie mufs in Beziehung auf die bisher gewonnenen dynamischen Werthe näher erwogen werden.

Fig. 189.



Setzt man die halbe grofse Axe OC der Ellipse $= a$, die halbe kleine Axe $DC = c$, und bezeichnet die Abscissen vom Mittelpunkt C aus mit u, so hat man allgemein

$$y^2 - \frac{c^2}{a^2}(a^2 - u^2) = 0 \qquad (25)$$

Nun ist die grofse Axe $2a = R$ + der positiven Abscisse Gl. (24) für $y = 0$, daher

$$2a = R + \frac{n}{4-n}R = \frac{4}{4-n}R \qquad (26)$$

und die halbe grofse Axe

$$a = \frac{2}{4-n}R \qquad (27)$$

Die Excentricität $CS = CC^1$ ist

$$\sqrt{a^2 - c^2} = a - R = \left(\frac{2}{4-n} - 1\right)R = \frac{n-2}{4-n}R \qquad (28)$$

Die halbe kleine Axe $CD = CE$ ist $\sqrt{SD^2 - SC^2}$ also

$$c = R\sqrt{\left(\frac{2}{4-n}\right)^2 - \left(\frac{n-2}{4-n}\right)^2} = R\sqrt{\frac{n}{4-n}} \qquad (29)$$

Die grofse Axe verhält sich also zur kleinen Axe, oder

$$a : c = 1 : \tfrac{1}{2}\sqrt{n(4-n)} = \frac{2}{\sqrt{n(4-n)}} : 1$$

der Parameter der grofsen Axe $2a$ ist

$$p = \frac{2c^2}{a} = nR \qquad (30)$$

der Parameter der kleinen Axe $2c$ ist

$$p^1 = \frac{2a^2}{c} = \frac{8R}{\sqrt{n(4-n)^3}} \qquad (31)$$

Nun ist

$$x = CS - u = \sqrt{a^2 - c^2} - u = \frac{n-2}{4-n}R - u$$

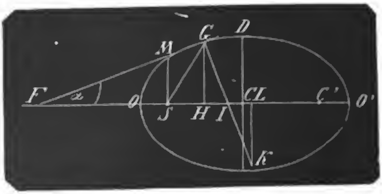
diesen Werth für x in Gl. (22) gesetzt und reducirt, giebt die dynamische Gl.

$$y^2 + \frac{n(4-n)}{4}u^2 - \frac{n}{4-n}R^2 = 0 \qquad (32)$$

woraus y für jeden Werth von u gefunden werden kann.

16. Für einen beliebigen Punkt G der Bahn sei FG die Tangente, GI die Normale, FH die Subtangente, HI die Subnormale, GK der Krümmungshalbmesser, OL die Abscisse und KL die Ordinate für den Mittelpunkt K der Krümmung, α

Fig. 190.



der Winkel, den die Tangente mit der grofsen Axe bildet, so ist

$$tg\,\alpha = \frac{c^2}{a^2} \cdot \frac{u}{y} = \tfrac{1}{4}(4-n)\frac{u}{y} \qquad (33)$$

$$FH = \frac{a^2 - u^2}{u} = \frac{4}{(4-n)^2}\frac{R^2}{u} - u \qquad (34)$$

$$HI = \frac{c^2}{a^2}u = \tfrac{1}{4}n(4-n)u \qquad (35)$$

Die Subnormale ist also immer kleiner als u, d. h. die Normale in irgend einem Punkte des Quadranten AD mufs immer diesseits C fallen, nur die Normalen der Punkte A und D sind durch C gerichtet; noch ein Beweis, dafs die Schwerlinien aus dem Quadrant *adep*, Fig. 11, pag. 12 diesseits des Erdmittelpunkts fallen.

$$FG^2 = (a^2 - u^2)\left[\frac{c^2}{a^2} + \frac{a^2 - u^2}{u^2}\right] = \left[\left(\frac{2}{4-n}\right)^2 R^2 - u^2\right]\left[\frac{n(4-n)}{4} + \left(\frac{2}{4-n}\right)^2 \frac{R^2}{u^2} - 1\right] \quad (36)$$

$$GI^2 = \frac{c^2}{a^2}\left[a^2 - \frac{a^2 - c^2}{a^2} u^2\right] = \frac{n}{4}(4-n)\left[\left(\frac{2}{4-n}\right)^2 R^2 - \left(\frac{n-2}{2}\right)^2 u^2\right] \quad (37)$$

$$OL = a - \frac{a^2 - c^2}{a^4} u^3 = \frac{2}{4-n} R - \left(\frac{4-n}{4}\right)^2 (n-2)^2 \frac{u^3}{R^2} \quad (38)$$

$$KL = \frac{a^2 - c^2}{c^4} y^3 = \left(\frac{n-2}{n}\right)^2 \cdot \frac{y^3}{R^2} \quad (39)$$

$$KG = \frac{(a^4 y^2 + c^4 u^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4 c^4} = \frac{[16 y^2 + n^2 (4-n)^2 u^2]^{\frac{3}{2}}}{16 n^2} \quad (40)$$

$$SG = a + \frac{u}{a}\sqrt{a^2 - c^2} = \frac{2}{4-n} R + \frac{n-2}{2} u \quad (41)$$

17. Für den Punkt O oder O', also für $x = -R$ und $(2a - R)$ oder $-R$ und $\frac{n}{4-n} R$ oder $u = \mp a = \mp \frac{2}{4-n} R$ und $y = 0$ hat man aus No. 16 mit Hülfe von Gl. (27) u. (29):

$tg\,\alpha = \infty$, weil die Tangenten in A und B normal auf AB stehen, also $\alpha = 90°$ ist.

FH (Subtg.) = Null, nämlich der Punkt A oder B.

HI (Subn.) $= \frac{c^2}{a} = \frac{1}{2} nR$

FG (Tang.) = Null, wie denn auch die Tangente in A oder B von dem Berührungspunkt A oder B bis zur Axe als ein Punkt verschwindet.

GI (Norm.) $= \frac{c^2}{a} = \frac{1}{2} nR$ = der Subnormale, mit der sie dieselbe Linie ausmacht.

OL (die Abscisse des Krümmungsmittels) $= \frac{c^2}{a} = \frac{1}{2} nR$ = der Normale = der Subnormale, mit der sie als eine Linie zusammenfällt.

KL (die Ordinate des Krümmungsmittels) = Null, weil der Krümmungshalbmesser in der Axe liegt.

KG (Krümmungshalbmesser) $= \frac{c^2}{a} = \frac{1}{2} nR$ = dessen Abscisse, der Normale und der Subnormale.

Da $n > 2$, so ist der Krümmungshalbmesser für das Perihel gröfser als R, und es ist somit die Richtigkeit der Fig. 188 nachgewiesen, dafs nämlich die Ellipse OE den Kreis OK niemals schneiden kann, sondern denselben einschliefsen mufs.

SO (für SG, Radius vector in O) $= a - \sqrt{a^2 - c^2} = R$

SO' (für SG, Radius vector in O') $= a + \sqrt{a^2 - c^2} = \frac{c^2}{R} = \frac{n}{4-n} R$

18. Für die Punkte D und E, also für x = der Excentricität $= a - R = \frac{n-2}{4-n} R$ od. $u = 0$ und $y = \pm c = \pm R \sqrt{\frac{n}{4-n}}$ hat man

$tg\,\alpha = 0$. Denn die Tangente läuft mit der grofsen Axe ∥ und bildet also mit derselben den Winkel = Null.

FH (Subtg.) $= \infty$

HI (Subn.) = 0, weil die Normale lothrecht auf der grofsen Axe steht; sie ist ein Punkt.

FG (Tang.) $= a^2\left(\frac{c^2}{a^2} + \frac{a^2}{0}\right) = \infty$, nämlich ∥ der grofsen Axe, die sie daher nie treffen kann.

GI (Norm.) $= c = R\sqrt{\frac{n}{4-n}}$

OL (Absc. des Krümmungsmittels) $= a = \frac{2}{4-n} R$, weil der Krümmungshalbmesser in der Richtung DE liegt.

KL (Ordinate des Krümmungsmittels) $= \frac{a^2 - c^2}{c} = \left(\frac{n-2}{4-n}\right)^2 R \sqrt{\frac{4-n}{n}}$

KG (Krümmungshalbmesser) $= \frac{a^2}{c} = \frac{4R}{n(4-n)} \sqrt{\frac{n}{4-n}}$

Die Krümmungshalbmesser in A und D verhalten sich also wie $\frac{c^2}{a} : \frac{a^2}{c} = c^3 : a^3$, umgekehrt wie die Kubi der Axen, in welchen sie sich befinden.

SD (Radius vector) $= a = \frac{2}{4-n} R$

19. Für den Punkt M, normal über S, und die übrigen drei über den Brennpunkten befindlichen Curvenpunkte, also bei $x = 0$ oder $= 2a - R$ oder u = der Excentricität $= \pm\sqrt{a^2 - c^2} = \pm \frac{n-2}{4-n} R$ hat man

$y = \frac{c^2}{a} = \frac{1}{2} nR$ = dem Krümmungshalbmesser im Scheitel

$tg\,\alpha = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a} = \frac{n-2}{2}$

FH (Subtg.) $= \dfrac{c^2}{\sqrt{a^2 - c^2}} = \dfrac{n}{n-2} R$

HI (Subnorm.) $= \dfrac{c^2}{a^2} \sqrt{a^2 - c^2} = \dfrac{n(n-2)}{4} R$

FG (Tang.) $= \dfrac{c^2}{a} \sqrt{\dfrac{2a^2 - c^2}{a^2 - c^2}}$

$= \dfrac{n}{2(n-2)} R \sqrt{n^2 - 4n + 8}$

GI (Norm.) $= \dfrac{c^2}{a^2} \sqrt{2a^2 - c^2} = \frac{1}{4} nR \sqrt{n^2 - 4n + 8}$

Tang. : Norm. $= 2 : n - 2$

OL (Absc. des Krümmungsmittels)

$= a - \left(\dfrac{a^2 - c^2}{a^2}\right)^2 \sqrt{a^2 - c^2} = \dfrac{2^5 - (n-2)^5}{16(4-n)} R$

KL (Ordinate des Krümmungsmittels)

$= \dfrac{c^2}{a^3}(a^2 - c^2) = \dfrac{c^2}{a} - \dfrac{c^4}{a^3} = \frac{1}{8} n(n-2)^2 R$

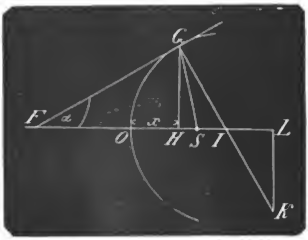
KG (Krümmungshalbm.) $= \dfrac{c^2}{a^4} \sqrt{(2a^2 - c^2)^3}$

$= \frac{1}{16} nR \sqrt{(n^2 - 4n + 8)^3}$

SM (Radius vector) $= \dfrac{c^2}{a} = \dfrac{n-2}{n-4} R$

20. Um die einzige Parabel kennen zu lernen, welche nach No. 14 als Bahn nur

Fig. 191.



existiren kann, wenn P, M, R gegeben sind, nämlich bei $n = 4$, also

$$V^2 = 4\,GR \frac{P}{(m}$$

setze man den Werth 4 für n in Gl. (21), man erhält:

$$y^2 - 4Rx - 4R^2 = 0 \qquad (42)$$

wo der Kraftpunkt der Anfangspunkt der Abscissen ist. Schreibt man Gl. (41)

$$y^2 - 4R(x + R) = 0$$

und setzt $x + R = x^1$, so dafs $x = x^1 - R$, so hat man den Anfangspunkt der Abscissen im Scheitel, und x^1 wieder mit x bezeichnet:

$$y^2 = 4Rx$$

demnach ist

p, der Parameter der Parabel $= 4R$

$tg\ \alpha = \dfrac{p}{2y} = \sqrt{\dfrac{R}{x}}$

Subtg. $FH = 2x$

Subnorm. $HI = \dfrac{p}{2} = 2R$

Tang. $FG = \sqrt{4x^2 + px} = 2\sqrt{x(R + x)}$

Norm. $GI = \frac{1}{2}\sqrt{p^2 + 4px} = 2\sqrt{R(R + x)}$

(Norm. : Tang. $= \sqrt{R} : \sqrt{x}$)

Abscisse OL des Kr. Halbm. $= 3x + \frac{1}{2} p$
$= 3x + 2R$

Ordinate KL d. Kr. Halbm. $= \dfrac{4x^2}{y} = 2x\sqrt{\dfrac{x}{R}}$

Krümmungshalbm. $GK = \sqrt{\dfrac{(4x + p)^3}{4p}}$

$= 2\sqrt{\dfrac{(R + x)^3}{R}}$

Radius vector $SG = x + \dfrac{p}{4} = x + R$

21. Für den Scheitel O, also für $x = 0$ ist

$y = 0$
$tg\ \alpha = \infty,\ \alpha = 90^\circ$
Subtg. $= 0$
Subnorm. $OI = 2R$
Tang. $= 0$
Norm. $OI = 2R$
Absc. $OL = 2R$
Ordin. zu $OL = 0$
Krümmungshalbmesser $= 2R$
Radius vector $SO = \dfrac{p}{4} = R$

Der Krümmungshalbmesser der Ellipse (No. 17) war $= \frac{1}{2} nR$; da nun hier $n < 4$ ist, so ist derselbe $< 2R$, mithin Fig. 188 richtig, nämlich dafs die Parabel POP die Ellipse EO nicht schneidet, sondern diese umschliefst.

22. Für den Punkt normal auf der Axe über S, also für $x = R$ hat man

$y = 2R$
$tg\ \alpha = 1;\ \alpha = 45^\circ$
Subtg. $FH = 2R$
Subnorm. $HI = 2R$
Tang. $FG = 2R\sqrt{2}$
Norm. $GI = 2R\sqrt{2}$
Absc. $OL = 5R$
Ordin. $KL = 2R$
Krümmungshalbm. $GK = 4R\sqrt{2}$
Radius vector $SG = 2R$

23. Gl. (27) ist $a = \dfrac{2}{4-n} R$

Gl. (28) ist $e = \dfrac{n-2}{4-n} R$

hieraus folgt $\dfrac{e}{a} = \dfrac{n-2}{2}$

und gegenseitig $n = 2\left[1 + \dfrac{e}{a}\right]$

mithin n allein durch die astronomische Excentricität ausgedrückt und unabhängig von den Dimensionen der Bahn.

Mercur	hat $\frac{e}{a}$	$=0,205616$	also $n =$	2,411232
Venus	„	$=0,006862$	„	2,013724
Erde	„	$=0,016792$	„	2,033584
Mars	„	0,093217	„	2,186434
Vesta	„	0,08856	„	2,17712
Juno	„	0,25556	„	2,51112
Ceres	„	0,07674	„	2,15348
Pallas	„	0,24200	„	2,48400
Jupiter	„	0,048162	„	2,096324
Saturn	„	0,056150	„	2,112300
Uranus	„	0,046611	„	2,093222

Die Geschwindigkeit im Perihel ist also bei den Planetenbahnen nur wenig mehr als $2GR\frac{P}{m}$ und die Bahnen selbst nähern sich dem Kreise.

Bei den Kometen ist das Verhältnifs gröfser, so z. B. beträgt bei dem Enke'schen Komet $\frac{e}{a} = \sin 57° \ 41' \ 43{,}95'' = 0{,}84522$ und folglich $n = 3{,}69044$; die Geschw. durfte also nur $0{,}31 \ GR\frac{P}{m}$ gröfser sein und der Komet beschrieb eine Parabel.

Der im Jahre 1835 zuletzt erschienene Halley'sche Komet mit einer Umlaufszeit von 75 Jahren hat die Excentricität $=0{,}97$; mithin $n = 3{,}94$ und die Geschw. im Perihel um nur $0{,}06 \ GR\frac{P}{m}$ vergröfsert würde eine parabolische Bahn und einen nie wiederkehrenden Kometen erzeugt haben.

24. Beispiel für Anwendung der vorstehenden Formeln.

Die Bahn der Erde um die Sonne.

Um die aus den vorstehenden allgemeinen Untersuchungen entwickelte Formel

$$V^2 = nGR\frac{P}{m}$$

zu praktischer Anwendung zu bringen, ist Folgendes zu beachten.

Es bezeichne G^1 die Beschleunigungs-Einheit; d. h. den Weg in der ersten Secunde, den eine Masse $=1$ in der Entfernung $=1$ von der Ruhe aus nach einem Körper hinfällt, von dem jene Masse mit der Kraft $=1$ angezogen wird.

Es sei g die Beschleunigung eines an der Erdoberfläche befindlichen Massenpunkts gegen den Erdmittelpunkt

r der Halbmesser der Erde
p deren Anziehungskraft
m deren Masse, so ist

$$g \ (= 15\tfrac{5}{8} \text{ preufs. Fufs}) = G'\frac{p}{mr^2}$$

woraus also $\qquad G' = g\frac{m}{p}r^2$

In der Formel $V^2 = nGR\frac{P}{m}$ bezeichnet nun

P die Anziehungskraft der Sonne
m die Masse des Planeten, hier also die Masse der Erde
G die Beschleunigungseinheit G' in der Entfernung R, also $G = \frac{G'}{R^2}$
R die Entfernung des Perihels der Planetenbahn, hier der Erdbahn.

Die Formel ist also zu schreiben

$$V^2 = n\frac{G'}{R^2}R\frac{P}{m} = nG'\frac{P}{mR}$$

für G' den obigen Werth $g\frac{m}{p}r^2$ gesetzt und reducirt giebt

$$V^2 = ng\frac{r^2}{R}\cdot\frac{P}{p}$$

Die anziehenden (unbekannten) Kräfte P, p verhalten sich wie die zu ihnen gehörenden (ermittelungsfähigen) Massen M, m. Daher hat man die Formel

$$V^2 = ng\frac{r^2}{R}\frac{M}{m} \tag{43}$$

M wird in Verhältnifs zu m ausgedrückt, $\frac{M}{m}$ ist also eine abstracte Zahl, R und r werden in geographischen Meilen angegeben; um also V in geogr. Ml. zu erhalten, hat man zu setzen

$$g = \frac{15\frac{5}{8}}{24000}\text{ preufs. Ml.} = \frac{15{,}625}{0{,}9850876 \times 24000} = \frac{15{,}625}{23642}\text{ geogr. Ml.}$$

Elemente der Bahn.

Die astronomische Excentricität der Ekliptik $\frac{e}{a}$ ist festgestellt auf 0,016792

Die halbe grofse Axe a der Ekl. wird je nach verschiedenen Beobachtungen und Berechnungen verschieden angegeben, und zwar von 20 644130 bis 20 682329 geogr. Ml. Letztere Angabe in Vega, Logarithmen, herausgegeben von Dr. Bremiker.

Die Entfernung der Sonne vom Perihel ist =

$$a(1 - 0{,}016792) = 0{,}983208 \cdot a$$

die Entfernung vom Aphel

$$a(1 + 0{,}016792) = 1{,}016792 \cdot a$$

A. bei $a = 20\,644130$ g. M. ist

die Entf. v. Perihel	= 20 297474	g. M.
„ „ „ Aphel	= 20 990786	„ „
die grofse Axe	= 41 288260	g. M.

B. bei $a = 20\,682329$ g. M. ist
die Entf. v. Perihel $= 20\,335031$ g. M.
„ „ „ Aphel $= 21\,029627$ „ „
die grofse Axe $= 41\,364658$ g. M.

Nach No. 23 ist

C. $n = 2 \cdot \left(1 + \frac{e}{a}\right) = 2 \cdot 1{,}016792 = 2{,}033584$

Die Geschw. V im Perihel findet sich folgender Art:

Der Umlauf der Erde um die Sonne geschieht in 365,256384 Tagen zu 24 Stunden,

mithin die mittlere tägliche Bewegung der Erde

in Bogen $= \frac{2\pi}{365{,}256384} = 0{,}0172021255$

in Graden $= \frac{360^0}{365{,}256384} = 59'\ 8{,}19275''$

D. also die mittlere tägliche Bewegung in wirklicher Länge

$= 0{,}017\,2021\,255 \times a = 355780$ geogr. M.

und die mittlere Geschw. der Erde

per Stunde $= \frac{355780}{24} = 14824{,}166$ ... geogr. Ml.

„ Minute $= \frac{355780}{24 \cdot 60} = 247{,}0694$ ... geogr. Ml.

„ Secunde $= c = \frac{355780}{24 \cdot 60 \cdot 60} = 4{,}11782$ (407 Per.) g. M.

Im Artikel Bahn No. 6 ist nachgewiesen, dafs in gleichen Zeiten von dem Radius vector gleiche Flächenräume durchlaufen werden; betrachtet man daher die beiden Geschwindigkeiten V und V' per Secunde im Perihel und Aphel als Kreisbogen, nennt die beiden Abstände von der Sonne R und R', so hat man

$$\tfrac{1}{2} VR = \tfrac{1}{2} V'R'$$

also $V : V' = R' : R$

oder $V : \frac{V + V'}{2} = R' : \frac{R' + R}{2} = 1 + \frac{e}{a} : 1$

Nun ist $\frac{V + V'}{2}$ die halbe Summe der kleinsten und der gröfsten Geschw., also = der mittleren Geschw. $= c$ und $\frac{R' + R}{2}$ = der halben grofsen Axe; folglich

E. $V = \frac{a + e}{a} c = \left(1 + \frac{e}{a}\right) c$

$= 1{,}016792 \times 4{,}117824 = 4{,}18697$ g. M. und zwar für beide verschieden angegebenen halben grofsen Axen.

Ferner ist der Halbmesser r der Erde $= 859{,}5$ geogr. M.

Anwendung der Formel.

Substituirt man nun die vorstehenden Werthe in Formel (43), so erhält man

1) Für $a = 20\,644130$ g. M.

$$4{,}18697^2 = 2{,}033584 \cdot \frac{15{,}625}{23642} \cdot \frac{859{,}5^2}{20297474} \cdot \frac{M}{m}$$

2) Für $a = 20\,682329$ g. M.

$$4{,}18697^2 = 2{,}033584 \cdot \frac{15{,}625}{23642} \cdot \frac{859{,}5^2}{20335031} \cdot \frac{M}{m}$$

Man sieht hieraus, dafs man mit Hülfe möglichst genauer Beobachtungen das Verhältnifs $\frac{M}{m}$ der Sonnenmasse zur Erdmasse finden kann.

Für d. 1ste Annahme findet man $\frac{M}{m} = 358387$

„ „ 2te „ „ „ $\frac{M}{m} = 359050$

Dieses Massenverhältnifs wird von den Astronomen von 334936 bis zu 365412 angegeben.

25. Die Massenberechnung No. 24 ist nur auf unsre Erde, nicht aber auf andere Planeten anwendbar, denn in Formel 43 No. 23

$$V^2 = ng \frac{r^2}{R} \frac{M}{m}$$

ist die Gröfse $gr^2 \frac{M}{m}$ für alle Weltkörper die um die Masse M des Centralkörpers laufen, also auch für alle Planeten und Kometen unsres Sonnensystems eine Constante. Beziehen sich nämlich g; r; m auf einen beliebigen Planet, g_1; r_1; m_1 auf die Erde, so ist

$$g_1 : g = \frac{m_1}{r_1^2} : \frac{m}{r^2} \text{ woraus}$$

$$g = g_1 \frac{m}{m_1} \cdot \frac{r_1^2}{r^2}$$

mithin den Werth von g substituirt

$$V^2 = ng_1 \frac{m}{m_1} \frac{r_1^2}{r^2} \cdot \frac{r^2}{R} \frac{M}{m_1} = ng_1 \frac{r_1^2}{R} \cdot \frac{M}{m_1}$$

daher $gr^2 \frac{M}{m} = g_1 r_1^2 \frac{M}{m_1}$ = Constante C

und $V^2 = ng' \frac{r_1^2}{R} \frac{M}{m}$

für jeden beliebigen Planet, wo nur V, n und R auf denselben, die übrigen Gröfsen g_1; r_1; m_1 auf unsere Erde sich beziehen

also $V^2 = \frac{n}{R} C$

und hierin $C = \frac{15{,}625}{23642} \cdot 859{,}5^2 \cdot \frac{M}{m}$

wo $\frac{M}{m}$ zwischen 334936 und 365412 schwankend ist, also C zwischen 163 524717 und 178 406380.

Die Geschw. V im Perihel ist also nur abhängig von n, einem Coefficient der < 4 und > 2 ist, und von R der Entfernung des Perihels von der Sonne; sonst von keiner anderen Gröfse, weder von Dimensionen noch von Massen der Weltkörper.

26. Kennt man die aus der Masse m eines Planet hervorgehende Beschleunigung durch die Beobachtung seines Trabanten und ist dieselbe in der Entfernung r unsres Erdhalbmessers $= g$, so hat man

$$m : m_1 = g : g_1$$

woraus $$m = \frac{g}{g_1} m_1$$

wo g_1 m_1 sich auf unsre Erde beziehen

folglich $$\frac{M}{m} = \frac{M}{m^1} \frac{g'}{g}$$

27. Für unsre Erde ist nach No. 24 C

$$n = 2{,}033584$$

daher $$GR\frac{P}{m} = \frac{V^2}{n} = \frac{V^2}{2{,}033584}$$

und $$2\,GR\frac{P}{m} = \frac{2V^2}{n} = \left(V\sqrt{\frac{2}{2{,}033584}}\right)^2$$

Also bei einer Geschwindigkeit

$$V^1 = V\sqrt{\frac{2}{2{,}033584}} = 4{,}18697\sqrt{\frac{2}{2{,}033584}} = 4{,}15225$$

geogr. Meilen würde die Erde in einer Kreisbahn sich bewegen.

Die Differenz beider Geschw. beträgt 0,03472 geogr. Ml. = 821 preufsische Fufs. Wenn also die Erde mit 822 pr. Fufs geringerer Geschw. sich bewegte, so würde das Perihel zum Aphel werden (s. No. 11), die Geschw. der Erde würde hier die kleinste sein und während des Laufs sich vermehren, anstatt dafs sie sich jetzt vermindert.

Bahn der Weltkörper, die Ellipse. Es steht nunmehr unwiderleglich fest, dafs die Bahn eines jeden Weltkörpers eine Ellipse ist; es ist nun erforderlich, einen Weltkörper in seiner Bahn verfolgen zu können, wenn die Elemente derselben bekannt sind. Zu dem Ende gehe ich auf eine Gl. des vor. Art. zurück, durch welche die Abhängigkeit zwischen der Zeit t und dem Radius vector r gegeben wird, und diese ist Gl. (9) pag. 46

$$r^2\left(\frac{\partial\varphi}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\Delta t}\right)^2 = \frac{4GA}{r} + K$$

Gl. (11) pag. 47 ist

$$\frac{\partial\varphi}{\Delta t} = \frac{2k}{r^2}$$

Diesen Werth für $\frac{\partial\varphi}{\Delta t}$ und für K, wie für Gl. (13) den Werth $4C$ gesetzt, giebt

$$\frac{4k^2}{r^2} + \left(\frac{\partial r}{\Delta t}\right)^2 = \frac{4GA}{r} + 4C \qquad (1)$$

Nach No. 7 ist $4C = V^2 - 4GR\frac{P}{m}$ für die elliptische Bahn

$$V^2 = nGR\frac{P}{m}$$

wo $2 < n < 4$; daher

$$4C = -(4-n)GR\frac{P}{m}$$

Nach No. 8 ist $k = \frac{1}{2}RV$

nach No. 1 $$A = R^2\frac{P}{m}$$

Diese Werthe in Gl. 1 gesetzt, erhält man

$$nG\frac{R^3}{r^2}\frac{P}{m} + \left(\frac{\partial r}{\Delta t}\right)^2 = 4G\frac{R^2}{r}\frac{P}{m} - (4-n)\,GR\frac{P}{m}$$

woraus

$$\left(\frac{\partial r}{\Delta t}\right)^2 = G\frac{R}{r^2}\frac{P}{m}\left[4Rr - (4-n)r^2 - nR^2\right]$$

Da n nicht zu den Elementen der Bahn gehört, auch nicht gegeben wird, so nehme ich

$$\text{aus Gl. (26)}: (4-n) = \frac{2R}{a}$$

$$\text{„ „ (30)}: \quad n = \frac{2c^2}{aR}$$

Diese Werthe in die vorstehende Gl. gesetzt und reducirt giebt

$$\left(\frac{\partial r}{\Delta t}\right)^2 = 2G\frac{R^2}{r}\frac{P}{m}\left(2r - \frac{r^2+c^2}{a}\right)$$

Schreibt man der Kürze wegen wieder A für $R^2\frac{P}{m}$, so ist

$$\frac{\partial r}{\Delta t} = \frac{1}{r}\sqrt{2GA\left(2r - \frac{r^2+c^2}{a}\right)} = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{2GA}{a}}\,(2ar - r^2 - c^2)$$

und gegenseitig

$$\frac{\partial t}{\Delta r} = \frac{r\sqrt{\frac{a}{2GA}}}{\sqrt{2ar - r^2 - c^2}}$$

Setzt man unter das $\sqrt{}$zeichen des Nenners noch $+a^2 - a^2$, so erhält man

$$\frac{\partial t}{\Delta r} = \frac{r\sqrt{\frac{a}{2GA}}}{\sqrt{-(\pm a \mp r)^2 + a^2 - c^2}}$$

und bezeichnet man die Excentricität der Ellipse mit e

$$\frac{\partial t}{\Delta r} = \frac{r\sqrt{\frac{a}{2GA}}}{\sqrt{-(\pm a \mp r)^2 + e^2}} \qquad (2)$$

2. Die vorstehende Differenzialformel kann man auch ohne Hülfe der Gleichungen für C, k und n unmittelbar aus Gl. (1) aus folgender Betrachtung entwickeln. Gl. (1) enthält den Radius vector r, mithin dessen kleinsten und dessen gröfsten Werth, deren Summe = der grofsen Axe $= 2a$ ist. Für jeden von beiden Werthen wird aber nach der Lehre vom Maximum und Minimum das erste Differenzial von r, nämlich $\frac{\partial r}{\Delta t} =$ Null.

Setzt man also in Gl. (1) $\frac{\partial r}{\Delta t} = 0$, so erhält man die Gl.:

$$\frac{4k^2}{r^2} + 0 = \frac{4GA}{r} + 4C$$

geordnet

$$r^2 + \frac{GA}{C} r - \frac{k^2}{C} = 0$$

eine Gl., welche nur den kleinsten und den gröfsten Werth von r enthalten kann, d. h.

$$r = a - e \text{ und } r = a + e$$

Nun ist aber in jeder quadratischen Gl. der entgegengesetzte Coefficient der einfachen Unbekannten $\left(\text{hier } \frac{GA}{C}\right)$ = der Summe der Wurzeln, und das bekannte Glied $\left(\text{hier} - \frac{k^2}{C}\right)$ = dem Product beider Wurzeln der Gl., d. h.

$$-\frac{GA}{C} = a - e + a + e = 2a$$

$$-\frac{k^2}{C} = (a-e)(a+e) = a^2 - e^2$$

Hieraus ist

$$C = -\frac{GA}{2a}$$

$$-k^2 = (a^2 - e^2)\,C = (a^2 - e^2)\left(-\frac{GA}{2a}\right)$$

und $k = \sqrt{\frac{GA}{2} \cdot \frac{a^2 - e^2}{a}}$

Diese Werthe in Gl. (1) gesetzt, giebt

$$2 \cdot \frac{GA}{r^2} \cdot \frac{a^2 - e^2}{a} + \left(\frac{\partial r}{\Delta t}\right)^2 = \frac{4GA}{r} - \frac{2GA}{a}$$

woraus

$$\left(\frac{\partial r}{\Delta t}\right)^2 = \frac{GA}{ar^2}\,[2ar - r^2 - (a^2 - e^2)]$$

und

$$\frac{\partial t}{\Delta r} = \frac{r\sqrt{\frac{a}{2GA}}}{\sqrt{-(\pm a \mp r)^2 + e^2}}$$

3. Aus der vorstehenden Differenzialgleichung erhält man

$$t = \sqrt{\frac{a}{2GA}} \int \frac{r\,\partial r}{\sqrt{-(\pm a \mp r)^2 + e^2}} \qquad (3)$$

Es ist

$$\int \frac{r\,\partial r}{\sqrt{e^2 - (a-r)^2}} = \int \frac{(-a + a + r)\,\partial r}{\sqrt{e^2 - (a-r)^2}}$$

$$= \int \frac{(a-r)\,\partial(a-r)}{\sqrt{e^2 - (a-r)^2}} - a \int \frac{\partial(a-r)}{\sqrt{e^2 - (a-r)^2}} \qquad (4)$$

Eben so

$$\int \frac{r\,\partial r}{\sqrt{e^2 - (r-a)^2}} = \int \frac{(-a + a + r)\,\partial r}{\sqrt{e^2 - (r-a)^2}}$$

$$= \int \frac{(r-a)\,\partial(r-a)}{\sqrt{e^2 - (r-a)^2}} + a \int \frac{\partial(r-a)}{\sqrt{e^2 - (r-a)^2}} \qquad (5)$$

Für 5 und 6 hat man die allgemeinen Integralformeln:

$$\int \frac{x\,\partial x}{\sqrt{a - x^2}} = -\sqrt{a - x^2}$$

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{a - x^2}} = Arc\,sin\, x \sqrt{\frac{1}{a}}$$

folglich aus 4

$$t = \sqrt{\frac{a}{2GA}} \left[-\sqrt{e^2 - (a-r)^2} - a\, Arc\,sin\, \frac{a-r}{e}\right] + C \qquad (6)$$

und aus 5

$$t = \sqrt{\frac{a}{2GA}} \left[-\sqrt{e^2 - (r-a)^2} + a\, Arc\,sin\, \frac{r-a}{e}\right] + C \qquad (7)$$

Denkt man sich den Anfang der Bewegung im Perihel, dann ist für $r = a - e$ die Zeit $t = 0$, mithin aus 6:

$$0 = \sqrt{\frac{a}{2GA}} \left[-\sqrt{e^2 - e^2} - a\, Arc\,sin\, \frac{e}{e}\right] + C$$

woraus $C = +a\,\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{a}{2GA}}$

aus 7:

$$0 = \sqrt{\frac{a}{2GA}} \left[-\sqrt{e^2 - e^2} + a\, Arc\,sin\, \frac{e}{e}\right] + C$$

woraus $C = -\frac{a\pi}{2} \sqrt{\frac{a}{2GA}}$

Man hat also entweder

$$t = \sqrt{\frac{a}{2GA}}\left[a\frac{\pi}{2} - \sqrt{e^2-(a-r)^2} - a \; Arc \sin \frac{a-r}{e}\right] \tag{8}$$

oder

$$t = \sqrt{\frac{a}{2GA}}\left[a\frac{\pi}{2} - \sqrt{e^2-(r-a)^2} + a \; Arc \sin \frac{r-a}{e}\right] \tag{9}$$

und man ersieht, dafs man beide Ausdrücke für t zusammenfassen kann in

$$t = \sqrt{\frac{a}{2GA}}\left[a\frac{\pi}{2} - \sqrt{e^2-(\pm r \mp a)^2} \mp a \; Arc \sin \left(\pm\frac{a-r}{e}\right)\right] \tag{10}$$

Setzt man $\frac{a-r}{e} = \sin\varphi$, formt $\sqrt{e^2-(\pm a \mp r)^2}$ um in

$$e\sqrt{1-\left(\frac{\pm a \mp r}{e}\right)^2} = e\sqrt{1-\sin^2(\pm\varphi)} = e\cos(\pm\varphi) = e\cos\varphi$$

und

$$\mp a \; Arc \sin \pm\frac{a-r}{e} = \mp a(\pm\varphi) = -a\varphi$$

so hat man

$$t = \sqrt{\frac{a}{2GA}}\left[a\frac{\pi}{2} - e\cos\varphi - a\varphi\right] \tag{11}$$

4. Bevor ich weiter gehe, will ich in Bezug auf Formel 11 erinnern, dafs $\int \frac{\partial x}{\sqrt{a-x^2}}$ nicht nur $= Arc \sin x\sqrt{\frac{1}{a}} + C$ sondern auch $- Arc \cos x\sqrt{\frac{1}{a}} + C'$ ist. Entwickelt man, um die Uebereinstimmung beider Integralformeln bei deren verschiedenen Constanten C und C' zu zeigen, nach der letzten Integral-Formel, so schreibt man $+ a \; Arc \cos \frac{a-r}{e}$ oder $- a \; Arc \cos \frac{r-a}{e}$ für $- a \; Arc \sin \frac{a-r}{e}$

Im ersten Fall hat man statt No. 6

$$t = \sqrt{\frac{a}{2GA}}\left[-\sqrt{e^2-(a-r)^2} + a \; Arc \cos \frac{a-r}{e}\right] + C'$$

Für die Constante ist

$$0 = \sqrt{\frac{a}{2GA}}\,[a \; Arc \cos (=1)] + C'$$

woraus $C' = 0$, und vollständig

$$t = \sqrt{\frac{a}{2GA}}\left[-\sqrt{e^2-(a-r)^2} \pm a \; Arc \cos \left(\pm\frac{a-r}{e}\right)\right]$$

Setzt man hierin $\frac{a-r}{e} = \cos\psi$, so hat man, da $\sqrt{e^2-(a-r)^2} = e\sqrt{1-\left(\frac{a-r}{e}\right)^2}$ $= e\sqrt{1-\cos^2\psi} = e\sin\psi$

$$t = \sqrt{\frac{a}{2GA}}\,[-e\sin\psi \pm a(\pm\psi)] \text{ oder}$$

$$t = \sqrt{\frac{a}{2GA}}\,[-e\sin\psi + a\psi] \tag{12}$$

Diese Formel ist nun mit Formel 11 übereinstimmend, denn da

$$\frac{a-r}{e} = \sin\varphi = \cos\psi$$

so ist

$$\sin\psi = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \cos\varphi$$

und

$$\psi = \frac{\pi}{2} - \varphi$$

Diese Werthe in Formel 12 gesetzt ergiebt

$$t = \sqrt{\frac{a}{2GA}}\left[\mp e\cos\varphi + a\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\right]$$

$$= \sqrt{\frac{a}{2GA}}\left[a\frac{\pi}{2} - e\cos\varphi - a\varphi\right]$$

wie Gl. 11

Im zweiten Fall hat man statt No. 7

$$t = \sqrt{\frac{a}{2GA}}\left[-\sqrt{e^2-(r-a)^2} - a \; Arc \cos \frac{r-a}{e}\right] + C_1$$

Für die Constante ist

$$0 = \sqrt{\frac{a}{2GA}}\,[-a \; Arc \cos(-1)] + C_1$$

woraus $C_1 = +a\pi$, daher

$$t = \sqrt{\frac{a}{2GA}}\left[a\pi - \sqrt{e^2-(r-a)^2} - a \; Arc \cos \frac{r-a}{e}\right]$$

Setzt man hierin $\frac{r-a}{e} = \cos\omega$, so hat man

$$t = \sqrt{\frac{a}{2GA}}\,[a\pi - e\sin\omega - a\omega] \tag{13}$$

eine ebenfalls mit F. 11 übereinstimmende Formel.

Denn $\frac{r-a}{e} = \cos\omega$

$\frac{a-r}{e} = \sin\varphi$

folglich $\sin\varphi = -\cos\omega = -\sin\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right) = \sin\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right)$

folglich $\varphi = \omega - \frac{\pi}{2}$

also $\omega = \varphi + \frac{\pi}{2}$

und $\sin\omega = \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\varphi$

Diese beiden letzten Werthe in Gl. 13 gesetzt, ergiebt

$$t = \sqrt{\frac{a}{2GA}}\left[a\pi - e\cos\varphi - a\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\right]$$
$$= \sqrt{\frac{a}{2GA}}\left[a\frac{\pi}{2} - e\cos\varphi - a\varphi\right]$$

wie Gl. 11.

5. Setzt man unter die $\sqrt{\ }$ in Formel 11, 12 oder 13 für A seinen Werth $R^2\frac{M}{m}$ wo R die Entfernung des Perihels vom Sonnenmittel, M die Masse der Sonne und m die Masse des Planeten bedeuten, so hat man

$$\sqrt{\frac{a}{2GR^2\frac{M}{m}}}$$

Setzt man nun die Beschleunigung gegen unsern Erdmittelpunkt g; die Masse der Erde m_1; R_1 = der Entfernung des Perihels der Ekliptik von der Sonne, so verhalten sich die Beschleunigungen des Erdkörpers und des Planetenkörpers in Beziehung auf einen im Mittelpunkt der Sonne befindlichen Massenpunkt, oder, was dasselbe ist, in Beziehung auf die Sonne selbst

$$g_1 : G = \frac{m_1}{R_1^2} : \frac{m}{R^2}$$

woraus $G = g_1\frac{m}{m_1}\frac{R_1^2}{R^2}$

mithin $2GR^2\frac{M}{m} = 2g_1R_1^2\frac{M}{m_1}$

und

$$t = \sqrt{\frac{a}{2g_1R_1^2\frac{M}{m_1}}}\left[a\frac{\pi}{2} - e\cos\varphi - a\varphi\right]$$

wo g_1 die bekannte Zahl 15,625 pr. Fufs bedeutet.

6. Die drei Formeln 11, 12, 13 können zu einer einzigen vereinigt werden; denn wenn man in 11: $\frac{\pi}{2} - \varphi = \alpha$, in 12: $\psi = \psi$ und in 13: $\pi - \omega = \gamma$ setzt, so erhält man für t und r einerlei Ausdrücke.

Für $\frac{\pi}{2} - \varphi = \alpha$ in Gl. 11 entsteht:

$$a\frac{\pi}{2} - e\cos\varphi - a\varphi = a\alpha - e\sin\alpha$$

und aus

$$\frac{a-r}{e} = \sin\varphi\,;\ r = a - e\cos\alpha$$

Für $\psi = \psi$ in Gl. 12 bleibt $a\psi - e\sin\psi$ und $\frac{a-r}{e} = \cos\psi$ wird $r = a - e\cos\psi$

Für $\pi - \omega = \gamma$ in Gl. 13 entsteht

$$a\pi - e\sin\omega - a\omega = a\gamma - e\sin(\pi-\gamma)$$
$$= a\gamma - e\sin\gamma$$

und aus $\frac{r-a}{e}\cos\omega = \cos(\pi-\gamma) = -\cos\gamma$ wird $r = a - e\cos\gamma$

Man hat also aus 11, 12 und 13

$$t = \sqrt{\frac{a}{2g_1R_1^2\frac{M}{m_1}}}\,(a\alpha - e\sin\alpha) \tag{15}$$

$$r = a - e\cos\alpha \tag{16}$$

In diesen beiden Formeln ist a die halbe grofse Axe, e die Excentricität $\sqrt{a^2-c^2}$. Sind nun diese und der Radius vector r für einen beliebigen Punkt der Bahn gegeben, so findet man zunächst α und hieraus mit Hülfe der auf unsre Erde sich beziehenden constanten dynamischen Gröfsen auch die Zeit t, welche der Planet vom Perihel aus bis zu dem zu r gehörenden Bahnpunkt verwendet hat. Ist die Zeit t gegeben, so erhält man α und hieraus auch die Länge r des Radius vector.

7. Um den Ort des Planeten in seiner Bahn angeben zu können, ist nur noch der Winkel erforderlich, den der jedesmalige Radius vector mit der grofsen Axe bildet. Also offenbar der $\angle(\varphi - \alpha)$ in Gl. 16 mit Fig. 185, indem nach Feststellung der Constante $= \alpha$ zur neuen Abscissenaxe (jetzt die grofse Axe der Ellipse) CX_1 genommen worden ist. Gl. 16 ist

$$r[GA - \sqrt{4Ck^2 + G^2A^2} \cdot \cos(\varphi - \alpha)] = 2k^2$$

die Polargleichung der Bahn.

Man erhält daraus

$$\cos(\varphi - \alpha) = \frac{GAr - 2k^2}{r\sqrt{4Ck^2 + G^2A^2}}.$$

Setzt man wieder nach No. 11

$$C = -\frac{4-n}{4} GR \frac{P}{m}$$

$$k^2 = \frac{n}{4} GR^3 \frac{P}{m}$$

$$A = R^2 \frac{P}{m}$$

so erhält man mit Hülfe von No. 11

$$\cos(\varphi - \alpha) = \frac{GR^2 \frac{P}{m}[r - \frac{n}{2}R]}{r\frac{n-2}{2} GR^2 \frac{P}{m}} = \frac{2r - nR}{(n-2)r}$$

Nun ist nach Gl. 30:

$$n = \frac{2c^2}{aR}$$

daher

$$\cos(\varphi - \alpha) = a\frac{R}{r}\frac{ar - c^2}{c^2 - aR} = \frac{ar - (a^2 - e^2)}{er} \quad (17)$$

Man bezeichne den $\angle(\varphi - \alpha)$ zwischen dem Radius vector r und der grofsen Axe a mit ϱ, so gehört dieser Winkel während des Laufs des Planeten nach und nach allen Quadranten an. Zwischen dem Perihel und den beiden Punkten über der Sonne senkrecht auf der Axe ist $\cos\varrho$ positiv, zwischen den letzten beiden Punkten und dem Aphel negativ, für die beiden senkrechten Radien $= 0$.

Für das Perihel ist $r = a - e$. Diesen Werth in Gl. 17 gesetzt, giebt aber

$$\cos\varrho = \frac{a(a-e) - (a^2 - e^2)}{e(a-e)} = \frac{e(e-a)}{e(a-e)}$$
$$= -1 \text{ (statt } +1)$$

Für das Aphel ist $r = a + e$. Diesen Werth eingesetzt, giebt

$$\cos\varrho = \frac{a(a+e) - (a^2 - e^2)}{e(a+e)} = \frac{e(a+e)}{e(a+e)}$$
$$= +1 \text{ (statt } -1)$$

Mithin ist die Formel für $\varrho = (\varphi - \alpha)$ Gl. 17 zu schreiben

$$\cos\varrho = \frac{a^2 - e^2 - ar}{er} \quad (18)$$

Für den dritten und vierten Quadrant darf man r nicht negativ setzen, denn es wäre dann

$$\cos\varrho = \frac{a^2 - e^2 + ar}{er}$$

Da nun $a^2 - e^2$ immer positiv und ar immer $> er$ ist, so würde der Zähler $>$ als der Nenner sein, und $\cos\varrho > 1$ werden. Jeder $\cos\varrho$ für ein bestimmtes r gibt also 2 Werthe von ϱ; für den positiven $\cos$ liegt ϱ entweder im ersten oder im vierten, für den negativen $\cos$ im zweiten oder dritten Quadrant.

8. Anwendung der Formeln.

In der Formel 15:

$$t = \frac{\sqrt{a}(a\alpha - e\sin\alpha)}{\sqrt{2g_1 R_1^2 \frac{M}{m_1}}}$$

ist nur der Zähler von den fraglichen Bahnelementen des Planeten abhängig. Der Nenner, dessen Factoren auf unsre Erde sich beziehen, ist constant.

g_1 ist $= 15{,}625$ preufs. Fufs $= \frac{15{,}625}{23642}$ g. Ml.

R_1 die Entfernung des Perihels von der Sonne, schwankt nach No. 24 des vor. Art. zwischen 20297474 und 20335031 geogr. Ml.

$\frac{M}{m_1}$ das Verhältnifs der Sonnenmasse zur Erdmasse schwankt nach No 25 des vor. Art. zwischen 334936 und 365412.

Nennt man den noch unsicheren constanten Nenner N, so hat man

$$t = \frac{\sqrt{a}}{N}(a\alpha - e\sin\alpha)$$

Die Zeit t in Secunden hat mit g in preufs. Fufsen Zusammenhang; es mufs also entweder R, a und e durch Multiplication mit 23642 in preufs. Fufsen ausgedrückt werden, um t in Secunden zu erhalten oder es ist R, a, e in geogr. Meilen beizubehalten und das gefundene t mit 23642 zu multipliciren. Demnach ist

$$t = \frac{23642}{N}\sqrt{a}(a\alpha - e\sin\alpha) \text{ Secunden}$$

und da man t bei Weltkörpern, um Reductionen aus Secunden zu vermeiden, sogleich in Tagen ausdrückt, so hat man

$$t = \frac{23642}{60 \cdot 60 \cdot 24\, N}\sqrt{a}(a\alpha - e\sin\alpha) \text{ Tage.}$$

Man ersieht übrigens, dafs $N =$ ist der $\sqrt[2]{}$ eines in geogr. Kubikmeilen ausgedrückten Würfels, so dafs t als abstracte Zahl erscheint.

Setzt man (aus Vega's Logarithmen, herausgegeben von Dr. Bremiker) $\frac{M}{m} = 354936$

nach le Verrier, die halbe grofse Axe der Ekliptik = 20682329 geogr. Ml. also (s. No. 24, B des vor. Art.) $R_1 = 20335031$ geogr. Ml. dann ist

$$t = \frac{23642\sqrt{a}\,[a\alpha - e\sin\alpha]}{60\cdot 60\cdot 24\cdot 20335031\sqrt{2\cdot\frac{15,625}{23642}\,354936}} = \frac{\sqrt{a}\,[a\alpha - e\sin\alpha]}{1609653150} \text{ in Tagen.}$$

9. Es leuchtet ein, dafs die Auffindung des richtigen Nenners für die gesammte Astronomie von der gröfsten Wichtigkeit ist, und es geschieht dies auf folgende Weise. Setzt man der Kürze wegen den Werth der constanten Zahlen im Ausdruck für $t = \frac{1}{k}$, also

$$t = \frac{1}{k}\sqrt{a}(a\alpha - e\sin\alpha) \text{ Tage} \qquad (19)$$

so ist für $r = R$ in Gl. 16

$$\cos\alpha = \frac{a-R}{e} = \frac{a-(a-e)}{e} = 1$$

mithin α entweder $= 0$ oder $= 2\pi$

Mithin nach Gl. 19 t entweder $= 0$ oder die ganze Umlaufszeit des Planeten

$$T = \frac{2\pi}{k}\sqrt{a^3}$$

Betrachtet man a als die halbe grofse Axe der Erdbahn, setzt diese $= 1$, und T die bekannte Umlaufszeit = ein Jahr = 365,256384 Tage, so hat man aus $T = \frac{2\pi}{k}$

$$k = \frac{2\pi}{365,256384}$$

Man findet $\log k = 0,2355821 - 2$
und $k = 0,0172021$

Diese Zahl k heifst die Charakteristik des Sonnensystems, und sie ist gleichbedeutend mit der mittleren täglichen Bewegung der Erde in ihrer Bahn.

Da diese Zahl k in Theilen der halben grofsen Axe unsrer Ekliptik angegeben ist, so mufs man diese wiederum kennen, um eine Anwendung auf andre Planeten machen zu können, oder man drückt die halben Axen anderer Bahnen als Theile oder Vielfache der halben Erdbahnaxe aus.

Bezeichnet man die halbe Erdbahnaxe mit A, die eines anderen Planeten mit a, setzt $a = nA$, so hat man die Umlaufszeit desselben

$$T = \frac{2\pi}{k}\sqrt{n^3}$$

oder $$T = \frac{2\pi}{k}\,\frac{\sqrt{a^3}}{\sqrt{A^3}}$$

Für $A = 20682329$ geogr. Ml. hat man
$\log\, k\sqrt{A^3} = 9,2089812$
also $k\sqrt{A^3}$ etwa 1618000000

Bei recht genauen Beobachtungen und Berechnungen der halben grofsen Erdbahnaxe ist man also auch im Stande, das in diesem und dem vor. Art. schon oft betrachtete fragliche $\frac{M}{m}$ zwischen Sonnen- und Erdmasse eben so genau zu finden. Nach No. 8 hat man, wenn $A = 20682329$ und R^1 = der Entfernung des Perihels von der Sonne $= 20335031$ für $\frac{M}{m}$ die Gl.

$$\frac{23642}{60\cdot 60\cdot 24\cdot 20335031\sqrt{\left(2\cdot\frac{15,625}{23642}\cdot\frac{M}{m}\right)}} = \frac{1}{0,0172021\sqrt{20682329^3}}$$

10. Statt der Formel 15:

$$t = \frac{\sqrt{a}\,[a\alpha - e\sin\alpha]}{\sqrt{2g_1 R_1{}^2\frac{M}{m_1}}}$$

deren Constanten No. 8 in Zahlenwerthen angegeben, hat man nun die einfachere

$$t = \frac{1}{k}\sqrt{a}\,(a\alpha - e\sin\alpha) \text{ Tage.} \qquad (20)$$

und für die ganze Umlaufszeit

$$T = \frac{2\pi}{k}\sqrt{a^3} \text{ Tage} \qquad (21)$$

wo $k = 0,0172021$
und a die halbe grofse Axe als Theil oder Vielfaches der halben grofsen Erdbahnaxe bedeutet.

$$\text{Oder } t = \frac{\sqrt{a}\,(a\alpha - e\sin\alpha)}{k\sqrt{A^3}} \text{ Tage} \qquad (22)$$

$$\text{und } T = \frac{2\pi}{k}\,\frac{\sqrt{a^3}}{\sqrt{A^3}} \text{ Tage} \qquad (23)$$

wenn a in ihrer Länge angegeben wird, und A die halbe grofse Erdbahnaxe bedeutet.

Beispiel. Für den Planet Jupiter wird von den Astronomen angegeben $a = 107525000$ geogr. Ml.

Für $A = 20682329$ geogr. Ml. hat man

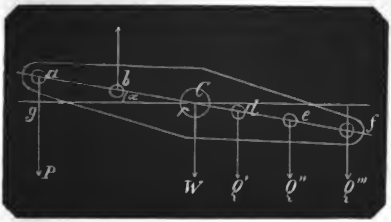
$$T = \frac{2\pi}{k}\cdot\sqrt{\left(\frac{107525000}{20682329}\right)^3}$$

$\log$ 107525000	= 8,0315095
$\log$ 20682329	= 7,3155994
$\log$ Quotient	= 0,7159101
$\log$ Kubus	= 2,1477303
$\log \sqrt[2]{}$	= 1,0738651 5
$\log$ 2	= 0,3010300
$\log \pi$	= 0,4971498 7
$\log$ Zähler	= 1,8720450
$\log k$	= 0,2355821−2
$\log T$	= 3,6364629
und T	= 4329,751 Tage

Das Jahr = $365\frac{1}{4}$ Tage giebt $T = 11$ Jahr 312 Tage. Die Umlaufszeit des Jupiter wird von den Astronomen 11 Jahr $310\frac{1}{2}$ Tage bis 11 Jahr 314 Tage 20 Stunden angegeben.

Balancier. Ein hebelförmiger Maschinentheil, durch welchen die Kraft auf Lasten einwirkt, und der wie ein Waagebalken auf und niederschwingt, wiewohl man auch einarmige B. hat. Es sei Fig. 192 der zu einer Niederdruckmaschine gehörende B. links in seinem höchsten, also rechts in seinem niedrigsten Stande unter dem $\angle\,\alpha$ mit dem Horizont. P sei die abwärts wirkende Kraft des über den Kolben getretenen Dampfes, Q der aufwärts wirkende Widerstand der Luftpumpe, Q' der abwärts wirkende Widerstand der Kesselspeisepumpe, Q'' der der zum Condensator erforderlichen Kaltwasserpumpe, mit welcher in der Regel die Speisepumpe von derselben Welle aus betrieben wird, Q''' der der Treibstange des Krummzapfens, W das Gewicht des B. Die Abstände der Kraft und der Widerstände vom Mittel C seien der Reihe nach a, b, d, e, f, der Halbmesser des B.-Zapfens C sei r, der Reibungscoefficient μ, so hat man mit alleiniger Berücksichtigung der Reibung des B.-Zapfens in seinem Lager die Gleichung für das Gleichgewicht:

Fig. 192.



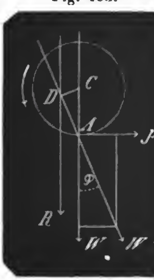
$$Pa\cos\alpha = Qb\cos\alpha + Q'd\cos\alpha + Q''e\cos\alpha + Q'''f\cos\alpha + \mu r(P - Q + Q' + Q'' + Q''' + W)$$

woraus P gefunden werden kann, wenn alle übrigen Gröfsen bekannt sind; und zwar ist

$$P = \frac{(Qb + Q'd + Q''e + Q'''f)\cos\alpha + \mu r(-Q + Q' + Q'' + Q''' + W)}{a\cos\alpha - \mu r} \qquad (1)$$

2. Später hat man statt des Reibungscoefficienten μ einen Reibungswinkel eingeführt: Es sei Fig. 193 der Mittelzapfen. Durch den Druck W wird der Zapfen in A gegen das Lager geprefst, die dadurch entstehende Reibung widersetzt sich der Umdrehung des Zapfens nach der Pfeilrichtung, und es mufs zu deren Ueberwindung eine Kraft p waagerecht angebracht werden. Fürs Gleichgew. zwischen W und p entsteht aus dem # der Kräfte die Mittelkraft W', durch deren alleinige Thätigkeit die Reibung überwunden wird. Bezeichnet man den $\angle\,WAW'$ mit φ, so ist $W' = W\sec\varphi$, und sie wirkt mit dem Hebelsarm $CD = r\sin\varphi$, mithin das Moment von $W' = W\sec\varphi\cdot r\sin\varphi = Wr\,tg\,\varphi$.

Fig. 193.



Man ersieht, dafs $p = W\,tg\,\varphi$, dafs p aber nichts anderes sein kann, als μW und $\mu = tg\,\varphi$, so dafs die Gl. 1 sich abändert in

$$P = \frac{(Qb + Q'd + Q''e + Q'''f)\cos\alpha + (-Q + Q' + Q'' + Q''' + W)\,r\,tg\,\varphi}{a\cos\alpha - r\,tg\,\varphi} \qquad (2)$$

worin φ den Winkel bedeutet, dessen Tangente = dem Reibungscoefficient ist, und der **Reibungswinkel** genannt wird.

3. In der neueren Mechanik wird nachgewiesen, dafs die Resultante R der Kraft und sämmtlicher Widerstände in einen Punkt auf der Seite der Kraft in der Entfernung $DC = r\sin\varphi$ (Fig. 193) vom Mittel C fällt, man nimmt die Momente auf diesen Punkt, so dafs der Hebelsarm von $R = 0$ wird und hat:

$$P(a\cos\alpha - r\sin\varphi) = Q(b\cos\alpha - r\sin\varphi) + Q'(d\cos\alpha + r\sin\varphi) + Q''(e\cos\alpha + r\sin\varphi) + Q'''(f\cos\alpha + r\sin\varphi) + Wr\sin\varphi$$

woraus

$$P = \frac{(Qb + Q'd + Q''e + Q'''f)\cos\alpha + (-Q + Q' + Q'' + Q''' + W)r\sin\varphi}{a\cos\alpha - r\sin\varphi} \qquad (3)$$

Zum Vergleich dieser Formel mit der Formel 1 hat man

$$\sin\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\cdot\cos\varphi = \frac{tg\,\varphi}{\sec\varphi} = \frac{tg\,\varphi}{\sqrt{1+tg^2\varphi}} = \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}$$

welcher Ausdruck an die Stelle von μ (Formel 1) gesetzt ist. Diese Formel 3 ist die richtigere.

4. Bei Berücksichtigung der Reibungswiderstände zwischen den Zapfen und Lagern der Aufhängepunkte sämmtlicher Lenkstangen ist zu erwägen, dafs zwischen jedem dieser Zapfen und Lager dieselbe Erscheinung (Fig. 193) vorkommt, dafs nämlich statt der Druckkraft im Mittel die Resultante aus diesem Druck und dem Reibungswerth in Entfernung wie $DC = r\sin\varphi$ vom Mittel wirksam wird, welche den Hebelsarm der Kraft um solche Länge vermindert und den eines Widerstandes zum Nachtheil der Kraft vermehrt.

Sind r', ϱ, ϱ', ϱ'', ϱ''' die Halbmesser der Zapfen, die Reibungscoefficienten oder Winkel bei einerlei Metall mit dem von r gleich grofs, so erhält man nun die Gleichung:

$$P[a\cos\alpha - (r+r')\sin\varphi] = Q[b\cos\alpha - (r-\varrho)\sin\varphi] + Q'[d\cos\alpha + (r+\varrho')\sin\varphi] + Q''[e\cos\alpha + (r+\varrho'')\sin\varphi] + Q'''[f\cos\alpha + (r+\varrho''')\sin\varphi] + Wr\sin\varphi$$

woraus

$$P = [(Qb + Q'd + Q''e + Q'''f)\cos\alpha + (-Q + Q' + Q'' + Q''' + W)r\sin\varphi + (Q\varrho + Q'\varrho' + Q''\varrho'' + Q'''\varrho''')\sin\varphi] : [a\cos\alpha - (r+r')\sin\varphi] \qquad (4)$$

5. Anwendung.

Bei der Berechnung der Kraft P ist zu berücksichtigen, dafs bei der gezeichneten Lage des B., wo die linke Seite im Begriff ist, niederzugehen, die rechts aufsteigenden Nebenbelastungen, bestehend in zwei Kolbenstangen nebst Kolben und einer Bläulstange, von der Kraft P mit aufgezogen, deren Gewichte also von P mit überwunden werden müssen, dafs dagegen, wenn die Kraft P in der entgegengesetzten Lage des B. anfängt, senkrecht aufwärts zu wirken, die genannten Nebenlasten senkrecht abwärts wirkend zur Gewältigung der Lasten Q', Q'', Q''' mit beitragen. Die links befindlichen Nebenlasten, die Kolben und Kolbenstangen von P und Q wirken in der gezeichneten Lage der Kraft zum Vortheil, beim Aufsteigen zum Nachtheil der Kraft. Die beiden Hälften des B. selbst wirken immer einander entgegengesetzt; demnach sind die genannten Nebenlasten nur als Belastung des B.zapfens C in Rechnung zu bringen. Die Reibungswiderstände zwischen den Kolben und den Cylinder- und Stiefelwandungen wirken der Kraft immer entgegen, und müssen mit den eigentlichen Widerständen summirt werden.

Z. B. für eine Niederdruck-Dampfmaschine von 20 Pferden Kraft wiegt der B. bei 12 Fufs Länge, einer Höhe von 20 Zoll in der Mitte und einer Dicke von 2 Zoll excl. der Verstärkungen circa 2400 Pfd. Die Gewichte der Kolben, der Kolbenstangen und der Bläulstange sind auf beide Seiten des B. ziemlich gleichmäfsig vertheilt und betragen etwa eben so viel, als das Gewicht des B.; mithin kann

1) $W = 4800$ Pfd. gesetzt werden.

Die Welle C des B. ist etwa 3 Fufs lang, hat in der Mitte $4\frac{1}{2}$ Zoll, in den Lagern 3 Zoll Durchmesser bei $5\frac{1}{4}$ Zoll Länge in denselben.

Der Dampfkolbenhub soll 4 Fufs, die Kolbenbewegung per Minute 200 Fufs, die Geschwindigkeit per Secunde also $3\frac{1}{3}$ Fufs betragen; dieselbe Geschw. hat nun die Bläulstange des Krummzapfens, und in dieser mufs der ganze Nutz-Effect von 20 Pferden Kraft vereinigt angesehen werden.

1 Pferdekraft ist 510 in Pfund und Fufs per Secunde, also hat man den Druck Q''' aus der Gleichung

2) $\quad 20\cdot 510 = 3\frac{1}{3}\cdot Q'''$

woraus $\quad Q''' = 3060$ Pfd.

die Länge $f = 6$ Fufs.

Die Welle für die Bläulstange beträgt etwa 1 Fufs $4\frac{1}{2}$ Zoll, ihre Stärke innerhalb des B. 3 Zoll, in den Lagern der Bläulstange $2\frac{1}{2}$ Zoll Durchmesser bei 3 Zoll Länge in denselben.

Die Kaltwasserpumpe für die Druckkraft Q'' hat 8 Zoll Durchmesser, mithin 50,265 □Zoll; der Druck auf den Kolben pro □Zoll kann = 10 Pfund gesetzt werden, die Reibung zwischen Kolben, Kolbenstange und Wandungen = $\frac{1}{10}$ gesetzt, giebt

3) $\quad Q'' = 11\times 50{,}265 = 553$ Pfd.

die Länge $e = 3\frac{1}{2}$ Fufs.

Die Welle im B. ist etwa 1 Fuſs lang, in der Mitte $1\frac{3}{4}$ Zoll stark, in den Lagern des Bügels der Kolbenstange $1\frac{1}{2}$ Zoll im Durchmesser bei 1,6 Zoll Länge in denselben.

Die Speisepumpe für die Druckkraft Q' hat $3\frac{1}{4}$ Zoll Durchmesser = 8,29 □Zoll Querschnitt. Der Druck auf den Kolben pro □Zoll $6\frac{1}{2}$ Pfd., die Reibung = $\frac{1}{16}$ gesetzt, giebt

4) $Q' = \frac{11}{10} \cdot 8{,}29 \cdot 6\frac{1}{2} = 59$ Pfund

die Länge $d = 2$ Fuſs.

Welle und Zapfen im B. wie bei der Kaltwasserpumpe, mit der die Speisepumpe übrigens auch an einerlei Welle betrieben wird.

Die Luftpumpe für die Druckkraft Q hat 16 Zoll Durchmesser = 201 □Zoll Querschnitt; der Druck auf den Kolben wegen der unvollkommenen Luftleere = $15 - 1{,}4 = 13{,}6$ Pfund pro □Zoll, die Reibung = $\frac{1}{16}$ gesetzt, giebt

5) $Q = \frac{11}{10} \cdot 13{,}6 \cdot 201 = 3007$ Pfd.

die Länge $b = 3$ Fuſs.

Die Welle im B. ist 1 Fuſs $4\frac{1}{2}$ Zoll lang, in der Mitte 3 Zoll, in den Lagern $2\frac{1}{2}$ Zoll im Durchmesser bei 3 Zoll Länge in denselben; die Länge $a = 6$ Fuſs.

6) Welle und Zapfen für P im B. wie bei der Bläulstange.

Nun ist $aC = 6$ Fuſs, und da gh die Horizontale bedeutet, $ag = fh$ = dem halben Hube von 4 Fuſs = 2 Fuſs, mithin

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{6^2 - 2^2}}{6} = \tfrac{1}{3}\sqrt{8} = 0{,}9428090$$

Setzt man nun den Reibungscoefficienten

$$\mu = tg\,\varphi = \tfrac{1}{8}$$

so hat man

$$\varphi = Arc\,(tg = \tfrac{1}{8}) = 7^\circ\,7'\,30''$$
$$\sin\varphi = 0{,}124034$$

Man findet demnach für die Berechnung der Kraft P nach den obigen Formeln 1 bis 4:

$$Qb + Q'd + Q''e + Q'''f = 3007 \cdot 3 + 59 \cdot 2 + 553 \cdot 3\tfrac{1}{2} + 3060 \cdot 6 = 29434{,}5 \text{ (Pfund, Fuſs)}$$
$$29434{,}5 \times (\cos\alpha = 0{,}942809) = 27751{,}1 \text{ (Pfund, Fuſs)}$$
$$-Q + Q' + Q'' + Q''' + W = -3007 + 59 + 553 + 3060 + 4800 = 5465 \text{ (Pfund)}$$
$$r = 1\tfrac{1}{2} \text{ Zoll} = \tfrac{1}{8} \text{ Fuſs}$$
$$\mu r = r\,tg\,\varphi = \tfrac{1}{8} \cdot \tfrac{1}{8} = \tfrac{1}{64} = 0{,}015625 \text{ Fuſs}$$
$$5465 \times r\,tg\,\varphi = 5465 \times \tfrac{1}{64} = 85{,}40 \text{ (Pfund, Fuſs)}$$
$$5465 \cdot r \cdot \sin\varphi = 5465 \cdot \tfrac{1}{8} \cdot 0{,}124034 = 84{,}73 \text{ (Pfund, Fuſs)}$$
$$(Q\varrho + Q'\varrho' + Q''\varrho'' + Q'''\varrho''')\sin\varphi = (3007 \cdot \tfrac{5}{48} + 59 \cdot \tfrac{1}{16} + 553 \cdot \tfrac{1}{16} + 3060 \cdot \tfrac{5}{48})\sin\varphi$$
$$= 670{,}23 \cdot 0{,}124034 = 82{,}13 \text{ (Pfund, Fuſs)}$$
$$a\cos\alpha = 6 \cdot 0{,}942809 = 5{,}656854 \text{ Fuſs}$$
$$r\sin\varphi = \tfrac{1}{8} \times 0{,}124034 = 0{,}015504 \text{ Fuſs}$$
$$(r + r')\sin\varphi = (\tfrac{1}{8} + \tfrac{5}{48}) \cdot 0{,}124034 = 0{,}028424 \text{ Fuſs.}$$

Es ist mithin nach Formel 1 und 2:

$$P = \frac{27751{,}10 + 85{,}40}{5{,}656854 - 0{,}015625} = 4934{,}47 \text{ Pfd.}$$

nach Formel 3:

$$P = \frac{27751{,}10 + 84{,}73}{5{,}656854 - 0{,}015504} = 4934{,}25 \text{ Pfd.}$$

nach Formel 4:

$$P = \frac{27751{,}10 + 84{,}73 + 82{,}13}{5{,}656854 - 0{,}028424} = 4960{,}17 \text{ Pfd.}$$

Der Unterschied ist also in den Resultaten der Praxis nur ganz unbedeutend, wenn man statt des *sin* des Reibungswinkels die *tang* einführt, dagegen um so bedeutender, wenn man die Reibung in den Aufhängepunkten vernachlässigt, und es darf daher nur Formel 4 angewendet werden.

7) Hat der B. die entgegengesetzte Lage, fängt also die Bewegung links von unten nach oben an, so ändert sich in allen 4 Formeln nur der zusammengesetzte Factor in dem zweiten Glied des Zählers $-(Q + Q' + Q'' + Q''' + W)$ in $(+Q - Q' - Q'' - Q''' + W)$, hier also 5465 in 4135 und man hat in dem P nach Formel 4, statt 84,73

$$4135 \times 0{,}015504 = 64{,}11$$

woraus

$$P = 4956{,}50 \text{ Pfund.}$$

Um daher für beide äuſsersten Lagen des B. die mittlere Kraft P zu erhalten, schreibt man

$$\frac{84{,}73 + 64{,}11}{2} = 74{,}42$$

oder schon in Formel (4) $Wr\sin\varphi$ $= \frac{1}{2}(\mp Q \pm Q' \pm Q'' \pm Q''' + 2W)r\sin\alpha$ und man erhält

$$P = 4958{,}33 \text{ Pfund.}$$

Hat der B. die waagerechte Lage, so ist $\alpha = 0$ und $\cos\alpha = 1$. Dann ist im Mittel für den Aufgang und den Niedergang von P

$$P = \frac{29434{,}5 + 74{,}42 + 82{,}13}{6 - 0{,}028424} = 4955{,}31 \text{ Pfd.}$$

Der Unterschied der erforderlichen Kraft für die beiden äuſsersten und die mitt-

leren horizontalen Lagen des B. ist in dem gegebenen Beispiel nicht sehr groſs, und in den Zwischenlagen des B. noch geringer. Will man die mittlere Kraft P finden, so hat man nach dem Vorstehenden die beiden Formeln:

$$P = \frac{(Qb + Q'd + Q''e + Q'''f) \cos \alpha + (Wr + Q\varrho + Q'\varrho' + Q''\varrho'' + Q'''\varrho''') \sin \varphi}{a \cos \alpha - (r + r') \sin \varphi} \quad (5)$$

und

$$P = \frac{Qb + Q'd + Q''e + Q'''f + (Wr + Q\varrho + Q'\varrho' + Q''\varrho'' + Q'''\varrho''') \sin \varphi}{a - (r + r') \sin \varphi} \quad (6)$$

Erstere für die beiden äuſseren, letztere für die mittleren Lagen des B.; und für das mittlere P aus beiden den Mittelwerth genommen.

Balkenfuſs. Ein bei den Steinmetzen übliches Körpermaaſs, welches aber nur zur Erleichterung der Duodecimalrechnung und um groſse Bruchtheile von Kubikfuſs zu vermeiden, eingeführt ist. Der Kubikfuſs wird deshalb in 12 Schachtfuſs, der Schachtfuſs in 12 Balkenfuſs eingetheilt; der B. hat also 12 Kubikzoll.

Ein Werkstück 6' 6" lang, 3' 5" breit, 1' 2" hoch würde berechnet werden:

$$6\tfrac{1}{2} \cdot 3\tfrac{5}{12} \cdot 1\tfrac{1}{6} = \frac{13}{2} \cdot \frac{41}{12} \cdot \frac{7}{6} = \frac{3731}{144}$$

$$= 25\,\frac{131}{144} \text{ Kubikfuſs.}$$

Man multiplicirt aber lieber:

6'6"×3'5" nämlich

6'×3'	= 18□'				
6'×5"	= 2 „	6 (Fuſs, Zoll)			
3'×6"	= 1 „	6 „	„		
5"×6"	= — „	2 „	„	6□"	
Summa	22□'	2 (Fuſs, Zoll)		6□"	
×	1'	2"			
1'×22□'	= 22 c'				
1'× 2 F.Z.	= — „	2 Schtf.			
1'× 6□"	= — „	— „		6 Bkf.	
2"×22□'	= 3 „	8 „		— „	
2"× 2 F.Z.	= — „	— „		4 „	
2"× 6□"	= — „	— „		1 „	
Summa	25 c'	10 Scht'		11 Bk'	

$= 25 + \frac{10}{12} + \frac{11}{144}$ Kubikfuſs (vgl. algebraische Geometrie No. 3 und 4).

Balkenmaaſs. Der allgemeine Name des bei Berechnungen früher gebräuchlichen Körpermaaſses, welches, wie der vorstehende Balkenfuſs, nur noch zu Erleichterung der Rechnung angewendet wird. Man dachte sich dabei ein vierkantiges Prisma (ein Balken) von quadratischem Querschnitt. So war eine Balkenruthe ein Volumen von 1 Ruthe lang 1□Fuſs Querschnitt = 12 Kubikfuſs; ein Balkenfuſs ein Volumen von 1 Fuſs lang und 1□Zoll Querschnitt = 12 Kubikzoll; ein Balkenzoll war 1 Zoll lang 1□Linie im Querschnitt = 12 Kubiklinien.

Ballistik. (Ballista, ein grobes Geschütz, eine Wurfmaschine bei den Römern, von βάλλειν, werfen, schlendern) wird deutsch Geschützkunde genannt, wobei man sich aber nicht zu denken hat, daſs sie die Lehre von der Anfertigung der Geschütze allein, sondern diese nur in so weit in sich schlieſst, als deren wesentliche Construction und deren Dimensionsverhältnisse auf die beabsichtigte Wirkung des Geschützes von Einfluſs ist. B. ist genau genommen die Wissenschaft von den geworfenen Körpern, deren Bahnen in Form und Länge, deren Geschwindigkeiten in Beziehung auf die Gröſsen der darauf verwendeten Wurfkräfte; also Schieſskunde, Schieſswissenschaft.

Die B. zerfällt demnach in 4 Theile:

A. In die Lehre von der Bewegung der Geschosse. Diese würde schon in dem Art. Bahn geworfener Körper vollständig abgehandelt sein, wenn dort der Widerstand, den die atmosphärische Luft den geworfenen Körpern entgegensetzt, berücksichtigt worden wäre.

B. In die Lehre von den Geschossen, deren Form und Construction, in Beziehung auf die Mittel, durch welche die Wurfkräfte entwickelt werden; als Pfeil durch Armbrust; also durch Elasticität einer gespannten Schnur; Stein durch Schleuder, also Masse durch Schwungkraft; Kugel durch Rohr, also durch Entbindung von Gasen aus dem Schieſspulver oder durch comprimirte atmosphärische Luft.

C. In die Lehre von der Construction der Wurfapparate in Beziehung auf die Wurfkräfte und die Geschosse.

D. In die Lehre von den Entwickelungsmitteln verlangter Wurfkräfte.

2. Für die Lehre von der Bewegung der Geschosse hat man aus dem Art. Bahn geworfener Körper, an den hier angeknüpft werden muſs, ohne Berücksichtigung des Luftwiderstandes:

A. Eine mit der Anfangsgeschwindigkeit c senkrecht aufwärts geworfene Masse steigt $t = \frac{c}{2g}$ Secunden lang auf die

Höhe $h = gt^2 = \frac{c^2}{4g}$, worauf sie zu fallen anfängt, t Secunden lang fällt, und von dem Augenblick des Wurfs ab, nach $2t$ Secunden mit der Endgeschwindigkeit c wieder auf die Erde kommt.

B. Eine mit der Anfangsgeschwindigkeit c unter dem Richtungswinkel α, also schräg aufwärts geworfene Masse, steigt $t = \frac{c}{2g} \sin \alpha$ Secunden lang bis zur Höhe $h = \frac{c^2}{4g} \sin^2\alpha$, wo sie von dem Abgangsort, horizontal gemessen, $\frac{c^2}{4g} \sin 2\alpha$ entfernt ist, und fällt von da ab wiederum $t = \frac{c}{2g} \sin \alpha$ Secunden lang, wonach sie in Entfernung $\frac{c^2}{2g} \sin 2\alpha$ vom Abgangsort wieder zur Erde kommt, und die Bahn, welche sie beschreibt, ist eine Parabel.

3. In der Wirklichkeit, nämlich beim Wurf einer Masse durch die atmosphärische Luft, erleiden diese Gesetze einige Abänderung: die Beschleunigung g wird nämlich vermindert, und zwar wächst diese Verminderung sehr nahe proportional dem Quadrat der Geschwindigkeit des durch die Luft bewegten Körpers, so dafs, wenn A einen Versuchscoefficienten bezeichnet, die Beschleunigung beim senkrechten Fall$= g - Av^2$ in dem Augenblick ist, wo der Körper die Geschw. $= v$ hat; die Bewegung ist mithin eine ungleichförmig beschleunigte. In dem später folgenden Art.: „Bewegung in einem widerstehenden Mittel" wird auch des Falles gedacht werden, der in die B. gehört, nämlich wo ein Körper mit einer Geschw. V in die Höhe geworfen wird, wo also die Anfangsbeschleunigung $-(g + AV^2)$ ist.

Man findet dort entwickelt:

1) Die Höhe h bis zu dem Punkt, wo die aufsteigende Geschwindigkeit noch v ist

$$h = \frac{1}{4A} \, logn \, \frac{g + AV^2}{g + Av^2}$$

2) Die Höhe H in dem Punkt, wo der Körper wieder zu fallen beginnt

$$H = \frac{1}{4A} \, logn \, \frac{g + AV^2}{g}$$

3) Die aufsteigende Geschw. in der Höhe h

$$v = \sqrt{\left[\frac{g}{A}\left(\frac{g + AV^2}{ge^{4Ah}} - 1\right)\right]}$$

4) die Zeit des Aufsteigens bis zur Geschw. v

$$t = \frac{1}{2\sqrt{gA}}\left[Arc \, tg \, V\sqrt{\frac{A}{g}} - Arc \, tg \, v\sqrt{\frac{A}{g}}\right]$$

5) und die Zeit des Aufsteigens bis zur Geschw. $= 0$

$$T = \frac{1}{2\sqrt{gA}} \, Arc \, tg \, V\sqrt{\frac{A}{g}}$$

Die vorstehenden Formeln sind von Form und physikalischer Beschaffenheit des geworfenen Körpers ganz unabhängig, und nur dann von praktischem Werth, wenn der Coefficient A für einen zu werfenden Körper bekannt ist. Aber ein Wurfspiefs findet in der Luft weniger Widerstand als eine Kugel, und eine eiserne Kugel weniger, als ein Ball von losen Daunen.

4. Die heutige Ballistik, ein Hauptzweig der Artilleriewissenschaften, beschäftigt sich aber nur mit den Feuerwaffen, und hier allein liegen Versuche und Erfahrungen zu wissenschaftlicher Benutzung vor. Die Geschosse sind eiserne Kugeln, ihr Widerstand in der Luft ist proportional ihren gröfsten Kreisflächen oder den Quadraten ihrer Durchmesser d, und wenn man den Widerstand zugleich proportional dem Quadrat der Geschw. v der Kugel setzt, so kann man statt des allgemeinen Widerstandes Av^2 auch schreiben ad^2v^2, wo a als Coefficient für einen bestimmten Kugeldurchmesser gegeben sein mufs.

Wird eine Kugel von dem Gewicht p und dem Durchmesser d in die Höhe geworfen, so ist der Widerstand $= p + ad^2v^2$ und eben so grofs ist also auch die für's Gleichgewicht während der Bewegung bei der Geschw. v erforderliche Kraft; die zu bewegende Masse ist p, mithin die beschleunigende Kraft $= \frac{p + ad^2v^2}{p}$ und die Beschleunigung $G = -g\,\frac{p + ad^2v^2}{p}$

Gemäfs der allgemeinen phoronomischen Formel

$$C^2 = 4\int G\partial s$$

wo C die Endgeschwindigkeit und s den bis dahin von der Ruhe aus zurückgelegten Weg bedeuten, hat man nun

$$v^2 = 4\int -g\,\frac{p + ad^2v^2}{p}\,\partial h$$

wenn h die zu v gehörige senkrechte Wurfhöhe bedeutet

$$= -\frac{4g}{p}\int (p + ad^2v^2)\,\partial h$$

und nach h differenzirt

$$2\,v\partial v = -\frac{4g}{p}(p + ad^2v^2)\,\partial h$$

hieraus

$$\partial h = -\frac{p}{2g}\,\frac{v\cdot\partial v}{p+ad^2v^2}$$

und

$$h = -\frac{p}{2g}\int\frac{v\partial v}{p+ad^2v^2}$$

Nach der allgemeinen Integralformel:

$$\int\frac{x\,\partial x}{a+bx^2} = \frac{1}{2b}\,logn\,(a+bx^2)$$

hat man nun

$$h = -\frac{p}{4gad^2}\,logn\,(p+ad^2v^2) + C$$

für $h = 0$ wird $v =$ der Anfangsgeschw. V, mithin vollständig:

$$h = \frac{p}{4gad^2}\,logn\,\frac{p+ad^2V^2}{p+ad^2v^2} \qquad (1)$$

also die gröfste Höhe für die Geschw. $v = 0$

$$H = \frac{p}{4gad^2}\,logn\,\frac{p+ad^2V^2}{p} \qquad (2)$$

und hieraus, wenn man die Anfangsgeschw. V für eine Höhe H finden will

$$V^2 = \frac{p}{ad^2}\left(e^{\frac{4gad^2H}{p}} - 1\right) \qquad (3)$$

wo e die Basis der natürlichen Logarithmen ist.

Um die Zeit t zu finden, hat man aus der allgemeinen phoron. Formel

$$\partial t = \frac{\partial s}{C}$$

wenn für ∂s der obige Werth von ∂h und v für C geschrieben wird

$$\partial t = -\frac{p}{2g}\cdot\frac{\partial v}{p+ad^2v^2}$$

und

$$t = -\frac{p}{2g}\int\frac{\partial v}{p+ad^2v^2}$$

Aus der allgemeinen Integralformel

$$\int\frac{\partial x}{a+bx^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}}\,Arc\,tg\,x\sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)}$$

findet man reducirt

$$t = -\frac{1}{2gd}\sqrt{\frac{p}{a}}\left(Arc\,tg\,dv\sqrt{\frac{a}{p}} + C\right)$$

zur Constantenbestimmung hat man $v =$ der Anfangsgeschw. V für $t = 0$; daher vollständig

$$t = \frac{1}{2gd}\sqrt{\frac{p}{a}}\,Arc\,tg\,dV\sqrt{\frac{a}{p}} - Arc\,tg\,dv\sqrt{\frac{a}{p}}\Big] \qquad (4)$$

und die Zeit bis zur gröfsten Höhe H, nämlich für $v = 0$

$$T = \frac{1}{2gd}\sqrt{\frac{p}{a}}\,Arc\,tg\,dV\sqrt{\frac{a}{p}} \qquad (5)$$

Vergleicht man diese letzteren Formeln mit den zu Anfang aus einem späteren Artikel citirten allgemeineren Formeln, so ersieht man deren Uebereinstimmung, wenn man für den dortigen allgemeinen Coefficienten A den hier speciell erforderlichen Werth $g\cdot\frac{ad^2}{p}$ setzt.

5. Die Versuchscoefficienten sind von einander sehr abweichend, und es ist dies daraus erklärlich, dafs die grofsen Anfangsgeschwindigkeiten abgeschossener Kugeln niemals ganz genau gefunden werden können. Artilleristen, Männer von Fach, die sich mit den neuesten Versuchen und Erfahrungen fortdauernd beschäftigen, bedürfen meiner Angaben nicht, und den Jüngern der Mathematik kann nur daran liegen, Versuchszahlen anwenden zu lernen, daher hier nur die eine Versuchsangabe von Hutton, dafs eine Kugel von 2 engl. Zoll Durchmesser bei einer Geschwindigkeit von 1500 engl. Fufs einen Widerstand von 59 engl. Pfd. erfährt, dafs also $ad^2 = 59$ u. $a = \frac{59}{4} = 14{,}75$ Pfd. für die Geschw. $V = 1500$ Fufs ist.

Für die Geschw. = 1 hat man daher

$$a = \frac{14{,}75}{1500^2} = \frac{1}{152542}$$

Beispiel. Eine Kugel, 24 Pfund schwer (24pfünder) hat einen Durchmesser von 5,6 Zoll; bei einer Anfangsgeschwindigkeit von 2000 Fufs erhält man aus Formel 2 die Höhe H des senkrechten Aufsteigens, wenn man zugleich $g =$ (15⅝ preufs. Fufs) = 16 engl. Fufs setzt

$$H = \frac{24}{4\cdot 16\cdot\frac{5{,}6^2}{152542}}\,logn\,\frac{24+\frac{5{,}6^2\cdot 2000^2}{152542}}{24} = \frac{5720325}{3136}\cdot logn\,\frac{8068813}{228813}$$

log br 8068813	=	6,9068097
„ „ 228813	=	5,3594807
log br Quotient	=	1,5473290

man findet nun den *logn*

$$
\begin{aligned}
1 &= 2,3025851 \\
0,5 &= 1,1512925 \\
0,04 &= 0,0921034 \\
0,007 &= 0,0161181 \\
0,0003 &= 0,0006908 \\
0,00002 &= 0,0000461 \\
0,000009 &= 0,0000207 \\
\hline
logn &= 3,5628567
\end{aligned}
$$

folglich

$$H = \frac{5720325}{3136} \cdot 3,5628567$$

Mit Hülfe der Logarithmen findet man

$$H = 6499 \text{ engl. Fufs.}$$

Die Zeit, in welcher die Kugel diese Höhe erreicht, findet man aus Formel 5

$$T = \frac{1}{2 \cdot 16 \cdot 5,6} \sqrt{24 \cdot 152542}\; Arc\; tg\; 5,6 \cdot 2000 \sqrt{\frac{1}{24 \cdot 152542}}$$

$$= 10,67732 \cdot Arc\; tg\; 5,85353$$

$$\angle(tg = 5,85353) = 80^\circ\, 18'\, 19''$$

wozu ein Bogen gehört $= 1,4015915$ und

$$T = 10,67732 \times 1,4015915 = 14,965 \text{ Sec.}$$

Im luftleeren Raum würde die Höhe betragen

$$H = \frac{2000^2}{4 \cdot 16} = 62500 \text{ engl. Fufs}$$

und die Zeit

$$T = \frac{2000}{2 \cdot 16} = 62,5 \text{ Secunden.}$$

6. Geschieht der Wurf schräg aufwärts, so kann die Bewegung in der Art untersucht werden, wie es mit dem Wurf in der Luftleere (Artikel: Bahnbestimmung u. s. w. No. 4 pag. 274) geschehen ist.

Es sei in Fig. 171 daselbst AB unter dem $\angle \alpha$ mit dem Horizont die Richtung des Wurfs, C die Anfangsgeschwindigkeit, so ist die relative Geschwindigkeit nach der horizontalen Richtung $AD = C \cos \alpha = V$, nach der senkrechten $AE = C \sin \alpha = V_1$; die Beschleunigung horizontal ist $-Ac^2 \cos \alpha = -Av^2$; nach der senkrechten $-(g + Ac^2 \sin^2 \alpha) = -(g + Av_1^2)$.

Nach der allgemeinen phoron. Formel

$$v^2 = 4 \int G\, \partial s$$

hat man für die horizontale Bewegung

$$V^2 = -4 \int Av^2\, \partial s$$

woraus

$$\partial s = -\frac{v\, \partial v}{2Av^2} = -\frac{\partial v}{2Av}$$

also

$$s = -\frac{1}{2A}\, logn\; v + C$$

Die Anfangsgeschw. ist V, also vollständig

$$s = \frac{1}{2A}\left[ln\; V - ln\; v\right]$$

Zur Bestimmung der Zeit t hat man allgemein

$$G = \tfrac{1}{2}\frac{\partial C}{\Delta t}$$

hiernach

$$\frac{\partial t}{\Delta v} = \frac{-1}{2Av^2}$$

und $t = -\frac{1}{2A}\int \frac{\partial v}{v^2} + C = +\frac{1}{2Av} + C$

vollständig

$$t = \frac{1}{2A}\left[\frac{1}{v} - \frac{1}{V}\right] = \frac{1}{2A}\,\frac{V - v}{Vv}$$

Die senkrechte Seitenbewegung ist schon in No. 4 untersucht; schreibt man die Formeln wie in No. 3, so hat man

$$h = \frac{1}{4A}\, logn\, \frac{g + AV_1^2}{g + Av_1^2}$$

die Zeit

$$t_1 = \frac{1}{2\sqrt{gA}}\left[Arc\, tg\; V_1 \sqrt{\frac{A}{g}} - Arc\, tg\; v_1 \sqrt{\frac{A}{g}}\right]$$

Die gröfste horizontale Länge ist also

$$S = \frac{1}{2A}\, ln\; V$$

diese ist vollständig bestimmt, die Zeit aber, dafs dieser gröfste Weg erreicht wird

$$T = \frac{1}{2A}\,\frac{V - v}{Vv}$$

ist unendlich grofs, so dafs der Körper nie das Endziel S erreicht.

Denkt man sich demnach den Wurf in einer Entfernung von der Erdoberfläche beginnend, so trifft der Körper die Erde niemals senkrecht; der Winkel aber nähert sich dem rechten um so mehr, je gröfser der Elevationswinkel und je gröfser die Höhe über der Erdoberfläche ist, von der aus der Wurf beginnt, und die Bahncurve hat, der Wurf geschehe horizontal oder unter einem Elevationswinkel oder unter einem Depressionswinkel, auf der niedersteigenden Seite eine Asymptote.

Die gröfste horizontale Höhe

$$H = \frac{1}{4A}\, logn\, \frac{g + AV_1^2}{g}$$

wenn nämlich $v_1 = 0$ wird, erreicht der Körper in der Zeit

$$T_1 = \frac{1}{2\sqrt{gA}}\, Arc\, tg\; V_1 \frac{A}{g}$$

Setzt man für A den für die Praxis oben gedachten Werth $g\frac{ad^2}{p}$, u. $C \sin \alpha$,

$c \sin\alpha$, $C\cos\alpha$, $c\cos\alpha$, so erhält man die für die Praxis brauchbaren Formeln:

horizontal

$$s = \frac{p}{2gad^2}(\log n\, C\cos\alpha - \log n\, c\cos\alpha) \quad (1)$$

$$S = \frac{p}{2gad^2}\log n\, C\cos\alpha \quad (2)$$

$$t = \frac{p}{2gad^2\cos\alpha}\cdot\frac{C-c}{Cc} \quad (3)$$

T = unendlich (4)

vertical

$$h = \frac{p}{4gad^2}\log n\frac{p + ad^2C^2\sin^2\alpha}{p + ad^2c^2\sin^2\alpha} \quad (5)$$

$$H = \frac{p}{4gad^2}\log n\frac{p+ad^2C^2\sin^2\alpha}{p} \quad (6)$$

$$t_1 = \frac{1}{2gd}\sqrt{\frac{p}{a}}\left[Arc\, tg\, d\, C\sin\alpha\sqrt{\frac{a}{p}} - Arc\, tg\, d\, c\sin\alpha\sqrt{\frac{a}{p}}\right] \quad (7)$$

$$T_1 = \frac{1}{2gd}\sqrt{\frac{p}{a}}\, Arc\, tg\, d\, C\sin\alpha\sqrt{\frac{a}{p}} \quad (8)$$

7. Die vorstehenden Formeln (5 bis 8) für die senkrechte Seitenbewegung gelten nur in dem wirklich aufsteigenden Theil der Bahncurve; sobald die Kugel anfängt zu fallen, wird die Beschleunigung $= g - Av^2$.

Daher

$$h = -\frac{1}{4A}\log n\,(g - Av_1^2) + C$$

und da die Bewegung von der Seitengeschwindigkeit = 0 anfängt, vollständig

$$h = \frac{1}{4A}\log n\frac{g}{g - Av_1^2}$$

t_1 aber bestimmt sich aus der allgemeinen Formel

$$G = \frac{1}{2}\frac{\partial C}{\Delta t}$$

nämlich

$$\frac{\partial t}{\Delta v} = \frac{1}{2(g - Av_1^2)} + C$$

Aus der allgemeinen Integralformel

$$\int\frac{\partial x}{a - bx^2} = \frac{1}{2\sqrt{ab}}\log n\frac{1 + x\sqrt{\frac{b}{a}}}{\pm 1 \mp x\sqrt{\frac{b}{a}}} + C$$

hat man vollständig

$$t = \frac{1}{4\sqrt{gA}}\log n\frac{1 + v_1\sqrt{\frac{A}{g}}}{1 - v_1\sqrt{\frac{A}{g}}}$$

und für A und v die ballistischen Werthe gesetzt

$$h = \frac{p}{4gad^2}\log n\frac{p}{p - ad^2c^2\sin^2\alpha} \quad (9)$$

$$t_1 = \frac{1}{4gd}\sqrt{\frac{p}{a}}\log n\frac{1 + dc\sin\alpha\sqrt{\frac{a}{p}}}{1 - dc\sin\alpha\sqrt{\frac{a}{p}}} \quad (10)$$

Beispiel. Die ad 5 gedachte Kugel vom Gewicht $p = 24$ Pfund, dem Durchmesser $d = 5{,}6$ Zoll werde mit der Anfangsgeschwindigkeit $C = 2000$ Fufs unter dem $\angle\alpha = 45°$ mit dem Horizont in die Höhe geworfen, so ist bei $a = \frac{1}{152542}$

$$H = \frac{24\cdot 152542}{4\cdot 16\cdot 5{,}6^2}\ln\frac{24 + \frac{5{,}6^2\cdot 2000^2\cdot\sin^2 45°}{152542}}{24}$$

$$= \frac{5720325}{3136}\log n\frac{8068813}{228813}\sin^2 45°,$$

$\log br \sin^2 45° = 9{,}6989700 - 10$
$= -0{,}30103$

Den $\log n$ findet man aus diesem $\log br$

$-0{,}3 = -0{,}6907755$
$-0{,}001 = 23026$
$-0{,}00003 = 691$

$\log n \sin^2 45° = -0{,}6931472$

Nach No. 5 ist

$\log n\frac{8068813}{228813} = +3{,}5628567$

$\log n$ Product $= 2{,}8697095$

folglich

$$H = \frac{5720325}{3136}\cdot 2{,}8697095$$

Man findet nun mit Hülfe der Logarithmen

$H = 5235$ englische Fufs

Ferner findet man

$$T_1 = \frac{1}{2\cdot 16\cdot 5{,}6}\sqrt{24\cdot 152542}\; Arc\, tg\; 5{,}6\cdot 2000\cdot\sin 45°\sqrt{\frac{1}{24\cdot 152542}}$$

$= 10{,}67732\cdot Arc\log tg\; 0{,}6169028$

$\angle \log tg = 76°\ 25'\ 3''$

hierzu gehört der Bogen 1,3337234.

Man hat demnach

$T_1 = 10{,}67732\cdot 1{,}3337234 = 14{,}24$ Sec.

Setzt man diese Zeit in die Formel (3) für t, so erhält man die noch stattfindende Geschw. c aus

$$14{,}24 = \frac{24\cdot 152542}{2\cdot 16\cdot 5{,}6^2\cos 45°}\cdot\frac{2000 - c}{2000\,c}$$

hieraus

$$c = \frac{457626000}{1491893} = 307 \text{ engl. Fufs}$$

und die horizontale Seitengeschwindigkeit

$$c \cos 45^0 = 217 \text{ engl. Fufs.}$$

Diesen Werth in Formel (1) für s gesetzt, giebt den horizontalen Weg der Kugel

$$s = \frac{24 \cdot 152542}{2 \cdot 16 \cdot 5{,}6^2} (ln\, 2000 \cos 45^0 - ln\, 217)$$

$$s = \frac{11440650}{3136} \cdot 1{,}8744317$$

$= 6838$ engl. Fufs.

Setzt man nun in Formel 9 für h den Werth 5235 engl. Fufs, so erhält man für $c \sin \alpha$ die senkrechte Endgeschwindigkeit der Kugel, wenn die Basis deren Bahn horizontal ist.

Man hat aber durch Umformung:

$$\frac{p}{ad^2}\left[1 - \frac{1}{e^{\frac{4gad^2h}{p}}}\right] = c^2 \sin^2\alpha$$

also

$$\frac{5720325}{49}\left[1 - \frac{1}{e^{\frac{1094464}{381355}}}\right] = c^2 \sin^2\alpha$$

wo e die Basis der natürlichen Logarithmen $= 2{,}718281828 \ldots$

Die Rechnung geschieht folgender Art:

$\log br \cdot e$	$= 0{,}4342944819$
$\log \cdot \log br\, e$	$= 0{,}6377843 - 1$
$\log 1094464$	$= 6{,}0392015$
Summa	$= 5{,}6769858$
$\log 381355$	$= 5{,}5813295$
$\log \cdot \log e^{\frac{1094464}{381355}}$	$= 0{,}0956563$

Aus den Tafeln findet man

$\log e^{\frac{1094464}{381355}}$	$= 1{,}2463970$
$\log 1$	$= 0,$
$\log \frac{1}{e^{\cdots}}$	$= 0{,}7536030 - 2$
$\frac{1}{e^{\cdots}}$	$= 0{,}0567026$
$1 - 0{,}0567026$	$= 0{,}9432974$

$$c \sin \alpha = \sqrt{\frac{5720325}{49} \cdot 0{,}9432974} = 332 \text{ engl. Fufs.}$$

Setzt man nun diesen Werth in Formel 10 für t_1, so erhält man

$$t_1 = \frac{1}{4 \cdot 16 \cdot 5{,}6} \sqrt{24 \cdot 152542}\; ln \frac{1 + 5{,}6 \cdot 332 \sqrt{\frac{1}{24 \cdot 152542}}}{1 - 5{,}6 \cdot 332 \sqrt{\frac{1}{24 \cdot 152542}}}$$

$$t_1 = 5{,}3386 \times logn \frac{1 + 0{,}971685}{1 - 0{,}971685}$$

$= 5{,}3386 \times 4{,}24325 = 22{,}65$ Secunden

die Zeit t der Aufsteigung $= 14{,}24$ „

Summa Zeit d. Schlusses $= 36{,}89$ Secunden

Setzt man die Zeit in Formel (3), so erhält man die horizontale Endgeschwindigkeit $c \cos 45^0$, nämlich

$$36{,}89 = \frac{24 \cdot 152542}{2 \cdot 16 \cdot 5{,}6^2 \cdot \cos 45^0} \cdot \frac{2000 - c}{2000\, c}$$

woraus

$$c = \frac{7322016}{56015} = 131 \text{ engl. Fufs}$$

und $c \cdot \cos 45^0 = 92{,}43$ engl. Fufs.

Setzt man wiederum diesen Werth in Formel (1), so erhält man den horizontalen Weg, die Schufsweite s, nämlich

$$s = \frac{24 \cdot 152542}{2 \cdot 16 \cdot 5{,}6^2} (ln\, 2000 \cos 45^0 - ln\, 92{,}43)$$

$$= \frac{5720325}{1568} \times (72543289 - 4{,}5264480)$$

$s = 9952$ engl. Fufs.

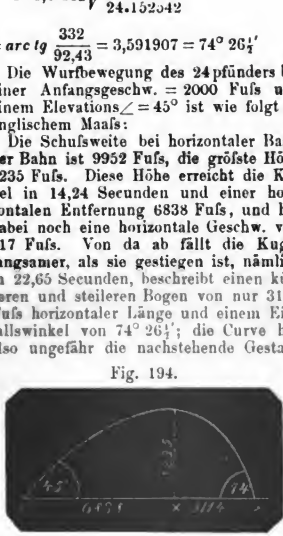
Betrachtet man die beiden Endgeschwindigkeiten, die horizontale $= 92{,}43$ Fufs, die verticale $= 332$ Fufs, so erhält man den $\angle$, unter welchem die Kugel einschlägt

$$= arc\, tg \frac{332}{92{,}43} = 3{,}591907 = 74^0\, 26\tfrac{1}{2}'$$

Die Wurfbewegung des 24pfünders bei einer Anfangsgeschw. = 2000 Fufs und einem Elevations$\angle = 45^0$ ist wie folgt in englischem Maafs:

Die Schufsweite bei horizontaler Basis der Bahn ist 9952 Fufs, die gröfste Höhe 5235 Fufs. Diese Höhe erreicht die Kugel in 14,24 Secunden und einer horizontalen Entfernung 6838 Fufs, und hat dabei noch eine horizontale Geschw. von 217 Fufs. Von da ab fällt die Kugel langsamer, als sie gestiegen ist, nämlich in 22,65 Secunden, beschreibt einen kürzeren und steileren Bogen von nur 3114 Fufs horizontaler Länge und einem Einfallswinkel von $74^0\, 26\tfrac{1}{2}'$; die Curve hat also ungefähr die nachstehende Gestalt.

Fig. 194.

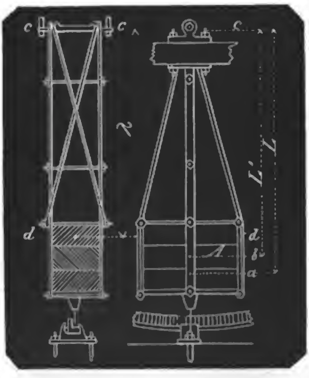


Es könnte nun noch die Curve selbst näher untersucht werden, indem man z. B. die zusammengehörigen Seiten-Elemente, wie ∂s und ∂h in $\partial w = \sqrt{(\partial s)^2 + (\partial h)^2}$ zusammengesetzt; allein es ist dies auf verschiedene Weise bisher von den gröfsten Mathematikern vergeblich versucht worden. Wie nachgewiesen, ist die Curve auch von zweierlei Natur; der aufsteigende Theil ist von dem niedersteigenden wesentlich unterschieden. Es kann also hier die vorstehende Untersuchung genügen. Auch der Coefficient a für den Luftwiderstand ist nur annähernd richtig, und es wird von Männern von Fach und Erfahrung bestritten, dafs der Widerstand der Luft überhaupt den Quadraten der Geschw. proportional sei.

Die übrigen 3 Theile der Ballistik sind rein technisch, und wenngleich mehrere Gegenstände derselben mathematische Untersuchungen entweder zulassen oder erforderlich machen, so gehört dazu als Basis eine specielle Kenntnifs der Artilleriewissenschaften.

Ballistisches Pendel. Ein Apparat in Form eines Pendels, durch welchen man die Geschwindigkeit einer aus dem Feuerrohr heraustretenden Kugel messen kann. Aus dem vor. Art. ist ersichtlich, dafs die ballistische Bahn hauptsächlich mit von der Anfangsgeschwindigkeit der Kugel abhängt, und dafs die Kenntnifs derselben wesentlich erforderlich ist, um mit Berücksichtigung der Wirkung eines Schusses den mit a bezeichneten Coefficienten des Luftwiderstandes zu ermitteln. Das b. P., welches Hutton zu seinen Versuchen anwendete, hatte beistehende Form: Ein starker und breiter mit Eisen beschwerter Körper A von möglichst hartem Holz war mit einer starken eisernen Stange an einen Waagebalken gehängt, der sich, um die Reibung möglichst zu vermindern, mit Schneiden auf polirten Platten drehen konnte. Gegen A wurden die Kugeln abgeschossen, und ein unterhalb A befindlicher Stift zeigte innerhalb einer weichen Wachsmasse die Länge des Bogens an, in welchem das Pendel durch den Schufs bewegt worden war, so dafs auf die Geschwindigkeit geschlossen werden konnte, mit welcher die Kugel das Pendel getroffen hatte.

Fig. 195.



Die Theorie dieser Versuche ist folgende: Läfst man das Pendel eine Zeit lang frei schwingen, und zählt die Anzahl n der Schwingungen innerhalb t Secunden, so erfährt man die senkrechte Entfernung $ac = L$ des Schwingungspunkts a von der Schwingungsaxe c, , weil die Pendellängen sich umgekehrt wie die Quadrate der in einerlei Zeit gemachten Schwingungen verhalten, und indem die Länge des einfachen Secundenpendels, das in t Secunden auch t Schwingungen macht, für jeden Ort der Erdoberfläche gefunden werden kann.

Bezeichnet man die Länge des einfachen Secundenpendels mit l, so ist also

$$L : l = t^2 : n^2$$

und

$$L = \left(\frac{t}{n}\right)^2 l \qquad (1)$$

Durch Balanciren des Pendels horizontal auf einer Schneide kann man die Entfernung L^1 seines Schwerpunkts b von der Axe c finden, der bei jedem physischen Pendel der Axe näher liegt als der Schwingungspunkt.

Der Widerstand nun, den das Pendel der Kugelwirkung entgegensetzt, ist offenbar die Trägheit seiner Masse in Beziehung auf die Drehungsaxe c; ist P das Gewicht des ganzen Pendels, x die Entfernung des Mittelpunkts der Masse, so ist deren Trägheitsmoment $= x^2 P$. Es ist aber bei jedem physischen Pendel $x^2 =$ dem Product aus den Entfernungen des Schwerpunkts und des Schwingungspunkts, also $x^2 = L \cdot L^1$ und das Moment der Trägheit des Pendels $= L \cdot L^1 P$. Hierzu kommt das Trägheitsmoment $\lambda^2 p$ der in das Holz in einen Punkt d dringenden Kugel, wenn deren Gewicht $= p$, und die Entfernung $dc = \lambda$ ist, in welcher sie das Pendel getroffen hat, so dafs der gesammte Widerstand $L L' P + \lambda^2 p$ beträgt.

Um nun die Länge λ_1 des einfachen Pendels zu finden, welches eben so schwingt, wie das in den Massen P und p zusammengesetzte Pendel, dividirt man die Summe der Massenmomente durch die Summe deren statischen Momente, daher

$$\lambda_1 = \frac{LL^1P + \lambda^2 p}{L^1P + \lambda p} \qquad (2)$$

Bezeichnet man die Geschwindigkeit, mit welcher die Kugel das Pendel in der Entfernung λ trifft, mit C, und die Geschwindigkeit des Pendels in demselben Punkt mit c, so ist das mechanische Moment der Kraft in der Entfernung $\lambda = pC$, das mechanische Moment des Widerstandes daselbst

$$= \frac{LL^1P + \lambda^2 p}{\lambda^2} c$$

und

$$pC = \frac{LL^1P + \lambda^2 p}{\lambda^2} c \qquad (3)$$

Die Geschw. c auf die Länge λ_1 des einfachen Pendels reducirt, giebt die Geschw. v aus der Proportion

$$\lambda : \lambda^1 = c : v$$

woraus

$$c = \frac{\lambda}{\lambda^1} v \quad .$$

Diesen Werth und den Werth λ^1 aus (2) in (3) gesetzt, giebt

$$pC = (L^1P + \lambda p)\frac{v}{\lambda}$$

woraus $$v = \frac{\lambda pC}{L^1P + \lambda p} \qquad (4)$$

Dieselbe Geschwindigkeit v läfst sich nun auch mit Hülfe der von dem Stift in der Wachsmasse eingeschnittenen zur Länge s finden, welche mit einem Maafsstab gemessen, die Sehne des von dem Stift beschriebenen Bogens ist.

Die von dem Endpunkt des einfachen Pendels beschriebene Sehne ist nun $\frac{\lambda_1}{r} s$, die Geschwindigkeit v dieses Schwingungspunktes ist aber nach der Lehre vom Pendel $= 2\sqrt{g\lambda_1 \, sin\, vers\, \alpha}$, wenn α der zu dem von λ beschriebenen Bogen gehörende Winkel ist. Da nun der *Sinus versus* = ist dem Quadrat der zugehörigen Sehne, dividirt durch den Durchmesser, also

$$\lambda_1 \, sin\, vers\, \alpha = \frac{\left(\frac{\lambda_1}{r} s\right)^2}{2\lambda_1} = \frac{\lambda_1 s^2}{2r^2}$$

so ist

$$v = \frac{s}{r}\sqrt{2g\lambda_1} \qquad (5)$$

Setzt man nun für λ_1 den Werth aus No. 2 und verbindet No. 4 mit No. 5, so hat man

$$\frac{\lambda pC}{L^1P + \lambda p} = \frac{s}{r}\sqrt{\left(2g \cdot \frac{LL^1P + \lambda^2 p}{L^1P + \lambda p}\right)}$$

woraus

$$C = \frac{s\sqrt{2g}}{\lambda pr}\sqrt{(LL^1P + \lambda^2 p)(L^1P + \lambda p)}$$

worin L aus Formel (1) bestimmt wird.

Schreibt man für den ersten Factor der Wurzel

$$\left(L^1P + \lambda p \cdot \frac{\lambda}{L}\right) L$$

bemerkt, dafs p gegen P nur sehr klein (p etwa $\frac{1}{388}$ P) und λ von L nicht sehr unterschieden sein kann, so vereinfacht man die Formel, ohne einen bemerkbaren Fehler zu begehen, wenn man $\frac{\lambda}{L} = 1$ setzt. Alsdann hat man

$$C = \frac{s\sqrt{2g}}{\lambda pr}(L^1P + \lambda p)\sqrt{L}$$

Es kommt nun darauf an, unter welcher geographischen Breite mit dem b. P. Versuche gemacht werden, weil von derselben sowohl L als g abhängt. In Berlin z. B., als einem Ort von $52\frac{1}{2}°$ nördlicher Breite, ist die Länge des Secundenpendels = 994,2275 Millimeter = 456,15 preufs. Linien = $3\frac{1}{6}$ preufs. Fufs und $g = 15{,}625$ preufs. Fufs.

Läfst man nun das b. P. eine Minute lang schwingen, nennt die Anzahl der Schwingungen n, so ist

$$L = \frac{1}{n^2} 60^2 \cdot 3\tfrac{1}{6} = \frac{1}{n^2} 11400 \text{ pr. F.}$$

$\sqrt{2g} = 5{,}59$ preufs. Fufs.

Man hat also

$$C = 63726 \cdot \frac{s(L^1P + \lambda p)}{\lambda pr} \text{ preufs. Fufs.}$$

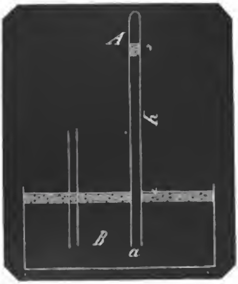
Ballistisches Problem. Die Aufgabe, die ballistische Curve zu finden, welche in dem Art. Ballistik No. 6 und 7 untersucht ist. Das Problem ist noch nicht vollständig gelöst.

Barometer (*βάρος*, die Schwere, *μετρεῖν*, messen). Dem Wort nach Schweremesser, in der That aber Luftschweremesser, oder vielmehr ein Instrument, welches die Spannung mifst, welche die atmosphärische Luft vermöge ihrer Elasticität in Folge der Belastung durch die darüber befindlichen Schichten erlangt, und die sich als Druck äufsert, der mit dem B. durch eine Flüssigkeitssäule gemessen wird.

Die oben verschlossene Röhre A sei luftleer, sie werde mit dem unten offenen Ende in die in einem Gefäfs B befindliche Flüssigkeit gesenkt, so übt die atmosphärische Luft einen Druck auf den Flüssig-

keitsspiegel, der sich bis auf die Mündung *a* des leeren Raumes fortsetzt, und da er dort keinen Widerstand findet, die Flüssigkeit in die Höhe, und zwar bis auf

Fig. 196.



eine Höhe *h* treibt, mit welcher die Flüssigkeit dem Luftdruck einen ihm gleichen Druck als Widerstand entgegensetzt.

Ist das Gewicht der in der Röhre befindlichen Flüssigkeit von der Höhe $h=p$, so ist also der Luftdruck auf den Querschnitt $a=p$ Pfund; wäre der Querschnitt *na*, so würde der Luftdruck auf diesen Querschnitt das *n*fache des ersten, also *np* Pfund betragen, die Höhe *h* würde also dieselbe bleiben, und da in einer oben und unten offenen, also mit Luft von derselben Druckkraft ausgefüllten Röhre die Flüssigkeit mit dem äufseren Spiegel im Niveau steht, so bleibt auch die Höhe *h* dieselbe, und unabhängig von der Eintauchungstiefe der Röhre.

Eine andere Flüssigkeit von doppeltem specifischem Gewicht, von welcher das Volumen *ah*, also 2*p* Pfund wiegt, würde, da der Luftdruck auf *a* nur *p* Pfund beträgt, nur $\frac{1}{2}h$ hoch in die Röhre gestiegen sein. Wenn Quecksilber 14mal schwerer als Wasser ist, und das Quecksilber steigt *h* Zoll, so würde das Wasser 14*h* Zoll hoch in der Röhre aufsteigen.

2. Eine mit Quecksilber gefüllte in dem verschlossenen Schenkel luftleere Röhre *A*, wie Fig. 196 od. 197 und von dem höheren Spiegel ab mit einer Scala versehen, ist das B., und das Steigen und Fallen der Flüssigkeit in dem Rohr giebt den gröfseren und geringeren Druck der atmosphärischen Luft in Zahlen an. Da der Luftdruck nicht unbedeutend ist, so nimmt man, um die B.röhre zur Handhabung möglichst kurz und bequem zu erhalten, als Maafs die möglich schwerste Flüssigkeit, also das Quecksilber, welches im Mittel 28 par. Zoll hoch in der B.röhre steht. Wasser würde eine Röhre von mehr als 33 F. Höhe erfordern, aufserdem bei hoher Temperatur verdunsten, und den oberen Theil der Röhre mit Dampf erfüllen, der einen Gegendruck ausübt, so dafs dann der Luftdruck zu gering angegeben wird. Man sagt: Das B. s t e i g e, e s f a l l e, e s s t e h e h o c h, n i e d r i g, wenn dies mit der Quecksilbersäule in der Röhre stattfindet.

Fig. 197.



3. Stellt man ein B. in ein gläsernes Gefäfs, und verschliefst dieses hermetisch, so wird die ganze obere Atmosphäre von dem B. abgesperrt; das B. fällt aber nicht, wie man sieht. Das B. mifst also das Gewicht oder den Druck der Atmosphäre nicht, sondern die Druckwirkung, die Spannung der Luftschicht, in der es sich befindet. Da diese Spannung der Schicht aber von deren Belastung durch die über ihr befindliche Atmosphäre allein herrührt, so wird mit der Spannung der Schicht zugleich das Gewicht dieser Atmosphäre indirect gemessen.

Je tiefer eine Luftschicht liegt, desto höher ist die Atmosphäre darüber, desto mehr die Schicht belastet, desto dichter ist sie, desto gröfser ist ihre Spannung und der ihr gleiche Druckwiderstand; umgekehrt, je höher eine Luftschicht liegt, desto weniger ist sie belastet, desto weniger Dichtigkeit, Spannung und Druckwirkung hat sie, desto geringer ist also auch die ihr Gleichgewicht haltende Quecksilbersäule. Man sollte glauben, dafs dieselbe Luftschicht immer einerlei Spannung habe, da man doch annehmen mufs, dafs die um den Erdball befindliche Luftmenge constant ist, und wenngleich Wärme die Luft ausdehnt, die Luftsäule also erhöht, und Kälte sie vermindert, so bleibt deren Gewicht immer dasselbe, wie in einem hohen Glase eine mussirende Flüssigkeit mit dem Schaum zwar fällt und steigt, aber einerlei Gewicht behält.

4. Es sind die horizontalen Luftströmungen in den oberen Regionen vom Aequator nach den Polen hin, und in den unteren in entgegengesetzter Richtung, welche die senkrechten Druckwirkungen vermindern, wie z. B. am Aequator durch den schnellen Umschwung der

Erdoberfläche die senkrechte Richtung der Schwerkraft vermindert wird. Besonders die zufälligen Luftströmungen, die Winde, äufsern sich, wenn sie nahen, durch ihren horizontalen Druck gegen ruhende Luft auf die Verminderung deren Spannung, und somit fällt das B.

Dasselbe geschieht vor Eintritt von Regen, weil die herannahenden Regenwolken eben so eine Horizontalpressung gegen die ruhende Luftmasse veranlassen. Haben sich die benachbarten Luftmassen in's Gleichgewicht gesetzt, so hört die horizontale Druckwirkung auf; es kann also an dem Ort des B. noch regnen oder windig sein, das B. steigt und zeigt schön Wetter an.

Das B. ist somit ein ziemlich sicherer Wetteranzeiger, und unter dem Namen: Wetterglas bekannt; als solches ist es besonders dem Schiffer ein nützliches Instrument; denn ein plötzliches und bedeutendes Fallen des B. zeigt ziemlich sicher einen herannahenden Sturm an, nämlich eine bedeutende Luftmasse, die in Folge ihrer grofsen Geschwindigkeit einen sehr bedeutenden Seitendruck auf die noch über dem B. befindliche ruhende Luftsäule ausübt. Es sollen jedoch auch Erdbeben und und vulkanische Ansbrüche jederzeit mit einem plötzlichen Fallen des B. begleitet sein.

5. Der mittlere Druck der Atmosphäre am Meeresspiegel wurde 28 alte par. Zoll Quecksilbergesetzt, und nach de Luc war bei 12; Toisen = 78 alte par. Fufs Höhe über dem Meeresspiegel die B.höhe eine par. Linie geringer Die neueren Naturforscher geben den mittleren Druck am Meere = 0,76 Meter und der Fall der B.-höhe um 1 Millimeter in 11,5^m Höhe über dem Meere. Offenbar sind die ersteren Bestimmungen, nach ganzen Zahlen in ziemlich grofsen Maafseinheiten gegeben, nicht ganz genau, und die letzteren zuverlässiger, beide jedoch ziemlich übereinstimmend, denn

$$0{,}76^m \text{ zu } 443{,}296 \text{ par.}''' \text{ sind } 28{,}0754'' = 28''\ 0{,}905'''$$

altes par. Maafs.

Um den B.stand bei 78 par. Fufs Erhebung nach der neueren Bestimmung zu erfahren, hat man (vergl. Barometermessungen)

$$11{,}5^m = 5097{,}904''' = 35{,}4021 \text{ par. F.}$$

bei 11,5^m Erhebung steht nun das B.
759^m „

also bei

$$n \times 11{,}5^m \text{ Erh. steht es } 760 \cdot \left(\frac{759}{760}\right)^n$$

Millimeter; daher bei

$$\frac{78}{35{,}4021} \cdot 11{,}5^m = 78' \text{ ist die B.höhe}$$

$$h = \left(\frac{759}{760}\right)^{\frac{78}{35{,}4021}} \times 760 \text{ Millim.}$$

Nun ist

$log \frac{759}{760}$	=	−0,0005718
log 0,0005718	=	0,7572442 − 4
log 78	=	1,8920946
Summa	=	0,6493388 − 2
log 35,4021	=	1,5490290
Differenz	=	0,1003098 − 3
log Potenz	=	−0,0012598
log 760	=	2,8808136
log h	=	2,8795538

woraus $h = 757{,}80^{mm}$
von 760,00

Fall der B.höhe = 2,2^{mm}
= 2,2 × 0,443296 par. ″
= 0,9753 par. Zoll, während de Luc 1 par. Zoll angiebt.

Das Gefäfsbarometer, Fig. 196, hat gegen das Flaschenb. den Vorzug, dafs der untere Quecksilberspiegel nicht sinkt und steigt, wenn er in der Röhre steigt und sinkt, allein es ist nicht transportabel, und die grofse Quecksilberfläche mufs gegen die chemische Einwirkung der Atmosphäre geschützt werden. Zu genauen Messungen, besonders von Höhen, ist seiner Einfachheit wegen das Heberbarometer am zweckmäfsigsten, es ist auch leicht zu transportiren und zu handhaben. Nothwendig ist bei demselben eine durchweg genau calibrirte Röhre; beide Schenkel haben an ihren äufseren Enden eine in pariser Zoll und Linien oder in Millimeter eingetheilte Scala, je nach der Bestimmung des B. Nebenstehend ist die Scala unten mit 0 bis 4″ 6‴, oben mit 22″ bis 26″ 6‴ bezeichnet. Die Summe der Theilzahlen am unteren und oberen Spiegel giebt die jedesmalige B.-höhe. Steht der untere Spiegel auf 4″ 6‴, so steht der obere auf 26″ 6‴, der B.stand ist 4″ 6‴ + 26″ 6‴ = 31″; die Höhe der Röhre zwischen diesen beiden Theilstrichen mufs also genau 31 par. Zoll sein. Der Normalstand ist 3″ + 25″ = 28″; steht der untere Spiegel auf 0, so steht der obere auf 26″ 6‴ − 4″ 6‴ = 22″ und dies ist der kleinste Luftdruck, der mit

Fig. 198.



diesem Instrument gemessen werden kann. Sollen kleine, dem Vacuum nahe Dichtigkeiten von Gasen gemessen werden, so mufs der offene Schenkel höher sein und über die halbe Höhe des verschlossenen reichen, und die Eintheilung so genommen werden, dafs im Vacuum beide Spiegel horizontal und auf 0 stehen würden. Für Höhenmessungen ist wegen der erforderlichen Wärme-Correction neben der B.röhre noch ein Thermometer angefügt. B. für die Marine sind gegen Schwankungen bei Stürmen zu schützen, daher hat die Röhre nur soweit die Scala reicht und am offenen Spiegel das Normalcaliber, der Zwischentheil besteht aus einer viel engeren Röhre, damit die Schwankungen des Schiffes der ganzen Quecksilbersäule so leicht nicht mitgetheilt werden können.

Barometercorrection ist erforderlich, theils der Ausdehnung wegen, welche das Quecksilber durch die Wärme erleidet, theils des Druckes und der Spannung wegen, welche bei der Luft und den Gasen durch den Einflufs der Wärme sich ändern (s. aerodynamische Gesetze No. 6). Eingeschlossene Luft, wenn sie bei 0°C. die Spannung p und den Barometerstand b zeigt, hat bei t°C. die Spannung $(1 + 0{,}00366..t)p$ und den Barometerstand $(1 + 0{,}00366 \cdot t)b$.

Beziehen sich p', b' und t' auf eine andere eingeschlossene Luft, und setzt man den Coefficient 0,00366 mit a, so hat man zuerst

$$b : b' = p : p'$$

bei einerlei Temperatur.

Ist nun B der beobachtete Barometerstand eines Gases bei t°C. Temp., dessen Barometerstand bei 0°C. $= b$ ist, so erhält man

$$b = \frac{B}{1 + at}$$

Sind B und B' die gemessenen Barometerstände zweier Gase bei den Temp. t und t' und b, b' die derselben bei 0°C., so erhält man

$$b : b' = \frac{B}{1 + at} : \frac{B'}{1 + at'}$$

Setzt man die Spannung P der Luft bei 28 par. Zoll Barometerhöhe und 0°C. $= 1$, so erhält man die Spannung der eingeschlossenen Luft bei der Barometerhöhe $= B$ und t°C.:

$$p = \frac{B}{28(1 + at)}$$

Bei der Atmosphäre sind die Gesetze anders, weil die Luft nach oben sich ausdehnen, sich erheben kann. Nach den Erfahrungen von de Luc steigt das B., welches bei 0°R. 27 par. Zoll hoch steht, bei Erhöhung der Lufttemperatur auf 80° R. um 6 Linien, es steht dann $27\frac{1}{2}''$. Bei n°R. ist die Erhöhung $\frac{n}{80} \cdot 6''' = \frac{n}{160}$ Zoll. Steht nun ein B. auf b'' bei t°R. Temp., so hat man die Barometerhöhe B derselben Luft bei 0°R. aus der Proportion

$$27 + \frac{t}{160} : 27 = b : B$$

woraus

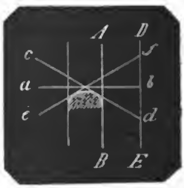
$$B = \frac{27 \cdot b}{27 + \frac{t}{160}} = \frac{4320\,b}{4320 + t}\text{ Zoll}$$

Für t° unter 0 wird $B = \frac{27 \cdot b}{27 - \frac{t}{160}} = \frac{4320 \cdot b}{4320 - t}$ Zoll. Z. B: die Luft, welche bei 18°R. einen Barometerstand $= 28''\ 5'''$ zeigt, würde bei 0° R. Temperatur $= \frac{4320 \cdot (28\frac{5}{12})}{4320 + 18}$ Zoll $= 28''\ 3{,}585'''$ haben.

In der de Luc'schen Regel sind die Correctionen für die Ausdehnung des Quecksilbers mitbegriffen (vgl. Barometermessungen).

Barometerhöhe, Barometerstand ist der lothrechte Abstand beider Quecksilberspiegel des Barometers (s. Barometer). Die Ablesung dieser B. mufs so geschehen, dafs das Auge mit dem Quecksilberspiegel horizontal sich befindet wie in der Linie ab; denn eine Richtung des Auges wie cd würde an der auf der Vorderfläche AB der Tafel verzeichneten Scala die Höhe zu klein und eine Richtung ef zu grofs ablesen

Fig. 199.

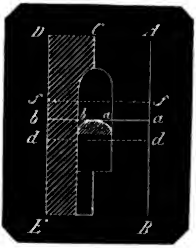


Die richtige Ablesung der B. wird noch durch die Convexität des Quecksilberspiegels erschwert, eine Selbstbildung, die daher kommt, dafs das Quecksilber mit dem Glase nicht adhärirt, und daher allein seinem Cohäsionsbestreben überlassen ist.

Eine sehr zweckmäfsige Einrichtung ist die, dafs man die Barometertafel $AB\,DE$

aus starkem Spiegelglase bestehen läfst, und dieses zur Hälfte *CE* hinten mit Folie belegt. Die auf der Vorderfläche *ABC*

Fig. 200.



eingeätzten Theilstriche spiegeln sich nun auf der Hinterfläche ab. Bei richtiger Ablesung decken sich beide Theilstriche *aa*, *bb* und die Pupille des Auges wird in derselben Linie *bb* abgespiegelt.

Barometermessungen. Die Messungen oder Ermittelungen senkrechter Höhen-Abstände durch das Barometer, indem man aus einer beobachteten Barometerhöhe berechnen kann, wie hoch man sich mit dem Barometer über dem Meeresspiegel befindet, indem der aus dem Gewicht der Luft hervorgehende Druck der Atmosphäre auf einen darunter befindlichen Gegenstand um so geringer sein mufs, je weniger hoch die Luftsäule darüber, und um so gröfser, je höher die darüber befindliche Luftsäule noch ist. Ein Barometer fällt also mit der Höhe seines Orts, und steigt mit der Tiefe seines Orts, und die Dichtigkeit, das Gewicht und die Spannung einer Luftschicht werden immer geringer, je höher sie sich in der Atmosphäre befindet.

Man denke sich einen von Seitenwänden eingeschlossenen Raum von der Erdoberfläche bis an die Grenze der Atmosphäre in die Höhe geführt, theile die darin befindliche Luftsäule in lauter gleich hohe Schichten, die aber so niedrig sind, dafs jede Schicht oben und unten von einerlei Dichtigkeit anzunehmen ist.

Die Dichtigkeiten der Schichten von der untersten ab seien d; d_1; d_2; ..... d_n. Diese Dichtigkeiten verhalten sich aber nach dem Mariotte'schen Gesetz wie die auf die Schichten wirkenden Druckkräfte und diese mifst das B. mit seinen B.höhen

$$b_1,\ b_2,\ b_3\ .....\ b_{n+1}$$

wenn das hier nicht vorkommende b die B.höhe in der ersten Schicht von der Dichtigkeit d; b_1 die Barometerhöhe in der zweiten Schicht von der Dichtigkeit d_1 u. s. w.; b_n die B.höhe der $(n+1)$ten Schicht von der Dichtigkeit d_n u. b_{n+1} die B.höhe in der unmittelbar darüber liegenden Luftschicht ist.

Die Höhe b zeigt zugleich das Gewicht der ganzen Atmosphäre, die Höhe b_1 dasselbe Gewicht weniger dem Gewicht der ersten Schicht und zugleich den Druck auf dieselbe; die Höhe b_2 das Gewicht der Atmosphäre weniger dem Gewicht der beiden untersten Schichten und zugleich den Druck auf die zweite Schicht u. s. w., also die Quecksilbersäule b_n im B. ist das Gewicht der Atmosphäre weniger dem Gewicht aller darunter befindlichen n ersten Schichten, und zugleich der Druck auf die $n$te Schicht.

Man hat demnach nach dem Mariotte'schen Gesetz:

$$b_1 : b_2 : b_3 : \ldots b_n = d : d_1 : d_2 : \ldots d_{n-1} \quad (1)$$

Die absoluten Gewichte der einzelnen Schichten werden aber ebenfalls durch die B.höhen ausgedrückt, denn es ist

b das Gew. aller $(n+1)$ Schichten
b_1 „ „ „ oberen n „
b_2 „ „ „ $(n-1)$ „
. . . .
b_n „ „ „ $(n+1-n)$ = der 1. Schicht

Folglich ist

$b - b_1$ das Gew. der 1sten Schicht v. unten
$b_1 - b_2$ „ „ „ 2ten „ „ „
$b_n - b_{n+1}$ „ „ $(n+1)$ten „ „ „

Bei gleichem Volumen verhalten sich aber die Gewichte wie die Dichtigkeiten, daher

$$b - b_1 : b_1 - b_2 : \ldots b_n - b_{n-1} = d : d_1 : \ldots d_n \quad (2)$$

Mithin hat man aus 1 und 2

$$b - b_1 : b_1 - b_2 : \ldots b_n - b_{n-1} = b_1 : b_2 : \ldots b_n$$

Wie man nun durch Addition aus

$$b - b_1 : b_1 - b_2 = b_1 : b_2$$

erhält $b : b_1 = b_1 : b_2$

so erhält man aus den folgenden Gliedern und überhaupt

$$b : b_1 = b_1 : b_2 = b_2 : b_3 = \ldots\ldots b_{n-1} : b_n$$

Es ist also jeder B.stand die mittlere geometrische Proportionale zwischen beiden in gleichen senkrechten Abständen stattfindenden benachbarten B.ständen und

$$\frac{b_1}{b} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{b_3}{b_2} = \ldots\ldots = \frac{b_{n-1}}{b_n}$$

d. h. die Quotienten zweier in gleichen senkrechten Abständen gemessenen B.höhen sind einander gleich, also constant $= m$.

Es ist also

$$b_1 = mb$$
$$b_2 = mb_1 \quad = m^2 b$$
$$b_3 = mb_2 \quad = m^3 b$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$b_n = mb_{n-1} = m^n b$$

2. Nach de Luc (s. Barometer No. 5) fällt das Barometer in 78 par. Fufs Höhe über dem Meeresspiegel um 1 par. Linie; nun ist der normale Barometerstand am Meeresspiegel $= 28'' = 336'''$
bei 78 Fufs Höhe ist der B.stand $= 335'''$

Nach dem Obigen ist $b_1 = mb$
also $335''' = m \cdot 336'''$

folglich nach de Luc $m = \frac{335}{336}$

In $n \times 78$ Fufs Höhe über dem Meeresspiegel steht das Barometer auf

$$\left(\frac{335}{336}\right)^n \cdot 336 \text{ Linien.}$$

Ferner fällt nach der neueren Annahme das Barometer in den ersten $11{,}5^m$ Höhe über dem Meeresspiegel um 1^{mm}. Beim unteren Normalstande von 760^{mm} also auf 759^{mm}

d. h. $b = 760$

$$b_1 = 759 = m \cdot b = \frac{759}{760} b$$

In $n \times 11{,}5$ Meter Höhe über dem Meeresspiegel steht also das Barometer auf

$$\left(\frac{759}{760}\right)^n \cdot 760 \text{ Millim.}$$

Hat mithin in irgend einem Ort das Barometer die Höhe b_1, so findet man dessen Höhe H über dem Meeresspiegel aus der Gleichung

$$b_1 = m^x b$$

wo x der Coefficient ist, mit dem entweder 78 par. Fufs, oder $11{,}5^m$ zu multipliciren ist, um die Höhe H zu finden. Man erhält

$$x = \frac{\log b_1 - \log b}{\log m}$$

oder vielmehr, da m ein ächter Bruch, also $\log m$ negativ ist

$$x = \frac{\log b - \log b_1}{-\log m}$$

3. Nach de Luc ist nun

$$x = \frac{\log 336 - \log b_1}{-\log\left(\frac{335}{336}\right)} = \frac{\log 336 - \log b_1}{\log 336 - \log 335}$$

und $H = x \cdot 78$ par. Fufs.

Es ist

$$\begin{aligned} \log 336 &= 2{,}5263393 \\ \log 335 &= 2{,}5250448 \\ \hline -\log m &= 0{,}0012945 \end{aligned}$$

daher $\frac{1}{-\log m} = 772{,}5$

demnach

$$H = 772{,}5 \times 78\,(2{,}5263393 - \log b_1''')$$
$$= 60255\,(2{,}5263393 - \log b_1''')$$

in par. Fufs.

In Toisen wäre der Coefficient $= 10042$ und de Luc giebt ihn in runder Zahl 10000 an.

Die Formel gilt für eine mittlere Temperatur von $16\frac{3}{4}°$ Réaum. Für jeden Grad R. über oder unter $16\frac{3}{4}°$ soll man H um $\frac{1}{215}$ erhöhen oder vermindern, also bei $\pm t°$ (von $16\frac{3}{4}°$ ab gezählt) ist

$$H = \left(1 \pm \frac{t}{215}\right) 10000\,(\log b - \log b_1) \text{ Toisen.}$$

4. Nach der zweiten Bestimmung ist

$$x = \frac{\log 760 - \log b_1}{\log 760 - \log 759}$$

und

$$H = x \cdot 11{,}5 \text{ Meter.}$$

Es ist

$$\begin{aligned} \log 760 &= 2{,}8808136 \\ \log 759 &= 2{,}8802418 \\ \hline \log m &= 0{,}0005718 \end{aligned}$$

daher $\frac{1}{-\log m} = 1748{,}75$

demnach

$$H = 1748{,}75 \cdot 11{,}5\,(2{,}8808136 - \log b_1^{mm})$$
$$= 20110\,(2{,}8808136 - \log b_1^{mm})$$

in Metern.

Dieser Coefficient stimmt weniger genau mit der Erfahrungsangabe Ramond's und Laplace's, nämlich 18393 Meter, wonach denn nicht bei $11{,}5^m$ Höhe, sondern schon bei $10{,}5^m$ Höhe das Barometer um 1 Millimeter fällt.

Die Formel nach Ramond und Laplace

$$H = 18336\,(\log b - \log b_1) \text{ Meter.}$$

gilt für 0° R.

5. Nach Laplace beträgt die Ausdehnung der atmosphärischen Luft für jeden Grad Réaumur $\frac{1}{200}$. Ist nun die Temperatur an dem Ort für $b = t$, und an dem Ort für $b_1 = t_1$, so ist

$$H = 18336\left(1 + \frac{t + t_1}{400}\right)(\log b - \log b_1)$$

Da nun das Quecksilber für jeden Gr. R. um $\frac{1}{4440}$ sich ausdehnt, die B.höhe also für jeden Grad R über 0 um so viel zu grofs angegeben wird, so hat man bei Berücksichtigung auch dieser Correctur

$$H = 18336\left(1 + \frac{t + t_1}{400}\right) \log \frac{b\left(1 - \frac{t}{4440}\right)}{b_1\left(1 - \frac{t_1}{4440}\right)}$$

oder

6. $$H = 18336\left(1 + \frac{t + t_1}{400}\right) \log \frac{(4440 - t)b}{(4440 - t_1)b_1}$$

Um die Höhe über dem Meeresspiegel in preufs. Fufs zu finden, bei welcher das B. um 1 par. Linie fällt, hat man

1 Millimeter $= 0{,}4433$ par. Linien
1 par. Linie $= 2{,}2558$ Millimeter

Folglich der Stand des B., für welchen die Höhe zu finden ist

$= 760 - 2{,}2558 = 757{,}7442$ Millm.

Nun ist nach No. 2

$$760 \cdot \left(\frac{759}{760}\right)^n = 757{,}7442 \text{ Millim.}$$

woraus

$$n = \frac{\log 760 - \log 757{,}7442}{\log 760 - \log 759} = 2{,}2578$$

und die Höhe selbst $2{,}2578 \times 10{,}5^m = 23{,}7069^m = 3{,}18699 \times 23{,}7069 = 75{,}53$ pr. Fufs; und zwar nach Laplace und Ramond bei 0° Réaumur.

7. Nach de Luc war bei 16¾° R. die Höhe für den Fall von 1 par. Linie = 78 par. Fufs; nimmt man mit Laplace für 1°R. eine Höhenzunahme von $\frac{1}{200}$, so ist die Höhe für 1 par. Linie Barometerfall bei

$$16\tfrac{3}{4}°\text{R.} = 75{,}53\left(1 + \frac{16\frac{3}{4}}{200}\right) = 81{,}8 \text{ preufs. Fufs}$$

Nimmt man mit de Luc die Zunahme $\frac{1}{215}$, so erhält man

$$75{,}53\left(1 + \frac{16\frac{3}{4}}{215}\right) = 81{,}4 \text{ pr. Fufs,}$$

welches 78,647 par. Fufs beträgt, und also mit de Luc's Angabe sehr genau stimmt.

Die ad 2 gemachte Angabe, dafs bei 11,5 Meter Höhe das B. um 1^{mm} falle, bezieht sich gewifs auch auf eine höhere Temperatur. Nach Laplace's Angaben ist bei 0° R. die anzusteigende Höhe = 10,5 Meter; um die Temp. für $11{,}5^m$ Höhe zu erfahren, hat man

$$10{,}5\left(1 + \frac{t}{200}\right) = 11{,}5$$

woraus $t = 19°$ R.

8. Nach No. 6 und 7 hat man den barometrischen Coefficienten für preufsische Fufs, wenn das Barometer in pariser Zoll und Linien eingetheilt ist, (nach No. 3) $= 772{,}5 \times 75{,}53 = 58347$.

Und es ist für einen B.stand $= b$ par. Linien die Höhe über dem Meeresspiegel bei 0° R. Temperatur

$$H = 58347\,(\log 336 - \log b)$$

Bei der Temperatur $\pm t$° R. während des Standes b

$$H = 58347\left(1 + \frac{t}{200}\right)\left[\log 336 - \log\left(b \mp \frac{t}{4440}\right)\right]$$

Hat eine andere Höhe H^1 den B.stand b^1, so ist bei 0° Temp.

$$H - H' = 58347\,(\log b' - \log b)$$

Ist die Temp. während $b = t$; während $b' = t'$ so ist

$$H - H' = 58347\left[\frac{t - t'}{200}\log 336 + \left(1 + \frac{t'}{200}\right)\log\left(b' \mp \frac{t'}{4440}\right) - \left(1 + \frac{t}{200}\right)\log\left(b \mp \frac{t}{4440}\right)\right]$$

Barometerstand s. v. w. Barometerhöhe.

Barometrischer Coefficient für Höhenmessungen ist der Coefficient, mit welchem die von den beobachteten Barometerhöhen und Lufttemperaturen abhängige Gröfse zu multipliciren ist, womit dann der Höhenunterschied eines Orts von einem anderen gefunden ist. Dieser C. ist verschieden je nach dem Maafse, in welchem der Höhenunterschied angegeben wird (als: Toise, pariser Fufs, Klafter), und je nach den verschiedenen Eintheilungen der B.-scala (s. Barometermessungen).

Baroskop s. v. w. Barometer.

Basis, Grundlage. Eine Lage, auf der etwas gegründet wird oder ist, oder gegründet zu denken ist; ein der Praxis des Bauens entnommener Begriff. Ein Bauwerk ist stabil, und so mufs auch bildlich das mit einer B. Zusammenhangende als ein auf derselben gegründetes stabiles Bauwerk betrachtet werden können. So ist z. B. die B. eines Krystalls die Ebene, welche die Hauptaxe stabil zu machen scheint. In jedem Dreieck von zwei gleichen Seiten trägt die dritte als B. (Grundlinie) die beiden gleichen Schenkel; dgl. beim Kegel, der Pyramide, wo die B. eine Ebene, die Grundebene ist.

Jedem System, als einer geordneten Aneinanderreihung zusammengehöriger Dinge, ist eine B. erforderlich, wie z. B. einem Logarithmensystem, von der aus die geordnete Aufbauung des Zusammengehörigen beginnt. Jede Wissenschaft also bedarf einer B., und ohne diese wäre sie nicht da: z. B. die B. der Arithmetik ist die Einheit, die der Geometrie die Ausdehnung.

Basis ist nicht zu verwechseln mit Princip, welches dem Beweglichen angehört, und dessen Grundweise oder Grundursach (Kraft) ist, als das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten. Die B. des Sonnensystems ist die Sonne, indem diese alle Planeten zu einem stabilen Ganzen trägt und vereinigt; das Princip desselben ist die Attraction. Basis verhält sich zu Princip wie Sein zu Werden.

Basis, geometrische, ist eine gerade Linie oder eine Ebene, je nachdem das auf derselben gegründet zu Denkende eine Ebene oder ein Körper ist; wiewohl man von einem auf einer horizontalen Ebene errichtetes Loth aufser der Ebene selbst auch den untersten mit der Ebene zusammenfallenden Punkt des Loths als dessen B. betrachten kann.

Jedes Dreieck hat zur Basis eine seiner 3 Seiten, weil das Dreieck auf jeder derselben als gegründet angesehen werden kann, desgl. bei einem Quadrat, einem Rectangel. Bei einem Trapez kann die längere der parallelen Seiten als B. betrachtet werden, bei einem stumpfwinkligen Dreieck die dem stumpfen Winkel gegenüber liegende Seite, sofern man auf die scheinbare Stabilität der Figur rücksichtigt. Bei den zuletzt genannten, so wie allen übrigen Figuren ist der Name B. nicht gebräuchlich, sondern nur bei dem gleichschenkligen Dreieck, wo die dritte Seite die B. (Grundlinie) genannt wird. Bei der Pyramide, dem Kegel, heifst die der Spitze gegenüber liegende Ebene die B. (Grundebene, Grundkreis), bei der abgekürzten Pyramide, dem abgekürzten Kegel ist die gröfsere der beiden Endflächen die B., beim Prisma, dem Cylinder kann jede der beiden Endflächen als B. (Grundebene) betrachtet werden.

Mit solch einer geometrischen B. ist jederzeit der Begriff einer Axe verbunden, einer geraden Linie, welche von der Mitte der B. ausgehend, die Fläche oder den Körper so durchschneidet, dafs von allen Seiten derselben Symmetrie stattfindet. Bei dem gleichschenkligen Dreieck ist diese Axe die gerade Linie von der Spitze des Dreiecks nach der Mitte der Grundlinie, welche aber nicht Axe, sondern Höhe genannt wird. Ebenso die gerade Verbindungslinie der Mitten zweier parallelen Seiten des Quadrats, des Rectangels und des Trapezes. Diese Linien werden aber erst dann Axen genannt, wenn man die Figur um dieselben sich drehend sich denkt, so dafs Umdrehungskörper entstehen. Die gerade Verbindungslinie zwischen der Spitze und dem Mittel der B. bei Kegeln und Pyramiden heifst Axe, desgl. die gerade Verbindungslinie zwischen den Mitten der Endebenen von Prismen und Cylindern.

Krumme Linien von symmetrischer Anordnung, als Ellipse, Parabel, Hyperbel, haben keine B., wohl aber Axen. Denkt man sich die krumme Linie um die Axe sich herumgedreht, so dafs ein Umdrehungskörper entsteht, also eine Kugel, ein Ellipsoid, Paraboloid, Hyperboloid, so kann jede normal auf die Axe genommene Ebene als B. des Körper-Abschnittes betrachtet werden.

Diejenigen Körper, bei welchen die Basen aus den Axen entspringen, sind ganz besonders die Krystalle, oder vielmehr die Grundformen der Krystallsysteme, welche ursprünglich nach den Axen eingetheilt worden, aber auch basische Systeme genannt werden (s. den folgenden Art.)

Basis, Grundebene der Krystalle; ist in jedem Krystall, hauptsächlich in jeder Grundform eines Krystallisationssystems die Ebene, welche die Hauptaxe hälftet, und in der zugleich dessen Nebenaxen liegen, so dafs um die Basis alle Ecken, Kanten und Flächen des Krystalls eben so symmetrisch gruppirt sind, wie um dessen Axen (s. Axen und Axensystem der Krystalle). Diese Eigenschaft der Basen ist denn auch die Ursache, dafs es nicht nur Axensysteme, sondern auch basische Krystallisationssysteme geben kann und giebt. Durch die recht- oder schiefwinklige Lage der Basis gegen die Normalaxe entstehen zwei Hauptabtheilungen der Krystallisationssysteme, die orthobasischen und die klinobasischen Systeme oder die Systeme mit horizontaler und die mit schiefliegender Basis.

Basis, Grundzahl eines Logarithmensystems ist diejenige Zahl im System, deren Logarithmus = 1 ist.

Hat die Zahl a den Log. = 1, so hat a^2 den Log. 2, a^n den Log. n, wo n jede beliebige ganze, gebrochene, positive und negative Zahl sein kann, und das Logarithmensystem ist das, dessen Basis = a ist. Ist der Log. in diesem System = 0, ist also $n = 0$, so ist die zugehörige Zahl $= a^0 = 1$, d. h. in jedem Logarithmensystem ist der Log. von 1 = 0.

Für die Praxis im Zahlenrechnen interessirt uns nur ein Logarithmensystem, nämlich das dekadische, von dem ersten Berechner der Logarithmen gewöhnlich Brigg'sches System genannt; dessen Basis ist = 10. Stellt man die Zahlen zusammen, deren auf einander folgende Logarithmen die natürlich auf einander folgenden Zahlen sind, so erhält man

Log. = 1. 2. 3. 4. . . .
Zahl = 10. 100. 1000. 10000 . . . . .

und nach links fortgesetzt

Log. = − 3. −2. −1. 0 1

$$\text{Zahl} = \frac{1}{1000} \cdot \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{10} \cdot 1 \cdot 10$$

Es genügt aber nicht die Kenntnifs der Logarithmen dieser Potenzen von 10, man mufs auch die der ganzen Zwischenzahlen wissen, man hat demnach in der ersten geometrischen Reihe zwischen 1 und 10 noch 8 Zahlen, zwischen 10 und 100 noch 89 Zahlen u. s. w. einzuschalten.

0 1
1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10

Nun giebt es aber keine ganze Zahl

zwischen 1 und 10, die gleich wäre einer bestimmten Potenz von 10, folglich müssen die Logarithmen aller eingeschalteten Zahlen Irrationalzahlen sein.

Ferner ist die ursprüngliche Reihe der Zahlen eine geometrische, die dareingeschalteten Zahlen bilden eine arithmetische Reihe, mithin sind durch solches arithmetisches Interpoliren die Logarithmen nicht zu finden.

Soviel aber steht fest, dafs da $y = 10^x$ ist, wenn x den Logarithmus einer Zahl y bedeutet, jeder Logarithmus x von 2 Zahlen abhangen mufs, von einer veränderlichen, nämlich der Potenz y von der Wurzel = 10 deren Exponent = dem Logarithmus x ist, und von einer unveränderlichen, die mit der constanten Basis 10 als Wurzel Zusammenhang hat. Diese constante Zahl wird der Modul des Logarithmensystems genannt, und dasjenige System, dessen Modul = 1 ist, und das in der höheren Analysis durchweg seine Anwendung findet, heifst das natürliche Logarithmensystem, woher jedes andere, und da es nur noch das Brigg'sche giebt, also dieses System dem natürlichen als Gegensatz künstliches Logarithmensystem genannt wird.

Um die Sache hier gleich zu erläutern, sei allgemein b die Basis, die ganze Zahl, deren Logarithmus x gefunden werden soll $= a$, so ist

$b^x = a$ und daher $b^{nx} = a^n$

wo n eine jede beliebige Zahl sein kann.

Setzt man nun um den binomischen Satz anwenden zu können:

$$b^n = 1 + z;\quad a^n = 1 + y$$

also $(1 + z)^x = 1 + y$

und bezeichnet die Binomialcoefficienten x mit x_1

$\frac{x(x-1)}{1 \cdot 2}$ mit x_2; .... $\frac{x(x-1) \dots (x-n+1)}{1 \cdot 2 \dots n}$ mit x_n

so erhält man

$$1 + y = 1 + x_1 z + x_2 z^2 + x_3 z^3 + \dots x_n z^n$$

auf beiden Seiten 1 subtrahirt und mit z dividirt

$$\frac{y}{z} = \frac{a^n - 1}{b^n - 1} = x_1 + x_2 z + x_3 z^2 + \dots x_n z^{n-1}$$

Setzt man nun wieder, um auch die linke Seite der Gleichung in ein Binom auflösen zu können

$a = 1 + v$ und $b = 1 + w$, so ist

$$\frac{y}{z} = \frac{(1+v)^n - 1}{(1+w)^n - 1} = \frac{n_1 v + n_2 v^2 + n_3 v^3 + \dots n_m v^m}{n_1 w + n_2 w^2 + n_3 w^3 + \dots n_m w^m}$$

und für v den Werth $a - 1$, für w den Werth $b - 1$ gesetzt:

$$\frac{n_1(a-1) + n_2(a-1)^2 + n_3(a-1)^3 + \dots}{n_1(b-1) + n_2(b-1)^2 + n_3(b-1)^3 + \dots} = x + x_2 z + x_3 z^2 + \dots$$

Die linke Seite, Zähler und Nenner durch $n_1 = n$ dividirt, giebt

$$\frac{(a-1) + \frac{n-1}{2}(a-1)^2 + \frac{(n-1)(n-2)}{6}(a-1)^3 + \dots}{(b-1) + \frac{n-1}{2}(b-1)^2 + \frac{(n-1)(n-2)}{6}(b-1)^3 + \dots} = x + x_2 z + x_3 z^2 + \dots$$

Nun ist n nach der Annahme eine ganz beliebige Zahl, setzt man diese = 0, so ist, weil $b^n = 1 + z$, und $b^0 = 1$ ist, auch $z = 0$, und es entsteht aus der letzten Gl.:

$$\frac{(a-1) - \frac{1}{2}(a-1)^2 + \frac{1}{3}(a-1)^3 - \frac{1}{4}(a-1)^4 + \dots}{(b-1) - \frac{1}{2}(b-1)^2 + \frac{1}{3}(b-1)^3 - \frac{1}{4}(b-1)^4 + \dots} = x = log\ a$$

Der Zähler enthält also die Function des Arguments, der Urveränderlichen, der Nenner die der Basis b, und diese Constante, nämlich

$$\frac{1}{(b-1) - \frac{1}{2}(b-1)^2 + \frac{1}{3}(b-1)^3 + \dots} = M$$

ist der Modul.

Für $b = 10$ ist diese Constante der Modul des Brigg'schen Systems:

$$M = \frac{1}{9 - \frac{1}{2}9^2 + \frac{1}{3}9^3 - \frac{1}{4}9^4 \dots \pm \frac{1}{n}9^n}$$

nämlich

$M = 0{,}43429\ 44819\ 03251\ 82765\ 11289\ 18916\ 60508\ 22943\ 97005\ 804\dots$

Nun ist es leicht, die Basis e der natürlichen Logarithmen zu finden, denn für b die Basis (e) der natürlichen Logarithmen gesetzt, wird $M = 1$

und für jedes System einer Basis b ist

$$log\ a = M[(a-1) - \tfrac{1}{2}(a-1)^2 + \tfrac{1}{3}(a-1)^3 - \dots]$$

Setzt man nun $a = e$, so ist

$$log\ br\ e = M[(e-1) - \tfrac{1}{2}(e-1)^2 + \tfrac{1}{3}(e-1)^3 - \dots]$$

$$log\ nat\ e = 1 = [(e-1) - \tfrac{1}{2}(e-1)^2 + \tfrac{1}{3}(e-1)^3 - \dots]$$

hieraus

$log\ br\ e = M = 0{,}43429\dots$

woraus

$e = 2{,}71828\ 18284\ 59045\ 23536\ 02874\ 71352\ 66249\ 77572\ 4709\dots$

Mithin ist der Modul des Brigg'schen Systems gleich dem Brigg'schen Loga-

rithmus der Basis der natürlichen Logarithmen.

Setzt man in den beiden letzten Gleichungen $b(=10=$ der Basis des Brigg'schen Systems) statt e, so erhält man

$log\ br\ b = 1 = M[(b-1)-\frac{1}{2}(b-1)^2+\frac{1}{3}(b-1)^3-\ldots]$

$log\ nat\ b = \quad (b-1)-\frac{1}{2}(b-1)^2+\frac{1}{3}(b-1)^3-\ldots$

woraus

$$log\ nat\ b = \frac{1}{M}$$

d. h. der natürliche Logarithmus der Basis eines anderen Systems ist = 1 dividirt durch den Modul desselben Systems.

Man findet

$$log\ nat\ 10 = \frac{1}{0{,}43429\ldots} = 2{,}30258\ 50929$$
$$94045\ 68401\ 79914\ 54684\ 36420$$
$$76011\ 01488\ 629\ldots.$$

Basis des Prisma (Optik). Eine der brechenden Kante gegenüber liegende Ebene. Pag. 24, Fig. 28 ist in dem Prisma *ABC*, *A* die brechende Kante, daher *BC* die B. des P. Wenn solche B. nicht vorhanden ist, so vertritt jede andere beliebige, der brechenden Kante gegenüber liegende Ebene dieselbe. In Fig. 10, pag. 7 hat das Prisma keine B., es kann aber *ab* oder *af* oder jede beliebige andere, der Kante *c* gegenüber liegende Ebene die B. des P. genannt werden.

Baumé'sches Aräometer (s. Aräometer, wo ich am Schluſs des Scalen-A. versprochen, hier Nachricht zu geben). Es giebt zwei B. A., eins für leichtere, eins für schwerere Flüssigkeiten als Wasser. Die Theile heiſsen Grade, sind alle gleich groſs; das A. hat also den Nachtheil, daſs die specifischen Gewichte der Flüssigkeiten nicht unmittelbar gemessen werden können, (s. d. Art. Aräometer, No. 5, Pag. 87) sondern berechnet werden müssen, woher mehrere Physiker Tabellen dafür geliefert haben, die überdies noch von einander abweichen, weil die Fundamentalabstände nicht einmal sicher fest stehen; nämlich das spec. Gewicht des Wassers und einer Lösung von 1 Theil trockenem(?) Kochsalz in 9 Theilen Wasser; der Abstand im A. ist in 10 gleiche Theile getheilt, die Einsenkungstiefe in der Lösung mit 0, die im Wasser mit 10 bezeichnet, und für leichtere Flüssigkeiten als Wasser die gleiche Theilung nach oben bis 62 fortgesetzt.

Wie unsicher dies A. ist, beweist, daſs in Scholz's Lehrbuch der Physik das spec. Gew. bei 62° = 0,7251; nach Schober und Pecher = 0,7362 beträgt, also in einer Differenz von 0,0111 angegeben wird.

Für schwerere Flüssigkeiten als Wasser wird die oberste Einsenkungstiefe in Wasser mit 0 bezeichnet, die Tiefe in der obigen Mischung nach Anderen in einer Lösung von 15 Theilen trockenem(?) Kochsalz in 85 Theilen Wasser mit 10 bezeichnet, und diese Theilung nach unten bis 75 festgesetzt. In Scholz's Physik wird das spec. Gew. für 75 Grad = 2,0610; nach Schober und Pecher = 2,0693; also in einer Differenz von 0,0083 angegeben.

2. Es läſst sich also nicht feststellen, ob die eine oder die andere Reductionstabelle die richtige, wohl aber läſst sich prüfen, ob beide richtig sein können, und dieser Prüfstein ist für Flüssigkeiten leichter als Wasser (pag. 96, A. No. 10).

Die Formel

$$l' = \frac{2880}{17}\left(\frac{1{,}025}{p} - 1\right)$$

wo l' die Einsenkungstiefe in Linien und p das spec. Gew. der Flüssigkeit bezeichnet.

Da in den Tabellen die Grade in gleichen Abständen von einander sich befinden, so müssen die dort aufgeführten specifischen Gewichte p nach einander Einsenkungstiefen l' liefern, die gleiche Abstände von einander haben.

1) Scholz's Physik, S. 743 und Schubarth's Tabellen für den Unterricht in der Physik, pag 19, geben eine Tabelle für leichtere Flüssigkeiten als Wasser, in welcher die Baumé'schen A.-Grade auf specifische Gewichte reducirt sind, und von der ich die ersten 7 und die letzten 5 Grade hier in den ersten beiden Columnen abschreibe. Die dritte Columne giebt die aus den nebenstehenden specifischen Gewichten nach obiger Formel von mir berechneten Einsenkungstiefen, und die letzte Columne enthält deren Abstände von einander, welche gleich groſs werden müssen, wenn die 2. Columne richtig ist.

Grad Baumé	spec. Gew. $= p$	Einsenkungstiefe l' in Lin.	Differenz
10	1,0000	4,2353	
11	0,9930	5,4595	1,2242
12	0,9861	6,6830	1,2235
13	0,9792	7,9234	1,2304
14	0,9724	9,1635	1,2401
15	0,9657	10,4029	1,2394
16	0,9591	11,6403	1,2374
. . .	. . .	. . .	. . .
58	0,7435	64,1418	
59	0,7394	65,4368	1,2950
60	0,7354	66,7142	1,2774
61	0,7314	68,0056	1,2914
62	0,7251	70,0684	2,0628

Die Differenzen sind nicht gleich grofs, und in dem Verhältnifs der Verschiedenheit ist die Reductionstabelle in der Columne 2 unrichtig.

2) Nach Schober und Pecher (Schubarth's technische Chemie 1851, pag. 471) ist die Reductionstabelle in den 2 ersten Columnen für die ersten 5 und die letzten 5 Grade folgende, die Einsenkungstiefen, Columne 3, sind nach obiger Formel berechnet.

Grad Baumé	spec. Gew. $= p$	Einsenkungstiefe l' in Lin.	Differenz
10	1,0000	4,2353	
11	0,9931	5,4418	1,2065
12	0,9864	6,6295	1,1877
13	0,9787	8,0145	1,3850
14	0,9731	9,0356	1,0211
. . .	. . .	. . .	. . .
58	0,7515	61,6555	
59	0,7476	62,8609	1,2054
60	0,7438	64,0476	1,1867
61	0,7400	65,2464	1,1988
62	0,7362	66,4576	1,2112

Also auch diese Tabelle ist, wie aus der 4ten Columne erhellt, nicht richtig.

3. Um die Tabellen für Flüssigkeiten, die schwerer als Wasser sind, zu prüfen, sind 3 meiner Formeln anzuwenden nöthig, nämlich:

Von 1° bis 48° B. die Formel (A. No. 9)

$$l' = 240\left(\frac{1,5}{p} - 1\right)$$

von 47° bis 73° B. die Formel (A. No. 8)

$$l' = \frac{3540}{11}\left(\frac{2,025}{p} - 1\right)$$

und von 73° bis 75° B. die Formel (A. No. 7)

$$l' = \frac{9600}{23}\left(\frac{2,575}{p} - 1\right)$$

oder ich müfste zur Prüfung der ganzen Tabelle durch eine einzige Formel ein besonderes Normal-A. aus den Formeln 1 bis 7, pag. 93, erst construiren.

Es genüge die Prüfung der ersten 48 Grade durch die Formel

$$l' = 240\left(\frac{1,5}{p} - 1\right)$$

Man hat die ersten 2 Columnen nach Scholz, die letzten beiden als Prüfung derselben:

Grad Baumé	spec. Gew. $= p$	Einsenkungstiefe l' in Lin.	Differenz
0	1,0000	120,0000	
1	1,0070	117,4975	2,5025
2	1,0141	114,9946	2,5029
3	1,0213	112,4919	2,5027
4	1,0286	109,9903	2,5016
. . .	. . .	. . .	. . .
44	1,4359	10,7138	
45	1,4501	8,2587	2,4551
46	1,4645	5,8177	2,4410
47	1,4792	3,3748	2,4429
48	1,4942	0,9316	2,4432

Die Reductionstabelle kann also ziemlich genau und richtig sein, nur ist es auffallend, dafs die ersten Zahlen sowohl wie die letzten der Tabelle in den Differenzen so genau, als es vielleicht nur zu verlangen ist, einerlei Gröfse haben, dafs aber beide Differenzenreihen von einander abweichen.

Nach Schober und Pecher hat man

Grad Baumé	spec. Gew. $= p$	Einsenkungstiefe l' in Lin.	Differenz
0	1,0000	120,0000	
1	1,0069	117,5330	2,4670
2	1,0139	115,0646	2,4684
3	1,0211	112,5610	2,5036
4	1,0283	110,0924	2,4686
. . .	. . .	. . .	. . .
44	1,4350	10,8711	
45	1,4493	8,3958	2,4753
46	1,4640	5,9016	2,4942
47	1,4789	3,4242	2,4774
48	1,4941	0,9477	2,4765

Diese Reductionstabelle kann also eben so genau und richtig sein, wie die vorige.

4. Die Reduction der Grade des B. A. geschieht aber ganz leicht und sicher, sobald das spec. Gew. der oben gedachten Lösung bekannt ist. Gesetzt es betrage diese nach Scholz's Physik 1,0745; so construire man nach Pag. 93, Formel 6 ein Rechnen-Aräometer. Die Formel ist

$$l' = \frac{m}{n-m}\, l\left(\frac{n}{p} - 1\right)$$

und zwar bedeuten:

- l' die Einsenkungstiefe in einer Flüssigkeit von dem spec. Gew. p;
- l die ganze Länge des Aräometers bis zum Grenzwerth;
- n das spec. Gew. der möglich schwersten Flüssigkeit, in welcher $l' = 0$ ist;
- m das spec. Gew. der möglich leichte-

sten Flüssigkeit, bei der $l' =$ dem Grenzwerth l ist.

Für das Rechnen-A. der Flüssigkeiten, die schwerer als Wasser sind, ist nur gegeben:

m das spec. Gew. der leichtesten Flüssigkeit, nämlich des Wassers = 1;

p das spec. Gew. 1,0745 bei dem Theilstrich 10 von oben, also bei $l' = l - 10$.

Diese Werthe in die obige Formel gesetzt, hat man

$$(l-10) = \frac{1}{n-1}\, l \left(\frac{n}{1{,}0745} - 1\right)$$

woraus

$$l = \frac{21490}{149} \cdot \frac{n-1}{n}$$

und

$$n = \frac{21490}{21490 - 149 \cdot l}$$

Da das spec. Gew. bei 75° B. = 2,0610 angegeben ist, so mufs $n > 2{,}061$ sein.

Nun ist der Zähler von n

$$21490 = 7 \cdot 10 \cdot 307$$

Um möglichst kleine Zahlen zu erhalten, und um l in ganzer Zahl auszudrücken, so soll $l = 7 \cdot 15 = 105$ genommen werden.

Dann ist

$$n = \frac{614}{167} = 3{,}67\ldots.$$

Nun hat man aus der ersten Formel für l'

$$p = \frac{nml}{(n-m)l' + ml} = \frac{\frac{614}{167} \cdot 1 \cdot 105}{\left(\frac{614}{167} - 1\right) l' + 1 \cdot 105}$$

$$= \frac{21490}{149 \cdot l' + 5845}$$

Und

$$l' = \frac{35}{149} \cdot \frac{614 - 167p}{p}$$

Setzt man nun nach einander die Werthe für l', so erhält man

für $l' = 105 - 75 = 30$; p für 75° B.
$105 - 74 = 31$; p für 74° B.
. . . .
$105 - 0 = 105$; p für 0° B.

Für dieses $l' = 105$ ist also

$$p = \frac{21490}{149 \cdot 105 + 5845} = 1$$

Für jedes andere l' erhält man das spec. Gew. p auf soviel Decimalstellen genau, als man will, mit Ausnahme für 10° B., also bei $l' = 105 - 10 = 95$; wo man die oben angenommene Fundamentalzahl

$$\frac{21490}{149 \cdot 95 + 5845} = \frac{2{,}149}{2} = 1{,}0745$$

für p erhält.

Die oben geprüften spec. Gewichte der in Scholz befindlichen Reductionstabelle und die letzten 6 derselben sollen hier nach der Formel berechnet werden; man erhält:

Grade	Spec. Gew. nach d. Formel	Spec. Gew. nach Scholz
0	1,00000	1,0000
1	1,006982	1,0070
2	1,014062	1,0141
3	1,021242	1,0213
4	1,028525	1,0286
. . .	. . .	. . .
44	1,43900	1,4359
45	1,45350	1,4501
46	1,46830	1,4645
47	1,48340	1,4792
48	1,49881	1,4942
. . .	. . .	. . .
70	1,94304	1,9291
71	1,96957	1,9548
72	1,99684	1,9809
73	2,02487	2,0073
74	2,05370	2,0340
75	2,08337	2,0610

Hieraus geht hervor, dafs die Scholz'sche Reductionstabelle für Flüssigkeiten schwerer als Wasser, nicht richtig ist. Eine vollständige Tabelle richtig zu berechnen, finde ich nicht rathsam, weil das spec. Gew. der Lösung, worauf die ganze B. Scala sich gründet, wahrscheinlich nicht genau gegeben ist.

5. Für die Flüssigkeiten, welche leichter als Wasser sind, hat man ein anderes Rechnen-A. zu construiren. Für dieses ist gegeben:

n das spec. Gew. der schwersten Flüssigkeit = 1,0745 und

p das spec. Gew. = 1,000 bei dem Theilstrich 10 von unten, also bei $l' = 10$.

Diese Werthe in die Formel (No. 5) gesetzt, giebt

$$10 = \frac{m}{1{,}0745 - m}\, l \cdot \left(\frac{1{,}0745}{1} - 1\right)$$

woraus

$$l = \frac{21490 = 20000\, m}{149\, m}$$

und

$$m = \frac{21490}{20000 + 149 \cdot l}$$

Da das geringste spec. Gew. bei 62° R. mit 0,7251 angegeben ist, so mufs $m < 0{,}7251$ sein, und da die bei Baumé nicht mitgezählten untersten 10 Grade hier einbegriffen werden mufsten, so müssen auf

l mehr als 72 gleiche Theile abgelesen werden können.

Setzt man $l = 80$, so hat man

$$m = \frac{21490}{31920} = \frac{307}{456} = 0{,}67\ldots$$

und

$$p = \frac{nml}{(n-m)l' + ml}$$

$$= \frac{1{,}0745 \cdot \frac{307}{456} \cdot 80}{\left(1{,}0745 - \frac{307}{456}\right) l' + \frac{307}{456} 80}$$

$$p = \frac{21490}{149\, l' + 20000}$$

Nach dieser Formel sind folgende Baumé'sche Grade reducirt:

Grade	Spec. Gew. nach d. Formel	Spec. Gew. nach Scholz
0	1,07450	1,0745
1	1,06654	1,0666
2	1,05873	1,0588
3	1,05101	1,0511
4	1,04341	1,0435
5	1,03591	1,0360
6	1,02852	1,0286
7	1,02124	1,0213
8	1,01406	1,0141
9	1,00698	1,0070
10	1,00000	1,0000
11	0,99311	0,9930
12	0,98632	0,9861
13	0,97962	0,9792
14	0,97301	0,9724
15	0,96649	0,9657
16	0,96006	0,9591
17	0,95349	0,9526
18	0,94745	0,9462
19	0,94126	0,9399
20	0,93516	0,9336
. . .	. . .	. . .
55	0,76219	0,7560
56	0,75819	0,7518
57	0,75422	0,7476
58	0,75030	0,7435
59	0,74641	0,7394
60	0,74257	0,7354
61	0,73877	0,7314
62	0,73500	0,7251

Wenn die specifischen Gewichte der beiden dem B. A. zu Grunde liegenden Salzlösungen genau gegeben sind, so lassen sich, wie hier nachgewiesen worden, durch obige oder durch ähnlich begründete andere Rechnen-Aräometer die A.-Grade in specifischen Gewichten genau ermitteln.

Beaumé'sches Aräometer. Der Name Baumé ist in dem Art. Aräometer, pag. 97, unrichtig Beaumé geschrieben.

Bedeckung der Gestirne ist die Erscheinung, dafs ein Gestirn durch das Davortreten eines anderen unserm Blick ganz oder zum Theil verschwindet. Die B. der Sonne durch den Mond nennt man Sonnenfinsternifs, eine Mondfinsternifs ist auch eine B., indem die Erde zwischen Sonne und Mond tritt, so dafs deren Licht gehindert wird, auf den Theil des Mondes oder auf den ganzen Mond zu fallen, je nachdem dieser von der Erde zum Theil oder ganz bedeckt wird; Planeten können einander bedecken, der nähere den entfernteren, Fixsterne werden von der Sonne und den Planeten bedeckt; Fixsterne unter sich können sich nicht bedecken, weil sie immer einerlei Abstand von einander behalten.

Bedingung ist Beschränkung, die Zurückführung des Allgemeinen auf einen bestimmten Fall; z. B. pag. 47 ist die Höhe h eines Dreiecks ABC, Fig. 45, durch die gegebenen Seiten allgemein ermittelt, als

$$h = \frac{1}{2a}\sqrt{[(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)]}$$

Unter der Bedingung, dafs der Winkel, aus dessen Spitze (A) die Höhe h gefällt wird, ein rechter sei, erhält man

$$h = \frac{bc}{a}$$

Diejenigen Elemente, welche als B. gegeben werden, um ein Allgemeines einzuschränken, zu einem bestimmteren Fall zu machen, heifsen Bestimmungsstücke; das hier zugefügte ist $\angle BAC = R\angle$ (s. d. folg. Art.)

Bedingungen und die Behauptungen, welche unter dem Vorhandensein jener stattfinden und ausgesprochen werden, machen einen Lehrsatz aus: die B. heifsen Data, Hypotheses, die Behauptungen: Theses.

Bedingungsgleichung, eine Gl., welche zur Lösung einer algebraischen oder analytischen Aufgabe einer oder mehreren zu Grunde liegenden Bedingungen gemäfs voran aufgestellt wird. In dem Beispiel des vor. Art. ist zur Auffindung der Höhe h eines Dreiecks durch die gegebenen 3 Seiten die Bedingung, dafs die beiden $\angle$ die h mit BC bildet, rechte seien, weil sonst h keine Höhe wäre; daraus geht wieder hervor, dafs $\triangle ABC$ in 2 rechtwinklige Dreiecke getheilt worden ist, und hieraus entsteht die B.

$$h^2 = c^2 - (a-x)^2 = b^2 - x^2$$

welches eigentlich 2 B. sind.

Unter einer zweiten Bedingung, dafs $\angle BAC$ ein rechter sei, wird nur eine B., und zwar eine sehr einfache erforderlich, nämlich

$$(\triangle ABC =)\; b \cdot c = h \cdot a.$$

Bedingungsglieder sind die beiden ersten Glieder der Regel de tri; das dritte Glied ist das Frageglied.

Begrenzung eines Gegenstandes ist dessen Aeufseres, dasjenige, mit dem der Gegenstand anfängt oder aufhört, Etwas, das dem Gegenstande zugehört, ohne ein Theil desselben zu sein, also etwas dem Gegenstande Ungleichartiges. Eine weitere Erklärung ist nicht gut möglich, oder vielmehr gar keine Erklärung, weil B. zu den Grundbegriffen gehört, die keine Erklärung zulassen. Die B. ist eine allgemeine Eigenschaft aller Raumgröfsen. Daher ist auch eine unendliche Gröfse keine Gröfse, weil die Unendlichkeit die B. ausschliefst; wir haben deshalb keinen Begriff, kein Auffassungsvermögen für unendlich grofs. Ein Punkt hat keine Ausdehnung, er ist keine Gröfse und hat auch keine B. Eine Linie hat keine Breite, sie hat also nach der Breitenrichtung keine B., sondern nur in ihrer Ausdehnung, also zu Anfang und zu Ende ihrer Länge, die Fläche hat nur B. in ihrer Ausdehnung nach zwei Richtungen, der Körper hat B. nach drei Richtungen.

Begriff. Eine der Logik angehörige Bezeichnung, die aber hier in ihrer Bedeutung aufzunehmen ist, weil in der Mathematik Begriffe als Definitionen aufgestellt werden. B. ist die Zusammenfassung einer Summe von Anschauungen an einerlei Gegenstand; er dient zur genauen Erkenntnifs des aufgefafsten Gegenstandes und zur Unterscheidung desselben von allen anderen Gegenständen.

Z. B. Dreieck ist eine Figur, die von drei geraden Linien begrenzt ist. Kreis und Ellipse sind Figuren, die von nur einer einzigen krummen Linie begrenzt werden. Die Zahl 3, gerade Linie, krumme Linie und Figur als begrenzte Ebene sind die Anschauungen, auch Theilvorstellungen, Merkmale genannt, und die Zusammenfassung des gemeinsamen Merkmals: Figur mit den verschiedenen Begrenzungen, als zweites Merkmal, giebt den Unterschied zwischen Dreieck und den genannten krummlinigen Figuren. Dreiecke und Vierecke sind darin verschieden, dafs jene von 3, diese von 4 geraden Linien begrenzt werden; Figur und geradlinige Begrenzung sind beiden gemeinsame Merkmale, die Zahl 3 ist dem Dreieck, die Zahl 4 an Begrenzungslinien dem Viereck eigenthümliches Merkmal; sowie Kreis und Ellipse zu gemeinschaftlichen Merkmalen den Begriff krummlinige Figur haben, und erst in den bestimmten Formen ihrer Begrenzungen von einander unterschieden werden.

Je mehr Anschauungen an einem Dinge gemacht werden können, desto zusammengesetzter ist sein B.; die ausführliche Aufstellung aller Merkmale eines Gegenstandes zu seinem B. heifst Definition.

Ein B., der in einem anderen B. Merkmal ist, begreift diesen unter sich; jener ist ein höherer, dieser ein niederer B. Alle niedern B. bilden die Sphäre, und deren Anzahl den Umfang des höheren B.

Z. B. Figur begreift den B. Dreieck, Viereck, Vieleck, Kreis u. s. w. unter sich; Figur ist ein höherer B. als Dreieck u. s. w., Vieleck ein niederer B. als Figur; sämmtliche unter sich verschiedene Figuren bilden die Sphäre, und deren Anzahl den Umfang des B. Figur.

Ein B., der einen anderen B. zum Merkmal hat, begreift diesen B. in sich; also der niedere B. begreift den höheren B. in sich. Der B. Kreis begreift den B. Figur in sich, die Menge der B., die ein B. in sich begreift, bildet seinen Inhalt.

Z. B. Kugel ist ein Körper, dessen Begrenzung von einem einzigen Punkt überall gleich weit entfernt ist. Der Inhalt des B. Kugel besteht also in dem B. Körper, und in der angegebenen Form der Begrenzung.

Nimmt man von einem B. eine Theilvorstellung hinweg, so erhält man einen höheren B; man kann dies so lange fortsetzen, bis man auf nur eine Theilvorstellung kommt, und diese bildet sodann einen einfachen B. Abstrahirt man bei dem B. Kugel von der Form der Begrenzung, so erhält man den höheren B. Körper, d. h. begrenzter Raum, abstrahirt man von Grenze, so erhält man den B. Raum, der keine Theilvorstellungen hat, der, so wie er gegeben ist, mit keinem anderen B. verglichen werden kann, und daher ein einfacher B. ist. Die einfachen B. sind unter den B., was die Grundsätze unter den Erkenntnifssätzen sind: jene lassen sich nicht mehr definiren, diese lassen sich nicht mehr beweisen; bei jenen liegt das Merkmal in dem B. selbst, bei diesen die Richtigkeit des Satzes in dem Satz selbst (vgl. Axiom).

Beharrung, Beharrlichkeit, Beharrungszustand ist der Zustand eines Körpers, **Beharrungsvermögen** dessen Vermögen, in der Ruhe oder in derselben Bewegung zu verbleiben, in welcher er sich befindet;

das B.vermögen der Ruhe wird auch Trägheit genannt. Diese Eigenschaft ist der Grund, weshalb ein Körper weder aus der Ruhe in Bewegung kommen, noch daſs dessen Bewegung vermehrt oder vermindert werden kann, ohne daſs eine neu hinzutretende Kraft solches veranlaſst.

Wenn ein in Bewegung befindlicher Körper einen anderen Körper trifft, so theilt er diesem durch Stoſs Bewegung mit, und er verliert so viel an der Gröſse seiner Bewegung (Masse × Geschwindigkeit) als er dem anderen abgegeben hat.

Aber die B. des ersten hat die Bewegung des zweiten Körpers nicht hervorgebracht, und die B. des zweiten hat die Bewegung des ersten nicht vermindert, sondern die Gröſse der Bewegung des ersten als Kraft, und die ruhende oder mit geringerer Geschwindigkeit sich bewegende Masse des zweiten Körpers als Widerstand (entgegengesetzt wirkende oder negative Kraft) sind die Ursache der Aenderung. B. erregt nicht und hemmt nicht Bewegung, und ist keine Kraft.

Beharrungszustand eines Flusses und eines Kanals ist der Zustand desselben, daſs in einerlei Zeit aus jedem Profil eine eben so groſse Wassermenge abströmt, als in dasselbe einströmt. Bei groſser Länge eines Flusses, in einem Gebiet Trockenheit, in einem entfernten starker Zufluſs durch Regen, aufthauende Schneemassen oder Einströmung angeschwellter Nebenflüsse ist B. des Flusses fast immer nur streckenweise; zwischen beiden Strecken ist es gestört. Flieſst in ein Profil mehr zu als ab, so erhebt sich der Wasserspiegel, flieſst weniger zu als ab, so senkt er sich; im B. bleibt er, von der Verdunstung abgesehen, auf einerlei Höhe. Aus ähnlichem Grunde ist in einem Schiffahrtskanal der B. in der Nähe der Schleusen fast immer gestört.

B. findet bei Hochwasser und bei Kleinwasser statt.

Behauptung heiſst im Allgemeinen ein Satz, der aussagt, daſs etwas ist oder nicht ist. In der Mathematik der in mathematische Form gebrachte Inbegriff eines Lehrsatzes (die Thesis), welcher, da er nicht unmittelbar als richtig erkannt wird, aber als richtig erkannt werden soll, des Beweises bedarf, und dem Beweise als das zu Beweisende vorangestellt wird. Der B. unmittelbar folgen die Data, Hypotheses, die Bedingungen, unter welchen die B. stattfindet, und hiernach fängt der Beweis an. Z. B. bei dem im Art. Analytischer Beweis als Beispiel aufgeführten Satz hat man

Thesis: $\square AD + \square DB = 2\square AC + 2\square CD$
Hypothesis: $AD + DC = BC$

Der Schluſssatz des Beweises besteht dann wieder in der B., als dem erwiesenen Satze (s. Bedingung).

Bekanntes Glied s. v. w. absolutes Glied (s. d.)

Es kann auch aus mehreren Gliedern bestehen, wie

$$y^3 - 3ay^2 + by + c - \frac{de}{f} = 0$$

wo $c - \frac{de}{f}$ das b. Gl. ist.

Bekannte Gröſsen sind in einer arithmetischen Aufgabe diejenigen Gröſsen, durch welche eine oder mehrere zu findende unbekannte Gröſsen ausgedrückt werden sollen, sie werden mit den ersten Buchstaben des Alphabets bezeichnet. In Beispiel 1, pag. 61, sind a und b die b. G., x und y die unbekannten, und $x = \frac{a+b}{2}$ $y = \frac{a-b}{2}$ ist die Lösung der Aufgabe, indem x und y durch a und b ausgedrückt worden sind.

Belastung ist Zweck und Bestimmung tragfähiger Baustücke, deren Tragfähigkeit sie nicht überschreiten darf, wenn das Bauwerk auf Dauer Anspruch machen soll. Durch die geringste B. nämlich wird das Material des Baustücks in seiner Gestalt geändert, allerdings ohne daſs dies wahrzunehmen ist; mit der Vermehrung der B. wird auch jene Aenderung vermehrt, diese wird sichtbar und verschwindet wieder mit der B., aber nur bis zu einer gewissen Grenze; wird diese durch B. überschritten, so sind die Aenderungen an Ausdehnung oder Zusammendrückung des Materials, oder durch beides an verschiedenen Stellen bleibend geworden: die Moleküle des tragenden Körpers sind in ihrem natürlichen Zusammenhange gestört, dessen Tragfähigkeit ist vermindert, und wird es unter derselben bleibenden B. immer mehr und mehr; d. h. es erfolgt mit der Zeit Bruch. Nur die Verminderung der zu groſsen B. und deren Reduction auf die Stufe der jetzt geringer gewordenen Tragfähigkeit des belasteten Körpers kann noch Sicherheit auf Dauer gewähren. Man sagt, man habe mit der B. die Elasticitätsgrenze des Baustücks überschritten.

Wird die Zahl in Pfunden, durch welche ein Material von 1 □Zoll Querschnitt der Länge nach zerreiſst, mit n, der Quere nach zerbricht, mit m, durch Druck zerquetscht wird, mit k, durch Verdrehen

(Torsion) zerreifst, mit t bezeichnet, so darf für die Sicherheit auf Dauer die B. auf den □Zoll Querschnitt des Baustücks betragen:

für Metalle { bei dauernder B. nur $\frac{1}{6}n$; bei abwechselnder B. nur $\frac{1}{5}n$ bis $\frac{1}{4}n$ }
für Holz nur $\frac{1}{10}n$
für Metalle nur $\frac{1}{6}m$
für Holz nur $\frac{1}{10}m$
für Schmiedeeisen nur $\frac{1}{6}k$
für Gufseisen nur $\frac{1}{5}k$
für behauene Steine in Lagen nur $\frac{1}{10}k$
für dieselben in hohen Pfeilern und in Gewölben nur $\frac{1}{13}k$
für Metalle nur $\frac{1}{6}t$
für Holz nur $\frac{1}{10}t$.

Beleuchtung der Erde durch die Sonne s. u. Aequator der Erde, Pag. 33.

Benannte Zahlen sind Zahlen, die sich auf bestimmte Gegenstände beziehen, als 8 Thaler, 5 Pfund, 6 Fufs; a Scheffel, b Stunden, c □Meilen. Addirt und subtrahirt werden nur gleichartige, d. h. solche Zahlen, die einerlei Benennung haben, also z. B. nur Thaler zu Thalern oder von Thalern; Pfunde zu oder von Meilen geht nicht. Um Groschen von Thalern abzuziehen, müssen entweder die Groschen in Bruchthalern ausgedrückt werden, oder man borgt vom Minuend einen Thaler, verwandelt diesen in Groschen, und zieht von diesen ab.

Multiplicirt wird eine b. Z. nur durch eine abstracte Zahl (5 Pfund × 3 Pfund, 3 Stunden × 12 Meilen ist unmöglich). Dividirt wird eine b. Z. durch eine abstracte Zahl, wenn man nach einem Theil der b. Z. fragt, z. B. $\frac{1}{3}$ von 25 Sgr. ist $= \frac{25 \text{ Sgr.}}{3} = 8\frac{1}{3}$ Sgr.; eine b. Z. durch eine ihr gleichartige b. Z., wenn gefragt wird, der wievielste Theil diese von jener ist. $\frac{72 \text{ Pfd.}}{9 \text{ Pfd}} = 8$ heifst, 9 Pfund sind der 8te Theil von 72 Pfund.

Für die Aufgabe: in 20 Minuten macht ein Bahnzug 3 Meilen, wieviel (x) Meilen in 12 Stunden, wird das Exempel unrichtig geschrieben:

$$x \text{ Meilen} = \frac{12 \text{ Stunden} \times 3 \text{ Meilen}}{20 \text{ Minuten}}$$

es mufs geschrieben werden:

$$20 \text{ Min.} : 12 \text{ Stunden} = 3 \text{ Ml.} : x \text{ Ml.}$$

oder

$$x \text{ Meilen} = \frac{12 \text{ Stunden}}{20 \text{ Minuten}} \times 3 \text{ Meilen};$$

denn im ersten Exempel sind beide Verhältnisse abstracte Zahlen, und x hat im Exempel die Benennung: Meilen, woher diese Benennung auch dem ausgerechneten x zukommt; im zweiten Fall ist der Quotient Stunden durch Minuten als Factor des Multiplicandus 3 Meilen abstract.

Eine Ausnahme für die Multiplication und Division machen die Raumgröfsen wegen möglicher dreier Dimensionen derselben: Länge, Breite und Höhe.

3 Fufs × 5 Fufs giebt 15 □Fufs
10 □Fufs × 7 Fufs giebt 70 Kubikfufs

$\frac{16 \,\square\text{Fufs}}{2 \text{ Fufs}}$ giebt 8 Fufs

$\frac{27 \text{ cubfufs}}{9 \,\square\text{Fufs}}$ giebt 3 Fufs

$\frac{30 \text{ cubfufs}}{6 \text{ Fufs}}$ giebt 5 □Fufs

$$\frac{12 \text{ Fufs}}{4 \text{ Fufs}} = \frac{12 \,\square\text{Fufs}}{4 \,\square\text{Fufs}} = \frac{12 \text{ Kubikfufs}}{4 \text{ Kubikfufs}} = 3 \text{ (abstract)}$$

$\frac{a \text{ Fufs}}{b \,\square\text{Fufs}}$ oder $\frac{c \text{ Fufs}}{d \text{ Kubikfufs}}$ oder $\frac{e \,\square\text{Fufs}}{f \text{ Kubikfufs}}$ kann nie vorkommen (vergl. Abmessung und algebraische Geometrie).

Beobachtung ist die Aufmerksamkeit in Wahrnehmung einer zu erwartenden oder des Verlaufs einer vorhandenen Erscheinung; sie wird zum Versuch, wenn man die Erscheinung, die man beobachten will, durch äufsere Mittel selbst hervorruft. Dafs das Quecksilber im Thermometer bei Zunahme der aufsern Wärme steigt, ist eine B., dafs es in kochendem Wasser immer nur auf eine bestimmte Höhe steigt, ist ein Versuch. Versuche und Beobachtungen sind das Fundament aller Erkenntnisse in dem Gebiet der angewandten mathematischen Wissenschaften: die B., dafs ein in die Höhe geworfener Körper wieder fällt, leitete auf das Vorhandensein einer Anziehungskraft unserer Erde; Versuche über die Länge seines Falls in einer bestimmten Zeit, und dafs diese in einerlei Zeit dieselbe bleibt, auf die Gröfse dieser Kraft. Nur mit Hülfe von Keplers Beobachtungen der Planetenbahnen war Newton im Stande, das allgemeine Attractionsgesetz zu entdecken.

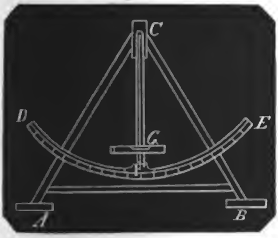
Berechnen heifst, eine Rechnungsaufgabe lösen, wenn man die zur Lösung erforderlichen Rechnungselemente richtig anwendet, zu einem Exempel ansetzt, und dieses ausrechnet. Der Kubikinhalt eines Kegels kann berechnet werden, wenn man dessen Höhe h und den Halbmesser r dessen Grundebene kennt, und man berechnet ihn, wenn man das Exempel $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ ansetzt und ausrechnet.

Beim Berechnen müssen also die Rechnungsweisen der Natur der Aufgabe entsprechend erst gefunden werden, und

nur die Elemente dafür sind gegeben; beim Ausrechnen sind diese mit den Rechnungsweisen gegeben; rechnen heifst nur, mit einer oder mehreren der verschiedenen Rechnungsweisen sich beschäftigen. Ein gegebenes Exempel wird ausgerechnet, die Bahn eines Kometen bei gegebenen Beobachtungen wird berechnet, in Calculaturen wird gerechnet.

Bergwaage, ein Instrument zum Messen des Neigungswinkels abhängiger Flächen. Sie besteht aus einem festen Stativ *ACB*, dessen Basis *AB* etwa 10 Fufs beträgt. Beide Schenkel *AC*, *BC* sind durch einen in Grade und Theile derselben eingetheilten Kreisring *DE* verbunden, der von dem mittleren Nullpunkt aus, von jeder Seite etwa 45 Grad fafst. Um eine Axe *C* drehbar ist eine Gabel befestigt, die eine Zeigerstange *CF* trägt, welche dicht am Kreisbogen mit einem Nonius, und weiter oben mit einer Libelle *G* versehen ist. Wird die Stange so gedreht, dafs der Nullpunkt des Nonius mit dem Nullpunkt des Kreisringes zusammentrifft, und steht hierbei die Luftblase der Libelle senkrecht in der Mitte, so bilden die Unterkanten der Füfse eine richtige Horizontale *AB*. Setzt man die Waage mit *AB* auf eine geneigte Ebene und dreht die Zeigerstange *CF* bis die Luftblase in der richtigen Mitte steht,

Fig. 201.



so giebt der Zeiger auf dem Kreisring die Gröfse des Neigungswinkels der Ebene in Graden und Minuten an. Kehrt man das Instrument um, so dafs *A* und *B* mit einander vertauscht werden, so mufs der Zeiger auf die andere Hälfte des Kreisrings gedreht werden, und man hat eine Controlle für die erste Messung. In der Regel stimmen beide Messungen nicht genau überein, weil das Terrain zu weich und nachgiebig ist; man nimmt dann aus beiden Angaben des Ringes das Mittel.

Bernoullische Zahlen sind die Coefficienten der letzten Glieder von Reihen, welche die Summen der Reihen gerader Potenzen der natürlich auf einander folgenden Zahlen von 1 bis x bilden, und nach x geordnet sind.

Die natürlich auf einander folgenden Zahlen bis x sind

$$1.\ 2.\ 3.\ 4.\ \ldots .\ x$$

Diese zu geraden Potenzen erhoben, geben die Reihen

$$\begin{array}{lccccc} \text{I.} & 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 & \ldots .\ x^2 \\ \text{II.} & 1^4 & 2^4 & 3^4 & 4^4 & \ldots .\ x^4 \\ \text{III.} & 1^6 & 2^6 & 3^6 & 4^6 & \ldots .\ x^6 \\ . & . & . & . & . & . \\ (M) & 1^{2m} & 2^{2m} & 3^{2m} & 4^{2m} & \ldots .\ x^{2n} \end{array}$$

Die B. Zahl, welche aus der 1. Reihe hervorgeht, heifst die erste B. Z.; die aus der 2. Reihe die zweite, die aus der $m$ten Reihe hervorgehende die $m$te B. Z.

Die 1ste Reihe ist eine arithmetische Reihe der 2ten Ordnung, die 2te eine der 4ten, die 3te eine der 6ten, die $m$te eine der $2m$ten Ordnung.

Pag. 128 ist die Summe einer arithmetischen Reihe der $m$ten Ordnung entwickelt, aber nur in den ersten 3 Gliedern angegeben; vollständig durch Hinzufügung des letzten Gliedes ist sie:

$$S = \frac{n}{1}a + \frac{n(n-1)}{1.\ 2}a_1 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}a_2 + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-m)}{1.\ 2\ \ldots(m+1)}a_m$$

wo a das erste Glied der gegebenen Reihe, a_1; a_2 ... die 1. Glieder der 1ten, 2ten ... Differenzenreihen und n die Anzahl der Glieder bedeuten. Die Reihe, welche die Summe einer Reihe höherer (der $m$ten) Ordnung ausdrückt, hat also ein Glied mehr $(m+1)$ als die Ordnungszahl (m) ausdrückt, weil jede Reihe höherer Ordnung eben so viel Differenzenreihen (m) hat, als die Ordnungszahl (m) der Reihe angiebt, deren Anfangsglieder, m an der Zahl, aufser dem vorangestellten 1ten Gliede (a) der Reihe selbst als Factoren alle vorkommen.

In den obigen für die B. Z. gegebenen Reihen ist $a = 1$, $n = x$.

Man hat also allgemein die Summe S einer solchen Reihe, oder der $m$ten Reihe $(1^{2m} \ldots x^{2m})$, welche $(2m+1)$ Glieder hat:

$$Sx^{2m} = \frac{x}{1}\cdot 1 + \frac{x(x-1)}{1.\ 2.}a_1 + \frac{x(x-1)(x-2)}{1.\ 2.\ 3}a_2 + \ldots + \frac{x(x-1)\ldots(x-2m+1)}{1.\ 2.\ 3\ldots(2m)}a_{2m-1} + \frac{x(x-1)\ldots(x-2m)}{1.\ 2.\ 3\ldots(2m+1)}a_{2m}$$

Der Erklärung der B. Z. zufolge sind nur die Coefficienten der einfachen x zu nehmen, die der Potenzen von x aber fortzulassen; denn die nach x geordnete Reihe beginnt mit dem Factor x^{2m+1} und endigt mit dem Factor x. Demnach hat man in der Reihe für Sx^{2m} nur zu beobachten die Glieder, welche durch die Multiplication von x mit den Subtrahenden entstehen, nämlich

$$x \cdot \frac{1}{1} + \frac{x(-1)}{1.\,2.}\,a_1 + \frac{x(-1)(-2)}{1.\,2.\,3}\,a_2 + \frac{x(-1)(-2)(-3)}{1.\,2.\,3.\,4}\,a_3 + \frac{x(-1)(-2)(-3)\ldots(-2m+1)}{1.\,2.\,3.\,4\ldots(2m+1)}\,a_{2m}$$

und eine B. Z. allgemein ist:

$$= 1 - \tfrac{1}{2}a_1 + \tfrac{1}{3}a_2 - \tfrac{1}{4}a_3 + \tfrac{1}{5}a_4 - \ldots + \frac{1}{2m+1}\,a_{2m}$$

Nun hat man noch die ersten Glieder

$$a_1;\ a_2;\ a_3 \ldots\ldots a_{2m}$$

der Differenzreihen aufzusuchen.

Die Reihe I ist

$(1^2 = 1) \cdot (2^2 = 4) \cdot (3^2 = 9) \ldots\ldots$

1te D.-R. $(2^2 - 1^2 = 3) \cdot (3^2 - 2^2 = 5) \ldots$

2te D.-R. $(3^2 - 2.\ 2^2 + 1 = 2) \ldots$

deren Glieder einander gleich, also $= 2$ sind

Reihe II ist

$(1^4 = 1)(2^4 = 16)(3^4 = 81)\ (4^4 = 256)\ (5^4 = 625)$

1ste D.-R. $(2^4 - 1^4)(3^4 - 2^4)(4^4 - 3^4)(5^4 - 4^4)$

2te D.-R. $(3^4 - 2 \cdot 2^4 + 1)\ (4^4 - 2 \cdot 3^4 + 2^4)$ $(5^4 - 2 \cdot 4^4 + 3^4)$

3te D.-R. $(4^4 - 3 \cdot 3^4 + 3 \cdot 2^4 - 1)$ $(5^4 - 3 \cdot 4^4 + 3 \cdot 3^4 - 2^4)$

4te D.-R. $5^4 - 4 \cdot 4^4 + 6 \cdot 3^4 - 4 \cdot 2^4 + 1 = 24$

deren Glieder einander gleich, also $= 24$ sind u. s. w.

Die erste B. Z. (aus der 1. Reihe ist daher

$$1 - \tfrac{1}{2}(2^2 - 1) + \tfrac{1}{3}(3^2 - 2 \cdot 2^2 + 1) = \tfrac{1}{6}$$

Die zweite B. Z. (aus der 2. Reihe)

$$1 - \tfrac{1}{2}(2^4 - 1) + \tfrac{1}{3}(3^4 - 2 \cdot 2^4 + 1) - \tfrac{1}{4}(4^4 - 3 \cdot 3^4 + 3 \cdot 2^4 - 1) + \tfrac{1}{5}(5^4 - 4 \cdot 4^4 + 6 \cdot 3^4 - 4 \cdot 2^4 + 1 = -\tfrac{1}{30}$$

allgemein die $n$te B. Z.

$$1 - \tfrac{1}{2}(2^{2n} - 1) + \tfrac{1}{3}(3^{2n} - 2 \cdot 2^{2n} + 1) - \tfrac{1}{4}(4^{2n} - 3 \cdot 3^{2n} + 3 \cdot 2^{2n} - 1) + \ldots\ldots$$
$$+ \frac{1}{2n+1}\Big[(2n+1)^{2n} - \frac{2n}{1}(2n)^{2n} + \frac{2n(2n-1)}{1.\,2}(2n-1)^{2n} - \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{1.\,2.\,3}(2n-2)^{2n}$$
$$+ \ldots\ldots - \frac{2n}{1}\,2^{2n} + 1\Big]$$

wo die eingeklammerte Reihe des letzten Gliedes das erste und in allen übrigen Gliedern gleichbleibende Glied (a_{2n}) der $2n$ten Differenzenreihe der ursprünglichen Reihe $1^{2n}, 2^{2n}, \ldots\ldots (2n+1)^{2n}$ ist.

Diese sind die B. Z., wie sie unmittelbar aus der Worterklärung hervorgehen:

die 1ste $= \dfrac{1}{6}$

die 2te $= -\dfrac{1}{30}$

die 3te $= +\dfrac{1}{42}$

die 4te $= -\dfrac{1}{30}$

die 5te $= +\dfrac{5}{66}$

die 6te $= -\dfrac{691}{2730}$

die 7te $= +\dfrac{7}{6}$

die 8te $= -\dfrac{3617}{510}$

die 9te $= +\dfrac{43867}{798}$

die 10te $= -\dfrac{174611}{330}$

die 11te $= +\dfrac{854513}{138}$

die 12te $= -\dfrac{236364091}{2730}$

2. Nach den vorstehenden Formeln ist es sehr weitläufig, die B. Z. zu berechnen. Setzt man die Summe der Reihen

$$1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + x = Sx$$
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots + x^2 = Sx^2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$1^n + 2^n + 3^n + \ldots\ldots + x^n = Sx^n$$

Die Binomial-Coefficienten

$$\frac{n}{1} = n_1;\ \frac{n \cdot n-1}{1.\,2} = n_2 \text{ u. s. w.}$$

und entwickelt aus der allgemeinen Reihe

$$(x \pm 1)^{n+1} = x^{n+1} \pm (n+1)_1\,x^n + (n+1)_2\,x^{n-1} \pm \ldots\ldots + (n+1)\,x \pm 1$$

die Reihen, indem man nach einander für x die natürlich auf einander folgenden Zahlen nimmt, so hat man

$$
\begin{aligned}
(1\pm 1)^{n+1} &= 1^{n+1} \pm (n+1)_1 \cdot 1 + (n+1)_2 \cdot 1 \pm \ldots + (n+1)_1\, 1 \pm 1\\
(2\pm 1)^{n+1} &= 2^{n+1} \pm (n+1)_1\, 2^n + (n+1)_2\, 2^{n-1} \pm \ldots + (n+1)_1\, 2 \pm 1\\
(3\pm 1)^{n+1} &= 3^{n+1} \pm (n+1)_1\, 3^n + (n+1)_2\, 3^{n-1} \pm \ldots + (n+1)_1\, 3 \pm 1\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
[(x-1)\pm 1]^{n+1} &= (x-1)^{n+1} \pm (n+1)_1\, (x-1)^n + \ldots + (n+1)_1\, (x-1) \pm 1\\
(x\pm 1)^{n+1} &= x^{n+1} \pm (n+1)_1\, x^n + (n+1)_1\, x^{n-1} \pm \ldots + (n+1)_1\, x \pm 1
\end{aligned}
$$

Bei positivem Vorzeichen fängt die erste senkrechte Reihe links des Gleichheitszeichens mit $(1+1)^{n+1} = 2^{n+1}$ an, und endigt mit $(x+1)^{n+1}$, folglich ist die Summe dieser Reihe $= S(x+1)^{n+1} - 1^{n+1} = S(x+1)^{n+1} - 1$; die erste senkrechte Reihe rechts des Gleichheitszeichens ist $= Sx^{n+1}$; die 2te $= (n+1)_1\, Sx^n$ u. s. w. und folglich

$$S(x+1)^{n+1} - 1 = Sx^{n+1} + (n+1)_1\, Sx^n + (n+1)_2\, Sx^{n-1} \ldots + (n+1)_1\, Sx + x \quad (1)$$

Bei negativem Vorzeichen fängt die Reihe links des Gleichheitszeichens mit $(1-1)^{n+1} = 0$ an und endigt mit $(x-1)^{n+1}$, sie ist also $= S(x-1)^{n+1}$, und man hat

$$S(x-1)^{n+1} = Sx^{n+1} - (n+1)_1\, Sx^n + (n+1)_2\, Sx^{n-1} - \ldots \mp (n+1)_1\, Sx \pm x \quad (2)$$

wo in den hinteren Gliedern die oberen Vorzeichen für ungerade, und die unteren für gerade n gelten.

Da hier nur die geraden n interessiren, so hat man

$$S(x+1)^{n+1} - S(x-1)^{n+1} - 1 = 2(n+1)_1\, Sx^n + 2(n+1)_3\, Sx^{n-2} + \ldots + 2(n+1)_2\, Sx^2 + 2x \quad (3)$$

So wie die Summe sämmtlicher obigen Reihen von $(1+1)^{n+1}$ bis $(x+1)^{n+1}$ $= S(x+1)^{n+1} - 1$ (Gl. 1) ist, so ist auch die Summe derselben Reihen mit Ausnahme der letzten, nämlich von $(1+1)^{n+1}$ bis $(x-1+1)^{n+1} = Sx^{n+1} - 1$. Zieht man die letzte Summe von der ersten ab, so behält man die letzte Reihe für $(x+1)^{n+1}$ übrig, demnach hat man

$$S(x+1)^{n+1} - Sx^{n+1} = (x+1)^{n+1} \quad (4)$$

und zieht man von der Summe der Reihen bis zur vorletzten Reihe, nämlich für $(x-1+1) = x$ die Summe der vorhergehenden Reihen, also $S(x-1)^{n+1}$, ab, so bleibt die vorletzte übrig, nämlich die Reihe für x^{n+1}, und es ist also

$$Sx^{n+1} - S(x-1)^{n+1} = x^{n+1} \quad (5)$$

Die Gleichungen 4 und 5 addirt, geben

$$S(x+1)^{n+1} - S(x-1)^{n+1} = (x+1)^{n+1} + x^{n+1}$$

Diese Werthe in (3) gesetzt, und $2x$ auf die linke Seite geschafft, giebt

$$(x+1)^{n+1} + x^{n+1} - 2x - 1 = 2(n+1)_1\, Sx^n + 2(n+1)_3\, Sx^{n-2} \ldots + 2(n+1)_2\, Sx^2$$

3. Aus dieser letzten Formel nun kann man die B. Z. finden, sobald man für n nach und nach die Werthe 2, 4, 6 … $2n$ setzt

Für $n = 2$ hat man

$$(x+1)^3 + x^3 - 2x - 1 = 2 \cdot \tfrac{3}{1}\, Sx^2$$

woraus

$$6 \cdot Sx^2 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 2x - 1$$

und

$$Sx^2 = \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x$$

Es ist also $\frac{1}{6}$ die erste B. Z.

Da nur diese Zahl allein interessirt, so hat man die Potenzen von x zu übergehen, und nur zu rechnen $\dfrac{3x - 2x}{6} = \frac{1}{6}x$; und so für alle übrigen.

Bezeichnet man daher die allgemeine B. Z. mit z^n, so hat man

$$z^n = \frac{1}{2(n+1)}\left[-2 + (n+1) - 2(n+1)_3\, z^{n-2} - 2(n+1)_5\, z^{n-4} - 2(n+1)_7\, z^{n-6} \ldots\right]$$

oder reducirt

$$z^n = \tfrac{1}{2} - \frac{1}{n+1}\left[1 + (n+1)_3\, z^{n-2} + (n+1)_5\, z^{n-4} + \ldots\right] \quad (6)$$

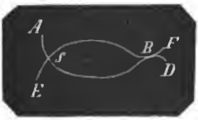
hieraus

$$z^2 = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{6}$$
$$z^4 = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{5}\left[1 + \frac{5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3}z^2\right]$$
$$z^6 = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{7}\left[1 + \frac{7\cdot6\cdot5}{1\cdot2\cdot3}z^4 + \frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}z^2\right]$$
$$z^8 = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{9}\left[1 + \frac{9\cdot8\cdot7}{1\cdot2\cdot3}z^6 + \frac{9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}z^4 + \frac{9\cdot8\ldots\cdot4\cdot3}{1\cdot2\ldots\cdot6\cdot7}z^2\right] \text{ u. s. w.}$$

Die B. Zahlen gehen bis ins Unendliche; es sind deren schon einige 40, aber ohne allen Nutzen berechnet worden; die B. Zahlen machen blofs ein interessantes Curiosum aus.

Berührende Linien sind Linien, die mit einander nur einen Punkt gemein haben, doch so, dafs jede derselben in den von dem gemeinsamen Punkt aus nach beiden Richtungen genommenen nächsten Elementen auf einerlei Seite der anderen Linie verbleibt, d. h. ohne dafs sie sich schneiden. Die beiden Linien *ASBD* und

Fig. 202.



ESBF schneiden sich in *S* und berühren sich in *B*. Fig. (188), pag. (296) im Art. Bahn der Weltkörper enthält 4 Linien, die sich alle in dem Punkt *O* berühren; den Kreis *OK*, die Ellipse *OE*, die Parabel *POP* und die Hyperbel *HOH*, und jede derselben ist die b. L. einer jeden der drei anderen.

In der Geometrie interessiren uns ganz besonders zwei b. L., die gerade b. L., die (geometrische) Tangente und der Kreis als Krümmungskreis. Eine gerade Linie kann keine Tangente haben, denn zwei Linien, wenn sie zusammentreffen, müssen entweder sich schneiden oder sich decken; und 2 gerade Linien, die einen Winkel oder 2 Nebenwinkel bilden, müssen durch die Spitze verlängert gedacht werden, wo dann diese zum Durchschnittspunkt wird. In Fig. 12, pag. 14 ist *DE* die Tangente an dem Punkt *A* des Kreises *ABGA*; an jeder krummen Linie, an jedem Punkt derselben kann eine gerade b. Linie, eine Tangente, gedacht und gezogen werden.

Unter Krümmungskreis an einem Punkt einer Curve versteht man die Kreislinie, von welcher das an dem Punkt befindliche sehr kleine Bogenstück der Curve einen Theil ausmacht. Wenn in Fig. 188, pag. 296 das bei *O* befindliche, sehr kleine Bogenstück der Ellipse *OE* zugleich ein sehr kleiner Theil der Kreislinie *OK* ist, so ist *OK* der Krümmungskreis der Ellipse *OE* in dem Punkt *E*. An jedem andern Punkt, mit Ausnahme von *E*, würde der Krümmungskreis gröfser ausfallen. Der Krümmungskreis der Parabel *POP* in *O* würde zwischen die Ellipse und die Parabel fallen; der Krümmungskreis in *O* an der Hyperbel *HOH* würde zwischen *HOH* und *POP* fallen. An jeder krummen Linie, in jedem Punkt derselben kann ein Krümmungskreis gedacht und gezeichnet werden; in jedem Punkt eines beliebigen Kreises ist der Krümmungskreis der gegebene Kreis selbst, an irgend einem Punkt einer geraden Linie ist der Krümmungskreis unendlich grofs.

Berührende gerade Linie, in der Elementargeometrie Tangente, Tangens genannt, wird in der höheren Geometrie als geometrische T. oder Curven-Tangente von der trigonometrischen T. unterschieden, welche eine Verhältnifszahl ist. Es sei nämlich *BA*

Fig. 203.

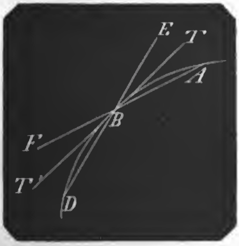


eine b. ger. L. in *B* an dem Kreise, dessen Mittelpunkt *C* ist, zieht man nun die Linie *CA*, welche mit dem Halbmesser *CB* den $\angle ACB = \alpha$ (in Graden, Minuten, Secunden ausgedrückt), so ist das geometrische Verhältnifs $\frac{AB}{BC}$ die trigonome-

trische Tangente von α; man schreibt $tg\,\alpha$; ebenso $\frac{A^1B}{BC} = tg\,\alpha^1$ u. s. w.

Von der b. g. L. verschafft man sich ein Bild durch folgende Betrachtung. Es seien die Punkte A, D von dem Punkt B der Curve ABD = weit entfernt, ziehe

Fig. 204.



durch A, B die gerade Linie AF, durch B, D die gerade Linie DE. Ist nun TT eine gerade Linie durch den Punkt B, welche immer zwischen den Schenkeln EB, AB und DB, FB der Scheitel $\angle EBA$ und FBD verbleibt, so nahe man die Punkte A und D auch dem Punkt B rückt, so ist TT eine b. g. L. der Curve ABD in dem Punkt B.

Berührende gerade Linie an dem Kreise. Errichtet man auf dem Halbmesser CB in dessen Endpunkt B eine Normale AD, so ist diese die b. L. des Kreises in dem Punkt B. Denn jede gerade Linie CA,

Fig. 205.

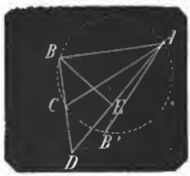


CD bildet mit dem Halbmesser CB und dem von B aus abgeschnittenen Stück der Linie AD ein rechtwinkliges Dreieck, und ist als Hypothenuse gröſser als die Kathete CB, die Punkte A und D mögen noch so nahe dem Punkt B gebracht werden. Die Linie AD liegt also von dem Punkt B aus in allen Theilen nur auf einer Seite der Kreislinie, schneidet sie also nicht, und hat nur den einzigen Punkt B mit derselben gemein. Oder wollte man annehmen, die Linie AD träfe die Kreislinie noch in einem anderen, noch so nahe an B befindlichen Punkt E, so wäre BE eine Sehne, zwischen BE ein Punkt F in ihr innerhalb des Kreises und $CF < CB$, welches nicht möglich ist, da $\angle CBF$ ein rechter $\angle$, und als solcher der gröſste Winkel im $\triangle CBF$ auch die gröſste, ihm gegenüber liegende Seite CF haben muſs.

Ist die b. Linie AD im Punkt B gegeben, so findet man durch die in B darauf errichtete Normale BG den Durchmesser, und durch Halbirung desselben den Mittelpunkt C des Kreises.

2. Von einem Punkt A zieht man an einen gegebenen Kreis eine b. L., indem man A mit dessen Mittelpunkt C geradlinig verbindet, und um AC als Durchmesser einen Kreis zeichnet. Die Durchschnittspunkte B, B' beider Kreise geben die geraden b. Linien AB und AB', weil die $\angle ABC$ und $AB'C$ als Winkel im Halbkreise Rechte sind. Die beiden b. L. sind = groſs und gröſser als jede von A nach dem äuſseren Bogen BEB' wie AE

Fig. 206.



gezogene, und kleiner, als jede nach dem inneren Bogen BDB' wie AD gezogene gerade Linie.

3. Die Winkel, die eine b. Linie AE mit einer Sehne BF bildet, sind den Peripheriewinkeln gleich, welche auf den von der Sehne abgeschnittenen Bogen stehen.

Nämlich

1) $\angle EBF = \angle BDF$

2) $\angle ABF = \angle BGF$

denn

$$\angle EBF + \angle DBF = R$$

aber auch

$$\angle BDF + \angle DBF = R$$

weil nämlich $\angle BFD$ als $\angle$ im Halbkreis = R

folglich

1) $\angle EBF = \angle BDF$

Ferner sind als gegenüber liegende $\angle$ eines Vierecks im Kreise

$$\angle BDF + \angle BGF = 2R$$

folglich

$$\angle EBF + \angle BGF = 2R$$

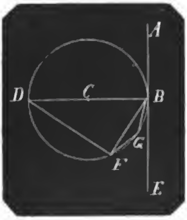
da nun

$$\angle EBF + \angle ABF = 2R$$

so ist

2) $\angle ABF = \angle BGF$

Fig. 207.



Will man daher von einer Kreislinie einen Bogen abschneiden, auf dem ein Winkel von bestimmter Gröfse als Peripherie $\angle$ steht, so zeichne eine Tangente *AE* an einem Punkt *B* des Kreises, nimm den $\angle EBF$ = dem gegebenen, so ist *BGF* der verlangte Bogen.

Zieht man nach den Punkten *D*, *E* der beliebigen Linie *AD* (Fig. 206) die Sehnen *BD*, *BE*, so hat man also

$$\angle ABE = \angle ADB$$
$$\angle BAD = \angle BAD$$
$$\overline{\triangle ABE \sim \triangle ADB}$$

folglich

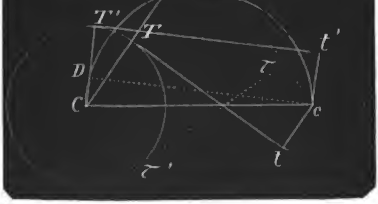
$$AE : AB = AB : AD$$

oder

$$AB\square = AD \times AE$$

d. h. das von einer verlängerten Sehne abgeschnittene Stück einer Tangente ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen den beiden Abständen der Sehnen-Endpunkte von dem Durchschnittspunkt der verlängerten Sehne und Tangente.

Fig. 208.



An zweien in einerlei Ebene liegenden Kreisen giebt es vier gemeinschaftliche Tangenten, zwei, welche die Centrale schneiden und zwei, die sie nicht schneiden. Für die Construction derselben zeichne über der Centrale als Durchmesser den Halbkreis. Für die Construction der ersten beiden Tangenten schneide mit der Summe beider Halbmesser $CT + ct$ diesen von C aus in S, ziehe CS, welche den zu C gehörenden Kreis in T schneidet, ziehe $ct \parallel CS$, so ist die gerade Linie Tt die verlangte Tangente. Macht man dieselbe Construction von c aus, so erhält man die Punkte S', τ, t' und die zweite Tangente $\tau t'$.

Für die Construction der beiden anderen Tangenten schneide mit der Differenz $CT - ct$ den Halbkreis von C aus in D, verlängere CD bis T', ziehe $ct' \nparallel CT'$, so ist $T't'$ die dritte Tangente; die vierte Tangente erhält man durch dieselbe Construction von C aus, wenn man den Halbkreis unterhalb Cc zeichnet. Die Beweise für die Richtigkeit sind einfach und in die Augen fallend.

Berührende gerade Linie an einer Curve. Fig. 204 und die Betrachtung darüber leiten zur Auffindung der b. L. wie folgt:

Es sei *EFBG*... die Curve, für den Punkt *B* soll die b. Linie *BT* gefunden werden. *AX* sei die Abscissenlinie, *A* der Anfangspunkt der Abscissen, *FJ*, *BD*, *GH* normale Ordinaten für die Punkte *F*, *B*, *G* der Curve, so haben diese eine der Natur der Curve gemäfse gleiche Abhängigkeit von den ihnen zugehörigen Abscissen, wenn also $FJ = k \cdot AJ$, so ist $BD = k.AD$ und $GH = k \cdot AH$. Setzt man $AD = x$; $AJ = x_1$; $AH = x_2$; $BD = y$; $FJ = y_1$; $GH = y_2$, so sei allgemein

$$y = fx$$

also auch $y_1 = fx_1$

und $y_2 = fx_2$

Die Subtangente *TD* für den Punkt *B* werde mit s bezeichnet; zieht man nun durch die Punkte *G*, *B* die Linie GS_2; durch die Punkte *B*, *F* die Linie BS_1; setzt $S_1J = s_1$ und $S_2H = s_2$, so rücken die Linien BS_1 und GS_2 der b. Linie *BT* von beiden Seiten immer näher, desgleichen die Punkte S_1 und S_2 dem Punkt *T*, je mehr man die Punkte *F* und *G* dem Punkt *B* nähert.

Zieht man FK und $BL \parallel AX$, so ist

$$S_1J : JF = FK : KB$$

und $$S_2H : HG = BL : LG$$

d. h. $$s_1 : y_1 = x - x_1 : y - y_1$$

und $$s_2 : y_2 = x_2 - x : y_2 - y$$

woraus

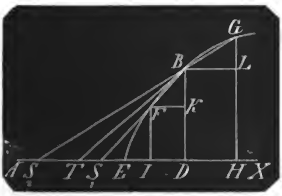
$$s_1 = y_1 \frac{x - x_1}{y - y_1} = fx_1 \frac{x - x_1}{fx - fx_1} \qquad (1)$$

und

$$s_2 = y_2 \frac{x_2 - x}{y_2 - y} = fx_2 \frac{x - x_2}{fx - fx_2} \qquad (2)$$

Setzt man nun das gegebene fx in diese Formeln, hiernach x_1 und $x_2 = x$; ebenso

Fig. 209.



y_1 und $y_2 = y$, so erhält man für s_1 und s_2 den Werth s der Subtangente TD. Da s_1 mit s_2 durch einerlei Formel ausgedrückt ist, so hat man nur mit einer derselben zu rechnen nöthig.

1. Beispiel. Die Parabel hat die rechtwinklige Coordinatengleichung $y^2 = px$, wo p den Parameter bedeutet, der Anfangspunkt der Abscissen im Scheitel liegt, und die Abscissenlinie die Axe der Parabel ist. Es ist also

$$s_1 = y_1 \frac{x - x_1}{y - y_1}$$

Nun ist $px = y^2$ und $px_1 = y_1^2$ daher $p(x - x_1) = y^2 - y_1^2$ und

$$s_1 = \frac{y_1}{p} \frac{y^2 - y_1^2}{y - y_1} = \frac{y_1}{p}(y + y_1)$$

$y_1 = y$ gesetzt, giebt die Subtangente

$$TD = s = \frac{2y^2}{p} = 2x$$

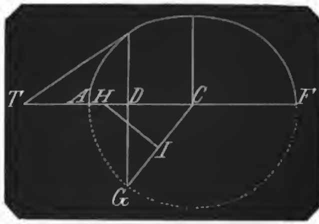
Da nun

$$tg(\angle BTD) = \frac{y}{s} = \frac{p}{2y} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{x}}$$ (tg die trigonometrische Tangente vom $\angle BTD$)

so ist für jeden Punkt B der Parabel, von deren Fuſspunkt D der Axe die Länge DT und der $\angle BTD$ gegeben, wonach die b. L. TB gezeichnet werden kann. Man hat übrigens, da $s = 2x$ ist, nur nöthig, $ET = ED$ zu nehmen, und TB zu ziehen, so ist TB die b. L. in B.

2. Beispiel. Die Ellipse hat, wenn AX in der groſsen Axe liegt, und der

Fig. 210.



Anfangspunkt der Abscissen im Scheitel E genommen wird, die rechtw. Coord. Gl.

$$y^2 = \frac{c^2}{a^2}(2ax - x^2)$$

wo a die groſse und c die kleine Axe ist. Hieraus ist

$$x^2 = 2ax - \frac{a^2}{c^2} y^2$$

und $$x_1^2 = 2ax_1 - \frac{a^2}{c^2} y_1^2$$

woraus $$x^2 - x_1^2 = 2a(x - x_1) - \frac{a^2}{c^2}(y^2 - y_1^2)$$

oder

$$(x + x_1)(x - x_1) = 2a(x - x_1) - \frac{a^2}{c^2}(y + y_1)(y - y_1)$$

woraus

$$\frac{x - x_1}{y - y_1} = \frac{a^2}{c^2} \frac{y + y_1}{2a - (x + x_1)}$$

Diesen Werth in Gl. 1 gesetzt, giebt

$$s_1 = y_1 \frac{a^2}{c^2} \frac{y + y_1}{2a - (x + x_1)}$$

hierin für $y_1 = y$; für $x_1 = x$ gesetzt, giebt

$$\text{Subtg. } TD = s = \frac{a^2}{c^2} \cdot \frac{y^2}{a - x} = \frac{2ax - x^2}{a - x}$$

und

$$tg(\angle BTD) = \frac{y}{s} = \frac{c^2}{a^2} \cdot \frac{a - x}{y} = \frac{y}{x} \cdot \frac{a - x}{2a - x}$$

Die b. L. an dem Punkt B läſst sich nun leicht construiren:

Aus der Formel

$$s = \frac{2ax - x^2}{a - x} = \frac{x(2a - x)}{a - x}$$

folgt die Proportion

$$a - x : 2a - x = x : s$$

oder in Beziehung auf die Figur

$$DC : DF = DA : DT$$

Beschreibt man nun über AF einen Halbkreis AGA, verlängert BD bis G, so ist

$$DG^2 = DF \cdot DA$$

also $DC \cdot DT = DG^2$

Es ist mithin CT der Durchmesser eines Kreises, in dessen Peripherie G liegt. Zieht man also CG, und schneidet durch eine Normale aus der Mitte J von CG die Axe der Ellipse in H, so ist H der Mittelpunkt des Kreises, und man findet T, wenn man $HT = CH$ nimmt; die gerade L. TB ist dann die b. L. in B.

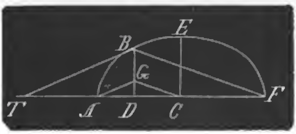
Will man die Formel

$$tg\,\alpha = \frac{y}{x}\cdot\frac{a-x}{2a-x}$$

zur Construction anwenden, so hat man

$$2a - x : a - x = y : x\,tg\,\alpha$$

Fig. 211.



oder in Beziehung auf Fig. 211

$$DF : DC = DB : AD\,tg\,\alpha$$

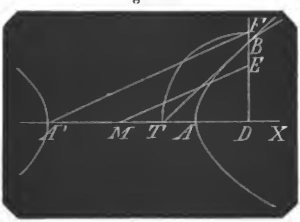
Zieht man daher BF, und $CG \parallel BF$ so ist

$$DG = AD\,tg\,\alpha \text{ und } \angle\, GAD = \alpha$$

Aus B eine Parallele mit AG gezogen giebt die b. L. BT an B.

3. Beispiel. Die Hyperbel hat, wenn AX in der Axe der Hyperbel liegt, A im Scheitel der Anfangspunkt der Abscissen

Fig. 212.



ist, p den Parameter und a die halbe grofse Axe $\frac{AA'}{2} = AM$ bedeutet, indem A' als der Scheitel der Gegenhyperbel gilt, die Coordinatengleichung

$$y^2 = p\left(x + \frac{x^2}{2a}\right) = \frac{p}{2a}(2ax + x^2)$$

Man hat demnach

$$x^2 + 2ax = \frac{2a}{p}y^2$$

$$x_1^2 + 2ax_1 = \frac{2a}{p}y_1^2$$

$$(x+x_1)(x-x_1)+2a(x-x_1)=\frac{2a}{p}(y+y_1)(y-y_1)$$

woraus für Gl. 1

$$s_1\left(=y_1\frac{x-x_1}{y-y_1}\right)=\frac{2a}{p}\cdot\frac{y+y_1}{2a+(x+x_1)}\cdot y_1$$

x für x_1 und y für y_1 gesetzt, giebt

$$s = \frac{2a}{p}\cdot\frac{y^2}{a+x} = x\cdot\frac{2a+x}{a+x}$$

und

$$tg\,\alpha\left(=\frac{y}{s}\right) = \frac{p}{2a}\cdot\frac{a+x}{y} = \frac{y}{x}\cdot\frac{a+x}{2a+x}$$

Aus der Formel für s hat man zur Construction der b. L.:

$$a + x : 2a + x = x : s$$

oder nach der Figur

$$DM : DA' = DA : \text{Subtg. } s$$

Nimmt man also $DE = DA$, zieht ME und $A'F \parallel ME$ bis in die Verlängerung von DB, so ist $DF = s$; zeichnet man nun den Quadrant FT aus D, so ist DT die Subtg. für B und TB die b. L. in B.

Will man die Formel für $tg\,\alpha$ zur Construction anwenden, so hat man

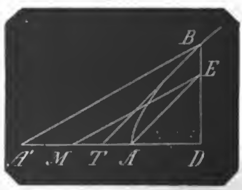
$$2a + x : a + x = y : x\,tg\,\alpha$$

oder

$$A'D : MD = DB : AD \cdot tg\,\alpha$$

Demnach ziehe $A'B$, $ME \parallel A'B$, so ist $DE = AD \cdot tg\,\alpha$; ziehe EA, so ist $\angle\, EAD = \alpha$ und $BT \parallel EA$ die b. L. in B.

Fig. 213.



Die Hyperbel hat eine Asymptote (s. d. Art.): man hat nach der Formel für s

$$\text{Subtg.} - \text{Absc.} = x\cdot\frac{2a+x}{a+x} - x = \frac{ax}{a+x} = \frac{a}{\frac{a}{x}+1}$$

Für $x = \infty$ ist die Differenz zwischen s und $x = a$, mithin ist M der Anfangspunkt der Asymptote.

Um den $\angle\,\alpha$ zu finden, hat man die obige Formel

$$tg\,\alpha = \frac{y}{x}\cdot\frac{a+x}{2a+x}$$

Schreibt man für y den Werth

$$\sqrt{p\left(\frac{2ax+x^2}{2a}\right)}$$

so erhält man

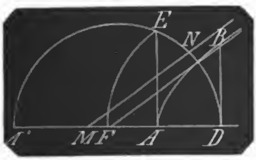
$$tg\,\alpha = \sqrt{\frac{p}{2a}}\cdot\frac{a+x}{\sqrt{2ax+x^2}}\quad\sqrt{\frac{p}{2a}}\;\frac{\frac{a}{x}+1}{\sqrt{\frac{2a}{x}+1}}$$

giebt für $x = \infty$

$$tg\,\alpha = \sqrt{\frac{p}{2a}} = \frac{y}{\sqrt{(2a+x)x}}$$

Ist demnach BD die Ordinate für die Abscisse AD, so zeichne den Halbkreis über $A'D = 2a + x$, errichte das Loth AE, so ist die Sehne $DE = \sqrt{(2a+x)x}$, folglich $DE \cdot tg\,\alpha = DB$; beschreibe daher aus

Fig. 214.



D den Bogen EF, ziehe BF, so ist $\angle BFD = \alpha$ für die Asymptote, und $MN \parallel FB$ die Asymptote selbst.

In dem Art.: Asymptote, Beispiel 3, ist die Gl. für die Hyperbel

$$y^2 = ax + bx^2$$

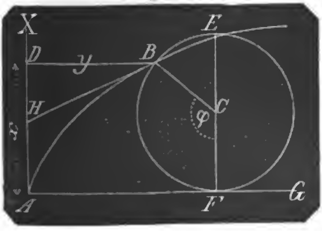
hier ist die Gl.

$$y^2 = px + \frac{p}{2a}x^2$$

Das dortige a ist also der Parameter, das dortige b der Quotient : Parameter durch die grofse Axe.

4. Beispiel: Die Cycloide. Es sei AG die Basis der Cycloide, AX normal

Fig. 215.



darauf die Abscissenlinie, EBF der Erzeugungskreis vom Halbmesser $CB = r$, B von A ab der beschreibende Punkt, φ die Bogeneinheit, welche B von A bis B, dem $\angle BCF$ zugehörig, bei der Umwälzung des Kreises beschrieben hat, $BD = y$, $AD = x$, so ist

$$x = r(1 - \cos\varphi)$$
$$y = r(\varphi - \sin\varphi)$$

daher

$$x - x_1 = r(\cos\varphi_1 - \cos\varphi) = -r(\cos\varphi - \cos\varphi_1)$$
$$= +2r\sin\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)\cdot\sin\tfrac{1}{2}(\varphi-\varphi_1)$$
$$y - y_1 = r(\varphi-\varphi_1) - r(\sin\varphi - \sin\varphi_1)$$
$$= r(\varphi-\varphi_1) - 2r\cos\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)\sin\tfrac{1}{2}(\varphi-\varphi_1)$$

hieraus

$$\frac{x-x_1}{y-y_1} = \frac{2\sin\frac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)\sin\frac{1}{2}(\varphi-\varphi_1)}{\varphi-\varphi_1 - 2\cos\frac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)\sin\frac{1}{2}(\varphi-\varphi_1)}$$

und wenn man Zähler und Nenner durch $\sin\frac{1}{2}(\varphi-\varphi_1)$ dividirt

$$\frac{x-x'}{y-y_1} = \frac{2\sin\frac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)}{\frac{\varphi-\varphi_1}{\sin\frac{1}{2}(\varphi-\varphi_1)} - 2\cos\frac{1}{2}(\varphi+\varphi_1)}$$

Der Minuend im Nenner geschrieben $2\cdot\frac{\frac{1}{2}(\varphi-\varphi_1)}{\sin\frac{1}{2}(\varphi-\varphi_1)}$ zeigt in dem Bruch: Bogen dividirt durch seinen Sinus, und dieser nähert sich der Einheit (1) um so mehr, je kleiner der Bogen wird; ist $\varphi-\varphi_1$ im Verschwinden, welches stattfindet, wenn der Vorschrift gemäfs $\varphi_1 = \varphi$ gesetzt wird, so hat man

$$\frac{\frac{1}{2}(\varphi-\varphi_1)}{\sin\frac{1}{2}(\varphi-\varphi_1)} = 1$$

Setzt man daher $\varphi_1 = \varphi$, so wird

$$s = y\cdot\frac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi} = y\cdot\frac{2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}{2\sin^2\frac{\varphi}{2}}$$
$$= y\cot\frac{\varphi}{2}$$

Nun hat man

$$tg\,\alpha = \frac{y}{s} = \frac{y}{y\cot\frac{\varphi}{2}} = tg\,\frac{\varphi}{2}$$

und $$\alpha = \frac{\varphi}{2}$$

Zieht man daher durch E und B die gerade Linie EH, so ist, da $\angle CEB$ als Peripheriewinkel = dem halben Centriwinkel $= \frac{\varphi}{2}$ auch $\angle BHD = \frac{\varphi}{2}$ also der $\angle\alpha$; d. h. BH ist die b. L.

Auch ist $DH = y\cot\frac{\varphi}{2}$ die Subtg.

II. Durch die Differenzialrechnung löst man die allgemeine Aufgabe: an einer

Curve die b. L. zu zeichnen, folgendermafsen:

A. **Wenn die Form der Curve durch rechtwinklige Coordinaten gegeben ist.**

Nennt man DH eine beliebige Aenderung (hier Wachsthum) von $AD = x$ um Δx, so ändert sich (hier wachsend) $DB = y$ in HG um $LG = \Delta y$ und

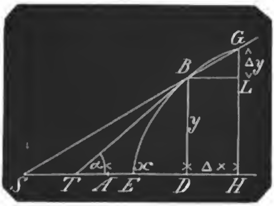
$$SD : y = \Delta x : \Delta y$$

woraus

$$SD = \frac{y}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

Mit der beliebigen Abnahme der Aenderung Δx nimmt auch die Aenderung Δy ab, der Punkt G rückt immer näher an B, der Punkt S an T und der $\angle SBT$

Fig. 216



wird immer kleiner; der Grenzwerth dieses Winkels ist $= 0$, der Grenzwerth der Linie GS ist die b. Linie BT, der für die Linie SD die Subtangente TD, und für diesen geht der Differenzen-Quotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ in den Differenzial-Quotient $\frac{\partial y}{\partial x}$ über; es ist demnach

$$DT = \frac{y}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)} \qquad (1)$$

d. h. die Subtangente ist gleich dem Quotient der Ordinate, dividirt durch das Differenzial der Ordinate. Ferner ist $\frac{BD}{DT}$ = der trigonometrischen Tangente des $\angle BTD$ oder

$$\frac{y}{\text{Subtg.}} = \frac{\partial y}{\partial x} = tg\,\alpha \qquad (2)$$

d. h. die trigonometrische Tangente des Winkels, den die Curventangente mit der Abscissenlinie bildet, ist = dem Differenzial ihrer Ordinate.

Beispiele. Die ad 1 aufgeführten Beispiele sollen hier wiederholt werden, es sind jedoch nur die Formeln herzuleiten, die Constructionen bleiben dieselben.

1. Die Parabel hat die Gleichung

$$y^2 = px$$

differenzirt giebt

$$2y\frac{\partial y}{\partial x} = p$$

also

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{p}{2y}$$

daher

$$\text{Subtg.} = \frac{y}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)} = \frac{y}{\left(\frac{p}{2y}\right)} = \frac{2y^2}{p} = 2x$$

und

$$tg\,\alpha = \frac{p}{2y}$$

2. Die **Ellipse** hat die Gleichung

$$y^2 = \frac{c^2}{a^2}(2ax - x^2)$$

differenzirt giebt

$$2y \cdot \partial y = \frac{c^2}{a^2}(2a - 2x)\partial x$$

woraus

$$tg\,\alpha = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{c^2}{a^2} \cdot \frac{a - x}{y} = \frac{y}{x} \cdot \frac{a - x}{2a - x}$$

also

$$s = \frac{y}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)} = \frac{a^2}{c^2}\,\frac{y^2}{a - x} = \frac{2ax - x^2}{a - x}$$

3. Die **Hyperbel** hat die Gleichung

$$y^2 = p\left(x + \frac{x^2}{2a}\right)$$

differenzirt giebt

$$2y \cdot \partial y = p\left(1 + \frac{2x}{2a}\right)\partial x$$

woraus

$$tg\,\alpha = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{p}{2a} \cdot \frac{a + x}{y} = \frac{y}{x} \cdot \frac{a + x}{2a + x}$$

und

$$s = \frac{y}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)} = x \cdot \frac{2a + x}{a + x}$$

4. Die **Cycloide** hat die Gleichungen

$$x = r(1 - \cos\varphi)$$
$$y = r(\varphi - \sin\varphi)$$

differenzirt giebt

$$\partial x = r(0 + \sin\varphi)\partial\varphi$$
$$\partial y = r(1 - \cos\varphi)\partial\varphi$$

daher

$$\frac{\partial x}{\partial\varphi} = r\,\sin\varphi$$

und

$$\frac{\partial y}{\partial\varphi} = r(1 - \cos\varphi)$$

folglich

$$tg\,\alpha = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi} = \frac{2\sin^2\frac{\varphi}{2}}{2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}$$
$$= tg\,\frac{\varphi}{2}$$

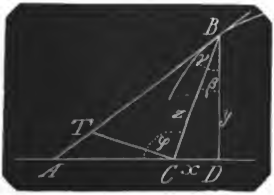
und

$$s = \frac{y}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)} = \frac{y}{tg\,\frac{\varphi}{2}} = y\cdot\cot\frac{\varphi}{2}$$

B. Wenn die Form der Curve durch Polarcoordinaten gegeben ist.

Es sei C der Pol, CA die Polaraxe, die Bogeneinheit φ des $\angle\varphi$ die Polarabscisse, $CB = s$ die Polarordinate. Ist nun BT die b. L. in B, CT normal BC, so heifst hier CT die Subtangente,

Fig. 217.



und wenn man diese kennt, so kann man BT zeichnen. Da nun

$$CT = BC\cdot tg\,\angle CBT$$

so kommt es nur darauf an, den $\angle CBT$ zu ermitteln.

Fällt man deshalb von B das Loth BD auf AC, setzt $CD = x$, $BD = y$, so hat man nach No. II, 2

$$\frac{\partial y}{\partial x} = tg\,BAD = \cot ABD \qquad (1)$$

Ferner

$$\cot CBD = \frac{y}{x} \qquad (2)$$

Bezeichnet man der Kürze wegen $\angle ABD$ mit γ, $\angle CBD$ mit β, ist also $\angle ABC = \gamma - \beta$, so wird $\angle ABC$ gefunden, wenn man x und y durch s und φ ausdrückt.

Nun ist

$$y = s\sin\varphi$$
$$x = -s\cos\varphi$$

folglich

$$\frac{\partial y}{\partial\varphi} = s\cos\varphi + \sin\varphi\,\frac{\partial s}{\partial\varphi}$$

und

$$\frac{\partial x}{\partial\varphi} = s\sin\varphi + \cos\varphi\,\frac{\partial s}{\partial\varphi}$$

folglich

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{s\cos\varphi + \frac{\partial s}{\partial\varphi}\cos\varphi}{s\sin\varphi - \frac{\partial s}{\partial\varphi}\cos\varphi} = \cos\gamma$$

Nun ist

$$\cot ABC = \cot(\gamma-\beta) = \frac{\cot\gamma\cdot\cot\beta + 1}{\cos\beta - \cos\gamma}$$
$$= \frac{\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{y}{x}+1}{\frac{y}{x}-\frac{\partial y}{\partial x}} \text{ (s. Gl. 1 und 2)}$$

$$= \frac{\frac{s\cos\varphi + \frac{\partial s}{\partial\varphi}\sin\varphi}{s\sin\varphi - \frac{\partial s}{\partial\varphi}\cdot\cos\varphi}\cdot\left(-\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\right)+1}{-\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} - \frac{s\cos\varphi + \frac{\partial s}{\partial\varphi}\sin\varphi}{s\sin\varphi - \frac{\partial s}{\partial\varphi}\cos\varphi}} = \frac{-\frac{\partial s}{\partial\varphi}}{-s}$$

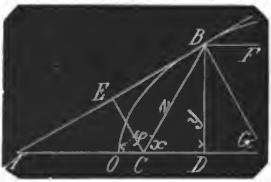
mithin

$$\cot ABC = \frac{\left(\frac{\partial s}{\partial\varphi}\right)}{s} \qquad \text{I}$$

$$\text{Subtg. } CT = s\,tg\,ABC = \frac{s}{\cot ABC} = \frac{s^2}{\left(\frac{\partial s}{\partial\varphi}\right)} \quad \text{II}$$

1. Beispiel. Die Parabel, mit Rücksicht auf den Art.: Bahn der Weltkörper, No. 20, pag. 300, mit Fig, 191, der Pol C im Brennpunkt. Es ist daher nach beistehender Bezeichnung $CB = s$, $\angle BCA = \varphi$

Fig. 218.



und wenn man OD mit x und BE mit y bezeichnet: $y^2 = px$; wo p, der Parameter der Parabel $= 4\,OC = 4a$ beträgt.

Nun ist

$$OD = x = a - s\cos\varphi$$
$$BD = y = s\sin\varphi$$

daher

$$s^2\sin^2\varphi = 4a(a - s\cos\varphi) \qquad (3)$$

woraus nach a geordnet

$$a^2 - (z \cos\varphi)\, a - \frac{z^2}{4} \sin^2\varphi = 0$$

woraus

$$a = +\frac{z}{2} \cos\varphi \pm \frac{z}{2}$$

wo nur das positive Vorzeichen gelten kann; mithin

$$z = \frac{z}{2}(1 + \cos\varphi)$$

$$z = \frac{2a}{1 + \cos\varphi}$$

und

$$\frac{\partial z}{\partial\varphi} = 2a \cdot \frac{\sin\varphi}{(1 + \cos\varphi)^2}$$

$$\cot \angle CBA = \frac{\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)}{z} = \frac{\sin\varphi}{1 + \cos\varphi} = tg\,\frac{\varphi}{2}$$

mithin

$$\angle CBA + \frac{\varphi}{2} = 90^\circ$$

Halbirt man daher $\angle ACB$ durch CE, zieht BE normal CE, so ist BE die b. L. in B.

Zieht man $BF \mathrel{+\!\!\!\!=} AC$, so ist offenbar $\angle FBC = \angle ACB$ und $BG \mathrel{+\!\!\!\!=} CE$, also normal auf BA halbirt $\angle FBC$. Da nun die b. L. BA die gerade Richtung des Curvenelements in B angiebt, so ist BG die Normale auf der Curve in B, $\angle FBG = \angle CBG$; wenn also die Curve ein Spiegel ist, (das Nähere darüber im Art.: Brennpunkt), so wird jeder mit der Axe AC parallele Lichtstrahl wie FB nach dem Brennpunkt C reflectirt.

2. Beispiel. Die Ellipse, mit Rücksicht wie Beisp. 1, der Pol im Brennpunkt, daher $BS = z$, $\angle BSO = \varphi$

Die rechtwinklige Coordinatengleichung ist wie oben Beisp. 2

$$y^2 = \frac{c^2}{a^2}(2ax - x^2)$$

$$OD = x = CO - CS - SD = a - \sqrt{a^2 - c^2} - z\cos\varphi$$
$$BD = y = z \sin\varphi$$

folglich

$$z^2 \sin^2\varphi = \frac{c^2}{a^2}[2a - x] = \frac{c^2}{a^2}[a - \sqrt{a^2 - c^2} - z\cos\varphi]\,[2a - (a - \sqrt{a^2 - c^2} - z\cos\varphi)]$$
$$= \frac{c^2}{a^2}\left[a^2 - \left(\sqrt{a^2 - c^2} + z\cos\varphi\right)^2\right]$$

hieraus

$$a^2 z^2 \sin^2\varphi = c^4 - c^2 z^2 \cos^2\varphi - 2c^2\sqrt{a^2 - c^2}\, z\cos\varphi$$

Um diese Gleichung nach φ ordnen zu können, ist zu schreiben

$$a^2 z^2 - a^2 z^2 \cos^2\varphi = c^4 - c^2 z^2 \cos^2\varphi - 2c^2\sqrt{a^2 - c^2}\, z\cos\varphi$$

und geordnet

$$\cos^2\varphi - \frac{2c^2\sqrt{a^2 - c^2}}{(a^2 - c^2)z} + \frac{c^4 - a^2 z^2}{(a^2 - c^2)z^2} = 0$$

woraus entwickelt und reducirt

$$\cos\varphi = \frac{c^2 \pm az}{z\sqrt{a^2 - c^2}}$$

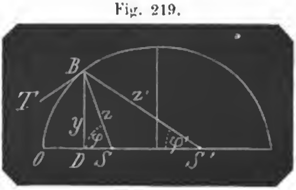
Oder für $\sqrt{a^2 - c^2} = CS$ als Excentricität e gesetzt:

$$\cos\varphi = \frac{c^2 \pm az}{ez}$$

hieraus

$$z = \frac{c^2}{\mp a + e\cos\varphi}$$

Fig. 219.



hieraus

$$\frac{\partial z}{\partial\varphi} = \frac{c^2 e \sin\varphi}{(\mp a + e\cos\varphi)^2}$$

und

$$\cot SBT = \frac{\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)}{z} = \frac{e\sin\varphi}{\mp a + e\cos\varphi}$$

oder

$$tg\, SBT = \frac{\mp a + e\cos\varphi}{e\sin\varphi}$$

Da $a > e > e\cos\varphi$, so ist $-a + e\cos\varphi$ negativ, es bezieht sich also $-a$ auf einen stumpfen Winkel. Dagegen würde

$$z = \frac{c^2}{\mp a + e\cos\varphi}$$ für $-a$ immer negativ werden, welches nicht möglich ist, mithin mufs das negative Vorzeichen von a fortgelassen werden, und es ist

$$z = \frac{c^2}{a + e\cos\varphi}$$

$$tg\ SBT = tg\ \psi = \frac{a + e\ cos\ \varphi}{e\ sin\ \varphi}$$

Nimmt man die Polarordinate s' aus dem zweiten Brennpunkt S', setzt $\angle BS'O = \varphi'$, so hat man für die Aufstellung der ersten Gleichung für $s^2\ sin^2 \varphi$

$$x = a + e - s'\ cos\ \varphi' = a + \sqrt{a^2 - c^2} - s'\ cos\ \varphi'$$

In der Entwickelung oben ist dann für $-\sqrt{a^2 - c^2}$ der Werth $+\sqrt{a^2 - c^2}$ zu setzen, und man erhält

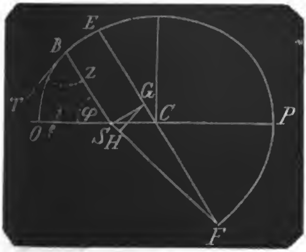
$$s' = \frac{c^2}{+a - e\ cos\ \varphi}$$

und

$$tg\ S'BT = tg\ \psi' = \frac{+a - e\ cos\ \varphi}{e\ sin\ \varphi}$$

Die Construction der Tangente ist nun sehr einfach: Ziehe CE mit nöthiger Verlängerung $CF \mp s$, zeichne aus C den Kreisbogen PF, fälle aus S auf CE das

Fig. 220.



Loth SG, ziehe SF, fälle aus G auf SF das Loth GH, so ist $BT \mp GH$ die b. L. in B.

Denn

$$CP = CF = a,\ CS = e,\ \angle ECS = \varphi$$

also $CG = e\ cos\ \varphi$

und $FG = a + e\ cos\ \varphi$

$SG = e\ sin\ \varphi$

und $SG\ tg\ GSF = FG$

also $e\ sin\ \varphi \cdot tg\ GSF = a + e\ cos\ \varphi$

folglich ist $\angle GSF = \psi$, und da GH normal SF, so ist auch $\angle HGF = \psi$; $TB \mp GH$, $BS \mp GF$, folglich $\angle TBS = \psi$.

Berührungslinie s. v. w. berührende Linie.

Berührungspunkt, der Punkt, in welchem eine Linie eine andere berührt; er ist in den vorhergehenden Art. mit B bezeichnet.

Beschleunigende Kraft ist derjenige Theil der auf die Bewegung eines Körpers wirkenden Kraft, welcher auf jede der Masseneinheiten des Körpers fällt. Ist P die Kraft, welche auf einen Körper von der Masse M wirkt, so ist dessen b. K. $= \frac{P}{M}$.

Beschleunigte Bewegung ist eine Bew., bei welcher jeder folgende Weg gröfser ist, als der in der vorhergegangenen Zeit zurückgelegte Weg, die Zeiten mögen noch so klein angenommen werden. (s. Beschleunigung.)

Beschleunigung bedeutet bekanntlich Vermehrung der Schnelligkeit und hat auch in der Phoronomie dieselbe Bedeutung, jedoch mit der Einschränkung, dafs die Vermehrung ohne Unterbrechung geschieht. Wenn ein Massenpunkt M eine Zeit t hindurch den Weg w gleichförmig durchlaufen hat, und er erhält mittelst eines neuen Impulses einen Zuwachs an Schnelligkeit, so dafs M in der folgenden gleichen Zeit t den Weg $w + w'$ gleichförmig durchläuft, so wird dieser Zuwachs nicht B. genannt. B. ist eine Vermehrung von Schnelligkeit der Art, dafs während des ganzen Weges in jedem folgenden noch so kleinen Zeittheilchen der zurückgelegte Weg gröfser ist als der, welcher in dem vorangegangenen gleichen Zeittheilchen zurückgelegt worden ist.

2. Solche Bewegung heifst eine b e s c h l e u n i g t e. Wenn in gleichen auf einander folgenden Zeiten die Zunahme an Weg immer gleich grofs bleibt, so heifst die Bew. eine g l e i c h f ö r m i g b e s c h l e u n i g t e B e w., und wenn die Zunahmen in gleichen auf einander folgenden Zeiten verschieden sind, u n g l e i c h f ö r m i g b e s c h l e u n i g t e B e w e g u n g; B e s c h l e u n i g u n g aber ist das M a a f s d e r Z u n a h m e d e s W e g e s i n d e r Z e i t e i n h e i t (Secunde).

Wenn nun ein Massenpunkt von der Ruhe ab die Zeit t hindurch sich bewegt hat, und die in jeder Secunde gleich viel wachsende Zunahme des Weges beträgt in der letzten Secunde von t die Länge l, so würde sie in der letzten Secunde der Zeit nt, nl betragen, und weder l noch nl, noch überhaupt eine Wegzunahme innerhalb einer Zeiteinheit w ä h r e n d d e r B e w e g u n g kann, weil sie veränderlich ist, und von der Dauer der Bewegung abhängt, als Maafs gelten; daher nimmt man die Zunahme des Weges, den ein v o n d e r R u h e aus gleichförmig beschleunigt sich bewegender Massenpunkt in der e r s t e n Secunde erlangt, also, da in der Secunde vorher der Weg = Null gewesen ist, offenbar den von der Ruhe aus in der ersten Secunde zurückgelegten Weg selbst als das Maafs, welches Be-

schleunigung genannt wird. Diese B. wird ziemlich allgemein mit dem Buchstaben G bezeichnet; beim freien Fall von einer nur geringen Höhe über der Erdoberfläche herab, wobei die Differenz der Entfernungen des Erdmittelpunkts so unbedeutend ist, dafs die dort sitzende Schwerkraft constant angenommen werden kann, wird die B. speciell mit g bezeichnet, und beträgt hier 15 pariser = 16 englische = $15\frac{5}{8}$ preufs. Fufs.

3. Wenn eine Bew. mit einer Geschw. c beginnt, und nach t Secunden die Geschw. = C geworden ist, so hat es etwas Befremdendes, die Bew. bis auf den Ruhepunkt zurück betrachten zu müssen, um die B. zu definiren. Die Lehre von der gleichförmig beschleunigten Bew. zeigt nun, dafs ein Massenpunkt von der Ruhe aus nach t Secunden den Weg Gt^2 zurückgelegt hat, und dafs die dabei erlangte Geschw. $c = 2Gt$ beträgt; diese Geschw. drückt aber zugleich den Weg aus, welcher in der folgenden $(t+1)$ten Sec. zurückgelegt werden würde, wenn die Bew. vom Ende der $t$ten Sec. ab gleichförmig geschähe.

Wie aber nach t Sec. der Weg = Gt^2, so nach $(t+1)$ Sec. = $G(t+1)^2$
$= Gt^2 + 2Gt + G$
mithin der gleichförmig beschleunigte Weg in der $(t+1)$ten Sec. $= 2Gt + G$

Nun war die Geschw. in der $t$ten Secunde $2Gt$, die Vermehrung derselben ist um G geschehen; man kann daher unter B. allgemein verstehen: den Unterschied (G) zwischen dem während einer gleichförmig beschleunigten Bew. in irgend einer Secunde zurückgelegten Weg ($2Gt + G$) und dem mit der Endgeschw. ($2Gt$) der vorhergegangenen Sec. gleichförmig zurückgelegten Wege.

4. Die B. einer ungleichförmig beschleunigten Bew. ist natürlich in jedem einzelnen Zeittheilchen eine andere. Denkt man sich eine solche nach irgend einem Gesetz stattfindende ungleichförmig beschleunigte Bewegung, und neben dieser eine gleichförmig beschleunigte Bew., welche von einem Augenblick an jener ersten möglichst nahe kommt, d. h. dafs die Differenz der in beiden Bewegungen von jenem Augenblick an gleichzeitig durchlaufenen Wege kleiner ist als die Differenz zwischen dem Wege der ungleichförmig beschl. Bew. und dem irgend einer anderen gleichförmig beschl. Bew., wie klein man auch die gleiche Zeit ihrer Bewegungen nehmen mag, so ist die B. der zuerst gedachten gleichförmig beschleunigten Bew. zugleich die B. der ungleichförmig beschleunigten Bew. in dem gedachten Augenblick. (Das Nähere s. Bewegung, ungleichförmig veränderliche, No. 3.)

5. Wenn bei einer ungleichförmigen Bew. die auf einander folgenden Geschwindigkeiten und Wege anstatt zu wachsen, in demselben Sinne abnehmen, so ist die Bew. eine verzögerte, die B. heifst Verzögerung, und diese ist in jedem einzelnen Falle gleichbedeutend und gleich grofs mit der B., wenn man diese negativ nimmt; daher sagt man auch statt Verzögerung, die B. sei negativ und hat positive und negative B.

Beständige Gröfse, constante Gröfse unveränderliche Gröfse ist in der Analysis jede Gröfse, die bei allen Rechnungsoperationen ungeändert bleibt. In dem Art. Analysis ist pag. 66 beispielsweise die Formel

$$y = \frac{a^n - x^n}{a - x}$$

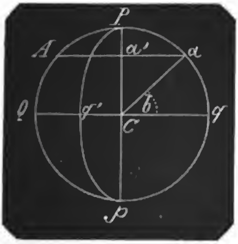
aufgeführt worden, und gezeigt, dafs der Werth y von a^{n-1} bis na^{n-1} alle Werthe annehmen kann, je nachdem man x von 0 bis a wachsen läfst. Es ist mithin x eine veränderliche Gröfse, a und n dagegen bleiben in allen jenen möglichen Werthen von y ungeändert, beide sind b. Gröfsen.

Besteck ist die in geographischer Länge und Breite zu ermittelnde Lage eines Orts, wohin der Schiffer von einem der Lage nach ihm bekannten Orte aus nach längerem geradlinigen Curs gekommen ist. Die Ermittelung der Lage geschieht durch die Besteckrechnung, welche dem Schiffer durch nautische Tabellen, die er auf seinen Reisen zur Hand hat, erleichtert werden; das Wissenschaftliche der Rechnung s. den folgenden Art.

Besteckrechnung, Ermittelung des Bestecks (s. d. vor. Art.) geschieht durch das Luggen, mit welchem der Schiffer die Geschwindigkeit des Schiffs erfährt, und welches während des geradlinigen Laufs verschiedentliche Male geschieht, wonach die mittlere Geschwindigkeit hervorgeht; eine richtige Uhr zeigt die Zeit des Laufs, mit dieser findet der Schiffer die Länge des Curses in Seemeilen, deren 60 auf einen Grad gehen, so dafs in der Linie des Aequators Qq nach Ost oder nach West (unter dem Curswinkel = 90°) gesteuert oder in der Linie eines Meridians PQp, $Pq'p$, Pqp nach Süd oder Nord (unter dem Curswinkel = 0) gesteuert, jede Seemeile nach Ost im Aequator eine Minute mehr östliche oder weniger westliche Länge, nach West eine Minute mehr west-

liche oder weniger östliche Länge; in irgend einem Meridian nach Nord eine

Fig. 221.



Minute mehr nördliche oder weniger südliche Breite, nach Süd eine Minute mehr südliche oder weniger nördliche Breite giebt.

Steuert man aber in irgend einer nördlichen oder südlichen geographischen Br. b nach Ost oder West, also nach Aa oder aA, nennt die Anzahl Minuten, die in dem Parallelkreis Aa (von 360°) per Seemeile zurückgelegt werden x, so hat man

$$1 \text{ Min.} : x \text{ Min.} = aa' : (Cq \text{ oder } Ca)$$

woraus

$$x = \frac{Ca}{aa'} = \frac{1}{\cos b} = \sec b$$

Unter den nautischen Tabellen befindet sich auch eine, in welcher für alle Breiten von Grad zu Grad von 0 bis 90° die Secanten angegeben sind. Hat der Schiffer z. B. unter 58° 20′ 10″ südlicher Breite von einem Ort unter 69° 40′ westl. Länge (unterhalb des Cap Horn) einen östlichen Curs gemacht von 65 Seemeilen, so findet er in der Tabelle:

$$\begin{aligned} \text{Secante } 58° &= 1{,}836 \\ \text{Secante } 59° &= 1{,}887 \\ \hline \text{Differenz } & \;\; 0{,}051 \end{aligned}$$

also

$$60' : 20' \; 10'' = 0{,}051 : d$$

$$d = \frac{20\tfrac{1}{6} \times 0{,}051}{60} = 0{,}017$$

daher giebt 58° 20′ 10″ die Secante 1,836 + 0,017 = 1,853, und des Schiffes Weg östlich ist 1,853 × 65 = 120,445 Minuten = 2° ½′ und das Besteck ist 69° 40′ − 2° ½′ = 67° 39½′ westliche Länge.

Man revidirt das Resultat durch Zeichnung, wenn man einen rechten Winkel $aa'C$ zeichnet, nach einem Maafsstab aa' = 65 Theile macht, den $\angle a'aC = 58\tfrac{1}{3}°$ mit dem Transporteur aufträgt, und die Hypothenuse mifst, welche circa 120 Theile enthalten mufs.

Wenn weder in einem Parallelkreise noch in einem Meridian der Curs genommen wird, so ist es ein Curs in loxodromischer Linie, und die Bestimmung des Bestecks ist etwas umständlicher. Ein Beispiel soll dies erläutern:

Das Schiff befinde sich in A, 36° 15′ nördl. Breite und 28° 18′ westl. Länge von Greenwich, also unterhalb der Azoren, nehme einen graden Curs SSW (Südsüdwest) also unter einem Curswinkel $22\tfrac{1}{2}°$, und mache einen Weg von 115 Seemeilen = AB, so ist die Breitenänderung von $B = AB \cos BAC = 115 \cos 22\tfrac{1}{2}°$ Minuten = AC.

Es ist

$$\begin{aligned} \log 115 &= 2{,}0606978 \\ \log \cos 22\tfrac{1}{2}° &= 9{,}9656153 - 10 \\ \hline \log \text{Product} &= 2{,}0263131 \end{aligned}$$

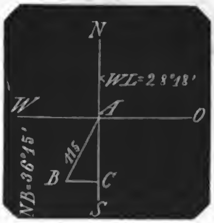
$num = 115 \times \cos 22\tfrac{1}{2}° = 106{,}25$ M. − 1° 46′

A befand sich unter 36° 15′ NB

B befindet sich unter 34° 29′ NB

Die Längenänderung würde in A bei westlicher Steuerung betragen haben: Distanz × Sec. 36° 15′; in B bei westlicher

Fig. 222.



Steuerung: Distanz × Sec. 34° 29′. Es ist also die Secante der mittleren Breite von ½(36° 15′ + 34° 29′) = 35° 22′. Mithin ist die Längenänderung von B gegen A = $115 \times \sin 22\tfrac{1}{2}° \times \sec 35° \, 22'$.

Es ist

$$\begin{aligned} \log 115 &= 2{,}0606978 \\ \log \sin 22\tfrac{1}{2}° &= 9{,}5828397 - 10 \\ \hline \log \text{Product} &= 1{,}6435375 \\ \log \cos 35° \, 22' &= 9{,}9114051 - 10 \\ \hline \log \text{Quotient} &= 1{,}7321324 \end{aligned}$$

num = Längenänderung = 54′

A befand sich unter 28° 18′ WL

B befindet sich unter 29° 12′ WL

Bestimmte Aufgabe ist eine A., die nur ein Resultat zuläfst, wobei zu bemerken, dafs eine Gleichung vom $n$ten Grade, welche

bekanntlich *n* Werthe giebt, eigentlich also *n* Resultate zuläfst, zu den bestimmten Aufgaben gerechnet wird, weil diese *n* Werthe in der Natur der Gleichung als Product von *n* Factoren begründet sind, von denen jeder ein ganz bestimmter Werth ist. In dem Art.: Bahn der Weltkörper, No. 10 ist die dort gestellte Aufgabe dadurch ganz unbestimmt geblieben, dafs die aus der Entwickelung hervorgegangene quadratische Gleichung ihrer Natur gemäfs 2 Werthe zuläfst, und es hat daher zu Lösung der Aufgabe in No. 11 ein anderer Weg eingeschlagen werden müssen. Diophantische Gleichungen, deren weniger als unbekannte Gröfsen gegeben sind, gehören zu den unbestimmten Aufgaben. Die Aufgabe: über einer gegebenen geraden Linie ein Dreieck zu zeichnen, dessen ihr gegenüberliegender Winkel gegeben ist, ist eine unbestimmte A., denn es existiren unzählige solcher Dreiecke, und der geometrische Ort aller Dreiecksspitzen liegt in dem Bogen desjenigen Kreises, dessen Sehne die gegebene Linie, und dessen Peripheriewinkel der gegebene Winkel ist.

Bestreben zur Bewegung äufsert ein Körper, wenn er gehindert wird, eine Bewegung zu beginnen, und zwar gegen das Hindernifs durch Druck, das B. selbst erhält der Körper durch eine auf ihn wirkende Kraft. Der Druck des Getreides auf das Gebälk eines Speichers ist die Aeufserung des Bestrebens der Körner, dem Mittelpunkt der Erde sich zu nähern, und sie erhalten dies B. durch die im Erdmittel vereint wirkende Anziehungskraft des Erdkörpers.

Beugung des Lichtstrahls s. v. w. Ablenkung des Lichtstrahls.

Bewegende Kraft ist die Kraft, welche auf einen Körper wirkend, dessen Bewegung hervorbringt, und die daher auch nach derselben Richtung wirkt, in welcher die Bew. geschieht. Wirken auf einen Körper mehrere Kräfte nach verschiedenen Richtungen, so kann der Körper nur in einer Richtung sich bewegen: die nach dieser mittleren Richtung wirkende aus allen Kräften sich zusammensetzende Mittelkraft ist dann die b. K.

Beweglicher Punkt am Hebel ist der Punkt desselben, aus welchem die Last gewältigt wird.

Beweglichkeit ist die allgemeine Eigenschaft aller Körper, sich zu bewegen, d. h. durch Einwirkung von Kräften auf sie ihren Ort zu ändern; der Stoff wird daher auch das Bewegliche im Raum genannt.

Bewegung ist stete Ortsänderung, im Gegensatz von Ruhe, die Beibehaltung des Orts. B. veranschaulicht die einfachen Begriffe: Ausdehnung und Raum. Aendert ein Massenpunkt seinen Ort, und verfolgt man im Geiste diese Thätigkeit, nämlich die Summe der einzelnen Orte, die er aufeinanderfolgend einnimmt, so hat man eine Ausdehnung, die Linie; ändert die Linie ihren Ort, und verfolgt man die von ihr aufeinanderfolgend eingenommenen Lagen, so hat man die Ausdehnung einer Ausdehnung, die Fläche: und ändert diese ihren Ort, so beschreibt sie einen Körper. Dafs die Ortsänderung stetig ist, besagt, dafs die Masse nicht in demselben Augenblick verschiedene Orte einnimmt, sondern dafs dies nur in aufeinanderfolgenden Zeitaugenblicken geschehen kann, und der Begriff B. begreift also 3 Merkmale in sich: die sich bewegende Masse, den Raum und die Zeit.

Die Linie, welche ein Massenpunkt, oder wenn eine Masse sich bewegt, deren Mittelpunkt während seiner B. durchläuft, heifst der Weg der Masse.

Eine B. ist entweder geradlinig oder krummlinig; befindet sich die krumme Linie in einerlei Ebene, so ist die B. in einer ebenen Bahn, ist die krumme Linie in jedem nachfolgenden Zeitaugenblick in einer anderen Ebene, so heifst die B. eine B. frei im Raum.

2. Die B. heifst fortschreitend, translatorisch, wenn alle Punkte der Masse parallele Linien durchlaufen. Die B. heifst Centralbewegung, wenn die Masse eine krumme, in sich geschlossene Linie immer wiederholend durchläuft. Durchlaufen die Punkte einer Masse Kreise, deren Mittelpunkte in einerlei, innerhalb der Masse befindlichen geraden Linie liegen, so ist die B. drehend, rotirend; die ebengedachte Gerade, zugleich diejenige, deren Punkte die einzigen der Masse sind, die an der B. nicht Theil nehmen, heifst Drehungsaxe, Drehaxe, Axe.

3. Eine B. heifst gleichförmig, wenn die bewegte Masse in gleichen auf einander folgenden, noch so kleinen Zeiten gleiche Wege durchläuft.

Eine B. heifst ungleichförmig oder veränderlich, wenn sie in gleichen, auf einander folgenden, noch so kleinen Zeiten stets ungleiche Wege durchläuft. Sind diese aufeinanderfolgenden, noch so kleinen Wege stets zunehmend, so ist die B. eine beschleunigte, sind sie stets abnehmend, so ist die B. eine verzögerte.

Beträgt bei der ungleichförmigen B. die

Zunahme oder die Abnahme des Weges in gleichen aufeinanderfolgenden noch so kleinen Zeiten immer gleich viel, so heifst die B. eine gleichförmig veränderliche, und zwar im ersten Fall eine gleichförmig beschleunigte, im zweiten eine gleichförmig verzögerte B. Die gleich grofs bleibende Aenderung des Weges innerhalb der Zeit-Einheit (Secunde) heifst die Beschleunigung; welche bei der beschleunigten B. positiv, bei der verzögerten B. negativ wird.

Bewegung, absolute, s. absolute Bewegung.

Bewegung, beschleunigte, s. beschleunigte Bewegung und gleichförmig beschleunigte Bewegung.

Bewegung, gleichförmige, ist diejenige B., bei welcher in gleichen aufeinanderfolgenden noch so kleinen Zeiten immer gleiche Wege durchlaufen werden. Legt eine Masse M in irgend einer Zeit t den Weg w zurück, eine Masse M' in derselben Zeit t den Weg $2w$, so sagt man: M' habe die doppelte Geschwindigkeit von M. Durchläuft eine Masse M'' den Weg $3w$ in der Zeit t, so hat M'' die dreifache Geschw. von M, und die Geschw. von M' und M'' verhalten sich wie 2 : 3. Ueberhaupt nennt man das Verhältnifs der in gleichen Zeiten gleichförmig durchlaufenen Wege zweier Massen die Geschwindigkeiten beider Massen in Beziehung auf einander. Der Begriff der Geschwindigkeit ist also relativ, und will man die gleichförmige B. einer Masse bestimmen, so mufs man deren Weg in einer bestimmten Zeit mit dem Weg einer anderen bekannten g. B. vergleichen. Es ist also ein allgemeines Maafs als Bewegungs-Einheit aufzustellen erforderlich, um alle übrigen g. B. danach bestimmen zu können, und hierfür wählt man natürlich diejenige B., welche am einfachsten bestimmt wird, nämlich diejenige, wo in jeder Zeit-Einheit (Secunde, Minute, ...) die Längen-Einheit (Fufs, Ruthe, Meile ....) durchlaufen wird. Jede andere g. B. wird dann durch eine absolute Zahl bestimmt, welche ausdrückt, das Wievielfache der Längen-Einheit der in der Zeit-Einheit zurückgelegte Weg beträgt.

Ist für die Bewegungs-Einheit (1 Fufs in 1 Secunde) der Weg σ in der Zeit τ zurückgelegt, so ist offenbar $\sigma = \tau$ (12 Fufs in 12 Secunden), nämlich Weg und Zeit werden durch dieselbe absolute Zahl ausgedrückt. Ist dagegen bei irgend einer andern B. c die Geschw. (c Fufs in 1 Sec.), und s der Weg in der Zeit t, so ist $s = c \cdot t$. Bei 5 Fufs Geschw. ist der Weg 60 Fufs in 12 Sec.; 60 Fufs = 5 · 12 Fufs.

Aus $$s = c \cdot t \qquad (1)$$

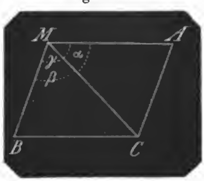
folgt $$c = \frac{s}{t} \qquad (2)$$

$$t = \frac{s}{c} \qquad (3)$$

2. Bewegt sich eine Masse in gerader Linie, so ist diese, vom Anfangspunkt der B. an gerechnet, zugleich die Richtung der B., und diese bleibt folglich bis an's Ende der B. dieselbe. Bewegt sich dagegen eine Masse in einer krummen Linie, so hat die B in jedem Augenblick eine andere Richtung, und in jedem einzelnen Punkt ihrer Bahn ist die Richtung der B. diejenige gerade Linie, welche der krummlinigen Bahn dort am nächsten kommt, also die Tangente an der Bahn in demselben Punkt.

3. Es seien MA, MB die Seitenbewegungen der Masse M (s. Bahn No. 2, Fig. 163) so ist die Diagonale MC des ⌗ $MACB$ die aus ihnen erfolgende mittlere B., die wirkliche B. der Masse M und die Längen MA, MB, MC drücken das Verhältnifs

Fig. 223.



der in einerlei Zeit zurückgelegten Wege aus, und sollen durch a, b, c bezeichnet werden. Setzt man den $\angle AMB$ zwischen den Seitenbewegungen a, $b = \gamma$, den $\angle AMC$ zwischen dem Seitenwege a und dem mittleren $c = \alpha$, den $\angle BMC$ zwischen dem Seitenwege b und dem mittleren $= \beta$, so hat man nach der Geometrie:

A. Wenn die 3 Wege a, b, c gegeben sind

$$\cos\gamma = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{2ab}$$

$$\cos\alpha = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

$$\cos\beta = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2cb}$$

B. Wenn die beiden Seitenwege a, b und der von ihnen eingeschlossene $\angle\gamma$ gegeben sind

$$c^2 = \sqrt{(a^2 + b^2 + 2ab \cos \gamma)}$$

$$tg\, \alpha = \frac{b \sin \gamma}{a - b \cos \gamma}$$

$$tg\, \beta = \frac{a \sin \gamma}{b - a \cos \gamma}$$

C. Wenn die beiden Seitenwege a, b und einer der beiden $\angle \alpha$ oder β gegeben sind, welche einer der Seitenwege mit dem mittleren Weg bildet

$$c = a \cos \alpha + \sqrt{b^2 - a^2 \sin^2 \alpha}$$
$$= b \cos \beta + \sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 \beta}$$

$$\sin \beta = \frac{a}{b} \sin \alpha$$

$$\gamma = \alpha + \beta.$$

D. Wenn der mittlere Weg c, einer der beiden Seitenwege a, und der von beiden eingeschlossene $\angle \alpha$ gegeben sind.

$$b = \sqrt{c^2 + a^2 - 2ac \cos \alpha}$$

$$tg\, \beta = \frac{a \sin \alpha}{c - a \cos \alpha}$$

$$tg\, \gamma = \frac{a \sin \alpha}{a \cos \alpha - c}.$$

E. Wenn der mittlere Weg c, einer der beiden Seitenwege a, und der von dem Mittelwege und dem zweiten Seitenwege eingeschlossene $\angle \beta$ gegeben sind.

$$b = c \cos \beta + \sqrt{a^2 - c^2 \sin^2 \beta}$$

$$\sin \gamma = \frac{c}{a} \sin \beta$$

woraus $\alpha = \gamma - \beta.$

F. Wenn der mittlere Weg c, einer der beiden Seitenwege a, und der von beiden Seitenwegen a, b eingeschlossene $\angle \gamma$ gegeben sind.

$$b = -a \cos \gamma + \sqrt{c^2 - a^2 \sin^2 \gamma}$$

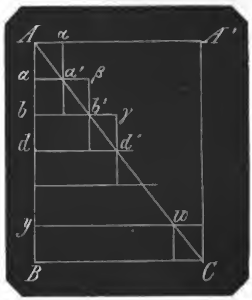
$$\sin \beta = \frac{a}{c} \sin \gamma$$

woraus $\alpha = \gamma - \beta$

Bewegung, gleichförmig beschleunigte. Diejenige B., bei welcher in gleichen auf einander folgenden noch so kleinen Zeiten die Wege immer um gleichviel wachsen. In Folge des Beharrungsvermögens ruhender und bewegter Massen ist solche B. nicht anders möglich, als dafs eine anziehende oder abstofsende Kraft in jedem Augenblick gleich stark zu wirken beibleibt, und dadurch den ersten auf die Masse ausgeübten Impuls in jedem Augenblick wiederholt. Eine solche Kraft p führe eine Masse M innerhalb einer sehr kleinen Zeit t durch den Weg w, so würde M wegen der Beharrung B in dem zweiten t wieder w durchlaufen, durch P erhält er aber nochmals den Weg w, also überhaupt $2w$, im dritten t führt nun B die Masse M durch den Weg $2w$, durch P erhält sie abermals w, mithin durchläuft sie in dem dritten t den Weg $3w$ u. s. w. in der $n$ten Zeit t den Weg $(n-1)\, w$ durch B, w durch P, überhaupt nw.

Für die sehr kleine Zeit t als Einheit ist also w als gleicher Wachsthum des Weges die Beschleunigung; allein es ist hierbei angenommen, dafs jeder Weg innerhalb der Zeit t gleichförmig durchlaufen wird.

Fig. 224.



Setzt man die senkrechte Linie $AB =$ der Zeit T, die waagerechte $BC =$ der nach Verlauf von T erlangten Geschw. C, so würde, wenn auch in A die Geschw. C gewesen wäre, der Weg $S = C \cdot T = AB \times BC = \# AA'BC$ sein; es ist aber die Geschw. in $A = 0$ und wächst bis B zu C.

Theilt man nun AB in n gleiche Theile, so bedeutet jeder Theil wie Aa, ab u. s. w. $\frac{1}{n} T$, und da die Geschwindigkeiten in jeder noch so kleinen Zeit um gleichviel wachsen, so mufs, wenn nach dem ersten $\frac{T}{n}$ in a die Geschw. $= c$ ist, die Geschw. nach dem zweiten $\frac{T}{n}$ in $b = 2c$, in $d = 3c$ .... in $B = C = nc$ sein. Zieht man daher die Diagonale AC, und zieht aa' bb' dd' .... $\# BC$, so drücken die Längen aa', bb', dd' .... BC die in a, b, d .... B stattfindenden Geschwindigkeiten aus.

Nun ist in A die Geschw. $= 0$, wäre sie nach Verlauf von $\frac{1}{n} T$ ebenfalls $= 0$, so würde die Masse M den Weg $= 0$ durchlaufen, wäre die Geschw. von Anfang an $= aa' = c$, so würde M den Weg $Aa \cdot aa'$

$= \#\ aa$ durchlaufen. Jener Weg 0 ist zu klein, der Weg aa zu grofs.

In dem zweiten $\frac{T}{n} = ab$ ist die Anfangsgeschw. $= aa'$, die Endgeschw. $= bb'$. Nimmt man an, dafs der Weg gleichförmig mit aa' durchlaufen wird, so ist offenbar der Weg $ab \cdot aa' = \#\ ba$ zu klein; nimmt man an, dafs er mit der Geschw. bb' durchlaufen wird, so ist der Weg $ab \cdot bb' = \#\ b\beta$ zu grofs.

Ebenso ist für das dritte $\frac{T}{n} = bd$ das $\#\ db'$ als Weg zu klein, das $\#\ d\gamma$ zu grofs u. s. f. bis zum Ende der Zeit T in B, wo der Weg in dem letzten $\frac{T}{n}$ mit $\gamma\epsilon$ durchlaufen zu klein, mit BC durchlaufen zu grofs sein würde.

Die Summe der Rechtecke ist die Summe der Wege, welche die Masse M innerhalb der Zeit T zurücklegt; die Rechtecke unterhalb der Diagonale, deren Oberseiten aa', bb' u. s. w. sind, geben den Weg zu klein, die Rechtecke, deren Unterseiten die Linien aa', bb' u. s. w., geben ihn zu grofs an. Zwischen beiden Summen liegt aber das $\triangle\ ABC$, und man kann mit dem Wachsthum von n die gleichen Unterschiedsrechtecke wie aa beliebig klein werden, also beide Rechteckssummen dem $\triangle\ ABC$ beliebig nahe kommen lassen, woher $\triangle\ ABC$ den wirklichen Weg der Masse M von der Geschw. 0 bis zur Geschw. $C = BC$ innerhalb der Zeit $T = AB$ bezeichnet.

Der Flächen-Inhalt des $\triangle\ ABC$ ist aber

$$\tfrac{1}{2}\, BC \cdot AB = \tfrac{1}{2}\, C \cdot T$$

folglich ist allgemein

$$S = \tfrac{1}{2} CT$$

2. Wenn nach Verlauf von T die absolute Kraft P auf die Masse M zu wirken aufhörte, so würde M in Folge des Beharrungsvesmögens in der folgenden Zeit T den Weg CT zurücklegen. Es ist also allgemein der mit der Anfangsgeschwindigkeit 0 in einer Zeit T gleichförmig beschleunigt durchlaufene Weg gleich der Hälfte des Weges, der mit der erlangten Endgeschwindigkeit in der folgenden gleichen Zeit T gleichförmig durchlaufen werden würde.

3. Setzt man $T = 1$ Secunde, so ist der Weg $S = \frac{1}{2} C$. Beim freien Fall ist aber erfahrungsmäfsig der Weg S in der ersten Sec. $= 15\frac{5}{8}$ Fufs. Dieser Weg in der ersten Secunde wird die Beschleunigung (s. d.) beim freien Fall genannt und mit dem Buchstaben g bezeichnet.

Es ist nun die Endgeschwindigkeit nach einer Secunde $c = 2g$. In der zweiten Secunde wird vermöge der Beharrung der Weg $2g$, vermöge der Schwerkraft der Weg g, überhaupt der Weg $3g$ zurückgelegt; in beiden Secunden zusammen der Weg $4g = S$; so wie nach dem Obigen $S = \frac{1}{2} CT = \frac{1}{2} 2C = C = 4g$; in der dritten Sec. vermöge Beharrung also der Weg $4g$, vermöge der Schwerkraft g, überhaupt $5g$ u. s. w.

Die Beschleunigung g bleibt constant, die Wege in den auf einander folgenden Secunden sind g, $3g$, $5g$ .... der Wachsthum $2g$ derselben pro Secunde bleibt ebenfalls constant, desgl. der Wachsthum der Geschwindigkeiten $2g$, $4g$, $6g$ mit $2g$.

Es ist also der freie Fall eine gleichförmig beschleunigte B., und so jede andere B., welche durch eine permanent einwirkende gleich grofs bleibende Kraft hervorgebracht wird.

4. Da bei jeder g. b. B. die Geschwindigkeiten in gleichen auf einander folgenden Zeiten gleichviel wachsen, so verhalten sich die von der Geschw. $= 0$ ab entstandenen Endgeschwindigkeiten C, c wie die von da ab verflossenen Zeiten T, t

oder $C : c = T : t$

Nnn ist (nach No. 1)

$$S = \tfrac{1}{2} CT$$

also auch $s = \frac{1}{2} ct$

daher $S : s = CT : ct$

hierzu $C : c = T : t$

giebt $S : s = T^2 : t^2$

und $S : s = C^2 : c^2$

Beim freien Fall ist in der Zeit $t = 1$ der Weg $= g$ und die Geschw. $= 2g$

Mithin $S : g = T^2 : 1$

woraus $S = gT^2$

und $S : g = C^2 : (2g)^2$

woraus $S = \frac{C^2}{4g}$

Nennt man bei einer anderen g. b. B. den Weg in der ersten Secunde (die Beschleunigung) $= G$, so ist allgemein

$$S = \tfrac{1}{2} CT \qquad (1)$$

$$S = GT^2 \qquad (2)$$

$$S = \frac{C^2}{4G} \qquad (3)$$

Aus 2 und 3 erhält man

$$C = 2GT \qquad (4)$$

Aus 1: $C = \frac{2S}{T}$ (5)

Aus 3: $C = 2\sqrt{GS}$ (6)

Ferner aus 1, 2, 4:

$$T = \frac{C}{2G} \quad (7)$$

$$T = \sqrt{\frac{S}{G}} \quad (8)$$

$$T = \frac{2S}{C} \quad (9)$$

Endlich aus 2, 3 und 7

$$G = \frac{S}{T^2} \quad (10)$$

$$G = \frac{C^2}{4S} \quad (11)$$

$$G = \frac{C}{2T} \quad (12)$$

5. Es fange die zu betrachtende g. b. B. nicht von der Ruhe an; der in der Zeit t zurückgelegte Weg sei $= s$, die Geschw. im Anfang dieses Weges $= c$, am Ende desselben $= C$, die Beschleunigung, nämlich der Weg, der von der Ruhe aus in der ersten Sec. zurückgelegt wird $= G$, so ist (nach No. 4) der Zuwachs der Geschw. in jeder Sec. $= 2G$, also in t Sec. $= 2\,Gt$, daher

$$C = c + 2Gt \quad (1)$$

Um den Weg zu erfahren, der in der Zeit t zurückgelegt wird, hat man den von der Ruhe aus bis zur Endgeschw. c zurückgelegt zu denkenden Weg (nach No. 4, Formel 3) $s' = \frac{c^2}{4G}$ den Weg S' von der Ruhe bis zur Endgeschw. $C = \frac{C^2}{4G}$ mithin in der Zeit t den Weg

$$s = \frac{C^2 - c^2}{4G} \quad (2)$$

Aus der Verbindung von 1 und 2 durch Elimination von G erhält man noch den Weg

$$s = \frac{c + C}{2}\,t \quad (3)$$

6. Man kann den Ausdruck für den Weg s auch ohne Hülfe der beiden Wege S' und s', die nicht wirklich zurückgelegt werden, entwickeln.

Denkt man sich nämlich die Zeit t in n gleiche Theile getheilt, so ist der Zuwachs an Geschw. in jedem $\frac{t}{n}$ gleich grofs, dieser betrage $\triangle$, so sind die Geschwindigkeiten

$$c,\ c + \triangle,\ c + 2\triangle,\ c + 3\triangle \ldots\ldots c + n\triangle$$

Denkt man sich in jedem Zeittheilchen $\frac{t}{n}$ den Weg gleichförmig zurückgelegt, so ist, wie schon No. 1 figürlich nachweist, die Summe aller Wege kleiner als der wirklich zurückgelegte Weg s, wenn man die Wege mit den Anfangsgeschwindigkeiten, und gröfser als s, wenn man sie mit den Endgeschwindigkeiten zurückgelegt annimmt.

Die erste Summe beträgt

$$\frac{t}{n}\,c + \frac{t}{n}(c + \triangle) + \frac{t}{n}(c + 2\triangle) + \ldots\ldots \frac{t}{n}[c + (n-1)\triangle]$$

$$= \frac{t}{n} \cdot \frac{2c + (n-1)\triangle}{2}\,n = tc + t \cdot \frac{n-1}{2}\triangle < s$$

Die zweite Summe beträgt

$$\frac{t}{n}(c + \triangle) + \frac{t}{n}(c + 2\triangle) + \ldots\ldots \frac{t}{n}(c + n\triangle)$$

$$= \frac{t}{n} \cdot \frac{2c + (n+1)\triangle}{2}\,n = tc + t \cdot \frac{n+1}{2}\triangle > s$$

Nun ist offenbar

$$c + n\triangle = C$$

daher

$$\triangle = \frac{C - c}{n}$$

also

$$tc + \frac{n-1}{2n}(C - c)t < s < tc + \frac{n+1}{2n}(C - c)t$$

Zwischen den beiden Summen ist nicht nur s, sondern auch die Gröfse begriffen:

$$tc + \frac{n}{2n}(C - c)t = \frac{C + c}{2}\,t$$

und da mit dem beliebigen Wachsthum von n die Differenz beider Summen beliebig klein werden kann, so ist

$$s = \frac{C + c}{2}\,t$$

d. h. der Weg, der bei einer g. b. B mit den Anfangs- und Endgeschwindigkeiten c und C zurückgelegt wird, ist gleich dem Wege, der mit dem arithmetischen Mittel

beider Geschwindigkeiten gleichförmig zurückgelegt werden würde.

7. Bei der g. b. B. sind, wenn die B. von der Ruhe ab geht, zur Bestimmung der wissenswürdigen Gröfsen G, C, T, S nur 2 derselben als gegeben erforderlich, und es ixistiren die in No. 4 angegebenen 12 Formeln.

Hat aber die g. b. B. eine Anfangsgeschw. c, so sind mit dieser 5 Elemente, die zu bestimmen sind, und für jedes müssen 3 der übrigen Elemente gegeben sein. Da 5 Elemente 10 Combinationen jedes mit 3 Elementen zulassen, und da mit jeden 3 gegebenen Elementen 2 andre bestimmt werden, so hat man 20 Aufgaben, welche in folgenden 20 Formeln ausgedrückt sind, und die alle aus den No. 5 erwiesenen 3 Gesetzen hergeleitet werden:

1. $S = \frac{c + C}{2} T$
2. $S = \frac{C^2 - c^2}{4G}$
3. $S = CT - GT^2$
4. $S = cT + GT^2$
5. $C = \frac{2S}{T} - c$
6. $C = \sqrt{4GS + c^2}$
7. $C = \frac{S}{T} + GT$
8. $C = c + 2GT$
9. $c = \frac{2S}{T} - C$
10. $c = \frac{S}{T} - GT$
11. $c = \sqrt{C^2 - 4GS}$
12. $c = C - 2GT$
13. $T = \frac{2S}{C + c}$
14. $T = \frac{C - \sqrt{C^2 - 4GS}}{2G}$
15. $T = \frac{-c + \sqrt{c^2 + 4GS}}{2G}$
16. $T = \frac{C - c}{2G}$
17. $G = \frac{C^2 - c^2}{4S}$
18. $G = \frac{CT - S}{T^2}$
19. $G = \frac{S - cT}{T^2}$
20. $G = \frac{C - c}{2T}$

Bewegung, gleichförmig verzögerte.

Diejenige B., bei welcher in gleichen auf einander folgenden noch so kleinen Zeiten die Wege immer um gleich viel abnehmen. In Folge des Beharrungsgesetzes in Beziehung auf Ruhe und Bewegung von Massen ist solche B. nicht anders denkbar, als dafs eine Kraft einer gleichförmig sich bewegenden Masse fortdauernd entgegenwirkt, und in dem Art.: Bahn geworfener Körper, No. 5, ist gezeigt, dafs die Gesetze beim freien Aufsteigen dieselben sind, wie beim freien Fall, eben so findet dies statt bei jeder anderen g. v. B.

Wenn ein Körper, der von der Ruhe mit der Beschleunigung G (s. d. vor. Art.) sich gleichförmig beschleunigt T Secunden lang fortbewegt, so dafs er den Weg S durchläuft, und die Endgeschw. C erlangt, so durchläuft derselbe Körper, wenn er mit der Anfangsgeschw. C sich gleichförmig verzögert T Secunden lang fortbewegt, den Weg S, und erlangt die Endgeschw. = Null, wenn die Beschleunigung G während seiner Bewegung als Verzögerung wirkt. Ueberhaupt zeigt die Entwickelung der Gesetze für die gleichförmig beschleunigte B., dafs man nur nöthig hat, g und G negativ zu nehmen, um die Gesetze der g. v. B. zu erhalten, wie folgt.

Der vor. Art. No. 1 beweist, dafs $\triangle ABC$ (Fig. 224) der Weg ist, den eine Masse M von der Ruhe in A aus und in der Zeit $(T) = AB$ zurücklegt, wenn er die Endgeschw. $(C) = BC$ erlangt. Dieselbe Construction und dieselben Schlüsse gelten offenbar, wenn man $AB = T$ als Zeit, $BC = C$ als Anfangsgeschwindigkeit gelten läfst, und statt mit dem # aa, mit dem untersten # wC zu erklären beginnt.

Der vor. Art. No. 3 auf die g. v. B. angewendet, ist schon in dem Art.: Bahn geworfener Körper, No. 2 bis 5 geschehen, und was der vor. Art. No. 4 besagt, gilt auch von der g. v. B., wenn man statt der Worte: „von 0 ab bis zur Endgeschwindigkeit" die Worte: „von der Anfangsgeschw. bis zu Null" setzt. Demnach gelten die dort aufgestellten 12 Formeln auch für die g. v. B.

Eine gleiche Bewandtnifs hat es mit den Lehren des vor. Art., No. 5 bis 7: Man hat nur nöthig, C als Anfangsgeschwindigkeit und c als Endgeschwindigkeit zu setzen, und die Worte ohne Weiteres beizubehalten, um die Gesetze der g. v. B. zu erhalten, wobei zugleich auf den Art.: Beschleunigung verwiesen wird.

Die in No. 7. aufgestellten 20 Formeln gelten also auch für die g. v. B., wenn man

C als Anfangsgeschwindigkeit,
c als Endgeschwindigkeit und
G als Verzögerung ansieht.

Bewegung, relative s. u. absolute Bewegung.

Bewegung, ungleichförmig veränderliche. Die gleichförmige und die beiden gleichförmig veränderlichen B. sind Fortschreitungen nach bestimmten Gesetzen, die von der Wissenschaft aufgefafst und zu Grunde gelegt, zu Schlüssen führen, nach welchen die Berechnung dahin gehöriger unbekannter Gröfsen aus bekannten möglich wird. Eine B., die ungleichförmig sich ändert, kann ebenfalls nur dann Untersuchungen möglich machen, wenn auch die Ungleichförmigkeit bestimmten Gesetzen folgt, die zu Grunde zu legen sind, weil Gesetzloses aufser aller wissenschaftlichen Behandlung liegt.

Es sei demnach allgemein in der Zeit t der Weg s zurückgelegt, und die Endgeschwindigkeit sei v. Aendert sich t um Δt, so ändern sich offenbar auch s und v, und die zugehörigen Aenderungen seien Δs und Δv, so dafs in der Zeit Δt der Weg Δs mit der Endgeschw. $v + \Delta v$ durchlaufen wird, und zwar so, dafs Δt, Δs, Δv nach irgend einem Gesetze Zusammenhang haben. Je nachdem Δv additiv oder subtractiv ist, wird die Bewegung beschleunigt oder verzögert. Ist Δv additiv, so ist Δs gröfser als der Weg $v\Delta t$, der in der Zeit Δt mit der Anfangsgeschw. v gleichförmig zurückgelegt wird, und kleiner als der Weg $(v + \Delta v)\Delta t$, der in der Zeit Δt mit der Endgeschw. $(v + \Delta v)$ gleichförmig zurückgelegt wird, oder

$$v\Delta t > \Delta s > (v + \Delta v)\Delta t$$

Ist Δv subtractiv, so ist

$$v\Delta t < \Delta s < (v + \Delta v)\Delta t$$

Es folgt aus beiden Ungleichungen

entweder $v > \frac{\Delta s}{\Delta t} > v + \Delta v$

oder $v < \frac{\Delta s}{\Delta t} < v + \Delta v$

In beiden Fällen können die beiden Endgröfsen mit beliebiger Abnahme von Δv einander beliebig nahe gebracht werden, und v ist deren Grenzwerth. Hierdurch kommen beide auch der eingeschlossenen Gröfse $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ beliebig nahe und beider Grenzwerth v ist somit gleich dem Grenzwerth der eingeschlossenen Gröfse. Dieser Grenzwerth ist aber offenbar das Differenzial des Weges s als Function der Zeit t oder $= \frac{\partial s}{\partial t}$ und man hat sowohl für die beschleunigte als die verzögerte B.

$$v = \frac{\partial s}{\partial t} \tag{1}$$

hieraus

$$s = \int v\,\partial t + \text{Const.} \tag{2}$$

und

$$t = \int \frac{1}{v}\,\partial s + \text{Const.} \tag{3}$$

Man findet also den Weg s, wenn die Endgeschw. v als Function der während Zurücklegung des Weges verflossenen Zeit t gegeben ist, und die während des zurückgelegten Weges s verflossene Zeit t, wenn die erlangte Endgeschwindigkeit v als Function desselben Weges gegeben ist.

Zur Bestimmung der Constante hat man gegenseitig für $t = 0$ auch $s = 0$.

2. Die hier entwickelten Gesetze sind ganz allgemein, und gelten demnach auch für die gleichförmig beschleunigte und verzögerte B.

Es sei z. B. für eine während der Zeit t stattfindende B. die Anfangsgeschw. $= c$, die Endgeschw. $= C$, und die Zu- oder Abnahme der Geschw. betrage während jeder Zeiteinheit $= a$, so ist

$$C = c \pm at$$

Um den Weg s zu finden, hat man nach 2

$$s = \int C.\,\partial t + \text{Const.} = \int (c \pm at)\,\partial t + \text{Const.}$$
$$= c\int \partial t \pm a\int t\,\partial t = ct \pm \tfrac{1}{2}at^2 + \text{Const.}$$

wo Const. fortfällt, weil für $t = 0$ auch $s = 0$ wird.

Aus $C = c \pm at$ erhält man

$$a = \pm\frac{C - c}{t}$$

Diesen Werth in das Integral gesetzt, giebt

$$s = ct \pm \tfrac{1}{2}\left(\pm\frac{C - c}{t}\right)t^2 = \frac{c + C}{2}\,t$$

(s. pag. 355, Formel 1.)

3. Nach dem Art.: Beschleunigung No. 4, wird die Beschleunigung einer ungleichförmig veränderlichen Bewegung aus derjenigen gleichförmig veränderlichen bestimmt, welche mit jener möglichst übereinstimmt, und es kommt demnach darauf an, für jede ungleichförmig veränderliche Bew. eine möglichst übereinstimmende gleichförmig veränderliche Bew. aufzufinden:

Der Weg s während der Zeit t einer ungleichförmig veränderlichen Bew. als Function von t sei allgemein

$$s = ft \qquad (1)$$

so ist, wenn mit der Aenderung von s um Δs, t um Δt sich ändert

$$s + \Delta s = f(t + \Delta t) \qquad (2)$$

und nach der Taylor'schen Reihe entwickelt

$$\Delta s = \frac{\partial s}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}\frac{\Delta t^2}{1.2} + \frac{\partial^3 s}{\partial t^3}\frac{\Delta t^3}{1.2.3} + \ldots \frac{\partial^n s}{\partial t^n}\frac{\Delta t^n}{1 \ldots n} \qquad (3)$$

Bezeichnet nun G die Beschleunigung einer gleichförmig veränderlichen Bew., w den Weg in der Zeit t, c die Anfangsgeschw., so ist (nach pag. 355, No. 4)

$$w = ct + Gt^2 \qquad (4)$$

und wenn mit der Aenderung von w in $w + \Delta w$, t in $t + \Delta t$ sich ändert

$$w + \Delta w = c(t + \Delta t) + G(t + \Delta t)^2$$
$$= ct + Gt^2 + c\,\Delta t + 2Gt\,\Delta t + G\Delta t^2$$

mithin

$$\Delta w = (c + 2\,Gt)\,\Delta t + G\,\Delta t^2$$

Nun ist $c + 2\,Gt$ die Endgeschw. nach Verlauf der Zeit t; bezeichnet man diese mit C, so hat man

$$\Delta w = C\Delta t + G\Delta t^2 \qquad (5)$$

Sollen nun beide Bew. möglichst übereinstimmen, so mufs

$$\Delta s - \Delta w = \left(\frac{\partial s}{\partial t} - C\right)\Delta t + \left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} - G\right)\Delta t^2 + \frac{\partial^3 s}{\partial t^3}\cdot\frac{\Delta t^3}{1.2.3} + \ldots \frac{\partial^n s}{\partial t^n}\frac{\Delta t^n}{1.2 \ldots n} \qquad (6)$$

möglichst klein werden.

Da man Δt so klein nehmen kann, dafs in dem Ausdruck No. 3 die Summe sämmtlicher Glieder vom 3ten ab kleiner werden kann, als der Werth der beiden ersten Glieder, so wird $\Delta t - \Delta w$ am kleinsten, wenn die ersten beiden Glieder der Reihe No. 6 = Null werden, wenn also

$$C = \frac{\partial s}{\partial t}$$

und

$$G = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$$

als die beiden Bedingungen, unter welchen beide Bewegungen am meisten übereinstimmen, unter welchen also die Beschleunigung G der gleichförmig veränderlichen Bew. zugleich für die Beschleunigung der ungleichförmig veränderlichen Bew. in dem Augenblick nach Verlauf der Zeit t gelten kann.

Nach No. 1, Formel 1 ist $\frac{\partial s}{\partial t}$ = der Endgeschw. einer ungleichförmig veränderlichen Bew. nach Verlauf der Zeit t, und C die Endgeschw. einer gleichförmig veränderlichen Bew. nach Verlauf der Zeit t; die erste Bedingung heifst also: **die Geschwindigkeiten beider Bewegungen sollen nach Verlauf der Zeit t einander gleich sein**, und die zweite Bedingung ist, **dafs die Beschleunigung G der gleichförmig veränderlichen Bew. gleich sei dem halben Differenzial zweiter Ordnung des mit ungleichförmig veränderlicher Bew. zurückgelegten Weges s als Function der bis dahin verflossenen Zeit t.**

Die Beschleunigung G kann, wie aus der allgemeinen Entwickelung hervorgeht, positiv oder negativ sein. Da nun $2G$ die Zunahme oder Abnahme der Geschw. einer gleichförmig veränderlichen Bew. innerhalb der Zeiteinheit ist, so hat man für die ungleichförmig veränderliche Bew. aus der zweiten Bedingung $\left(\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 2G\right)$ das zweite Differenzial des *Weges* in Beziehung auf die urveränderliche Zeit gleich jener Zu- oder Abnahme per Secunde.

4. Aus den ad 3 gefundenen beiden Formeln für die Endgeschw.

$$C = \frac{\partial s}{\partial t} \qquad (1)$$

und für die Beschleunigung

$$G = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} \qquad (2)$$

lassen sich alle übrigen phoronomischen Formeln entwickeln, welche für die Auflösung sämmtlicher dahin gehörigen Aufgaben ausreichen.

Aus $C = \frac{\partial s}{\partial t}$ folgt

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$$

also mit Zuziehung der 2. Formel

$$G = \frac{1}{2}\frac{\partial C}{\partial t} \qquad (3)$$

Da ferner

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial C}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial t}$$

so ist mit Hülfe von 1

$$\frac{\partial C}{\partial t} = C\cdot\frac{\partial C}{\partial s}$$

also mit Hülfe von 3

$$G = \tfrac{1}{2} C \cdot \frac{\partial C}{\partial s}$$

u. s. w.

Sämmtliche für die ungleichförmig veränderliche Bew. bestehende Formeln sind

$$1. \quad C = \frac{\partial s}{\partial t}$$

$$2. \quad C = 2 \int G \, \partial t$$

$$3. \quad C^2 = 4 \int G \, \partial s$$

$$4. \quad t = \int \frac{1}{C} \, \partial s$$

$$5. \quad t = \int \frac{1}{2G} \, \partial c$$

$$6. \quad s = \int C \, \partial t$$

$$7. \quad s = \int \frac{C}{2G} \, \partial C$$

$$8. \quad G = \tfrac{1}{2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$$

$$9. \quad G = \tfrac{1}{2} \frac{\partial C}{\partial t}$$

$$10. \quad G = \tfrac{1}{2} C \frac{\partial C}{\partial s}$$

5. In dem Vorigen ist gezeigt worden, dafs wenn eine Kraft auf die Bew. eines Massenpunkts nur augenblicklich einwirkt, die daraus hervorgehende Bew. in Folge des Beharrungsvermögens gleichförmig fortgesetzt wird: die Bew. ist eine gleichförmige Bew. Wirkt dieselbe Kraft in jedem Augenblick wiederholt, so entsteht in jedem folgenden Augenblick ein gleich grofser Zuwachs an Weg, die Bew. wird also eine gleichförmig beschleunigte wie beim freien Fall.

Wirkt in jedem Augenblick eine gleichbleibende Kraft auf einen gleichförmig fortschreitenden Massenpunkt der Bewegungsrichtung entgegen, so entsteht eine gleichförmig verzögerte Bew.

Eine ungleichförmig beschleunigte oder verzögerte Bew. erfolgt also offenbar, wenn auf einen Massenpunkt eine Kraft permanent wirkt, die aber in jedem folgenden Augenblick nach irgend einem Gesetz an Gröfse sich ändert.

Man kann eine unzählige Menge von Gesetzen erfinden, nach welchen eine auf einen Massenpunkt wirkende Kraft permanent sich ändert; allein es würde dies nur zu unnützen Untersuchungen führen; man untersucht daher nur Gesetze der Bew., welche aus den in der Natur uns gegebenen Kräften hervorgehen.

Die Kraft, auf welcher die Bew. aller Weltkörper beruht, ist die Attraction der Massen, und sie wirkt dergestalt, dafs die Beschleunigungen zweier Massen den Quadraten ihrer Entfernung umgekehrt proportional sind.

Z. B. beträgt die Beschleunigung eines auf die Erdoberfläche frei fallenden Körpers 15 pariser Fufs; die Masse unserer Erde mufs in deren Mittelpunkt vereinigt gedacht werden, mithin befindet sich der fallende Körper in einer Entfernung des Erdhalbmessers, nämlich von etwa 860 Meilen von der Masse. Denkt man sich nun den fallenden Körper 860 Meilen weit über der Erdoberfläche, also zweimal so weit entfernt, so beträgt dessen Beschleunigung, d. h. sein Fallraum, in der ersten Secunde nur $(\frac{1}{2})^2 \cdot 15 = 3\frac{3}{4}$ par. Fufs, und die Beschleunigung wächst in jedem folgenden Augenblick um das Quadrat der Annäherung; in einer Entfernung von 430 Meilen von der Erdoberfläche würde er schon die Beschleunigung $\left(\frac{1}{1\frac{1}{2}}\right)^2 \cdot 15 = 6\frac{2}{3}$ par. Fufs erhalten haben, und der Fallraum von 860 Meilen wird ungleichförmig beschleunigt durchlaufen. Es geht nun hieraus hervor, dafs der freie Fall in der Nähe unserer Erdoberfläche nur näherungsweise gleichförmig beschleunigt ist, allein unsre Fallhöhen, noch so grofs, sind gegen 860 Meilen Erdhalbmesser zu klein, als dafs sie berücksichtigt werden müfsten, und es wird die Wirkung der Anziehungskraft der Erde beim Fall constant angenommen.

6. Aus No. 5 entspringt nothwendig die Aufgabe:

Das Gesetz zu untersuchen, nach welchem ein Massenpunkt in einer geraden Linie sich bewegt, wenn seine Beschleunigung den Quadraten der Entfernung von einem in der Linie befindlichen festen Punkt dem Mittelpunkt der Bew. umgekehrt proportional ist.

Auflösung. Es sei die Beschleunigung des Massenpunkts P in der Entfernung r von dem Mittelpunkt M der Bew. $= G$; P beginne die Bew. von der Ruhe aus in der Entfernung a von M, und nachdem der Weg s zurückgelegt ist, sei die Beschleunigung $= \gamma$. Dann ist nach der Voraussetzung

$$G : \gamma = (a - s)^2 : r^2$$

woraus

$$\gamma = \left(\frac{r}{a - s}\right)^2 G$$

Es sei die in diesem Punkt seiner Bahn, also nach zurückgelegtem Wege s statt-

findende Geschw. = v, so ist nach No. 4. Formel 3

$$v^2 = 4\int \gamma \cdot \partial s = 4r^2 G \int (a-s)^{-2} [-\partial(a-s)]$$

$$= \frac{4r^2 G}{a-s} + \text{Const.}$$

Für $s = 0$ wird $v = 0$; daher

$$0 = \frac{4r^2 G}{a} + C$$

woraus

$$C = -\frac{4r^2 G}{a}$$

und vollständig

$$v^2 = 4Gr^2 \frac{s}{a(a-s)}$$

also

$$v = 2r\sqrt{\frac{G}{a}\cdot\frac{s}{a-s}} \qquad \text{I}$$

Dieselbe Formel ist elementar entwickelt in d. Art.: Bahn einer Masse, welche durch die allein thätige Schwerkraft eines Weltkörpers bewegt wird. pag. 281, Formel 1, wo die Beschleunigung für die Entfernung = 1 vom Centralpunkt = g' in pag. 283, Formel 1, aber für die Entfernung $r = g$ gesetzt ist.

Nach No. 4, Formel 4 ist die Zeit, in welcher der Weg s zurückgelegt wird

$$t = \int \frac{1}{v}\partial s = \frac{1}{2r}\sqrt{\frac{a}{G}} \int \sqrt{\frac{a-s}{s}}\,\partial s \qquad (1)$$

$$\int \sqrt{\frac{a-s}{s}} = \int (a-s)^{\frac{1}{2}} \cdot 2\,\partial s^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{(a-s)}\,s + \int \sqrt{\frac{s}{a-s}} \qquad (2)$$

$$\int \sqrt{\frac{s}{a-s}}\,\partial s = \int \frac{s\cdot\partial s}{\sqrt{as-s^2}}$$

Setzt man in die allgemeine Integralformel

$$\int \frac{x\,\partial x}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{1}{c}\sqrt{a+bx+cx^2} - \frac{b}{2c}\int \frac{\partial x}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$$

s für x, $a = 0$, $b = a$ und $c = -1$, so erhält man

$$\int \frac{s\,\partial s}{\sqrt{as-s^2}} = -\sqrt{as-s^2} + \frac{a}{2}\int \frac{\partial s}{\sqrt{a-s^2}} \quad (3)$$

Man hat also aus 1, 2 und 3

$$\int \sqrt{\frac{a-s}{s}}\,\partial s = \sqrt{as-s^2} + \frac{a}{2}\int \frac{\partial}{\sqrt{as-s^2}}$$

Das $\int \frac{\partial s}{\sqrt{as-s^2}}$ kann entwickelt werden aus der allgemeinen Integralformel:

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{a+bx-cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \, Arc\, sin \frac{-b+2cx}{\sqrt{4ac+b^2}}$$

wenn man $x = s$, $a = 0$, $b = a$ und $c = +1$ setzt, und man hat

$$\int \frac{\partial s}{\sqrt{as-s^2}} = Arc\, sin \frac{-a+2s}{a}$$

daher

$$t = \int \frac{1}{v}\partial s = \frac{1}{2r}\sqrt{\frac{a}{G}}\left[\sqrt{as-s^2} + \frac{a}{2}\ Arc\left(sin = \frac{2s-a}{a}\right) + \text{Const.}\right]$$

für $s = 0$ wird $t = 0$; mithin

$$0 = \frac{1}{2r}\sqrt{\frac{a}{G}}\left[\sqrt{0} + \frac{a}{2} Arc(sin - 1) + \text{Cnst.}\right]$$

$$= \frac{1}{2r}\sqrt{\frac{a}{G}}\left(-\tfrac{1}{4}a\pi + C\right)$$

woraus Const. = $\frac{1}{4}a\pi$.

Also, da $\frac{1}{2}\pi - arc\, sin\, x = arc\, cos\, x$, das Integral vollständig

$$t = \frac{1}{2r}\sqrt{\frac{a}{G}}\left[\sqrt{as-s^2} + \frac{a}{2}\ Arc\, cos \frac{a-2s}{a}\right] \qquad \text{II}$$

Diese Formel ist in dem Art.: Bahn einer Masse etc., No. 2, pag. 283, wo für $r = 1$, $G = g'$ gesetzt ist, elementar entwickelt; in No. 3, pag 283, ist in dieselbe $G = g$ für die Entfernung r vom Centralpunkt gesetzt, und in No. 4 ein Beispiel für den Fall des Mondes auf die Erde berechnet.

7. No. 5 am Schlufs ist gesagt, dafs der freie Fall nahe der Erdoberfläche nur näherungsweise gleichförmig beschleunigt geschieht; dafs dieser Fall aber als gleichförmig beschleunigt betrachtet werden kann, läfst sich aus den Formeln I und II, No. 6, ableiten.

Bedeutet nämlich in I:

$$v = 2r\sqrt{\frac{G}{a}\cdot\frac{s}{a-s}}$$

r den Halbmesser der Erde = 860 Meilen, so ist a, die Entfernung des Punkts von dem Erdmittelpunkt, in welchem der Fall

von der Ruhe aus beginnt $= r +$ der Fallhöhe h, welche höchstens in einigen hundert Fufs besteht, gegen r verschwindet, so dafs $a = r$ gesetzt werden kann; aus demselben Grunde verschwindet s gegen a, und man hat, da G nun $= g$ wird

$$v = 2r\sqrt{\frac{g}{r}\cdot\frac{s}{r}} = 2\sqrt{gs}$$

die Formel für den freien Fall bei gleichförmiger Beschleunigung.

Ebenso hat man in II

$$t = \frac{1}{2r}\sqrt{\frac{a}{g}}\left[\sqrt{as-s^2} + \frac{a}{2}\, arc\cos\frac{a-2s}{a}\right]$$
$$= \frac{1}{2r}\sqrt{\frac{r}{g}}\left[\sqrt{s(r-s)} + \frac{r}{2}\, arc\cos\left(1-\frac{2s}{r}\right)\right]$$

Der Bogen, der zum $\cos = \left(1-\frac{2s}{r}\right)$ gehört, ist sehr klein, und daher für denselben sein *Sinus* zu setzen, dann hat man

$$arc\cos\left(1-\frac{2s}{r}\right) = \sqrt{1-\left(1-\frac{2s}{r}\right)^2} = 2\sqrt{\frac{s}{r}\left(1-\frac{s}{r}\right)} = \frac{2}{r}\sqrt{s(r-s)}$$

Da nun s gegen r verschwindet, so hat man

$$t = \frac{1}{2r}\sqrt{\frac{r}{g}}\left(\sqrt{sr} + \frac{r}{2}\cdot\frac{2}{r}\sqrt{sr}\right)$$
$$= \frac{1}{2r}\sqrt{\frac{r}{g}}\cdot 2\sqrt{sr} = \sqrt{\frac{s}{g}}$$

woraus $s = gt^2$

die Formel für den freien Fall bei gleichförmiger Beschleunigung.

8. Die Attractionskraft eines jeden Weltkörpers ist in dessen Mittelpunkt concentrirt, indem jeder die Gestalt einer Kugel hat. Auf Punkte innerhalb des Körpers wirkt dessen Attraction direct wie die Entfernung vom Mittelpunkt. Der Fall einer Masse durch den hohlen Raum um den Durchmesser veranlafst also die Aufgabe:

Das Gesetz zu untersuchen, nach welchem ein Massenpunkt in einer geraden Linie sich bewegt, wenn seine Beschleunigung der Entfernung von einem in der Linie befindlichen festen Punkt dem Mittelpunkt der Bewegung proportional ist.

Auflösung. Es sei die Beschleunigung des Massenpunkts P in der Entfernung r vom Mittelpunkt M der Bew. $= G$; P beginne die Bew. von der Ruhe aus in der Entfernung a von M, und nachdem der Weg s zurückgelegt ist, sei die Beschleunigung $= \gamma$. Dann ist nach der Voraussetzung

$$G : \gamma = r : a - s$$

woraus

$$\gamma = \frac{a-s}{r}\, G$$

Es sei die in diesem Punkt erlangte Geschw. $= v$, dann ist nach Formel 3, No. 4

$$v^2 = 4\int\gamma\,\partial s = \frac{4G}{r}\int(a-s)\partial s$$
$$= \frac{4G}{r}\left(as - \tfrac{1}{2}s^2\right) + C$$

wo $C = 0$ ist, weil für $v = 0$ auch $s = 0$ und

$$v = \sqrt{\frac{4G}{r}\left(a-\tfrac{1}{2}s\right)s} = \sqrt{2\frac{G}{r}(2a-s)s} \quad (1)$$

Dieselbe Formel ist elementar entwickelt in dem Art.: Bahn einer Masse, welche durch die allein thätige Schwerkraft einer Masse bewegt wird, No. 5, pag. 284, wo die Beschleunigung für die Entfernung $= 1$ vom Centralpunkt $= g'$, in No. 9, pag. 287, aber für die Entfernung $= r$, gesetzt ist.

Für $s = a$, wenn nämlich der Massenpunkt in den Centralpunkt M gekommen ist, hat man

$$V = a\sqrt{2\frac{G}{r}} \quad (2)$$

Um die Zeit t zu finden hat man nach No. 4, Formel 4

$$t = \int\frac{1}{v}\,\partial s$$

Diesen Werth in Gl. 1 substituirt, giebt

$$t = \int\frac{1}{\sqrt{2\frac{G}{r}(2as-s^2)}}\,\partial s = \sqrt{\frac{r}{2G}}\int\sqrt{\frac{\partial s}{2as-s^2}}$$
$$= \sqrt{\frac{r}{2G}}\int\sqrt{\frac{\partial s}{a^2-(a-s)^2}}$$

Dieses Integral kann entwickelt werden aus der allgemeinen Integralformel

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{a-bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}}\, Arc\sin x\sqrt{\frac{b}{a}}$$

indem a^2 für a; 1 für b und $(a-s$ für x geschrieben wird, dann ist aber $\partial(a-s) = -\partial s$ und

$$\int\frac{\partial s}{a^2-(a-s)^2} = -\int\frac{-\partial s}{a^2-(a-s)^2}$$
$$= -Arc\sin\left(\frac{a-s}{a}\right) + \text{Const.}$$

Für $t = 0$ wird $s = 0$ daher

$$0 = \sqrt{\frac{r}{2G}}[-Arc\,sin\,(=1) + C]$$

woraus

$$C = + Arc\,sin(=1) = \frac{\pi}{2}$$

$$t = \sqrt{\frac{r}{2G}}\left[\frac{\pi}{2} - Arc\,sin\,\frac{a-s}{a}\right]$$

also vollständig

$$t = \sqrt{\frac{r}{2G}}\,Arc\,cos\,\frac{a-s}{a} \qquad (3)$$

diese Formel ist in dem Art.: Bahn einer Masse etc., No. 7, pag. 285, wo für $r = 1$, $G = g'$ gesetzt ist, elementar entwickelt.

Für $s = a$, also wenn der Massenpunkt in den Centralpunkt M gelangt, ist die verflossene Zeit

$$T = \sqrt{\frac{r}{2G}}\,Arc\,cos\,(=0) = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{r}{2G}} \qquad (4)$$

Setzt der Massenpunkt seine Bew. über M hinaus fort, wird also seine Beschleunigung nach demselben Gesetz negativ, und man rechnet den ferneren Weg s von M ab, so hat man die Beschleunigung

$$= -\gamma = -\frac{a-s}{r}\,G$$

$$v^2 = -\frac{4G}{r}\int s\,\partial s = -\frac{2G}{r}\,s^2 + C$$

Nun ist für $s = 0$; (nach 2) $v = V = a\sqrt{2\frac{G}{r}}$

$$C = V^2 = 2\frac{G}{r}\,a^2 \text{ und vollständig}$$

$$v^2 = \frac{2G}{r}\,[a^2 - s^2] \qquad (5)$$

Hier ist s dieselbe Länge, welche bis Formel 4 mit $a - s$ bezeichnet wurde; setzt man diese für s, so erhält man

$$v^2 = \frac{2G}{r}\,(2as - s^2)$$

und

$$v = \sqrt{\frac{2G}{r}\,(2as - s^2)}$$

also dieselbe Formel wie 1.

Mithin hat der Massenpunkt in gleichen Entfernungen vom Mittelpunkt M gleiche Geschwindigkeiten, und (wenn man in Formel 5, $s = a$ setzt) in der Entfernung a von M als Endgeschw. die Anfangsgeschw. Null.

Da nun allgemein $t = \int \frac{1}{v}\,\partial s$, so hat man für die Bew. von M aus, wenn man für den Weg s statt $(a - s)$ setzt und V aus Gl. 5 nimmt

$$t = \sqrt{\frac{r}{2G}}\cdot\int\frac{\partial s}{\sqrt{a^2 - s^2}} = \sqrt{\frac{r}{2G}}\,Arc\left(sin = \frac{s}{a}\right) \quad (6)$$

und zwar vollständig, weil für $t = 0$, $s = 0$ und $arc\,(sin = 0) = 0$ ist.

Für $s = a$, also dem Endpunkt in gleicher Entfernung mit dem Anfangspunkt der Bew. von M hat man

$$T = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{r}{2G}} \qquad (7)$$

dieselbe Formel mit 4, so dafs zu der Bew. von M zum Endpunkt dieselbe Zeit erforderlich ist, als die vom Anfangspunkt zu M.

Subtrahirt man Formel 6 von 7, so ist

$$T - t = \sqrt{\frac{r}{2G}}\left[\frac{\pi}{2} - arc\left(sin\,\frac{s}{a}\right)\right]$$

$$= \sqrt{\frac{r}{2G}}\,arc\left(cos\,\frac{s}{a}\right)$$

Nun hat $T - t$ die Bedeutung von t in Formel 3, und s die Bedeutung von $a - s$ in Formel 3, folglich ist die Zeit, in welcher irgend ein Weg a' nach M durchlaufen wird = der Zeit für den Weg a' von M aus.

Um den Ort des Massenpunkts für jeden Zeitaugenblick zu finden, hat man aus Gl. 3

$$t\sqrt{\frac{2g}{r}} = arc\,cos\,\frac{a-s}{a}$$

daher

$$\frac{a-s}{a} = cos\left(t\sqrt{\frac{2g}{r}}\right)$$

woraus

$$s = a\left[1 - cos\left(t\sqrt{\frac{2g}{r}}\right)\right] \qquad (8)$$

Bewegung, veränderliche, s. den vor. Artikel.

Bewegung in einem widerstehenden Mittel heifst allgemein die Bew. eines Körpers innerhalb eines flüssigen Stoffs (als Luft, Wasser), der mit seiner Masse, die überall den Körper umgiebt, dadurch dafs sie verdrängt werden mufs, der freien Bew. desselben ein Hindernifs entgegensetzt.

Die Gröfse dieses Hindernisses hängt sowohl von den physikalischen Eigenschaften des Mittels, als auch von denen des sich bewegenden Körpers ab: Ein Stein und eine Flaumfeder würden in luftleerem Raum gleich schnell auf die Erde fallen, während in Wirklichkeit letztere bei weitem langsamer fällt; von zwei Kugeln, einer eisernen und einer hölzernen, die ins Wasser geworfen werden, geht nur die erste unter, die letzte bleibt schwimmend auf der Oberfläche: der Widerstand wächst mit dem specifischen Gewicht des Mittels, und nimmt ab mit dem spec. Gew. des bewegten Körpers.

Elasticität des Mittels, so wie des bewegten Körpers vermehren das Hinder-

nifs. Im ersten Fall entsteht vor dem Körper während seiner Bew. Verdichtung also Vermehrung des spec. Gewichts der zu verdrängenden Flüssigkeit, im letzten Fall wirkt das hindernde Mittel zum Theil auf rückgängige Bew. des Körpers.

Die Geschwindigkeit des Körpers vermehrt den Widerstand in zweifacher Beziehung; denn da einerlei Widerstand entsteht, der Körper mag ruhen und das Mittel sich bewegen, oder der Körper bewegt sich und das Mittel ruht, so bildet die Gröfse der Bew. des Mittels einen Widerstand; diese ist aber das Product aus Masse in Geschwindigkeit, und folglich wird in dieser Beziehung mit der Geschwindigkeit der Widerstand vermehrt. Die zweite Beziehung besteht darin, dafs die Trägheit der ruhenden Masse des Mittels überwunden werden mufs, welches bei gröfserer Geschw. in kürzerer Zeit geschehen mufs. Aus diesen Gründen wird mit Newton allgemein angenommen, dafs der Widerstand des Mittels mit den Quadraten der Geschw. des bewegten Körpers wächst.

Die Gröfse und Gestalt des bewegten Körpers ist auf den Widerstand von Einflufs: Ein Pfeil findet weniger Widerstand in der Luft als eine Kugel, und diese weniger als ein umfangreicher kantiger Körper.

Setzt man daher den Widerstand des Mittels Av^2, wo v die Geschwindigkeit des bewegten Körpers ist, so mufs A als Coefficient für jeden Körper je nach specifischem Gewicht und Gestalt und für jedes Mittel von besonderen physikalischen Eigenschaften aus der Erfahrung bestimmt werden.

2. Fällt ein Körper senkrecht herab auf die Erde, so würde im luftleeren Raum seine Beschleunigung $= g$ sein, in der Luft ist bei der Geschw. v die Beschleunigung $= g - Av^2$

Steigt ein Körper mit der Geschw. v senkrecht aufwärts, so ist seine anfängliche Beschleunigung $= -(g + Av^2)$, oder seine Verzögerumg $= g + Av^2$.

3. Setzt man allgemein für die Geschw. V des bewegten Körpers die Beschleunigung $G + Av^2$, so hat man aus der allgemeinen phoronomischen Formel (No. 3, pag. 358) worin G die Beschleunigung, s der von der Ruhe aus zurückgelegte Weg und C die erlangte Endgeschw. ist.

$$v^2 = 4\int(G + Av^2)\,\partial s$$

Diese Gl. nach s differenzirt giebt

$$2v\,\partial v = 4(G + Av^2)\,\partial s$$

woraus

$$\partial s = \frac{v\,\partial v}{2(G + Av^2)}$$

und

$$s = \tfrac{1}{2}\int \frac{v\,\partial v}{G + Av^2} + C$$

also

$$s = \frac{1}{4A}\, log\ nat\ (G + Av^2) + C \qquad (1)$$

Beginnt die Bew. von der Ruhe aus, so ist bei $v = 0$ auch $s = 0$ und

$$0 = \frac{1}{4A}\, logn\ G + C$$

daher vollständig

$$s = \frac{1}{4A}\, logn\, \frac{G + Av^2}{G} \qquad (2)$$

also

$$e^{4As} = \frac{G + Av^2}{G}$$

woraus

$$v^2 = \frac{G}{A}\,(e^{4As} - 1) \qquad (3)$$

wo e die Basis der natürlichen Logarithmen ist.

Beginnt dagegen die Bew. mit einer Geschw. $= c$, so ist in Formel (1) die Constante so zu bestimmen, dafs für $s = 0$ gesetzt $v = c$ wird; man hat demnach aus Formel (1)

$$0 = \frac{1}{4A}\, logn\ (G + Ac^2) + C$$

woraus

$$s = \frac{1}{4A}\, logn\, \frac{G + Av^2}{G + Ac^2} \qquad (4)$$

hieraus

$$e^{4As} = \frac{G + Av^2}{G + Ac^2}$$

und

$$v^2 = \frac{G}{A}\left(\frac{G + Ac^2}{G}\, e^{4As} - 1\right)$$

4. Man hat nun die Fälle zu untersuchen, bei welchen G und A entweder gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen haben, wie dies schon No. 2 aufgeführt ist: Fängt ein Körper von der Ruhe an sich zu bewegen, so ist die Beschleunigung immer $G - Av^2$, desgleichen wenn die Bew. mit einer Geschw. beginnt, die immer gröfser wird. Fängt die Bew. aber mit einer Geschw. an, die immer kleiner wird, und zuletzt $= 0$ werden kann, so ist die Beschleunigung $= -(G + Av^2)$.

5. Erster Fall. Die Anfangsgeschwindigkeit ist $= 0$, so hat man die Beschleunigung $G - Av^2$

$$v^2 = 4\int(G - Av^2)\,\partial s$$

nach s differenzirt

$$2v\,\partial v = 4(G - Av^2)\,\partial s$$

woraus

$$\partial s = \frac{v \cdot \partial v}{2(G - Av^2)}$$

und

$$s = \tfrac{1}{2}\int \frac{v\,\partial v}{G - Av^2} + C$$

$$= -\frac{1}{4A}\, logn\,(G - Av^2) + C$$

und vollständig (s. Formel 2)

$$s = \frac{1}{4A}\, logn\, \frac{G}{G - Av^2} \qquad (6)$$

woraus

$$\left[1 - \frac{1}{e^{4As}}\right] \qquad (7)$$

Zur Bestimmung der Zeit t hat man aus der allgemeinen phoronischen Gl. 9, pag. 358

$$G = \tfrac{1}{2}\frac{\partial C}{\Delta t}$$

hieraus

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 2(G - Av^2)$$

also auch

$$\frac{\partial t}{\partial v} = \frac{1}{2(G - Av^2)}$$

und

$$t = \tfrac{1}{2}\int \frac{\partial v}{G - Av^2} + C$$

Aus der allgemeinen Integralformel

$$\int \frac{\partial x}{a - bx^2} = \frac{1}{2\sqrt{ab}}\, logn\, \frac{1 + x\sqrt{\frac{b}{a}}}{1 - x\sqrt{\frac{b}{a}}} + C$$

erhält man

$$t = \frac{1}{4\sqrt{GA}}\, logn\, \frac{1 + v\sqrt{\frac{A}{G}}}{1 - v\sqrt{\frac{A}{G}}} \qquad (8)$$

für $v = 0$ erhält man $logn\ 1 = 0$, mithin $C = 0$, daher t (No. 8) vollständig ist.

6. **Zweiter Fall.** Die kleinere Anfangsgeschw. v wächst bis zur gröfseren Endgeschw. V, so ist wieder die Beschleunigung zu Anfang $= G - Av^2$, zu Ende $G - AV^2$

Dann wird

$$s = \frac{1}{4A}\, logn\,(G - AV^2) + C$$

und da für $s = 0$, $V = v$ wird, vollständig

$$s = \frac{1}{4A}\, logn\, \frac{G - AV^2}{G - Av^2} \qquad (9).$$

hieraus

$$V^2 = \frac{G - (G - Av^2)e^{4As}}{A} = \frac{G}{A}\left[1 + \frac{Av^2 - G}{G}\, e^{4As}\right] \qquad (10)$$

Für t (8) ist noch die Constante zu bestimmen durch

$$0 = \frac{1}{4\sqrt{GA}}\, logn\, \frac{1 + v\sqrt{\frac{A}{G}}}{1 - v\sqrt{\frac{A}{G}}} + C$$

woraus vollständig

$$t = \frac{1}{4\sqrt{GA}}\left[logn\, \frac{1 + V\sqrt{\frac{A}{G}}}{1 + V\sqrt{\frac{A}{G}}} - logn\, \frac{1 + v\sqrt{\frac{A}{G}}}{1 - v\sqrt{\frac{A}{G}}}\right]$$

oder

$$t = \frac{1}{4\sqrt{GA}}\, logn\, \frac{\left(1 + V\sqrt{\frac{A}{G}}\right)\left(1 - v\sqrt{\frac{A}{G}}\right)}{\left(1 - V\sqrt{\frac{A}{G}}\right)\left(1 + v\sqrt{\frac{A}{G}}\right)} \qquad (11)$$

Dritter Fall. Die gröfsere Anfangsgeschwindigkeit V nimmt ab bis zur Geschw. v und weiter bis Null. Dann ist die Beschleunigung anfangs $-(G + AV^2)$ bei der Geschwindigkeit $v = -(G + Av^2)$

Nun ist

$$v^2 = -4\int (G + Av^2)\,\partial s$$

hieraus

$$\partial s = -\frac{v\,\partial v}{2(G + Av^2)}$$

und

$$s = -\tfrac{1}{2}\int \frac{v\,\partial v}{G + Av^2} + C$$

$$= -\frac{1}{4A}\, logn\,(G + Av^2) + C$$

Für $v = V$ wird $s = 0$, daher

$$0 = -\frac{1}{4A} \log n\,(G + AV^2) + C$$

also vollständig

$$s = \frac{1}{4A} \log n \frac{G + AV^2}{G + Av^2} \qquad (12)$$

hieraus die gröfste Höhe bei $v = 0$

$$S = \frac{1}{4A} \log n \frac{G + AV}{G} \qquad (13)$$

Aus (12) erhält man

$$v^2 = \frac{G}{A}\left[\frac{G + AV^2}{Ge^{4As}} - 1\right] \qquad (14)$$

Zur Bestimmung von t hat man bis zu dem Augenblick, wo die Geschwindigkeit noch $= v$ ist:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -2(G + Av^2)$$

also

$$\frac{\partial t}{\partial v} = -\frac{1}{2(G + Av^2)}$$

und

$$t = -\tfrac{1}{2}\int \frac{\partial v}{G + Av^2}$$

Aus der allgemeinen Integralformel

$$\int \frac{\partial x}{a + bx^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}} Arc\,tg\left(x\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$$

erhält man

$$t = -\frac{1}{2\sqrt{GA}} Arc\,tg\left(v\sqrt{\frac{A}{G}}\right) + C$$

Für $t = 0$ wird $v = V$, folglich

$$0 = -\frac{1}{2\sqrt{GA}} Arc\,tg\, V\sqrt{\frac{A}{G}} + C$$

und vollständig

$$t = \frac{1}{2\sqrt{GA}}\left[Arc\,tg\, V\sqrt{\frac{A}{G}} - Arc\,tg\, v\sqrt{\frac{A}{G}}\right] \qquad (15)$$

Für die Endgeschwindigkeit = 0 hat man

$$T = \frac{1}{2\sqrt{GA}} Arc\,tg\, V\sqrt{\frac{A}{G}} \qquad (16)$$

Dieser dritte Fall ist derjenige, welcher in der Ballistik (s. d.) zur Sprache kommt.

Beweis ist eine Verbindung von Sätzen, durch deren Schlufsaussage erhellt, dafs eine Behauptung richtig oder unrichtig ist. Ersterer ist ein positiver, letzterer ein negativer B. Die Sätze, welche zum B. mit einander verbunden werden, sind Folgerungen, d. h. Sätze, deren Richtigkeit eingesehen wird, wenn der ihnen vorangegangene Satz richtig ist. Hieraus geht hervor, dafs man bei einem B. von einem als richtig erkannten Satz mufs ausgehen können, und so mufs also auch jede Behauptung auf eine schon anerkannte Wahrheit sich gründen, mit der als Voraussetzung der B. beginnt. Ein B., welcher die zu erweisende Behauptung als richtig voranstellt und durch Folgerungen zuletzt zu einem schon als richtig anerkannten Satz gelangt, ist ein indirecter B., woher ein B., der mit der Voraussetzung anfängt und mit der Behauptung schliefst, ein directer B. genannt wird (s. analytischer B., apagogischer B., analogischer B., Bedingung, Behauptung).

Bezeichnung einer mathematischen Gröfse ist die Einsetzung eines Zeichens für dieselbe. Z. B. das Zahlzeichen 8 vertritt das Achtfache derjenigen Zahlengröfse, welche durch das Zahlzeichen 1 vertreten wird. Dadurch, dafs man eine grofse Zahl z. B. dreihundert vier und zwanzig nicht durch ein einziges Zeichen, sondern durch drei neben einander gesetzte Zeichen 324 vertreten läfst, wird die B. der Zahlen zu einem System, einem Zahlensystem, dessen Anordnung schon in der Sprache begründet ist, indem die Zahl 324, wenn sie ausgesprochen wird, nichts anders ist als das Verlangen, ein Exempel auszurechnen, nämlich das Exempel

$$3 \times 100 + 4 + 2 \times 10$$

d. h. drei (mal) hundert (plus) vier und (noch) 2mal zehn; dafs nämlich nicht zweizig, wie dreifsig, sondern zwanzig gesprochen wird, ist eine Sprachausnahme.

Diese Bezeichnung bildet mithin eine Erleichterung zu Auffassung der Gröfsen, ihren Quantitäten nach und für die Rechnungsoperationen mit denselben. Denn die früher gebräuchliche Rechnungsweise mit Rechenpfennigen, Rechentafeln etc. war viel mühsamer und liefs nur schwer Entwickelungen und Erweiterungen der Rechenkunst zu.

So wie auch die B. für geforderte Rechnungsarten, für Addition u. s. w. kurz, bestimmt und entsprechend sind, als Wurzelausziehung durch $\sqrt{}$, ähnlich dem Anfangsbuchstaben r von radix, so sollen es auch alle übrigen sein: Allgemeine Zahlenwerthe werden mit Buchstaben bezeichnet. Jeder Buchstab z. B. a bedeutet irgend eine Zahl, der Buchstab b ebenfalls, allein man hat unter a und b

zwei verschieden grofse Zahlen sich zu denken.

In der Geometrie, wo Figuren von Linien, Körper von Flächen, und diese wieder von Linien begrenzt sind, ist schon jede Zeichnung an der Tafel oder auf dem Papier eine B., eine Vertreterin der wirklichen oder der zu denkenden Raumgröfse. Eine Linie bezeichnet man durch zwei grofse Buchstaben an deren beiden Endpunkten. Stofsen zwei Linien zusammen, so bezeichnet man den von ihnen gebildeten Winkel ganz geeignet durch die beiden Linien, welche ihn bilden, also z. B. mit *AB*, *BC*; man setzt aber der gröfseren Einfachheit wegen den an der Winkelspitze stehenden Buchstaben nur einmal, und zwar in die Mitte, und bezeichnet $\angle$ *ABC* auch ebenso sicher mit $\angle$ *B*. Wenn aber drei Linien *AB*, *CB*, *DB* der Reihenfolge nach in *B* zusammentreffen, so entstehen 3 $\angle$, nämlich die $\angle$ *ABC*, *ABD* und *CBD*, welche so wie hier geschehen, bezeichnet werden müssen.

In der algebraischen Geometrie (s. d.) wo Linien durch Rechnungsarten mit einander verbunden werden, bezeichnet man des leichteren Rechnens wegen jede Linie mit einem kleinen lateinischen Buchstaben, als *a*, *b*, *c*.

In der Trigonometrie, wo $\angle$ addirt und subtrahirt werden, bezeichnet man aufserdem der Einfachheit wegen die $\angle$ mit kleinen griechischen Buchstaben, auch wohl mit den letzten Buchstaben *w*, *x*, *y*, *z* des kleinen lateinischen Alphabets. Wo keine unbekannten Gröfsen vorkommen, die bekanntlich mit *x*, *y*, *z* bezeichnet werden, hat dieselbe Bezeichnung für Winkel nichts Nachtheiliges; allein beim Durchlesen von Abhandlungen, wenn man nicht allein *sin x*, *cos x* u. s. w., sondern auch *x* findet, und da man gewöhnt ist, unter *x* eine unbekannte Gröfse zu begreifen, wird die Uebersicht erschwert und man thut immer besser, für Winkel griechische Buchstaben zu wählen, weil man auf den ersten Anblick solches Zeichens weifs, dafs man einen Winkel vor sich hat.

So würde, wenn die oben gedachten $\angle$ *ABC* mit α, *CBD* mit β, *ABD* mit γ bezeichnet wären $\alpha = \beta - \gamma$, $\beta = \gamma - \alpha$, $\gamma = \alpha + \beta$ sein.

Das Differenzial bezeichnet man am entsprechendsten mit einem cursiven ∂, um es von einer Constanten *d* sogleich unterscheiden zu können; das Integralzeichen $\int$ ist der Anfangsbuchstabe von Summe, da das Integral als eine Summe zu betrachten ist.

Gleichartige oder in einerlei Zusammenhang stehende Gröfsen, werden mit einerlei Buchstaben bezeichnet und durch Strichelungen unterschieden, z. B. Abscissen einerlei Axe *X* mit x, x', x'' .... Ordinaten bezeichnet man in der Regel mit *y*, also mehrere zu einerlei Axe *Y* gehörige mit y, y', y'' ... Constanten bei Integralen mit C, C', C'' ..., K, K', K'' ... Functionen mit *F*, *f*, φ, als Fx, fy, φz; dagegen ist $F'x$ gleichbedeutend mit ∂Fx, dem Differenzial von Fx. Halbmesser von Kreisen bezeichnet man gern mit *R*, *r* oder ϱ oder R, R', R'' ...., r, r', r'' ....; ϱ, ϱ', ϱ'' .... (dem Anfangsbuchstaben von Radius). Das Verhältnifs zwischen dem Umfang und dem Durchmesser eines Kreises, die constante Zahl 3,1415926 .... wird allgemein mit dem griechischen Buchstaben π, dem Anfangsbuchstaben von περιφερεια, Peripherie, bezeichnet. Die Beschleunigung, der Weg von der Ruhe aus in der ersten Secunde wird ziemlich allgemein mit *G*, *g*, *G'* (Gravitas), die Geschwindigkeit mit *C*, *c*, *c'* ... oder *V*, *v*, *v'* .... (Celeritas, Velocitas); Zeiten werden mit *T*, *t*, *t''* .... (tempus) bezeichnet.

Entsprechende B. erleichtern sehr das mathematische Studium und den Ueberblick während des Calcüls und bei Durchlesung desselben. So ist Fig. 188, pag. 296 der Kreis mit *KO*, die Ellipse mit *EO*, die Parabel mit *POP* und die Hyperbel mit *HOH* bezeichnet, damit man aus den Buchstaben sogleich die Curven unterscheide. Eben so bezeichne man in allgemeinen Ausdrücken: Summe mit *S*, Differenz mit *D*, Höhe mit *H*, Länge mit *L*, Breite mit *B*.

Biconcav sind Linsen (Augengläser), wenn sie auf beiden Seiten hohl sind, biconvex heifsen dieselben, wenn sie auf beiden Seiten erhaben sind; in jedem von beiden Fällen bildet jede der Linsenoberflächen den Theil einer Kugeloberfläche.

Biegsam ist ein Körper, der durch äufsere auf ihn wirkende Kräfte seine Gestalt ändert, ohne zu zerbrechen. Diese Eigenschaft haben mehr oder weniger alle Körper, und harte Körper in Folge und je nach dem Grade ihrer Elasticität, die indefs oft so gering ist, dafs die mögliche Biegung des Körpers nicht wahrgenommen werden kann, wo dann der Körper spröde heifst. Von Fossilien, die in Form von dünnen Blättchen sichtbar gebogen werden können, sagt man, sie seien biegsam. Körper, die nach aufgehobenem Druck der auf sie wirkenden Kräfte ihre

vorige Gestalt wieder annehmen, sind elastisch (s. Belastung), sonst weich. Eine vollkommene Biegsamkeit hat kein fester Körper; bei Untersuchung der Kettenlinie wird sie als vollkommen nur theoretisch vorausgesetzt.

Biegung eines elastischen Stabes veranlafst die Ausdehnung der Fibern auf der convexen und die Zusammendrückung derselben auf der concaven Seite; eine mittlere Fiber, die weder ausgedehnt noch zusammengeprefst wird, liegt in der neutralen Fläche des Stabes, die gebogene Mittellinie derselben heifst die neutrale Axe des Stabes und die Ebene, in der sich diese Axe befindet, heifst die Biegungsebene.

Bierwaage, ein Skalen-Aräometer von einfachster Einrichtung mit keiner oder nur wenigen Gradtheilungen, bis zu welchen die B. in die zu controllirenden Biere mindestens einsinksn mufs, damit diese die vorgeschriebenen Stärken haben.

Bild ist die möglichst getreue Darstellung eines Gegenstandes. Die Natur erzeugt Bilder in unerreichbarer Vollkommenheit durch Brechung der Lichtstrahlen in der Linse des Auges von Menschen und Thieren, indem die von einem äufseren lichten Punkt auf die Augenlinsen fallenden unendlich vielen Lichtstrahlen alle in einem Punkt der Netzhaut vereinigt werden, wie dies in dem Art.: Auge erklärt worden ist. Die Nachbildung der Augenlinse aus durchsichtigem Glase giebt durch die Kunst hervorgerufene natürliche Bilder, von denen ein Beispiel in dem Art.: Astronomisches Fernrohr nachgewiesen ist.

Billion ist eine Zahl = Million × Million
= 1000 000 000 000
Nach anderer Zählweise ist B. eine Zahl = Tausend Millionen
= 1000 000 000

Bimediale ist bei Euklid (10 B. 38 und 39 Satz eine Irrationallinie, deren er zwei aufstellt: die erste und die zweite B. Zu mehrerem Verständnifs s. Art.: Apotome, und dort bezeichnen $\sqrt{B}$, $\sqrt{C}$, $\sqrt{D}$, $\sqrt{E}$ ... Zahlen, die nur in Potenz (im Quadrat) commensurabel sind. Z. B. $\sqrt{2}$, $2\sqrt{3}$, 7, $3\sqrt{5}$ .... die in der Potenz 2, 12, 49, 45 commensurabel sind. Werden nun aus jenen Linien als Seiten Rechtecke gebildet, so sind deren Werthe $\sqrt{BC}$, $\sqrt{BD}$, $\sqrt{BE}$, $\sqrt{CD}$ .... ($2\sqrt{6}$, $7\sqrt{2}$, $3\sqrt{10}$, $14\sqrt{3}$ ....) und eine Linie, welche ein solches Rechteck potenzirt [deren Quadrat dem Rechteck = ist) ist irrational [in Linie und Potenz mit Rationalen verglichen incommensurabel) und heifst nach Satz 22 eine Mediale. Eine solche ist also $\sqrt[4]{BC}$, $\sqrt[4]{BD}$, $\sqrt[4]{BE}$, $\sqrt[4]{CD}$ .... ($\sqrt[4]{24}$, $\sqrt[4]{98}$, $\sqrt[4]{90}$, $\sqrt[4]{588}$ ....)

Zwei Medialen können in Länge commensurabel sein als:

$$\sqrt[4]{2} : \sqrt[4]{162} = \sqrt[4]{2} : 3\sqrt[4]{2} = 1 : 3$$

Eben so in Potenz commensurabel als:
$\sqrt[4]{2}$, $\sqrt[4]{8}$ indem $\sqrt[2]{2} : \sqrt[2]{8} = \sqrt[2]{2} : 2\sqrt[2]{2} = 1 : 2$

Zwei Medialen als Seiten zu einem Rechteck zusammengesetzt, können ein Rationales enthalten; man erhält solche, wenn man zwischen 2 blofs in Potenz commensurablen Linien $\sqrt{B}$, $\sqrt{C}$ die mittlere geometrische Proportionale $\sqrt[4]{BC}$ sucht als die eine, und in der 4ten geometrischen Proportionale der drei Zahlen $\sqrt[4]{\frac{C^3}{B}}$ die andere; denn es ist

$$\sqrt[4]{\frac{C^3}{B}} \times \sqrt[4]{BC} = C \text{ (Enklid 28. Satz)}$$

Solche 2 Linien sind immer in Potenz commensurabel, denn

$$\sqrt[2]{\frac{C^3}{B}} : \sqrt[2]{BC} = C\sqrt{\frac{C}{B}} : B\sqrt{\frac{C}{B}} = C : B$$

und die Summe zweier blofs in Potenz commensurablen Medialen, die ein Rationales enthalten, nennt Euklid (38. Satz) die erste Bimediale; sie ist eine Irrationallinie und hat unter der obigen Bedeutung von $\sqrt{B}$, $\sqrt{C}$ ... immer die Form

$$\sqrt[4]{BC} + C\sqrt{\frac{C}{B}}$$

Zwei Medialen als Seiten zu einem Rechteck zusammengesetzt, können ein Mediales enthalten; man erhält solche, wenn man zwischen zwei von drei gegebenen blofs in Potenz commensurabelen Linien $\sqrt{B}$, $\sqrt{C}$, $\sqrt{D}$ die mittlere geometrische Proportionale sucht, $\sqrt[4]{BC}$ als die eine, und in der vierten geometrischen Proportionale zwischen der zweiten, dritten und der gefundenen, also in

$$\sqrt{\frac{D}{C}} \cdot \sqrt[4]{BC}$$

die zweite Linie, und es ist

$$\sqrt[4]{BC} \times \sqrt{\frac{D}{C}} \times \sqrt[4]{BC} = \sqrt[2]{BD} \text{ (Eukl. 29. Satz)}$$

ein Mediales. Beide Linien sind in Potenz commensurabel, nämlich

$$\sqrt[2]{BC} : \frac{D}{C}\sqrt[2]{BC} = C : D$$

und die Summe zweier blofs in Potenz

commensurabelen Linien, die ein Mediales enthalten, nennt Euklid (39. Satz) die zweite Bimediale. Sie ist eine Irrationallinie und hat unter der obigen Bedeutung von $\sqrt{B}, \sqrt{C}, \sqrt{D} \ldots$ immer die Form

$$\sqrt[4]{BC} + \sqrt{\frac{D}{C}} \cdot \sqrt[4]{BC}$$

Binion eine Verbindung von je 2 Zahlen-Elementen: ab, bc, $cd \ldots$ in der Combinationslehre.

Binoculartelescop, eine Verbindung von 2 Fernröhren für beide Augen des Beobachters. Abgesehen von dem doppelten Preise hat es gewiſs die Unbequemlichkeit in noch höherem Maaſse, als bei dem Theater-Doppelperspectiv; auch sieht selten ein Mensch mit beiden Augen gleich scharf und wählt immer das schärfere Auge zu Beobachtungen.

Binom, Binomium ist eine zweigliedrige Gröſse, als $a + b$, $c - d$,

$$n \pm 2(a + x); \; m \cdot \frac{s}{y} + n(u + w)$$

Binomiale, eine der Euklidischen Irrationallinien (s. Apotome, Bimediale, schon wegen der in den beiden Artikeln beobachteten Bezeichnung). B. im Allgemeinen nennt Euklid die Summe zweier bloſs in Potenz (Quadrat) commensurabelen Linien, also wie $a + \sqrt{B}$, $\sqrt{A} + \sqrt{B}$.

Euklid unterscheidet ebenso zweierlei B. wie Apotomen, nämlich 1) solche, bei welchen der gröſsere Name (Summand) um das Quadrat einer ihm in Länge commensurabelen Linie über den kleineren potenzirt und 2) solche, bei welchen der gröſsere Name um das Quadrat einer ihm in Länge incommensurablen Linie potenzirt.

Ist demnach a oder $\sqrt{A}$ der gröſsere, b oder $\sqrt{B}$ der kleinere Name, und bedeutet $m : n$ ein rationales $m' : n'$ ein irrationales Verhältniſs, so ist (s. Apotome) bei den ersten B.

$$\left.\begin{array}{r} a : \sqrt{a^2 - B} \\ \sqrt{A} : \sqrt{A - b^2} \\ \sqrt{A} : \sqrt{A - B} \end{array}\right\} = m : n$$

Bei den zweiten B.

$$\left.\begin{array}{r} a : \sqrt{a^2 - B} \\ \sqrt{A} : \sqrt{A - b^2} \\ \sqrt{A} : \sqrt{A - B} \end{array}\right\} = m' : n'$$

Euklid unterscheidet nun 6 B., die 3 ersten gehören der ersten, die 3 letzten der zweiten Klasse an.

Die erste B. ist die, bei welcher der gröſsere Name einer Rationallinie in Länge commensurabel ist; also von der Form

$$a + \sqrt{B}$$

Die zweite B., bei welcher der kleinere Name einer Rationallinie commensurabel ist; also von der Form

$$\sqrt{A} + b$$

Die dritte B., bei welcher keiner der beiden Namen mit einer Rationallinie in Länge commensurabel ist; also von der Form

$$\sqrt{A} + \sqrt{B}$$

Die vierte B (die erste der zweiten Klasse), wo der gröſsere Name einer Rationallinie in Länge commensurabel ist; also von der Form

$$a + \sqrt{B}$$

Die fünfte B., wo der kleinere Name einer Rationallinie commensurabel ist; also von der Form

$$\sqrt{A} + b$$

Die sechste B., wo keiner der beiden Namen einer Rationallinie commensurabel ist; also von der Form

$$\sqrt{A} + \sqrt{B}$$

Es ist hieraus zu ersehen, daſs sich die B. von den Apotomen nur dadurch unterscheiden, daſs die B. Summen, die Apotomen Differenzen sind.

Binomial-Coefficienten sind die C. der Glieder derjenigen Reihen, welche aus der Entwickelung eines Binoms entstehen, als

in $1 \cdot a + 1 \cdot b = (a + b)^1$
die Coefficienten 1 1

in $1 \cdot a^2 + 2ab + 1 \cdot b^2 = (a + b)^2$
die Coefficienten $1 \cdot 2 \cdot 1$

in $1 \cdot a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1 \cdot b^3 = (a + b)^3$
die Coefficienten 1, 3, 3, 1.

in $a^4 + 4a^3b + 7a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
die Coefficienten 1, 4, 6, 4, 1

u. s. w.

Jede Reihe ist dadurch entstanden, daſs die ihr vorhergehende Reihe mit $a + b$ multiplicirt worden ist, und so würden alle folgenden Reihen entstehen.

$$\begin{array}{l} a + b \\ a + b \\ \hline a^2 + ab \\ \quad + ab + b^2 \\ \hline a^2 + 2ab + b^2 \\ \\ a^2 + 2ab + b^2 \\ a + b \\ \hline a^3 + 2a^2b + ab^2 \\ \quad + a^2b + 2ab^2 + b^3 \\ \hline a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ \\ a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ a + b \\ \hline a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + ab^3 \\ \quad + a^3b + 3a^2b^2 + 3ab^3 + b_4 \\ \hline a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \end{array}$$

Die oben ausgeführten Multiplicationen

geben für die gebildeten und noch ferner zu bildenden Reihen folgende Gesetze:

1. Durch die Multiplication einer aus einer Potenz des Binoms $(a+b)$ entwickelten Reihe mit dem Binom $(a+b)$ entstehen 2 Reihen, eine durch den Factor a, die andere durch den Factor b, jede von gleich vielen Gliedern mit dem Multiplicandus; beide Reihen sind einander gleich, wenn man in der ersten oder der zweiten a mit b vertauscht. Jedes der inneren Glieder in der aus der Addition beider Productreihen gebildeten binomischen Reihe ist theils mit gleichen, theils mit ungleichen Coefficienten 2 mal vorhanden, die beiden äufseren Glieder nur einmal, mithin erhält jede binomische Reihe ein Glied mehr als die voranstehende. Die Reihe für $(a+b)^1$ hat zwei Glieder, also die für $(a+b)^2$ hat drei Glieder, die für $(a+b)^3$ hat vier Glieder, die für $(a+b)^n$ hat $(n+1)$ Glieder.

Wegen der möglichen Vertauschung von a und b in beiden Multiplicationsreihen erhält man in der binomischen Reihe als Summe derselben dieselbe Reihe, wenn man die Reihe verkehrt schreibt und a mit b vertauscht, und die Coefficienten vom Anfangsglied nach der Mitte und vom Endglied nach der Mitte zu sind einander gleich. Für $(a+b)^{2m}$ sind $2m+1$ (eine ungrade Anzahl) Glieder, mithin existirt in der Mitte der binomischen Reihe das $m+1$te Glied von vorn oder hinten an gezählt mit einem nur einmal vorhandenen Coefficienten und dessen Exponenten von a und b sind einander gleich, $=m$. Für $(a+b)^{2m-1}$ sind $2m$ (eine grade Anzahl) Glieder, mithin existiren in der Mitte 2 Glieder mit gleichen Coefficienten und den binomischen Gliedern $a^m b^{m-1}$ und $a^{m-1} b^m$.

2. Die beiden Endglieder haben den Coefficient $= 1$; die beiden zweiten Glieder haben zum Coefficient den Exponent des Binoms. Denn das 2te Glied entsteht

für $(a+b)^2$ aus $a \cdot b + b \cdot a = 2ab$
für $(a+b)^3$ aus $a \cdot 2ab + b \cdot a^2 = 3a^2b$
für $(a+b)^4$ aus $a \cdot 3a^2b + b \cdot a^3 = 4a^3b$
. . . .
für $(a+b)^n$ aus $a \cdot (n-1)\, a^{n-2}b + b \cdot a^{n-1} = n \cdot a^{n-1}b$

Durch Vertauschung von a und b erhält man das 2te Glied vom Ende $= nb^{n-1}a$.

Das dritte Glied einer binomischen Reihe entsteht durch die Multiplication von a mit dem dritten Gliede, und von b mit dem zweiten Gliede der vorhergegangenen Reihe, also

für $(a+b)^2$ aus $a \cdot 0 + b \cdot b = b^2$
für $(a+b)^3$ aus $a \cdot b^2 + b \cdot 2ab = 3ab^2$
für $(a+b)^4$ aus $a \cdot 3ab^2 + b \cdot 3a^2b = 6a^2b^2$
für $(a+b)^5$ aus $a \cdot 6a^2b^2 + b \cdot 4a^3b = 10a^3b^3$
. . . .
für $(a+b)^n$ aus $a \times$ dem 3. Gliede von $(a+b)^{n-1} + b \times$ dem 2. Gliede von $(a+b)^{n-1}$

Der Coefficient des letzten Products ist $=(n-1)$, der Coeff. des ersten ist $=$ dem Coeff. des 3ten Gliedes von $(a+b)^{n-2} + n - 2$; der Coeff. vom 3ten Gliede von $(a+b)^{n-2} =$ dem des 3ten Gliedes von $(a+b)^{n-3} + n - 3$ u. s. w. bis zum ersten Gliede der binomischen Reihe, dessen Coefficient $n - n = 0$ ist; folglich ist der Coeff. des 3ten Gliedes von $(a+b)^n =$ der Summe

$$1+2+3+\ldots n-3+n-2+n-1 = n \cdot \frac{n-1}{2}$$

durch Vertauschung von a und b hat man den B.-C. des 3ten letzten Gliedes ebenfalls $n \cdot \frac{n-1}{2}$

Das 4te Glied von $(a+b)^n$ entsteht aus $a \times$ dem 4ten Gliede von $(a+b)^{n-1} + b \times$ dem 3ten Gliede von $(a+b)^{n-1}$; letzteres hat den C. $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ und geht man hier ebenso von $n-1$ bis 0 zurück, so erhält man das letzte Glied der Reihe

$$\tfrac{1}{2}\,[n-(n-1)]\,[n-(n-2)] = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$$

Der B.-C des 4ten Gliedes von $(a+b)^n$ ist demnach die Summe der Reihe von $n-2$ Gliedern:

$$\frac{1\cdot 2}{2}+\frac{2\cdot 3}{2}+\frac{3\cdot 4}{2}+\ldots+\frac{(n-3)\cdot(n-2)}{2}+\frac{(n-2)\cdot(n-1)}{2}$$

Diese Reihe ist eine Reihe der zweiten Ordnung

$$1\cdot 3\cdot 6\cdot 10\ldots\ldots\frac{(n-2)(n-1)}{2}$$

Das 1ste Glied ist 1, das der ersten Differenzenreihe = 2, das der 2ten Differenzenreihe = 1, mithin nach pag. 128 (arithmetische Reihe)

$$S=\frac{n-2}{1}\cdot 1+\frac{(n-2)(n-3)}{1\ .\ 2}\cdot 2+\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 1$$
$$=\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}$$

Durch Vertauschung von a und b erhält man den B.-C. des 4ten letzten Gliedes wie diesen.

Für das 5te Glied von Anfang und Ende gerechnet erhält man durch dasselbe Verfahren den B.-C.

$$=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$$

3. Es läfst sich ganz allgemein beweisen, dafs der B.-C. des $m$ten Gliedes von $(a+b)^n$ = ist:

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots[n-(m-2)]\,[n-(m-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\ \ldots\ldots\ (m-1)\quad m}$$

Denn es ist nach No. 2 dieser $m$te B.-C. = der Summe des $m$ten und des $(m-1)$ten C. von $(a+b)^{n-1}$. Gesetzt nun, es fände das Gesetz des Fortschreitens der B.-C. statt bis zu dem $m$ten Gliede von $(a+b)^{n-1}$, so ist das $m$te Glied =

$$\frac{(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\ldots[n-1-(m-2)]\,[n-1-(m-1)]}{1\ .\ 2\ .\ 3\ \ldots\ldots\ (m-1)\quad m}$$

und das $m-1$te Glied von $(a+b)^{n-1}$

$$\frac{(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\ldots[n-1-(m-3)]\,[n-1-(m-2)]}{1\ .\ 2\ .\ 3\ \ldots\ldots\ (m-2)\quad (m-1)}$$

Kann nun nachgewiesen werden, dafs auch für $(a+b)^n$ das Gesetz stattfindet, so ist es allgemein gültig, denn da es bis zum 4ten Gliede gilt, gilt es dann auch für das 5te, folglich für das 6te Glied u. s. f. Zu diesem Nachweis löse man die letzten Doppelklammern auf und setze in den 2ten Coeff. noch m als Factor in Zähler und Nenner, so hat man den ersten Coeff.:

$$\frac{(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\ldots[n-(m-1)]\,[n-m]}{1\ .\ 2\ .\ 3\ \ldots\ldots\ m-1\quad m}$$

den zweiten Coeff.:

$$\frac{(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\ldots[n-(m-2)]\,[n-(m-1)]\cdot m}{1\cdot 2\cdot 3\ \ldots\ldots\ (m-2)\quad (m-1)\quad m}$$

die Summe beider ist:

$$\frac{(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\ldots[n-(m-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\ \ldots\ldots\ m-1\cdot m}[n-m+m]$$
$$=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots n-(m-1)}{1\cdot 2\cdot 3\ \ldots\ldots\ m}$$

wie nachzuweisen war.

4. Die B.-C. für ein entwickeltes Binom $(a+b)^n$ schreiten also nach dem Gesetz fort, dafs wie ad 2 speciell bis zum 4ten Gliede nachgewiesen worden, der C. für das Glied $a^{n-m}b^m$ gleich ist

$$\frac{n\cdot n-1\cdot n-2\ldots\ldots n-m+1}{1\cdot 2\cdot 3\ \ldots\ldots\ m}$$

wobei zu bemerken, dafs der allgemeine Schreibgebrauch die Klammern der 2- und

3gliedrigen Factoren durch die Punkte ersetzen läfst. Es ist dieser Ausdruck übrigens die Anzahl der Versetzungen, welche für n Elemente möglich ist, wenn ein Element (a) $n-m$, das andere (b) m mal vorkommt. Denn

$(a+b)^2$ entsteht aus $(a+b)(a+b) = aa + ab + ba + bb$

$(a+b)^3$ wird $aaa + [aab + aba + baa] + [abb + bab + bba] + bbb$

$(a+b)^4$ wird $aaaa + [aaab + aaba + abaa\ baaa] + [aabb + abab + abba + baab + baba + bbaa] + [abbb + babb + bbab + bbba] + bbbb$

u. s. w.

5. Es giebt verschiedene abkürzende Schreibarten für die B.-C. Nämlich es wird bezeichnet der

1. C. = 1 mit 1

2. C. $= \frac{n}{1}$ mit ${}^n\mathfrak{A}$ oder n_1

3. C. $= \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2}$ mit ${}^n\mathfrak{B}$ oder n_2

der Coefficient einer unbestimmten Stelle

$(m+1)$ C. $= \frac{n \cdot n-1 \ldots n-m+1}{1 \cdot 2 \ldots\ m}$ mit ${}^n\mathfrak{M}$ od. n_m

Auch giebt man

dem C. = 1 die Stellenzahl 0,

" C. $= \frac{n}{1}$ (n_1) d. Stellenzahl 1 etc.

" C. $= n_m$ die Stellenzahl m,

was ganz zweckmäfsig ist, weil dann die Stellenzahl mit dem Index übereinstimmt.

Nach der ersten Schreibweise wird, wenn statt des unbestimmten Gliedes $\mathfrak{M}$ ein bestimmtes, z. B. das 5te angenommen werden soll, dies bezeichnet mit ${}^n\overset{+5}{\mathfrak{M}}$, nach der zweiten Schreibweise mit n_5.

Bedeutet ${}^n\mathfrak{M}$ so viel wie n_x

so ist ${}^n\overset{+1}{\mathfrak{M}}$ " " " $n_{(x+1)}$

${}^n\overset{-1}{\mathfrak{M}}$ " " " $n_{(x-1)}$

${}^{n+1}\overset{+2}{\mathfrak{M}}$ " " " $(n+1)_{(x+2)}$

Man ersieht hieraus, dafs die erste Schreibweise unbequem, mitunter zweideutig, und dafs die zweite Schreibweise bestimmt und übersichtlicher ist.

6. Ein Binom in eine Reihe entwickelt, ist also

$$(a+b)^n = a^n + n_1 a^{n-1} b + n_2 a^{n-2} b^2 + \ldots\ldots n_m a^{n-m} b^m + \ldots\ldots + n_n a^{n-n} b^n$$

oder

$$= a^n + n_1 a^{n-1} b + n_2 a^{n-2} b^2 + \ldots\ldots + n_2 a^2 b^{n-2} + n_1 a b^{n-1} + b^n$$

7. Schreibt man in der binomischen Reihe

$$(a+b)^n = a^n + n_1 a^{n-1} b + n_2 a^{n-2} b^2 + \ldots\ldots + n_1 a b^{n-1} + b^n$$

für $a = 1$ und $b = 1$, so erhält man

$$(1+1)^n = 2^n = 1 + n_1 + n_2 + n_3 + \ldots\ldots + n_1 + 1$$

Hieraus folgt, dafs die Summe der B.-C. eines Binoms $(a+b)^n = 2^n$ ist. Als:

$$1 + \frac{2}{1} + \frac{2 \cdot 1}{1 \cdot 2} = 2^2 = 4$$

$$1 + \frac{3}{1} + \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} + \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 2^3 = 8$$

$$1 + \frac{4}{1} + \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 2^4 = 16$$

8. Setzt man $a = b = 1$, so hat man die Summe S der Reihen aller B.-C. in

$$(1+1)^n = 1 + n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + \ldots\ldots + n + 1 = {}^nS$$

$$(1+1)^m = 1 + m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + \ldots\ldots + m + 1 = {}^mS$$

und ebenso

$$(1+1)^{n+m} = 1 + (n+m)_1 + (n+m)_2 + (n+m)_3 + \ldots\ldots + (n+m)_1 + 1 = {}^{n+m}S$$

Wenn man daher beide erste Reihen mit einander multiplicirt, und schreibt die einzelnen Productenreihen unter einander, so dafs die senkrechten Reihen der Coefficienten zu einerlei binomischem Gliede gehören, so erhält man

$$
\begin{array}{llllllll}
1+n_1 & +n_2 & +n_3 & +n_4 & +n_5 & +\ldots\ldots+n_x & & +\ldots \\
+m_1 & +m_1n_1 & +m_1n_2 & +m_1n_3 & +m_1n_4 & +\ldots\ldots+m_1n_{x-1} & & +\ldots \\
+ & m_2 & +m_2n_1 & +m_2n_2 & +m_2n_3 & +\ldots\ldots+m_2n_{x-2} & & +\ldots \\
+ & & m_3 & +m_3n_1 & +m_3n_2 & +\ldots\ldots+m_3n_{x-3} & & +\ldots \\
+ & & & m_4 & +m_4n_1 & +\ldots\ldots+m_4n_{x-4} & & +\ldots \\
\ldots & & & & & & & \\
+ & & & & & & m_x & +\ldots
\end{array}
$$

Man erhält durch Addition der senkrechten Reihen

$$
\begin{array}{ll}
1 & =1 \\
+n_1 \quad +m_1 & =(n+m)_1 \\
+n_2 \quad +m_1n_1 \quad +m_2 & =(n+m)_2 \\
+n_3 \quad +m_1n_2 \quad +m_2n_1 \quad +m_3 & =(n+m)_3 \\
\ldots & \\
+n_{x-1}+m_1n_{x-2}+m_2n_{x-3}+\ldots\ldots+m_{x-2}n_1+m_{x-1} & =(n+m)_{x-1} \\
+n_x \quad +m_1n_{x-1}+m_2n_{x-2}+m_3n_{x-3}+\ldots\ldots+m_x & =(n+m)_x
\end{array}
$$

9. Eben so ist

$$(a+b)^n\times(a+b)^m\times(a+b)^p=(a+b)^{n+m+p}$$

u. s. w.

und

$${}^nS\times{}^mS\times{}^pS\times{}^qS\times{}^rS={}^{n+m+p+q+r}S$$

Ist

$$n+m+p+q+r=s$$

so ist

$${}^nS\cdot{}^mS\cdot{}^pS\cdot{}^qS\cdot{}^rS={}^sS$$

Setzt man

$$n=m=p=q=r=\ldots$$

und ist die Anzahl der gleichen Exponenten $=k$, so hat man

$${}^nS\,.\,{}^nS\,.\,{}^nS\ldots\ldots=[{}^nS]^k={}^{kn}S={}^sS$$

hieraus folgt

$${}^nS=\sqrt[k]{{}^sS}={}^sS^{\frac{1}{k}}={}^{\frac{s}{k}}S$$

wenn $n=\frac{s}{k}$ ist, und man hat

$${}^{\frac{s}{k}}S=(1+1)^{\frac{s}{k}}=1+\left(\frac{s}{k}\right)_1+\left(\frac{s}{k}\right)_2+\left(\frac{s}{k}\right)_3+\ldots\;\left(\frac{s}{k}\right)_x+\ldots\ldots$$

wo s und k ganze positive Zahlen sind. die nicht in einander aufzugehen brauchen, so dafs dies Gesetz der B.-C, auch für gebrochene Zahlen gilt.

Setzt man $s=n$; $k=m$, so hat man

$$\left(\frac{n}{m}\right)_1=\frac{n}{m}$$

$$\left(\frac{n}{m}\right)_2=\frac{\frac{n}{m}\cdot\frac{n}{m}-1}{1\cdot2}=\frac{n\cdot n-m}{m\cdot2m}$$

$$\left(\frac{n}{m}\right)_3=\frac{\frac{n}{m}\cdot\frac{n}{m}-1\cdot\frac{n}{m}-2}{1\quad\cdot\quad2\quad.\quad3}=\frac{n\cdot n-m\cdot n-2m}{m\;.\;2m\;\cdot\;3m}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\left(\frac{n}{m}\right)_x=\frac{\frac{n}{m}\cdot\frac{n}{m}-1\ldots\ldots\frac{n}{m}-x+1}{1\quad\cdot\quad2\quad\ldots\ldots\quad x}=\frac{n\,.\,n-m\cdot n-2m\ldots\ldots n-(x-1)m}{m\;\cdot\;2m\;\cdot\;3m\;\ldots\ldots\;xm}$$

10. **Wie**

$$(1+1)^n=1+n_1+n_2+n_3+\ldots\ldots={}^nS$$

und

$$(1+1)^m=1+m_1+m_2+m_3+\ldots\ldots={}^mS$$

so ist auch

$$(1+1)^{n-m}=1+(n-m)_1+(n-m)_2+(n-m)_3+\ldots\ldots={}^{n-m}S$$

Es ist aber

$$(1+1)^{n-m}=\frac{(1+1)^n}{(1+1)_m}=\frac{{}^nS}{{}^mS}$$

und setzt man $n=0$, so hat man

$$(1+1)^{-m} = \frac{1}{(1+1)^m} = 1 + (-m)_1 + (-m)_2 + (-m)_3 + \ldots = {}^{-m}S = \frac{1}{{}^{m}S}$$

Es ist mithin das Gesetz der B.-C. auch für ganze negative Zahlen als richtig erwiesen.

11. Setzt man für $\frac{1}{(1+1)^m}$ den Ausdruck

$$\frac{1}{(1+1)^{m+p+q+r+\ldots}} = \frac{1}{(1+1)^s} = {}^{-s}S$$

ferner

$$m = p = q = r = \ldots.$$

und

$$m + p + q + r + \ldots. = k \cdot m = s$$

so ist

$${}^{-s}S = {}^{-km}S$$

$${}^{-m}S = \sqrt[k]{{}^{-m}S} = {}^{-m}S^{\frac{1}{k}} = {}^{-\frac{m}{k}}S$$

$$= 1 + \left(-\frac{m}{k}\right)_1 + \left(-\frac{m}{k}\right)_2 + \ldots$$

wonach auch für negativ gebrochene Zahlen das Gesetz für die B.-C. erwiesen worden ist.

12. Wird ein Binom $(a+b)^n$ in eine Reihe entwickelt, und ist n eine ganze positive Zahl, so ist die Reihe endlich, sie hat ein letztes Glied; ist aber n negativ ganz oder positiv gebrochen oder negativ gebrochen, so kann man die Reihe bis ins Unendliche fortsetzen.

Z. B. $(a+b)^4$ giebt die Coefficienten 1; 4; 6; 4; 1.

$(a+b)^{-4}$ die Coeff. 1; -4; $\frac{-4 \cdot -5}{1 \cdot 2} = +10$;

$\frac{-4 \cdot -5 \cdot -6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = -20$ u. s. w. in inf.

$(a+b)^{\frac{2}{3}}$ die Coeff. 1; $\frac{2}{3}$; $\frac{\frac{2}{3} \cdot -\frac{1}{3}}{1 \cdot 2} \cdot = -\frac{1}{9}$;

$\frac{\frac{2}{3} \cdot -\frac{1}{3} \cdot -\frac{4}{3}}{1 \cdot 2 \cdot 3} = +\frac{4}{27}$ u. s. w. in inf.

$(a+b)^{-\frac{2}{3}}$ die Coeff. 1; $-\frac{2}{3}$; $\frac{-\frac{2}{3} \cdot -\frac{5}{3}}{1 \cdot 2} = +\frac{5}{9}$

u. s. w. in inf.

13. Der $x$te Coefficient von $(a+b)^n$ ist = der Summe aller $(x-1)$ten Coefficienten von $(a+b)^1$ bis $(a+b)^{n-1}$. Es folgt dies aus No. 2. Für n positiv ganz wird diese Summe endlich, ist n negativ ganz oder positiv gebrochen oder negativ gebrochen, so wird die Reihe unendlich.

Man kann überall mit einem Ergänzungsgliede abbrechen. Denn nach No. 2 ist der Coefficient des $x$ten Gliedes der Reihe eines Binoms $(a+b)^n$

$$n_x = (n-1)_{x-1} + (n-1)_x \quad (1)$$

$$= (n-1)_{x-1} + (n-2)_{x-1} + (n-2)_x \quad (2)$$

$$= (n-1)_{x-1} + (n-2)_{x-1} + (n-3)_{x-1} + (n-3)_x \quad (3)$$

u. s. w.

Das letzte Glied in jeder dieser 3 Reihen ist das Ergänzungsglied. Ist n positiv ganz, so hört die Reihe auf und zwar mit dem Gliede $[n-(n-x+1)]_{x-1} = (x-1)_{x-1}$, indem das dazu gehörige Ergänzungsglied $(x-1)_x = 0$ wird.

Z. B. für $(a+b)^{10}$ hat man das 6te Glied $(n = 10;\ x = 6)$

$$10_6 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 210$$

$$= 9_5 + 8_5 + 7_5 + 6_5 + 5_5 =$$

$$= \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 126$$

$$+ \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 56$$

$$+ \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 21$$

$$+ \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 6$$

$$+ \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 1 = 210$$

Für $(a+b)^{-10}$ hat man das 3te Glied $(n = 10;\ x = 3)$

$$\frac{-10 \cdot -11 \cdot -12}{1 \cdot 2 \cdot 3} = -220$$

$$= \frac{-11 \cdot -12}{1 \cdot 2} + \frac{-11 \cdot -12 \cdot -13}{1 \cdot 2 \cdot 3} = +66 - 286 = -220$$

$$\text{oder} = \frac{-11 \cdot -12}{1 \cdot 2} + \frac{-12 \cdot -13}{1 \cdot 2} + \frac{-12 \cdot -13 \cdot -14}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 66 + 78 - 364 = -220$$

u. s. w.

Für $(a+b)^{\frac{2}{3}}$ hat man das 4te Glied $(n = \frac{2}{3};\ x = 4)$

$$\frac{\frac{2}{3} \cdot -\frac{1}{3} \cdot -\frac{4}{3} \cdot -\frac{7}{3}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = +\frac{7}{243}$$

$$= \frac{-\frac{1}{3} \cdot -\frac{4}{3} \cdot -\frac{7}{3}}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{-\frac{1}{3} \cdot -\frac{4}{3} \cdot -\frac{7}{3} \cdot -\frac{10}{3}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = -\frac{14}{81} + \frac{35}{243} = +\frac{7}{243}$$

u. s. w.

14. Da

$$n_x = \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \ldots n-x+2 \cdot n-x+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (x-1) \cdot x}$$

und

$$n_{x-1} = \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \ldots n-x+2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (x-1)}$$

so ist

$$\frac{n_x}{n_{x-1}} = \frac{n-x+1}{x}$$

oder

$$x \cdot n_x = (n-x+1) n_{x-1}$$

hieraus hat man also

$$1 \cdot n_1 = n \cdot n_0 \qquad = (n-1)_0 \cdot n$$
$$2 \cdot n_2 = (n-1) n_1 \qquad = (n-1)_1 \cdot n$$
$$3 \cdot n_3 = (n-2) n_2 \qquad = (n-1)_2 \cdot n$$
$$4 \cdot n_4 = (n-3) n_3 \qquad = (n-1)_3 \cdot n$$

. . . .

$$x \cdot n_x = (n-x+1) \cdot n_{x-1} = (n-1)_{x-1} \cdot n$$

15. In jedem Binom $(a+b)^n$ ist $1 \cdot a^n$ das erste Glied; das folgende $n_1 a^{n-1}$. Dieser Coefficient n_1 wird oben der erste genannt, daher ist 1 der 0te und allgemein $n_0 = 1$.

So ist

$$n_n = (n-1)_{n-1} = (n-x)_{n-x} = n_0 = 1$$
$$n_{n-1} = n; \; (n-1)_{n-2} = n-1 \text{ u. s. w.}$$

und

$$n_{n+1} = (n-1)_n = 0$$

16. Wenn man in den folgenden beiden Reihen der B.-C.

$$1 \cdot n_1 \; n_2 \; n_3 \; n_4 \ldots n_x$$
$$1 \cdot m_1 \; m_2 \; m_3 \; m_4 \ldots m_x$$

die unter einander stehenden Glieder mit einander multiplicirt und die Summe bildet, so kommt man durch weitre Entwickelung auf ein interessantes Gesetz.

Man hat

$$1 \cdot 1 + n_1 m_1 + n_2 m_2 + \ldots n_x \cdot m_x$$

Nach No. 13 ist

$$n_x = (n-1)_{x-1} + (n-1)_x \qquad (1)$$

also auch

$$m_x = (m-1)_{x-1} + (m-1)_x \qquad (2)$$

Nach No. 14 ist

$$x \cdot n_x = (n-x+1) n_{x-1} \qquad (3)$$

und

$$x \cdot m_x = (m-x+1) m_{x-1} \qquad (4)$$

Mithin hat man aus 2 und 3

$$x \cdot n_x m_x = (n-x+1) n_{x-1} \cdot [(m-1)_{x-1} + (m-1)_x] \qquad (5)$$

und aus 1 und 4

$$x \cdot n_x m_x = (m-x+1) m_{x-1} \cdot [(n-1)_{x-1} + (n-1)_x] \qquad (6)$$

In 5 und 6 für das zweite Glied den zweiten Summanden der Klammergröſse mit den Werthen xn_x aus 3 und xm_x aus 4 multiplicirt, giebt

$$x \cdot n_x \cdot m_x = (n-x+1) n_{x-1} \cdot (m-1)_{x-1} + x n_x (m-1)_x \qquad (7)$$
$$x \cdot n_x \cdot m_x = (m-x+1) m_{x-1} \cdot (n-1)_{x-1} + x m_x (n-1)_x \qquad (8)$$

Setzt man nach Formel 7 die Werthe 1, 2, 3 .... nach einander für x, so erhält man

$$1 \cdot n_1 m_1 = n \cdot n_0 \; (m-1)_0 + 1 \cdot n_1 (m-1)_1 = n . 1 . 1 + n(m-1)$$
$$2 \cdot n_2 m_2 = (n-1) n_1 (m-1)_1 + 2 \, n_2 (m-1)_2$$
$$3 n_3 m_3 = (n-2) n_2 (m-1)_2 + 3 \, n_3 (m-1)_3$$
$$4 \, n_4 m_4 = (n-3) n_3 (m-1)_3 + 4 \, n_4 (m-1)_4$$

. . . .

$$(x-1) n_{x-1} m_{x-1} = (n-x+2) n_{x-2} (m-1)_{x-2} + (x-1) n_{x-1} (m-1)_{x-1}$$
$$x \cdot n_x \cdot m_x = (n-x+1) n_{x-1} (m-1)_{x-1} + x n_x \cdot (m-1)_x$$

Hieraus durch Addition, wenn man rechts jedes erste Glied einer Reihe mit dem zweiten Gliede der vorherigen Reihe zusammen nimmt:

$$S = n[1 \cdot 1 + n(m-1) + n_2 (m-1)_2 + \ldots n_{x-1} (m-1)_{x-1}] + x n_x (m-1)_x$$

Verfährt man ebenso nach Formel 8, so hat man nur in der eben ermittelten Summe n mit m zu vertauschen und es ist

$$S = m[1 \cdot 1 + m(n-1) + m_2 (n-1)_2 + \ldots m_{x-1} (n-1)_{x-1}] + x m_x (n-1)_x$$

Setzt man $x = n$ und berücksichtigt, daſs $n_{n-1} = n$; $n_n = 1$ und $(n-1)_n = 0$, so erhält man

$$S = n[1 + n(m-1) + n_2(m-1)_2 + \ldots\ldots n_2(m-1)_{n-2} + n(m-1)_{n-1} + (m-1)_n]$$
$$S = m[1 + m(n-1) + m_2(n-1)_2 + \ldots\ldots m_{n-2}(n-1) + m_{n-1}]$$

woraus

$$S' = 1 + n(m-1) + n_2(m-1)_2 + \ldots\ldots + n(m-1)_{n-1} + (m-1)_n$$
$$= \frac{m}{n}[1 + m(n-1) + m_2(n-1)_2 + \ldots\ldots + m_{n-2}(n-1)_{n-2} + m_{n-1}]$$

Setzt man in der Reihe links m statt $m-1$ und $n-1$ statt n, so erhält sie ein Glied weniger, und wird gleich der rechts eingeklammerten Reihe, nämlich

$$S'' = 1 + m(n-1) + m_2(n-1)_2 + \ldots\ldots + m_{n-2}(n-1) + m_{n-1}$$
$$= \frac{m+1}{n-1}[1 + (m+1)(n-2) + (m+1)_2(n-2)_2 + \ldots\ldots + (m+1)_{n-3}(n-2) + (m+1)_{n-2}]$$

woraus

$$S' = \frac{m}{n}\cdot S'' = \frac{m}{n}\cdot\frac{m+1}{n-1}[1 + (m+1)(n-2) + (m+1)_2(n-2)_2$$
$$+ \ldots + (m+1)_{n-3}(n-2) + (m+1)_{n-2}]$$

Setzt man wiederum in der Reihe links von S'' $m+1$ für m, und $n-2$ für $n-1$, so erhält sie wieder ein Glied weniger und wird gleich der rechts eingeklammerten Reihe der letzten Gleichung, nämlich es entsteht aus S''

$$S''' = 1 + (m+1)(n-2 + (m+1)_2(n-2)_2 + \ldots + (m+1)_{n-3}(n-2) + (m+1)_{n-2}$$
$$= \frac{m+2}{n-2}[1 + (m+2)(n-3) + (m+2)_2(n-3)_2 + \ldots\ldots + (m+2)_{n-3}]$$

woraus

$$S' = \frac{m}{n}\cdot\frac{m+1}{n-1}S''' = \frac{m}{n}\cdot\frac{m+1}{n-1}\cdot\frac{m+2}{n-2}[1 + (m+2)(n-3) + \ldots + (m+2)_{n-3}]$$

Fährt man so fort, so erhält man die Klammergröfse rechts in immer weniger Gliedern.

Ist der letzte Factor

$$\frac{m+n-3}{n-n+3} = \frac{m+n-3}{3} \text{ statt } \frac{m+2}{n-2}$$

so ist die Klammergröfse

$$= 1 + 2_1(m+n-3)_1 + 2_2(m+n-3)_2$$

Für den letzten Factor

$$\frac{m+n-2}{2}$$

ist die Klammergröfse

$$1 + 1_1(m+n-2)_1$$

und für den letzten Factor

$$\frac{m+n-1}{1}$$

die Klammergröfse

$$1 + 0\cdot(m+n-1)_0 = 1$$

Mithin ist

$$S' = 1 + n(m-1) + n_2(m-1)_2 + \ldots\ldots n(m-1)_{n-1} + (m-1)_n$$
$$= \frac{m}{n}\cdot\frac{m+1}{n-1}\cdot\frac{m+2}{n-2}\times\ldots\times\frac{m+n-1}{1}$$
$$= \frac{m+n-1\cdot m+n-2\ldots\ldots m+2\cdot m+1\cdot m}{1\cdot 2\ldots\ldots n-2\cdot n-1\cdot m} = (m+n-1)_n$$

Setzt man in diese Formel für S', m für $m-1$, so erhält man

$$1 + n\cdot m + n_2 m_2 + n_3 m_3 + \ldots\ldots n_n m_n = (m+n)_n$$

und für $m = n$

$$1 + n^2 + n_2^2 + n_3^2 + \ldots\ldots n_n^2 = (2n)_n$$

eine Reihe der Quadrate der B.-C. durch einen einfachen B.-C. ausgedrückt.

Binomischer Lehrsatz ist der Satz, dafs die in dem vorigen Artikel No. 4 gegebene Formel für die Reihen-Entwickelung irgend einer Potenz eines Binoms richtig ist, nämlich

$$(a+b)^n = a^n + n_1 a^{n-1}b^1 + n_2 a^{n-2}b^2 + \ldots$$
$$+ n_2 a^2 b^{n-2} + n_1 a^1 b^{n-1} + b^n$$

Die Richtigkeit für den Exponent n als ganze positive Zahl beweist No. 4, für n als gebrochene positive Zahl No. 7, und für n als ganze oder gebrochene negative Zahl No. 8. Sämmtliche Beweise und Entwickelungen sind auf elementarem Wege geschehen.

Die Taylor'sche Reihe giebt den b. Satz unmittelbar: diese ist

$$f(x+k) = fx + kf'x + \frac{k^2}{(2)} f^2 x + \frac{k^3}{(3)} f^3 x + \ldots + \frac{k^n}{(n)} f^n x \text{ in inf.}$$

durch dieselbe wird nämlich irgend eine Function (f) einer zweigliedrigen Urveränderlichen in eine Reihe entwickelt, die nach den auf einander folgenden Differenzialen der einen und nach den auf einander folgenden Potenzen der anderen Urveränderlichen fortschreitet. Unter (2) wird $1 \cdot 2$, unter (3) wird $1 \cdot 2 \cdot 3$, unter (n) wird $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots (n-1) \cdot n$ verstanden.

Ist nun

$$f(x+k) = (x+k)^n$$

so hat man

$fx = x^n$; $f^1 x = nx^{n-1}$; $f^2 x = n \cdot n - 1 \cdot x^{n-2}$ u. s. w.

Man erhält also aus der Taylor'schen Reihe

$$(x+k)^n = x^n + k \cdot nx^{n-1} + k^2 \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2} x^{n-2} + k^3 \cdot \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{n-3} \text{ u. s. w.}$$

also

$$(x+k)^n + x^n + n_1 x^{n-1} k + n_2 x^{n-2} k^2 + \ldots + n_{n-1} x k^{n-1} + k^n$$

2. Es ist noch zu beachten, dafs wenn das zweite Glied negativ ist, wie $(a-b)^n$, $(x-k)^n$, alle Glieder der Reihe negativ werden, in welchen b, k mit einem ungraden Exponent vorkommt.

Es ist

$$(a-b)^n = a^n - n_1 a^{n-1} b + n_2 a^{n-2} b^2 + \ldots \pm n_2 a^2 b^{n-2} \mp n_1 a b^{n-1} \pm b^n$$

die Vorzeichen der letzten Glieder bleiben unbestimmt, wenn nicht der Exponent bestimmt ausgedrückt wird. Ist n eine ganze Zahl, so ist $2n$ eine gerade, $2n-1$ eine ungerade Zahl und es ist

$$(a-b)^{2n} = a^{2n} - n_1 a^{2n-1} b + n_2 a^{2n-2} b^2 - \ldots + a^2 b^{2n-2} - a b^{2n-1} + b^{2n}$$
$$(a-b)^{2n-1} = a^{2n-1} - n_1 a^{2n-2} b + \ldots - a^3 b^{2n-3} + a b^{2n-2} - b^{2n-1}$$

Biquadrat die vierte Potenz, die Potenz mit dem Exponent ± 4 als a^4; $(a+b)^4$; $a^{-4} = \frac{1}{a^4} = \left(\frac{1}{a}\right)^4$ das Quadrat eines Quadrats: $a^4 = (a^2)^2$

$$(a \pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3 b + 6a^2 b^2 \pm 4ab^3 + b^4$$

Biquadratische Gleichung ist eine Gleichung vom 4ten Grade, s. algebraische Gleichung No. 1 bis 5, und Auflösung der b. Gl. s. No. 26 bis 28, pag. 57 bis 60.

Biquadratische Parabel, eine P. höherer Ordnung. Bedeuten y die Ordinate, x die Abscisse, $a, b, c \ldots$ Constanten, so ist die Gleichung der b. P.

entweder $y^4 = a^3 x$

oder $y^4 = a^2 x^2$

oder $y^4 = ax^3$

oder $y = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$

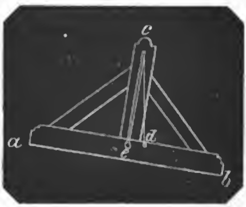
s. Apollonische Parabel.

Blätterdurchgang (Miner.) oder Spaltungsrichtung heifst die Richtung oder vielmehr, da unter Richtung immer nur eine gerade Linie verstanden werden sollte, die Lage der Fläche, nach welcher ein krystallinisches Fossil von regelmäfsiger Structur durch äufsere mechanische Einwirkung auf dasselbe zerspaltet. Der B. ist immer eine ebene Fläche und einer der Krystallflächen des Fossils parallel.

Bleiwaage, Maurerwaage, Setzwaage, ein Instrument, mit welchem der Bauhandwerker Baustücke in horizontale Lage bringt, oder solche beabsichtigte Lagen prüft. Auch wird sie zur Herstellung richtiger Querprofile beim Chausseebau, bei Wasserbauten zum Nivelliren des Wasserspiegels, und überhaupt zu allen kleinen örtlichen Nivellements wegen ihrer Einfachheit und Sicherheit mit Nutzen angewendet.

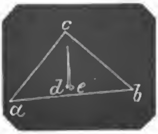
Die Hauptconstruction des Werkzeugs besteht in der genauen Abrichtnug eines

Fig. 225.



rechten Winkels, dafs also eine Linie *ce* mit der Linie *ab* zwei rechte Winkel *cea* und *ceb* bildet. *ab* ist die genau abgerichtete Unterkante eines Lineals, *ce* eine eingeschnittene Rinne, die in eine halbkugelförmige Vertiefung *e* endigt. In *c* wird eine Schnur befestigt, an der eine Bleikugel *d* hängt; spielt die Schnur frei, so giebt in Folge der Schwere die Linie *cd* die Verticale an, trifft also *cd* mit *ce* zusammen, so ist *ab* horizontal. Bei der für unbedeutende Arbeiten behufs der schnellen Handhabung aus einem dreieckigen Brett bestehenden B. ist, wie

Fig. 226.



gezeichnet *a* gegen *b* noch zu tief, bei der gröfseren noch zu hoch. Je länger die Linien *ab* und *ce*, desto genauer wird die Arbeit.

Blendung, ein undurchsichtiger Ring gegen den Rand des Objectivglases eines Fernrohrs. s. achromatisch No. 1.

Blindrechnung, Regel cöci, ist die Auflösung einer Rechenaufgabe, welche bei elementarer Rechnungsweise dahin führt, dafs man probiren (blindlings herumsuchen) mufs, um das Resultat zu finden, woher auch ihr Name herrühren mag; sie gehört der unbestimmten Analytik (den diophantischen Gleichungen) an, beschränkt sich aber nur auf die einzige Art von Aufgaben: eine gegebene Zahl (a) in 3 oder mehrere Theile ($x + y + z + \ldots = a$) zu theilen, so dafs, wenn man jeden Theil mit einer gegebenen Zahl multiplicirt, die Summe der Producte einer gegebenen Zahl = sei ($mx + ny + pz + \ldots = b$)

Ist die Zahl a nur in 2 Theile zu theilen, so ist die Aufgabe bestimmt. Denn

$$x + y = a$$
$$mx + ny = b$$

giebt (s. algebraische Gleichung No. 29)

$$x = \frac{b - na}{m - n}$$

und
$$y = \frac{ma - b}{m - n}$$

Ist die Zahl a in 3 Theile zu theilen, so erhält man 2 Gleichungen mit 3 unbekannten Gröfsen, nämlich

$$x + y + z = a$$
$$mx + ny + pz = b$$

Multiplicirt man die erste Gl. mit p, so erhält man

$$px + py + pz = pa$$

hierzu
$$mx + ny + pz = b$$

woraus durch Subtraction

$$(p - m)x + (p - n)y = pa - b \qquad \text{I}$$

Multiplicirt man die erste Gl. statt mit p mit n, so erhält man

$$(n - m)x - (p - n)z = na - b \qquad \text{II}$$

und multiplicirt man jene Gl. mit m

$$(n - m)y + (p - m)z = b - ma \qquad \text{III}$$

Sollen nun x, y, z wie a ganze Zahlen sein, so mufs

$pa - b \;\; - (p - m)x$ durch $p - n$

$na - b \;\; + (p - n)z$ durch $n - m$

und $b - ma - (n - m)y$ durch $p - m$

ohne Rest theilbar sein.

Beispiel 1. (Meier Hirsch, pag. 261, No. 24.) Man soll 30 in 3 Theile zerlegen, die so beschaffen sind, dafs wenn man den ersten Theil mit 7, den zweiten mit 19 und den dritten mit 38 multiplicirt, die Summe dieser 3 Producte 745 sei. Welche Theile sind es?

Hier ist
$$x + y + z = 30$$
$$7x + 19y + 38z = 745$$

mithin

$a = 30$; $b = 745$; $m = 7$; $n = 19$; $p = 38$

Man hat also die 3 Gleichungen

$$(38 - 7)x + (38 - 19)y = 38 \cdot 30 - 745$$
$$(19 - 7)x - (38 - 19)z = 19 \cdot 30 - 745$$
$$(19 - 7)y + (38 - 7)z = 745 - 7 \cdot 30$$

oder reducirt:

$$31x + 19y = 395 \qquad (1)$$
$$12x + 19z = -175 \qquad (2)$$
$$12y + 31z = 535 \qquad (3)$$

Aus Gl. 1 geht hervor, dafs $395 - 31x$ durch 19 theilbar sein mufs oder $(21 \cdot 19 - 4) - (2 \cdot 19 \cdot x - 7x)$ also $-4 + 7x$ durch 19 theilbar.

Bezeichnet A irgend eine ganze Zahl, so ist nun offenbar

$$7x = 19A + 4$$

woraus

$$x = \frac{19A + 4}{7} = 3A + 1 - \frac{2A + 3}{7}$$

Da A eine ganze Zahl sein mufs, so kann $\frac{2A + 3}{7}$ nur ungrade sein.

Für $\frac{2A + 3}{7} = 1$ erhält man $A = 2$ und

$$x = 3 \cdot 2 + 1 - 1 = 6$$

Für $\frac{2A + 3}{7} = 3$ erhält man $A = 9$ und

$$x = 3 \cdot 9 + 1 - 3 = 25$$

Für $\frac{2A+3}{7}=5$ wird $x>30$, was schon unmöglich ist, es können also nur die beiden ersten Werthe 1 und 3 gelten.

Setzt man in die erste Gl. $x=25$, so erhält man

$$31\cdot 25+19\,y=395$$

woraus y negativ wird, mithin ist $x=25$ unmöglich, und der einzig mögliche Werth für $x=6$.

Diesen Werth in 1 gesetzt, giebt

$$y=\frac{209}{19}=11$$

und

$$30-(11+6)=13 \text{ ist } = z$$

Die Theile von 30 sind also 6, 11, 13 und $6\cdot 7+11\cdot 19+13\cdot 38=745$.

Beispiel 2. (Meier Hirsch, pag. 261, No. 28.) Dreifsig Personen, Männer, Weiber und Kinder, verzehren zusammen 58 Thlr. Ein Mann bezahlt 3 Thlr. 12 gGr., eine Frau 1 Thlr. 9 gGr. und ein Kind 6 gGr. Wie viel Männer (x) Weiber (y) und Kinder (z) waren es?

Man hat

$$\begin{aligned} x+\quad y+\quad z&=30\\ 84x+33y+6z&=1392 \text{ (gGr.)}\end{aligned}$$

$m=84$; $n=33$; $p=6$; $a=30$; $b=1392$ also nach obiger Formel I:

$$(b-84)\,x+(b-33)\,y=6\cdot 30-1392$$

oder reducirt

$$26x+9y=404$$

und $404-26x$ mufs durch 9 theilbar sein oder wie beim ersten Beispiel $9\cdot 45-1-3\cdot 9\cdot x+x$ durch 9 theilbar oder

$$\frac{x-1}{9}=A$$

Der Form nach ist x also 10, 19, 28 u. s. w. Allein 19 Männer zu $3\frac{1}{2}$ Thlr. würden schon $66\frac{1}{2}$ Thlr., also mehr als die ganze Gesellschaft zusammen verzehrt haben, mithin können nur 10 Männer gewesen sein. Man findet wie nach Beispiel 1. 16 Weiber und 4 Kinder.

Beispiel 3. (Meier Hirsch, pag. 261, No. 25.) Man soll 100 in 3 Theile zerlegen von solcher Beschaffenheit, dafs wenn man den ersten Theil mit 17, den zweiten mit 11, den dritten mit 3 multiplicirt, und hierauf die 3 Producte addirt, die Summe 880 sei. Welche Theile sind es?

$$\begin{aligned} x+\quad y+\quad z&=100\\ 17x+11y+3z&=880\end{aligned}$$

$p=3$; $m=17$; $n=11$; $a=100$; $b=880$ mithin nach obiger Formel 1

$$(3-17)\,x+(3-11)\,y=3\cdot 100-880$$

und reducirt:

$$7x+4y=290$$

$$\frac{290-7x}{4}=y;\ \text{und}\ \frac{x+2}{4}=A$$

woraus der Form nach, und da $x<42$ sein mufs

$x=2$; 6; 10; 14; 18; 22; 26; 30; 34 u. 38 sein kann.

Setzt man diese Werthe in $\frac{290-7x}{4}=y$ so erhält man die zugehörigen

$y=69$; 62; 55; 48; 41; 34; 27; 20; 13 u. 6

Da $z=100-(x+y)$ so erhält man die zugehörigen

$z=29$; 32; 35; 38; 41; 44; 47; 50; 53 u. 56 und alle 10 zusammengehörigen Zahlen thun der Aufgabe Genüge.

Soll eine Zahl a in 4 Theile getheilt werden, dann hat man die Gleichungen

$$\begin{aligned} w+\ x+\ y+\ z&=a\\ mw+nx+py+qz&=b\end{aligned}$$

Multiplicirt man die obere Gleichung erst mit m, dann mit n und zieht jedesmal die untere davon ab, so erhält man die beiden Gleichungen

$$(m-n)\,x+(m-p)\,y+(m-q)\,z=ma-b \quad (1)$$

$$-(m-n)\,w+(n-p)\,y+(n-q)\,z=na-b \quad (2)$$

Beispiel (Meier Hirsch, pag. 261, No. 27). Eine Bäuerin hat Gänse, Hühner, Enten und Tauben, zusammen 76 Stück verkauft, eine Gans für 20, ein Huhn für $10\frac{1}{2}$, eine Ente für 7 und eine Taube für 4 gGr. und insgesammt 29 Thlr. 11 gGr. daraus gelöst. Wie viel Stück hat sie von jeder Gattung?

$$\begin{aligned} w+\quad x+\ y+\ z&=76 \text{ (Stück)}\\ 20w+10\tfrac{1}{2}x+7y+4z&=707 \text{ (gGr.)}\end{aligned}$$

Nach den beiden Formeln hat man

$$(20-10\tfrac{1}{2})\,x+(20-7)\,y+(20-4)\,z =20\cdot 76-707$$

und

$$-(20-10\tfrac{1}{2})\,w+(10\tfrac{1}{2}-7)\,y+(10\tfrac{1}{2}-4)\,z =10\tfrac{1}{2}\cdot 76-707$$

reducirt:

$$19x+26y+32z=1626$$

$$-19w+\ 7y+13z=182$$

Aufser diesen beiden Gleichungen können noch 2 aufgestellt werden, nämlich eine zwischen w, x, y und zwischen w, x, z, und jede hat 3 unbekannte Gröfsen. Es genügen also eine unzählige Menge von Auflösungen, bei welchen w, x, y, z wie verlangt, ganze Zahlen sind, und daher können 2 ganz willkührliche Bestimmungen in Betreff zweier genommen werden. Meier Hirsch scheint aus der Gleichung zwischen w, y, z bestimmt zu haben, dafs $z=2w$ sei, dafs nämlich doppelt so viel Tauben als Gänse verkauft seien.

Aus 1 folgt, dafs

$$2\cdot(813-13y-16z)$$

durch 19 theilbar sein muſs, also auch

$$3z + 6y - 4$$

durch 19 theilbar; mithin

$$3z + 6y = 19A + 4$$

und

$$z + 2y = \frac{19A + 4}{3} = 6A + 1 + \frac{A + 1}{3}$$

Aus 2 folgt, daſs

$$7y + 13z - 182$$

durch 19 theilbar sein muſs, mithin auch

$$7y - 6z + 8$$

durch 19, und

$$7y - 6z = 19B - 8$$

Nimmt man aus $3z + 6y = 19A + 4$ die Bestimmung, daſs $3z = 6y$, d. h. $z = 2y$ sei, so hat man der Form nach

$$6z = 19A + 4$$

woraus z von der Form

$$3A + 1 + \frac{A - 2}{6}$$

Für A den kleinsten Werth 8 gesetzt, erhält man

$$z = 26, \text{ also } y = 13$$

diese Werthe in Gl. 2 gesetzt, giebt

$$w = 13$$

und aus $w + x + y + z = 76$ endlich

$$x = 24$$

$w = 13$	Gänse zu 20 gGr.	=	260 gGr.
$x = 24$	Hühner zu $10\frac{1}{2}$ gGr.	=	252 „
$y = 13$	Enten zu 7 gGr.	=	91 „
$z = 26$	Tauben zu 4 gGr.	=	104 „
		Summa	707 gGr.
		=	29 Thlr. 11 gGr.

Aus der 2ten Form

$$7y - 6z = 19B - 8$$

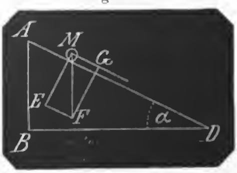
geht hervor, daſs die Annahme $7y = 6z$ nicht möglich ist, weil $19B - 8$ für keinen ganzen Werth von $B = 0$ wird.

Auſser belustigenden Gesellschafts-Aufgaben findet die Blindrechnung selten, wenigstens nicht leicht, eine ernste Anwendung.

Böschung. Abweichung der ebenen Auſsenfläche eines Baukörpers von der lothrechten Ebene, indem sie unten am weitesten hervortritt. Sie hat den Zweck, die Grundebene zu verbreitern, und dadurch dem Bauwerk eine gröſsere Stabilität zu verschaffen. Bei Steinmauerwerk sollte die B. möglichst vermieden werden, weil sie der nachtheiligen Einwirkung der Witterung ausgesetzt ist. Die Hafenmolen erhalten eine sehr bedeutende B., man scheint aber, wie in England schon geschehen, davon zurück zu kommen, weil die Schräge der Mole dem Wasser die Leitung zu hohem Aufsteigen giebt, das bei Sturm thurmartig wird, und groſse Beschädigungen verursacht; bei ganz senkrechten Auſsenwänden aber prallt das Wasser in sich zurück, und ist nicht weiter schädlich, indem die See nur auf eine nicht sehr groſse Tiefe unruhig, darunter ruhig ist, weil das Wasser keine Elasticität hat. Bei Erdbauten sind die B. nicht zu vermeiden, besonders wenn das Bauwerk den Erschütterungen ausgesetzt ist. Bei Chausseen giebt man deshalb dem Graben an der Straſsenseite gröſsere B. als an der Feldseite. Bei Festungsbauten erhält die Brustwehr nach auſsen eine gröſsere B. als die Contrescarpe, weil jene dem feindlichen Feuer ausgesetzt ist. Man bezeichnet eine B. als $\frac{1}{2}$füſsig, 1füſsig, 2füſsig u. s. w., wenn auf jeden Fuſs senkrechte Höhe AB die horizontale Ausladung BD $\frac{1}{2}$Fuſs, 1 Fuſs, 2 Fuſs u. s. w. beträgt.

2. Unter natürlicher B. unfester Massen, wie Erde, Getreidekörner u. s. w. versteht man die B., bei welcher die Masse gerade liegen bleibt, nicht mehr herabrutscht. Es sei M ein Theilchen einer aufgeschütteten Masse von dem Gewicht P, so hat dieses das Bestreben, nach MF

Fig. 227.



senkrecht herabzufallen; es wird aber durch die Oberfläche AD daran gehindert, und äuſsert auf diese einen Druck nach der Richtung ME senkrecht darauf, und zwar mit einem Gewicht $\frac{ME}{MF} \cdot P = P \cos \alpha$

Ferner hat M das Bestreben, längs AD herabzugleiten, und zwar mit dem Gewicht $\frac{MG}{MF} \cdot P = P \sin \alpha$

An diesem Herabrollen oder rutschen wird M gehindert durch die Reibung, welche der erstgedachte Druck zwischen M und der Fläche AD veranlaſst, und wenn μ die Gröſse des Reibungswerths für die Gewichts-Einheit ist, mit dem Hinderniſs $\mu P \cos \alpha$.

Offenbar bleibt noch eben die Masse M liegen, wenn beide Wirkungen im Gleichgewicht sind, wenn also

$$\mu P \cos \alpha = P \sin \alpha$$

oder wenn

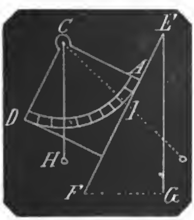
$\mu = tg\,\alpha$ (Reibungswinkel)
Die natürliche B. einer aufgeschütteten Masse ist daher diejenige B., deren $\angle$ (**Böschungswinkel**) zugleich der Reibungswinkel der Masse ist.

Moseley, die mechanischen Principien etc., übersetzt von H. Scheffler, giebt § 320, pag. 55 für folgende aufzuschüttende Massen die natürlichen B.winkel an:

Bezeichnung der Massen.	Natürlicher Böschungswinkel.
Dammerde oder Lehm in trockenem Zustande	30°
desgl. in feuchtem Zustande	45°
desgl. ganz mit Wasser durchzogen	17°
desgl. festgestampft	66 bis 74°
Feiner und trockener Staubsand	27°
Reiner trockener Streusand, Grand und feiner Kies . .	26°
desgl. in feuchtem Zustande	32°
Unregelmäfsige Kieselsteine	45°
Abgerundete Kiesel und Schrot	23°
Getreide und andere Samen, nach der Glätte der Körner	30 bis 35°

Böschungsquadrant, ein Instrument zum Messen der Böschung. Es besteht aus einem quadratischen Brett von 3 bis bis 4 Fufs Seitenlänge, von dessen einer Ecke aus ein Quadrant verzeichnet ist, und ein Bleiloth oder Perpendikel herabreicht. Wie gezeichnet ist $\angle DCH = \angle FEG$ und $DH : DC = FG : GE$; mithin

Fig. 228.



giebt $DH : DC$ das Verhältnifs der Grundlinie zur Höhe, das **Böschungsverhältnifs** an, und dieses wird hier etwa $\frac{1}{3}$ betragen. Dem entsprechend kann der Viertelkreis eingetheilt werden. Spielt das Perpendikel über B, so ist die Böschung einfüfsig, weiter nach A zu wird sie mehr als einfüfsig; spielt das Perpendikel über A, so ist die Ebene EF horizontal. Bei der Verticale des Perpendikels von C zwischen B und A, wie z. B. in J, giebt $CA : AJ$ das Verhältnifs der Grundlinie zur Höhe.

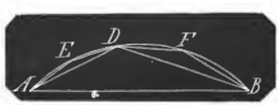
Böschungsverhältnifs s. u. **Böschungsquadrant.**

Böschungswinkel ist der W., den die Böschungsebene mit der horizontalen Grundebene bildet, Fig. 228, $\angle EFG$, Fig. 227, $\angle \alpha$.

Bogen. Der Theil einer krummen Linie, z. B. der Kreislinie (s. Arcus No. 1 bis 7) vorausgesetzt, dafs dieser Theil einerlei Krümmungsrichtung habe, nämlich dafs er nach einer Seite der Linie nur concav, auf der anderen also nur convex sei. Hat die Linie zweierlei Krümmungsrichtungen, so reicht ein Bogen nur bis zum Wendungspunkt, von da ab fängt ein zweiter, dem ersten Bogen angrenzender Bogen an.

Jeder Bogen ADB ist gröfser als seine Sehne AB. Denn zieht man die Sehnen AD, BD, so ist $AB < AD + BD$, da die drei geraden Linien Seiten eines Dreiecks

Fig. 229.

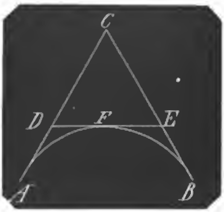


sind. Zieht man weiter nach den Zwischenpunkten E und F die geraden AE, ED, DF, BF, so ist $AD < AE + DE$ und

BD < ***DF*** + ***BF***, folglich ***AB*** < ***AE*** + ***ED*** + ***DF*** + ***FB***. Fährt man mit der Sehnenconstruction so fort, so kommt die Summe der Sehnen der Länge des Bogens immer näher, und kann demselben beliebig nahe gebracht werden; da nun ***AB*** < als die Summe aller Sehnen ist, so ist auch ***AB*** < als der Bogen.

Die von den beiden Endpunkten ***A***, ***B*** eines Bogens bis zu ihrem Durchschnittspunkt ***C*** gezeichneten Tangenten sind gröfser als der Bogen; also ***AC*** + ***BC*** > Bogen ***AFB***. Denn zieht man an einem zwischen ***A*** und ***B*** liegenden Punkt z. B. ***F***, eine Tangente ***DE*** bis in die Richtungen von ***AC*** und ***BC***, so ist ***DE*** < ***DC*** + ***EC***, daher ***AD*** + ***DE*** + ***EB*** < ***AC*** + ***BC***. Fährt

Fig. 230.



man so fort, an Zwischenpunkten Tangenten zu ziehen, so kann man durch beliebige Vermehrung deren Anzahl mit der Summe deren Längen der Länge des Bogens beliebig nahe kommen, und je näher sie dem Bogen kommen, desto kleiner wird diese Summe gegen ***AC*** + ***BC***, folglich ist ***AC*** + ***BC*** > Bogen ***AFB***.

Bogenmaafs. 1. Im Gegensatze zu Winkelmaafs in der Geometrie, Trigonometrie und Analysis (s. Arcus No. 4 bis 6). B. auf einer Kugeloberfläche ist der Abstand zweier auf derselben befindlichen Punkte in dem beiden Punkten zugehörigen gröfsten Kreise gemessen, und als Theil dieses Kreises ausgedrückt.

2. Im Gegensatz zu Zeitmaafs in der Astronomie bei Berechnung und Angabe der Umdrehungszeit von Weltkörpern. Z. B. die Zeit, in welcher die Sonne um die Erde sich herumzudrehen scheint, ist 24 Stunden, der Bogen, den sie scheinbar durchläuft, ist 360 Grad, mithin sind 24 Stunden Zeitmaafs = 360 Grad B., und wenn man mit 24 dividirt, 1 Stunde Zeitmaafs = 15° B., und wieder mit 60 dividirt, 1 Minute Zeitm. = 15 Minuten B. Man hat daher Zeitminuten und Bogenminuten. Paris liegt unter 20°, Berlin unter 31¼° östlicher Länge (von Ferro), Unterschied 11¼° Länge, die Sonne hat also um aus dem Meridian von Berlin nach dem Meridian von Paris zu kommen 11¼° durchlaufen; nun sind 15 Bogenminuten = 1 Zeitminute oder 1 Grad (Bogengrad sagt man wohl nicht, da es keine Zeitgrade giebt) = 4 Zeitminuten, folglich vollbringt die Sonne diesen Lauf in 15 Minuten, und ein Berliner mit richtiger Uhr findet in Paris, dafs seine Uhr gegen dort 15 Min. zu früh, oder vorgeht.

Bei der Umdrehung der Erde um die Sonne in 365¼ Tag, ist diese Zeit = 360° und 1 Tag von 24 Stunden = 0,9856° = 59′ 8″ 10‴ B.

Jeder Planet hat ein anderes B. gegen Zeitmaafs.

Folgende Tabelle giebt die Vergleichung zwischen dem Bogenmaafs und dem Zeitmaafs bei scheinbarer Umdrehung der Sonne um die Erde in 24 Stunden.

Bogen-Secunden.

Bogen d. Sonne um die Erde	Tageszeit		Bogen d. Sonne um die Erde.	Tageszeit		Bogen d. Sonne um die Erde	Tageszeit	
Sec.	Sec.	Terzien.	Sec.	Sec.	Terzien.	Sec.	Sec.	Terzien.
1	—	4	21	1	24	41	2	44
2	—	8	22	1	28	42	2	48
3	—	12	23	1	32	43	2	52
4	—	16	24	1	36	44	2	56
5	—	20	25	1	40	45	3	—
6	—	24	26	1	44	46	3	4
7	—	28	27	1	48	47	3	8
8	—	32	28	1	52	48	3	12
9	—	36	29	1	56	49	3	16
10	—	40	30	2	—	50	3	20
11	—	44	31	2	4	51	3	24
12	—	48	32	2	8	52	3	28
13	—	52	33	2	12	53	3	32
14	—	56	34	2	16	54	3	36
15	1	—	35	2	20	55	3	40
16	1	4	36	2	24	56	3	44
17	1	8	37	2	28	57	3	48
18	1	12	38	2	32	58	3	52
19	1	16	39	2	36	59	3	56
20	1	20	40	2	40	60	4	—

Bogen-Minuten.

Bogen d. Sonne um die Erde	Tageszeit		Bogen d. Sonne um die Erde	Tageszeit		Bogen d. Sonne um die Erde	Tageszeit.	
Minuten.	Min.	Sec.	Minuten.	Min.	Sec.	Minuten.	Min.	Sec.
1	—	4	21	1	24	41	2	44
2	—	8	22	1	28	42	2	48
3	—	12	23	1	32	43	2	52
4	—	16	24	1	36	44	2	56
5	—	20	25	1	40	45	3	—
6	—	24	26	1	44	46	3	4
7	—	28	27	1	48	47	3	8
8	—	32	28	1	52	48	3	12
9	—	36	29	1	56	49	3	16
10	—	40	30	2	—	50	3	20
11	—	44	31	2	4	51	3	24
12	—	48	32	2	8	52	3	28
13	—	52	33	2	12	53	3	32
14	—	56	34	2	16	54	3	36
15	1	—	35	2	20	55	3	40
16	1	4	36	2	24	56	3	44
17	1	8	37	2	28	57	3	48
18	1	12	38	2	32	58	3	52
19	1	16	39	2	36	59	3	56
20	1	20	40	2	40	60	4	—

Bogen-Grade.

Bogen d. Sonne um die Erde	Tageszeit		Bogen d. Sonne um die Erde	Tageszeit		Bogen d. Sonne um die Erde	Tageszeit	
Grade.	Std.	Minuten.	Grade.	Std.	Minuten.	Grade.	Std.	Minuten.
1	—	4	55	3	40	109	7	16
2	—	8	56	3	44	110	7	20
3	—	12	57	3	48	111	7	24
4	—	16	58	3	52	112	7	28
5	—	20	59	3	56	113	7	32
6	—	24	60	4	—	114	7	36
7	—	28	61	4	4	115	7	40
8	—	32	62	4	8	116	7	44
9	—	36	63	4	12	117	7	48
10	—	40	64	4	16	118	7	52
11	—	44	65	4	20	119	7	56
12	—	48	66	4	24	120	8	—
13	—	52	67	4	28	121	8	4
14	—	56	68	4	32	122	8	8
15	1	—	69	4	36	123	8	12
16	1	4	70	4	40	124	8	16
17	1	8	71	4	44	125	8	20
18	1	12	72	4	48	126	8	24
19	1	16	73	4	52	127	8	28
20	1	20	74	4	56	128	8	32
21	1	24	75	5	—	129	8	36
22	1	28	76	5	4	130	8	40
23	1	32	77	5	8	131	8	44
24	1	36	78	5	12	132	8	48
25	1	40	79	5	16	133	8	52
26	1	44	80	5	20	134	8	56
27	1	48	81	5	24	135	9	—
28	1	52	82	5	28	136	9	4
29	1	56	83	5	32	137	9	8
30	2	—	84	5	36	138	9	12
31	2	4	85	5	40	139	9	16
32	2	8	86	5	44	140	9	20
33	2	12	87	5	48	141	9	24
34	2	16	88	5	52	142	9	28
35	2	20	89	5	56	143	9	32
36	2	24	90	6	—	144	9	36
37	2	28	91	6	4	145	9	40
38	2	32	92	6	8	146	9	44
39	2	36	93	6	12	147	9	48
40	2	40	94	6	16	148	9	52
41	2	44	95	6	20	149	9	56
42	2	48	96	6	24	150	10	—
43	2	52	97	6	28	151	10	4
44	2	56	98	6	32	152	10	8
45	3	—	99	6	36	153	10	12
46	3	4	100	6	40	154	10	16
47	3	8	101	6	44	155	10	20
48	3	12	102	6	48	156	10	24
49	3	16	103	6	52	157	10	28
50	3	20	104	6	56	158	10	32
51	3	24	105	7	—	159	10	36
52	3	28	106	7	4	160	10	40
53	3	32	107	7	8	161	10	44
54	3	36	108	7	12	162	10	48

Bogen d. Sonne um die Erde Grade.	Tageszeit Std.	Minuten.	Bogen d. Sonne um die Erde Grade.	Tageszeit Std.	Minuten.	Bogen d. Sonne um die Erde Grade.	Tageszeit Std.	Minuten.
163	10	52	217	14	28	271	18	4
164	10	56	218	14	32	272	18	8
165	11	—	219	14	36	273	18	12
166	11	4	220	14	40	274	18	16
167	11	8	221	14	44	275	18	20
168	11	12	222	14	48	276	18	24
169	11	16	223	14	52	277	18	28
170	11	20	224	14	56	278	18	32
171	11	24	225	15	—	279	18	36
172	11	28	226	15	4	280	18	40
173	11	32	227	15	8	281	18	44
174	11	36	228	15	12	282	18	48
175	11	40	229	15	16	283	18	52
176	11	44	230	15	20	284	18	56
177	11	48	231	15	24	285	19	—
178	11	52	232	15	28	286	19	4
179	11	56	233	15	32	287	19	8
180	12	—	234	15	36	288	19	12
181	12	4	235	15	40	289	19	16
182	12	8	236	15	44	290	19	20
183	12	12	237	15	48	291	19	24
184	12	16	238	14	52	292	19	28
185	12	20	239	15	56	293	19	32
186	12	24	240	16	—	294	19	36
187	12	28	241	16	4	295	19	40
188	12	32	242	16	8	296	19	44
189	12	36	243	16	12	297	19	48
190	12	40	244	16	16	298	19	52
191	12	44	245	16	20	299	19	56
192	12	48	246	16	24	300	20	—
193	12	52	247	16	28	301	20	4
194	12	56	248	16	32	302	20	8
195	13	—	249	16	36	303	20	12
196	13	4	250	16	40	304	20	16
197	13	8	251	16	44	305	20	20
198	13	12	252	16	48	306	20	24
199	13	16	253	16	52	307	20	28
200	13	20	254	16	56	308	20	32
201	13	24	255	17	—	309	20	36
202	13	28	256	17	4	310	20	40
203	13	32	257	17	8	311	20	44
204	13	36	258	17	12	312	20	48
205	13	40	259	17	16	313	20	52
206	13	44	260	17	20	314	20	56
207	13	48	261	17	24	315	21	—
208	13	52	262	17	28	316	21	4
209	13	56	263	17	32	317	21	8
210	14	—	264	17	36	318	21	12
211	14	4	265	17	40	319	21	16
212	14	8	266	17	44	320	21	20
213	14	12	267	17	48	321	21	24
214	14	16	268	17	52	322	21	28
215	14	20	269	17	56	323	21	32
216	14	24	270	18	—.	324	21	36

Bogen d. Sonne um die Erde. Grade	Tageszeit Std.	Tageszeit Min.	Bogen d. Sonne um die Erde. Grade	Tageszeit Std.	Tageszeit Min.	Bogen d. Sonne um die Erde Grade	Tageszeit Std.	Tageszeit Min.
325	21	40	337	22	28	349	23	16
326	21	44	338	22	32	350	23	20
327	21	48	339	22	36	351	23	24
328	21	52	340	22	40	352	23	28
329	21	56	341	22	44	353	23	32
330	22	—	342	22	48	354	23	36
331	22	4	343	22	52	355	23	40
332	22	8	344	22	56	356	23	44
333	22	12	345	23	—	357	23	48
334	22	16	346	23	4	358	23	52
335	22	20	347	23	8	359	23	56
336	22	24	348	23	12	360	24	—

Folgende Tabelle giebt die Vergleichung zwischen dem Bogenmaafs und dem Zeitmaafs während des scheinbaren Umlaufs der Sonne in der Ekliptik vom Frühlingspunkt bis zum nächsten Wiedereintritt in denselben innerhalb 365 Tagen 5 Stunden 48 Minuten 51 Secunden, also während der Dauer des tropischen Jahres, und folglich die Vergleichung zwischen Bogenmaafs und mittlerer Sonnenzeit.

Bogen Secunden.	Mittlere Sonnenzeit. Minuten.	Mittlere Sonnenzeit. Secunden.	Bogen Secunden.	Mittlere Sonnenzeit Minuten.	Mittlere Sonnenzeit Secunden.
1	—	24,349484	27	10	57.436068
2	—	48,698968	28	11	21,785552
3	1	13,048452	29	11	46,135036
4	1	37,397936	30	12	10,484520
5	2	1,747420	31	12	34,834004
6	2	26,096904	32	12	59,183488
7	2	50,446388	33	13	23,532972
8	3	14,795872	34	13	47,882456
9	3	39,145356	35	14	12,231940
10	4	3,494840	36	14	36,581424
11	4	27,844324	37	15	0,930908
12	4	52,193808	38	15	25,280392
13	5	16,543292	39	15	49,629876
14	5	40,892776	40	16	13,979360
15	6	5,242260	41	16	38,328844
16	6	29,591744	42	17	2,678328
17	6	53,941228	43	17	27,027812
18	7	18,290712	44	17	51,377296
19	7	42,640196	45	18	15,726780
20	8	6,989680	46	18	40,076264
21	8	31,339164	47	19	4,425748
22	8	55,688648	48	19	28,775232
23	9	20,038132	49	19	53,124716
24	9	44,387616	50	20	17,474200
25	10	8,737100	51	20	41,823684
26	10	33,086584	52	21	6,173168

Bogen Secunden.	Mittlere Sonnenzeit Minuten.	Secunden.	Bogen Secunden.	Mittlere Sonnenzeit Minuten.	Secunden.
53	21	30,522652	57	23	7,920588
54	21	54,872136	58	23	32,270072
55	22	19,221620	59	23	56,619556
56	22	43,571104	60	24	20,969040

Bogen Minuten	Mittlere Sonnenzeit Stunden	Minuten	Secunden	Bogen Minuten	Mittlere Sonnenzeit Stunden	Minuten	Secunden
1	—	24	20,969	31	12	34	50,039
2	—	48	41,938	32	12	59	11,008
3	1	13	2,907	33	13	23	31,977
4	1	37	23,876	34	13	47	52,946
5	2	1	44,845	35	14	12	13,915
6	2	26	5,814	36	14	36	34,884
7	2	50	26,783	37	15	—	55,853
8	3	14	47,752	38	15	25	16,822
9	3	39	8,721	39	15	49	37,791
10	4	3	29,690	40	16	13	58,760
11	4	27	50,659	41	16	38	19,729
12	4	52	11,628	42	17	2	40,698
13	5	16	32,597	43	17	27	1,667
14	5	40	53,566	44	17	51	22,636
15	6	5	14,535	45	18	15	43,605
16	6	29	35,504	46	18	40	4,574
17	6	53	56,473	47	19	4	25,543
18	7	18	17,442	48	19	28	46,512
19	7	42	38,411	49	19	53	7,481
20	8	6	59,380	50	20	17	28,450
21	8	31	20,349	51	20	41	49,419
22	8	55	41,318	52	21	6	10,388
23	9	20	2,287	53	21	30	31,357
24	9	44	23,256	54	21	54	52,326
25	10	8	44,225	55	22	19	13,295
26	10	33	5,194	56	22	43	34,264
27	10	57	26,163	57	23	7	55,233
28	11	21	47,132	58	23	32	16,202
29	11	46	8,101	59	23	56	37,171
30	12	10	29,070	60	24	20	58,142

Bogen Grade	Mittlere Sonnenzeit Tage	Std.	Min.	Secunden	Bogen Grade	Mittlere Sonnenzeit Tage	Std.	Min.	Secunden
1	1	—	20	58,1416...	9	9	3	8	43,2750
2	2	—	41	56,2833...	10	10	3	29	41,4166 ..
3	3	1	2	54,4250	11	11	3	50	39,5583...
4	4	1	23	52,5666...	12	12	4	11	37,7000
5	5	1	44	50,7083...	13	13	4	32	35,8416...
6	6	2	5	48,8500	14	14	4	53	33,9833...
7	7	2	26	46,9916...	15	15	5	14	32,1250
8	8	2	47	45,1333...	16	16	5	35	30,2666...

Bogen Grade	Mittlere Sonnenzeit Tage	Std.	Min.	Secunden
17	17	5	56	28,4083...
18	18	6	17	26,5500
19	19	6	38	24,6916...
20	20	6	59	22,8333...
21	21	7	20	20,9750
22	22	7	41	19,1166...
23	23	8	2	17,2583...
24	24	8	23	15,4000
25	25	8	44	13,5416...
26	26	9	5	11,6833...
27	27	9	26	9,8250
28	28	9	47	7,9666...
29	29	10	8	6,1083...
30	30	10	29	4,2500
31	31	10	50	2,3916...
32	32	11	11	0,5333...
33	33	11	31	58,6750
34	34	11	52	56,8166...
35	35	12	13	54,9582...
36	36	12	34	53,1000
37	37	12	55	51,2416...
38	38	13	16	49,3833...
39	39	13	37	47,5250
40	40	13	58	45,6666...
41	41	14	19	43,8083...
42	42	14	40	41,9500
43	43	15	1	40,0916...
44	44	15	22	38,2333...
45	45	15	43	36,3750
46	46	16	4	34,5166...
47	47	16	25	32,6583...
48	48	16	46	30,8000
49	49	17	7	28,9416...
50	50	17	28	27,0833...
51	51	17	49	25,2250
52	52	18	10	23,3666...
53	55	18	31	21,5083...
54	54	18	52	19,6500
55	55	19	13	17,7916...
56	56	19	34	15,9333...
57	57	19	55	14,0750
58	58	20	16	12,2166...
59	59	20	37	10,3583...
60	60	20	58	8,5000
61	61	21	19	6,6416...
62	62	21	40	4,7833...
63	63	22	1	2,9250
64	64	22	22	1,0666...
65	65	22	42	59,2083...
66	66	23	3	57,3500
67	67	23	24	55,4916...
68	68	23	45	53,6333...
69	70	—	6	51,7750
70	71	—	27	49,9166...
71	72	—	48	48,0583...

Bogen Grade	Mittlere Sonnenzeit Tage	Std.	Min.	Secunden
72	73	1	9	46,2000
73	74	1	30	44,3416...
74	75	1	51	42,4833...
75	76	2	12	40,6250
76	77	2	33	38,7666...
77	78	2	54	36,9083...
78	79	3	15	35,0500
79	80	3	36	33,1916...
80	81	3	57	31,3333...
81	82	4	18	29,4750
82	83	4	39	27,6166...
83	84	5	—	25,7583...
84	85	5	21	23,9000
85	86	5	42	22,0416...
86	87	6	3	20,1833...
87	88	6	24	18,3250
88	89	6	45	16,4666...
89	90	7	6	14,6083...
90	91	7	27	12,7500
91	92	7	48	10,8916...
92	93	8	9	9,0333...
93	94	8	30	7,1750
94	95	8	51	5,3166...
95	96	9	12	3,4583...
96	97	9	33	1,6000
97	98	9	53	59,7416...
98	99	10	14	57,8833...
99	100	10	35	56,0250
100	101	10	56	54,1666...
101	102	11	17	52,3083...
102	103	11	38	50,4500
103	104	11	59	48,5916...
104	105	12	20	46,7333...
105	106	12	41	44,8750
106	107	13	2	43,0166...
107	108	13	23	41,1583...
108	109	13	44	39,3000
109	110	14	5	37,4416...
110	111	14	26	35,5833...
111	112	14	47	33,7250
112	113	15	8	31,8666...
113	114	15	29	30,0083...
114	115	15	50	28,1500
115	116	16	11	26,2916...
116	117	16	32	24,4333...
117	118	16	53	22,5750
118	119	17	14	20,7166...
119	120	17	35	18,8583...
120	121	17	56	17,0000
121	122	18	17	15,1416...
122	123	18	38	13,2833...
123	124	18	59	11,4250
124	125	19	20	9,5666...
125	126	19	41	7,7083...
126	127	20	2	5,8500

Bogen	Mittlere Sonnenzeit			
Grade	Tage	Std.	Min.	Secunden
127	128	20	23	3,9916...
128	129	20	44	2,1333...
129	130	21	5	0,2750
130	131	21	25	58,4166...
131	132	21	46	56,5583...
132	133	22	7	54,7000
133	184	22	28	52,8416...
134	135	22	49	50,9833...
135	136	23	10	49,1250
136	137	23	31	47,2666...
137	138	23	52	45,4083...
138	140	—	13	43,5500
139	141	—	34	41,6916...
140	142	—	55	39,8333...
141	143	1	16	37,9750
142	144	1	37	36,1166...
143	145	1	58	34,2583...
144	146	2	19	32,4000
145	147	2	40	30,5416...
146	148	3	1	28,6833...
147	149	3	22	26,8250
148	150	3	43	24,9666...
149	151	4	4	23,1083...
150	152	4	25	21,2500
151	153	4	46	19,3916...
152	154	5	7	17,5333...
153	155	5	28	15,6750
154	156	5	49	13,9166...
155	157	6	10	11,9583...
156	158	6	31	10,1000
157	159	6	52	8,2416...
158	160	7	13	6,3833...
159	161	7	34	4,5250
160	162	7	55	2,6666...
161	163	8	16	0,8083...
162	164	8	36	58,9500
163	165	8	57	57,0916...
164	166	9	18	55,2333...
165	167	9	39	53,3750
166	168	10	—	51,5166...
167	169	10	21	49,6583...
168	170	10	42	47,8000
169	171	11	3	45,9416...
170	172	11	24	44,0833...
171	173	11	45	42,2250
172	174	12	6	40,3666...
173	175	12	27	38,5083...
174	176	12	48	36,6500
175	177	13	9	34,7916...
176	178	13	30	32,9333...
177	179	13	51	31,0750
178	180	14	12	29,2166...
179	181	14	33	27,3583...
180	182	14	54	25,5000
181	183	15	15	23,6416...
182	184	15	36	21,7833...
183	185	15	57	19,9250
184	186	16	18	18,0666...
185	187	16	39	16,2083...
186	188	17	—	14,3500
187	189	17	21	12,4916...
188	190	17	42	10,6333...
189	191	18	3	8,7750
199	192	18	24	6,9166...
191	193	18	45	5,0583...
192	194	19	6	3,2000
193	195	19	27	1,3416...
194	196	19	47	59,4833...
195	197	20	8	57,6250
196	198	20	29	55,7666...
197	199	20	50	53,9083...
198	200	21	11	52,0500
199	201	21	32	50,1916...
200	202	21	53	48,3333...
201	203	22	14	46,4750
202	204	22	35	44,6166...
203	205	22	56	42,7583...
204	206	23	17	40,9000
205	207	23	38	39,0416...
206	208	23	59	37,1833...
207	210	—	20	35,3250
208	211	—	41	33,4666...
209	212	1	2	31,6083...
210	213	1	23	29,7500
211	214	1	44	27,8916...
212	215	2	5	26,0333...
213	216	2	26	24,1750
214	217	2	47	22,3166...
215	218	3	8	20,4583...
216	219	3	29	18,6000
217	220	3	50	16,7416...
218	221	4	11	14,8833...
219	222	4	32	13,0250
220	223	4	53	11,1666...
221	224	5	14	9,3083...
222	225	5	35	7,4500
223	226	5	56	5,5916...
224	227	6	17	3,7333...
225	228	6	38	1,8750
226	229	6	59	0,0166...
227	230	7	19	58,1583...
228	231	7	40	56,3000
229	232	8	1	54,4416...
230	233	8	22	52,5833...
231	234	8	43	50,7250
232	235	9	4	48,8666...
233	236	9	25	47,0083...
234	237	9	46	45,1500
235	238	10	7	43,2916...
236	239	10	28	41,4333...

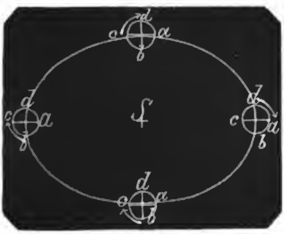
Bogen Grade	Mittlere Sonnenzeit Tage	Std.	Min.	Secunden
237	240	10	49	39,5750
238	241	11	10	37,7166...
239	242	11	31	35,8583...
240	243	11	52	34,0000
241	244	12	13	32,1416...
242	245	12	34	30,2833...
243	246	12	55	28,4250
244	247	13	16	26,5666...
245	248	13	37	24,7083...
246	249	13	58	22,8500
247	250	14	19	20,9916...
248	251	14	40	19,1333...
249	252	15	1	17,2750
250	253	15	22	15,4166...
251	254	15	43	13,5583...
252	255	16	4	11,7000
253	256	16	25	9,8416...
254	257	16	46	7,9833...
255	258	17	7	6,1250
256	259	17	28	4,2666...
257	260	17	49	2,4083...
258	261	18	10	0,5500
259	262	18	30	58,6916...
260	263	18	51	56,8333...
261	264	19	12	54,9750
262	265	19	33	53,1166...
263	266	19	54	51,2583...
264	267	20	15	49,4000
265	268	20	36	47,5416...
266	269	20	57	45,6833...
267	270	21	18	43,8250
268	271	21	39	41,9666...
269	272	22	—	40,1083...
270	273	22	21	38,2500
271	274	22	42	36,3916...
272	275	23	3	34,5333...
273	276	23	24	32,6750
274	277	23	45	30,8166...
275	279	—	6	28,9583...
276	280	—	27	27,1000
277	281	—	48	25,2416...
278	282	1	9	23,3833...
279	283	1	30	21,5250
280	284	1	51	19,6666...
281	285	2	12	17,8083...
282	286	2	33	15,9500
283	287	2	54	14,0916...
284	288	3	15	12,2333...
285	289	3	36	10,3750
286	290	3	57	8,5166...
287	291	4	18	6,6583...
288	292	4	39	4,8000
289	293	5	—	2,9416...
290	294	5	21	1,0833...
291	295	5	41	59,2250

Bogen Grade	Mittlere Sonnenzeit Tage	Std.	Min.	Secunden
292	296	6	2	57,3666...
293	297	6	23	55,5083...
294	298	6	44	53,6500
295	299	7	5	51,7916...
296	300	7	26	49,9333...
297	301	7	47	48,0750
298	302	8	8	46,2166...
299	303	8	29	44,3583...
300	304	8	50	42,5000
301	305	9	11	40,6416...
302	306	9	32	38,7833...
303	307	9	53	36,9250
304	308	10	14	35,0666...
305	309	10	35	33,2083...
306	310	10	56	31,3500
307	311	11	17	29,4916...
308	312	11	38	27,6333...
309	313	11	59	25,7750
310	314	12	20	23,9166...
311	315	12	41	22,0583...
312	316	13	2	20,2000
313	317	13	23	18,3416...
314	318	13	44	16,4833...
315	319	14	5	14,6250
316	320	14	26	12,7666...
317	321	14	47	10,9083...
318	322	15	8	9,0500
319	323	15	29	7,1916...
320	324	15	50	5,3333...
321	325	16	11	3,4750
322	326	16	32	1,6166...
323	327	16	52	59,7583...
324	328	17	13	57,9000
325	329	17	34	56,0416...
326	330	17	55	54,1833...
327	331	18	16	52,3250
328	332	18	37	50,4666...
329	333	18	58	48,6083...
330	334	19	19	46,7500
331	335	19	40	44,8916...
332	336	20	1	43,0333...
333	357	20	22	41,1750
334	338	20	43	39,3166...
335	339	21	4	37,4583...
336	340	21	25	35,6000
337	341	21	46	33,7416...
338	342	22	7	31,8833...
339	343	22	28	30,0250
340	344	22	49	28,1666...
341	345	23	10	26,3083...
342	346	23	31	24,4500
343	347	23	52	22,5916...
344	349	—	13	20,7333...
345	350	—	34	18,8750
346	351	—	55	17,0166...

Bogen Grade	Mittlere Sonnenzeit Tage	Std.	Min.	Secunden	Bogen Grade	Mittlere Sonnenzeit Tage	Std.	Min.	Secunden
347	352	1	16	15,1583 . . .	354	359	3	43	2,1500
348	353	1	37	13,3000	355	360	4	4	0,2916 . . .
349	354	1	58	11,4416 . . .	356	361	4	24	58,4333 . . .
350	355	2	19	9,5833 . . .	357	362	4	45	56,5750
351	356	2	40	7,7250	358	363	5	6	54,7166 . . .
352	357	3	1	5,8666 . . .	359	364	5	27	52,8583 . . .
353	358	3	22	4,0083 . . .	360	365	5	48	51,0000

Nachstehende Tabelle zeigt das Verhältnifs zwischen Bogenzeit und Sternzeit. Hierbei ist Folgendes zu bemerken: Unter Sternzeit versteht man die Zeit, welche statt der Sonne ein Fixstern angiebt, ein Sterntag ist die Zeit zweier auf einander folgender Culminationen eines und desselben Fixsterns mit irgend einem Ort der Erdoberfläche, und das Sternjahr hat so viel Sterntage, als in demselben Culminationen von diesem Stern wirklich vollendet werden. In nachstehender Zeichnung sei *S* die Sonne, I bis IV seien 4 rechtwinklig mit einander befindliche Lagen der Erde in der Ekliptik. In I sei der Anfang des Jahres, der maafsgebende Fixstern stehe in der Richtung I *S* III, so hat in I der Punkt *a* Sonnenmittag und Sternmittag. In II hat der Punkt *a* Sternmittag, der Punkt *b* Sonnenmittag, und *a* mufs noch 6 Stunden lang sich bewegen, ehe er den Sonnenmittag erhält. Hat also *a* in II x Sterntage erlebt, so hat er erst $x - \frac{1}{4}$ Sonnentage erlebt.

Fig. 231.



In III hat *a* Sternmittag, *c* Sonnenmittag. *a* hat $2x$ Sterntage und $2x - \frac{1}{2}$ Sonnentage erlebt. In IV hat *a* bei $3x$ Sterntagen nur $3x - \frac{3}{4}$ Sonnentage gehabt, und wieder in I zurückgekehrt $4x$ Sterntage und $4x - 1$ Sonnentage.

In I sei der Frühlingspunkt, so ist, wenn die Erde den Lauf durch II, III, IV wieder bis I vollendet hat, ein Jahr, und zwar ein tropisches Jahr v. 365,242255 Tagen = 365 Tage 5 Stunden 48 Minuten 51 Secunden verflossen, indem zugleich der Frühlingspunkt in I um 50,1 Bogensecunden nach IV der Erde entgegenrückt. Vermöge dieses Umstandes ist das Sonnenjahr wie das Sternjahr um 50,1 Bogensecunden kürzer als das siderische Jahr von 365,25638 Sonnentagen, und da der Frühlingspunkt statt des oben gedachten Fixsterns Maafs giebt, so ist auch hier das Sternjahr um genau einen Tag länger als das tropische oder das mittlere Sonnenjahr, d. h. das Sternjahr hat 366 Tage 5 Stunden 48 Minuten 51 Secunden.

Vergleichung zwischen Bogenmaafs und Sternzeit.

Bogen Secunden	Sternzeit Minuten	Secunden	Bogen Secunden	Sternzeit Minuten	Secunden
1	—	24,416150	5	2	2,080750
2	—	48,832300	6	2	26,496900
3	1	13,248450	7	2	50,913050
4	1	37,664600	8	3	15,329200

Bogen	Sternzeit		Bogen	Sternzeit	
Secunden	Minuten	Secunden	Secunden	Minuten	Secunden
9	3	39,745350	35	14	14,565250
10	4	4,161500	36	14	38,981400
11	4	28,577650	37	15	3,397550
12	4	52,993800	38	15	27,813700
13	5	17,409950	39	15	52,229850
14	5	41,826100	40	16	16,846000
15	6	6,242250	41	16	41,062150
16	6	30,658400	42	17	5,478300
17	6	55,074550	43	17	29,894450
18	7	19,490700	44	17	54,310600
19	7	43,906850	45	18	18,726750
20	8	8,323000	46	18	43,142900
21	8	32,739150	47	19	7,559050
22	8	57,155300	48	19	31,975200
23	9	21,571450	49	19	56,391350
24	9	45,987600	50	20	20,807500
25	10	10,403750	51	20	45,223650
26	10	34,819900	52	21	9,639800
27	10	59,236050	53	21	34,055950
28	11	23,652200	54	21	58,472100
29	11	48,068350	55	22	22,888250
30	12	12,484500	56	22	47,304400
31	12	36,900650	57	23	11,720550
32	13	1,316800	58	23	36,136700
33	13	25,732950	59	24	0,552850
34	13	50,149100	60	24	24,969000

Bogen	Sternzeit			Bogen	Sternzeit		
Minuten	Stunden	Minuten	Secunden	Minuten	Stunden	Minuten	Secunden
1	—	24	24,969	24	9	45	59,256
2	—	48	49,938	25	10	10	24,225
3	1	13	14,907	26	10	34	49,194
4	1	37	39,876	27	10	59	14,163
5	2	2	4,845	28	11	23	39,132
6	2	26	29,814	29	11	48	4,101
7	2	50	54,783	30	12	12	29,070
8	3	15	19,752	31	12	36	54,039
9	3	39	44,721	32	13	1	19,008
10	4	4	9,690	33	13	25	43,977
11	4	28	34,659	34	13	50	8,946
12	4	52	59,628	35	14	14	33,915
13	5	17	24,597	36	14	38	58,884
14	5	41	49,566	37	15	3	23,853
15	6	6	14,535	38	15	27	48,822
16	6	30	39,504	39	15	52	13,791
17	6	55	4,473	40	16	16	38,760
18	7	19	29,442	41	16	41	3,729
19	7	43	54,411	42	17	5	28,698
20	8	8	19,380	43	17	29	53,667
21	8	32	44,349	44	17	54	18,636
22	8	57	9,318	45	18	18	43,605
23	9	21	34,287	46	18	43	8,574

Bogen Minuten	Sternzeit Stunden	Minuten	Secunden
47	19	5	33,543
48	19	31	58,512
49	19	56	23,481
50	20	20	48,450
51	20	45	13,419
52	21	9	38,388
53	21	34	3,357
54	21	58	28,326
55	22	22	53,295
56	22	47	18,264
57	23	11	43,233
58	23	36	8,202
59	24	—	33,171
60	24	24	58,140

Bogen Grade	Sternzeit Tage	Std.	Min.	Secunden
1	1	—	24	58,1416...
2	2	—	49	56,2833...
3	3	1	14	54,4250
4	4	1	39	52,5666...
5	5	2	4	50,7083...
6	6	2	29	48,8500
7	7	2	54	46,9916...
8	8	3	19	45,1333...
9	9	3	44	43,2750
10	10	4	9	41,4166...
11	11	4	34	39,5583...
12	12	4	59	37,7000
13	13	5	24	35,8416...
14	14	5	49	33,9833...
15	15	6	14	32,1250
16	16	6	39	30,2666...
17	17	7	4	28,4083...
18	18	7	29	26,5500
19	19	7	54	24,6916...
20	20	8	19	22,8333...
21	21	8	44	20,9750
22	22	9	9	19,1166...
23	23	9	34	17,2583...
24	24	9	59	15,4000
25	25	10	24	13,5416...
26	26	10	49	11,6833...
27	27	11	14	9,8250
28	28	11	39	7,9666...
29	29	12	4	6,1083...
30	30	12	29	4,2500
31	31	12	54	2,3916...
32	32	13	19	0,5333...
33	33	13	43	58,6750
34	34	14	8	56,8166...
35	35	14	33	54,9583...
36	36	14	58	53,1000
37	37	15	23	51,2416...
38	38	15	48	49,3833...
39	39	16	13	47,5250
40	40	16	38	45,6666...
41	41	17	3	43,8083...
42	42	17	28	41,9500
43	43	17	53	40,0916...
44	44	18	18	38,2333...
45	45	18	43	36,3750
46	46	19	8	34,5166...
47	47	19	33	32,6583...
48	48	19	58	30,8000
49	49	20	23	28,9416...
50	50	20	48	27,0833...
51	51	21	13	25,2250
52	52	21	38	23,3666...
53	53	22	3	21,5083...
54	54	22	28	19,6500
55	55	22	53	17,7916...
56	56	23	18	15,9333...
57	57	23	43	14,0750
58	59	—	8	12,2166...
59	60	—	33	10,3583...
60	61	—	58	8,5000
61	62	1	23	6,6416...
62	63	1	48	4,7833...
63	64	2	13	2,9250
64	65	2	38	1,0666...
65	66	3	2	59,2083...
66	67	3	27	57,3500
67	68	3	52	55,4916...
68	69	4	17	53,6333...
69	70	4	42	51,7750
70	71	5	7	49,9166...
71	72	5	32	48,0583...
72	73	5	57	46,2000
73	74	6	22	44,3416...
74	75	6	47	42,4833...
75	76	7	12	40,6250
76	77	7	37	38,7666...
77	78	8	2	36,9083...
78	79	8	27	35,0500
79	80	8	52	33,1916...
80	81	9	17	31,3333...

Bogen	Sternzeit			
Grade	Tage	Std.	Min.	Secunden
81	82	9	42	29,4750
82	83	10	7	27,6166...
83	84	10	32	25,7583...
84	85	10	57	23,9000
85	86	11	22	22,0416...
86	87	11	47	20,1833...
87	88	12	12	18,3250
88	89	12	37	16,4666...
89	90	13	2	14,6083...
90	91	13	27	12,7500
91	92	13	52	10,8916...
92	93	14	17	9,0333...
93	94	14	42	7,1750
94	95	15	7	5,3166...
95	96	15	32	3,4583...
96	97	15	57	1,6000
97	98	16	21	59,7416...
98	99	16	46	57,8833...
99	100	17	11	56,0250
100	101	17	36	54,1666...
101	102	18	1	52,3083...
102	103	18	26	50,4500
103	104	18	51	48,5916...
104	105	19	16	46,7333...
105	106	19	41	44,8750
106	107	20	6	43,0166...
107	108	20	31	41,1583...
108	109	20	56	39,3000
109	110	21	21	37,4416...
110	111	21	46	35,5833...
111	112	22	11	33,7250
112	113	22	36	31,8666...
113	114	23	1	30,0083...
114	115	23	26	28,1500
115	116	23	51	26,2916...
116	118	—	16	24,4333...
117	119	—	41	22,5750
118	120	1	6	20,7166...
119	121	1	31	18,8583...
120	122	1	56	17,0000
121	123	2	21	15,1416...
122	124	2	46	13,2833...
123	125	3	11	11,4250
124	126	3	36	9,5666...
125	127	4	1	7,7083...
126	128	4	26	5,8500
127	129	4	51	3,9916...
128	130	5	16	2,1333...
129	131	5	41	0,2750
130	132	6	5	58,4166...
131	133	6	30	56,5583...
132	134	6	55	54,7000
133	135	7	20	52,8416...
134	136	7	45	50,9833...
135	137	8	10	49,1250

Bogen	Sternzeit			
Grade	Tage	Std.	Min.	Secunden
136	138	8	35	47,2666...
137	139	9	—	45,4083...
138	140	9	25	43,5500
139	141	9	50	41,6916...
140	142	10	15	39,8333...
141	143	10	40	37,9750
142	144	11	5	36,1166...
143	145	11	30	34,2583...
144	146	11	55	32,4000
145	147	12	20	30,5416...
146	148	12	45	28,6833...
147	149	13	10	26,8250
148	150	13	35	24,9666...
149	151	14	—	23,1083...
150	152	14	25	21,2500
151	153	14	50	19,3916...
152	154	15	15	17,5333...
153	155	15	40	15,6750
154	156	16	5	13,8166...
155	157	16	30	11,9583...
156	158	16	55	10,1000
157	159	17	20	8,2416...
158	160	17	45	6,3833...
159	161	18	10	4,5250
160	162	18	35	2,6666...
161	163	19	—	0,8083...
162	164	19	24	58,9500
163	165	19	49	57,0916...
164	166	20	14	55,2333...
165	167	20	39	53,3750
166	168	21	4	51,5166...
167	169	21	29	49,6583...
168	170	21	54	47,8000
169	171	22	19	45,9416...
170	172	22	44	44,0833...
171	173	23	9	42,2250
172	174	23	34	40,3666...
173	175	23	59	38,5083...
174	177	—	24	36,5500
175	178	—	49	34,7916...
176	179	1	14	32,9333...
177	180	1	39	31,0750
178	181	2	4	29,2166...
179	182	2	29	27,3583...
180	183	2	54	25,5000
181	184	3	19	23,6416...
182	185	3	44	21,7833...
183	186	4	9	19,9250
184	187	4	34	18,0666...
185	188	4	59	16,2083...
186	189	5	24	14,3500
187	190	5	49	12,4916...
188	191	6	14	10,6333...
189	192	6	39	8,7750
190	193	7	4	6,9166...

Bogen Grade	Sternzeit Tage	Std.	Min.	Secunden	Bogen Grade	Sternzeit Tage	Std.	Min.	Secunden
191	194	7	29	5,0583 . . .	246	250	6	22	22,8500
192	195	7	54	3,2000	247	251	6	47	20,9916 . . .
193	196	8	19	1,3416 . . .	248	252	7	12	19,1333 . . .
194	197	8	43	59,4833 . . .	249	253	7	37	17,2750
195	198	9	8	57,6250	250	254	8	2	15,4166 . . .
196	199	9	33	55,7666 . . .	251	255	8	27	13,5583 . . .
197	200	9	58	53,9083 . . .	252	256	8	52	11,7000
198	201	10	23	52,0500	253	257	9	17	9,8416 . . .
199	202	10	48	50,1916 . . .	254	258	9	42	7,9833 . . .
200	203	11	13	48,3333 . . .	255	259	10	7	6,1250
201	204	11	38	46,4750	256	260	10	32	4,2666 . . .
202	205	12	3	44,6166 . . .	257	261	10	57	2,4083 . . .
203	206	12	28	42,7583 . . .	258	262	11	21	0,5500
204	207	12	53	40,9000	259	263	11	46	58,6916 . . .
205	208	13	18	39,0416 . . .	260	264	12	11	56,8333 . . .
206	209	13	43	37,1833 . . .	261	265	12	36	54,9750
207	210	14	8	35,3250	262	266	13	1	53,1166 . . .
208	211	14	33	33,4666 . . .	263	267	13	26	51,2583 . . .
209	212	14	58	31,6083 . . .	264	268	13	51	49,4000
210	213	15	23	29,7500	265	269	14	16	47,5416 . . .
211	214	15	48	27,8916 . . .	266	270	14	41	45,6833 . . .
212	215	16	13	26,0333 . . .	267	271	15	6	43,8250
213	216	16	38	24,1750	268	272	15	31	41,9666 . . .
214	217	17	3	22,3166 . . .	269	273	15	56	40,1083 . . .
215	218	17	28	20,4583 . . .	270	274	16	21	38,2500
216	219	17	53	18,6000	271	275	16	46	36,3916 . . .
217	220	18	18	16,7416 . . .	272	276	17	11	34,5333 . . .
218	221	18	43	14,8833 . . .	273	277	17	36	32,6750
219	222	19	8	13,0250	274	278	18	1	30,8166 . . .
220	223	19	33	11,1666 . . .	275	279	18	26	28,9583 . . .
221	224	19	58	9,3083 . . .	276	280	18	51	27,1000
222	225	20	23	7,4500	277	281	19	16	25,2416 . . .
223	226	20	48	5,5916 . . .	278	282	19	41	23,3833 . . .
224	227	21	13	3,7333 . . .	279	283	20	6	21,5250
225	228	21	38	1,8750	280	284	20	31	19,6666 . . .
226	229	22	3	0,0166 . . .	281	285	20	56	17,8083 . . .
227	330	22	27	58,1583 . . .	282	286	21	21	15,9500
228	231	22	52	56,3000	283	287	21	46	14,0916 . . .
229	232	23	17	54,4416 . . .	284	288	22	11	12,2333 . . .
230	233	23	42	52,5833 . . .	285	289	22	36	10,3750
231	235	—	7	50,7250	286	290	23	1	8,5166 . . .
232	236	—	32	48,8666 . . .	287	291	23	26	6,6583 . . .
233	237	—	57	47,0083 . . .	288	292	23	51	4,8000
234	238	1	22	45,1500	289	294	—	16	2,9416 . . .
235	239	1	47	43,2916 . . .	290	295	—	41	1,0833 . . .
236	240	2	12	41,4333 . . .	291	296	1	5	59,2250
237	241	2	37	39,5750	292	297	1	30	57,3666 . . .
238	242	3	2	37,7166 . . .	293	298	1	55	55,5083 . . .
239	243	3	27	35,8583 . . .	294	299	2	20	53,6500
240	244	3	52	34,0000	295	300	2	45	51,7916 . . .
241	245	4	17	32,1416 . . .	296	301	3	10	49,9333 . . .
242	246	4	42	30,2833 . . .	297	302	3	35	48,0750
243	247	5	7	28,4250	298	303	4	—	46,2166 . . .
244	248	5	32	26,5666 . . .	299	304	4	25	44,3583 . . .
245	249	5	57	24,7083 . . .	300	305	4	50	42,5000

Bogen Grade	Sternzeit Tage	Std.	Min.	Secunden
301	306	5	15	40,6616...
302	307	5	40	38,7833...
303	308	6	5	36,9250
304	309	6	30	35,0666...
305	310	6	55	33,2083...
306	311	7	20	31,3500
307	312	7	45	29,4916...
308	313	8	10	27,6333...
309	314	8	35	25,7750
310	315	9	—	23,9166...
311	316	9	25	22,0583...
312	317	9	50	20,2000
313	318	10	15	18,3416...
314	319	10	40	16,4833...
315	320	11	5	14,6250
316	321	11	30	12,7666...
317	322	11	55	10,9083...
318	323	12	20	9,0500
319	324	12	45	7,1916...
320	325	13	10	5,3333...
321	326	13	35	3,4750
322	327	14	—	1,6166...
323	328	14	24	59,7583...
324	329	14	49	57,9000
325	330	15	14	56,0416...
326	331	15	39	54,1833...
327	332	16	4	52,3250
328	333	16	29	50,4666...
329	334	16	54	48,6083...
330	335	17	19	46,7500
331	336	17	44	44,8916...
332	337	18	9	43,0333...
333	338	18	34	41,1750
334	339	18	59	39,3166...
335	340	19	24	37,4583...
336	341	19	49	35,6000
337	342	20	14	33,7416...
338	343	20	39	31,8833...
339	344	21	4	30,0250
340	345	21	29	28,1666...
341	346	21	54	26,3083...
342	347	22	19	24,4500
343	348	22	44	22,5916...
344	349	23	9	20,7333...
345	350	23	34	18,8750
346	351	23	59	17,0166...
347	353	—	24	15,1583...
348	354	—	49	13,3000
349	355	1	14	11,4416...
350	356	1	39	9,5833...
351	357	2	4	7,7250
352	358	2	29	5,8666...
353	359	2	54	4,0083...
354	360	3	19	2,1500
355	361	3	44	0,2916...
356	362	4	8	58,4333...
357	363	4	33	56,5750
358	364	4	58	54,7166...
359	365	5	23	52,8583...
360	366	5	48	51,0000

Bogengrad im Gegensatz zu Winkelgrad in der Geometrie, Trigonometrie und Analysis, der 360ste Theil eines Kreisumfangs.

Bogenminute im Gegensatz zu Zeitminute, der 60ste Theil eines Grades, s. Bogenmaafs.

Bogensecunde im Gegensatz zu Zeitsecunde, der 60ste Theil einer Bogenminute, s. Bogenmaafs.

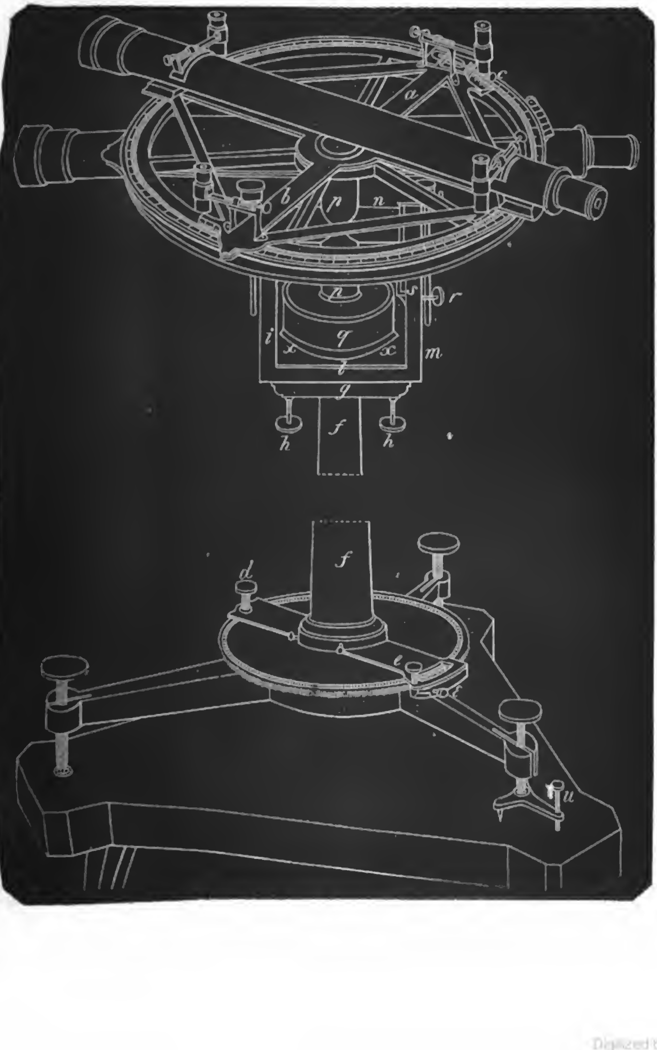
Bogensehne, Sehne, die zu einem Bogen gehörende Sehne.

Borda'scher Kreis, B. Repetitions-Kreis, B. Multiplications-Kreis, auch B. Vollkreis genannt, war vor Erfindung des Theodoliten das vorzüglichste Winkelmefs-Instrument. Die Zeichnung ist aus dem Werke entnommen: Base du système metrique décimal ou mesure de l'arc du méridien, compris entre les parallèles de Dunkerque et Barcelone par Méchain et Delambre. Paris 1807, Tome II, pag. 160. Fig. 232 zeigt den Kreis in perspectivischer Ansicht und in einer solchen geneigten Lage, welche man ihm für Azimuthalbeobachtungen giebt. Der Kreis ist aus einem ganzen Stück Messing gefertigt, damit er sich durch Temperaturänderung nicht ungleichmäfsig verzieht; der von Silber eingelegte Limbus ist entweder nach französischer Weise in 4000 gleiche Theile oder in 360 Grade und Unterabtheilungen getheilt. 6 Speichen verbinden die Fernröhre mit der Axe; das obere Fernrohr befindet sich über dem Centrum; ferner sieht man die 4 Alhidaden mit ihren Nonien und Mikroskopen zum Ablesen der Theilung. Bei 16 Zoll Durchmesser des Limbus kann man mit Hülfe der Nonien die beobachteten Winkel bis auf 5 Secunden genau ablesen; eine genauere Bestimmung derselben erhält man durch die später zu gedenkende Repitition oder Multiplication. Die oberen horizontalen Schrauben dienen dazu um die Mikroskope nach Belieben

zu verstellen, indem sie auf den Stegen fortgeschoben werden.

Die beiden Alhidaden *a*, *b* sind mit Schrauben versehen, mit welchen sie auf dem Kreis festgestellt werden können; ferner dient noch die Stellschraube *c* dazu, das Fernrohr nach und nach auf das zu beobachtende Object zu richten. In der Mitte der überall gleichen Stärkenfläche des Kreises theilt eine eingedrehte Fuge den Kreis in zwei Ränder, einen oberen und einen unteren Rand, so daſs deren Oberflächen einander genau $\parallel$ sind, und wodurch es möglich wird, das eine Fern-

Fig. 232.



rohr noch um die Axe herum bewegen zu können, wenn das andere Fernrohr arretirt ist. Beide Fernröhre sind in jeder Lage des Kreises ∓ dessen Grundebenen, sie sind astronomisch, man sieht also die Bilder verkehrt. Das Fadenkreuz ist in einer besondren kurzen Röhre ausgespannt, welcher man innerhalb des Fernrohrs geradlinige und kreisförmige Bewegungen geben kann, um das Kreuz genau in den Brennpunkt führen zu können.

Das untere Fernrohr, welches zum Theil durch den Kreis verdeckt wird, ist excentrisch, es hat weder Nonius noch Alhidaden, sonst aber dieselben Befestigungsstücke, Stellschrauben und dieselben Dimensionen wie das obere Fernrohr.

An dem Fufs sieht man die drei Schrauben, welche ihn tragen, die 3 Arme, in welchen die Schrauben stecken, den Azimuthalkreis, die Alhidade mit der Schraube *d*, mit welcher dieselbe auf irgend einem Punkt der Theilung befestigt werden kann. Die Spindel *e* endigt in ein Getriebe, durch welches die Alhidade auf einen beliebigen Punkt des Azimuthalkreises und das Fernrohr auf den zu beobachtenden Gegenstand geführt werden kann, wobei die Schraube *d* lose bleibt; die Schraube *ε* hat den Zweck, das Getriebe gegen die Zähne mehr oder weniger anzudrücken, welche an dem Umfange des Azimuthalkreises sich befinden. Die Axe der runden Säule *f* ist zugleich die verticale Axe des Instruments, die Säule endigt in ein Querstück *g*, auf welches mittelst zweier Schrauben *h*, *h* der Rahmen *ilm* befestigt ist, der die Unterstützung der horizontalen Umdrehungsaxe *n* bildet. Diese Axe ist von einem senkrechten Cylinder *p* durchkreuzt, welcher die Axe des Kreises bildet; auf dieser Axe ist die Trommel *q* befestigt, welche mit Blei ausgefüllt, in geneigter und senkrechter Lage des Kreises diesem als Gegengewicht dient, woher sie auch zwischen den senkrechten Stäben des Rahmens sich ungehindert bewegen kann, und zugleich dazu dient, dem Kreise eine langsame und schnelle Bewegung um seine Axe zu geben.

An einem der Rahmenstäbe befindet sich eine Schraube *r*, welche einen kleinen Viertelskreis *s* anzieht, der an einem der Enden der Umdrehungsaxe sich befindet, und wodurch die Kreisscheibe in einer beliebigen geneigten Lage festgehalten werden kann. Man fügt bisweilen diesem Quadranten eine Stellschraube ohne Ende hinzu, welche von grofser Bequemlichkeit für Azimuthalbewegungen ist, und wenn man den Kreis in eine genaue verticale Lage bringen will. Diese Stellschraube fehlte bei Delambre's Instrument, und um mit dem Kreise die verticale Lage hervorzubringen, war nur eine sehr kurze Schraube vorhanden, gegen welche der kleine Quadrant sich anfing zu stemmen, sobald das Instrument sehr nahe die verticale Lage schon hatte. Hierauf war nur eine kleine Bewegung dieser Schraube erforderlich, um auf ziemlich bequeme Weise und vielleicht noch viel sicherer die wirkliche Verticalität herzustellen, als wenn das Instrument jene Schraube ohne Ende gehabt hätte. Eine Schraube ohne Ende, welche in das Gewinde *xx* der Trommel *q* greift, verursacht eine langsame Bew. Eine grofse Feder drückt diese Schraube ohne Ende gegen das Gewinde *x* und ein Schlüssel drängt die Feder zurück, und löst die Schraube, wenn die Bewegung frei werden soll.

Die runde Säule *f* steht mit einem cylindrischen Zapfen in dem dreiarmigen Fufs, und kann mit dem darauf befindlichen Instrument herumgedreht werden. Für die Verpackung und den Transport wird der Kreis mit dem Rahmen *ilm* abgeschraubt, desgleichen die Säule *f* mit dem Querstück *g* von dem Fufs abgenommen, und die 3 Stücke werden einzeln verpackt.

Die 3 kupfernen Schrauben des Fufses stehen in Hülsen, welche auf der oberen Fläche des hölzernen Fufses befestigt sind, und diese Hülsen dienen nicht blofs, dem Instrument die richtige Stellung zu bewahren, wenn von einer Beobachtung zu einer anderen geschritten werden soll, sondern ganz besonders eine vollkommene Stellung herzustellen, weil das Instrument ohne dieselben rutschen, und der Gegenstand von dem Fadenkreuz des Fernrohrs sich entfernen würde. Die zur Rechten befindliche Fufsschraube ist noch mit einer Vorrichtung versehen, mit welcher ein sanfteres Erheben und Senken derselben möglich wird, denn die Schraube würde wegen der Stärke ihrer Windung sich weder langsam noch regelmäfsig genug bewegen, das kleine Dreiek aber bildet einen Hebel gegen die grofse Schraube und die kleine Schraube *u*, welche ihn hebt und senkt, ist viel feiner, und verschafft der grofsen Schraube eine langsamere und sanftere Bewegung.

Wenn der B. K. zu Beobachtungen von Zenithdistanzen angewendet wird, wie das am häufigsten geschieht, so wird der Kreis in die senkrechte Lage gedreht; hierbei kommen die beiden Fernröhre zu beiden Seiten des Kreises neben einander. Das sonst untere Fernrohr ist mit einer wenigstens 8 Zoll langen Libelle versehen

und eine zweite kleinere befindet sich auf der Axe des Kreises in der Mitte zwischen *n* und *p*. Ueber der Libelle liegt ein hochkantiger metallener Steg, der von der Mitte aus auf beiden Seiten von 0 bis 30 eingetheilt ist, und diese Theilung befindet sich innerhalb des Raumes, den die beiden Enden der Luftblase begrenzen, und der je nach der geringeren oder höheren Temperatur der Luft der Verkürzung und der Verlängerung unterworfen ist. Es ist nothwendig, dafs die Endpunkte der Luftblase auf beiden Seiten gleichnamige Theilpunkte berühren, als die Theilpunkte 10 und 10, 11 und 11 u. s. w., erst dann steht das Instrument richtig im Niveau.

Das kleine Niveau auf der Kreisaxe dient dazu, der Säule des Instruments die senkrechte Lage zu geben, ohne das Bleiloth anwenden zu müssen, und um sehen zu können, ob das Instrument während der Beobachtungen die richtige Stellung behält, weshalb es mit dem Instrument durch Schraubenbewegung berichtigt werden kann. An den Enden der Umdrehungsaxe befinden sich zwei Tüllen zum Einsetzen von Lichten für Beobachtungen bei Nacht. Für die Anwendung des Bleiloths befinden sich an zweien senkrecht über einander möglichst weit von einander entfernten Punkten des Kreisringes Lehren. Die obere Lehre trägt den Faden des Bleiloths, welcher genau in eine Marke der unteren Lehre einspielen mufs. Bei Beobachtung von Zenithdistanzen irdischer Gegenstände und selbst der Sonne oder eines Sterns, um die Uhr zu reguliren, kann man sich recht gut mit jenem kleinen Niveau begnügen, um die Säule und den Kreis in die Verticalebene zu bringen, aber bei Breitenbeobachtungen ist es sicherer, sich des Bleiloths zu bedienen.

Das Erste, das geschehen mufs, wo man irgend eine Beobachtung beginnt, ist, zu sehen, ob die optische Axe der Fernröhre parallel der Ebene des Instruments ist: Man setze das Instrument auf seinen Fufs der Art, dafs einer der Arme des Fufses in der Richtung eines weit entfernten und im Horizont befindlichen Gegenstandes sei, und dafs die Umdrehungsaxe senkrecht auf dieser Richtung sich befinde; man richte die Ebene des Instruments auf diesen Gegenstand, indem dieselbe sehr genau horizontal gerichtet wird, richtet das Fernrohr auf den horizontalen Gegenstand, und zur Seite desselben stelle ein Prüfungsfernrohr, bringe den horizontalen Faden dieses letzten genau auf denselben Gegenstand, drehe dasselbe Prüfungsfernrohr um, und es hat die richtige Lage, wenn derselbe Horizontalfaden auf denselben Punkt trifft, widrigenfalls dieses Prüfungsfernrohr erst berichtigt werden mufs. Zeigt nun der horizontale Faden des zu prüfenden Fernrohrs am Instrument denselben Punkt, so ist die optische Axe desselben mit der genau horizontal gestellten Ebene des Kreises parallel, wo nicht, so mufs die Parallelität durch die Fadenkreuzschraube hergestellt werden Zur Sicherheit soll man nach Delambre die Kreisscheibe von 15 zu 15 Grad verstellen, und jedesmal von Neuem prüfen.

Um die Zenithdistanzen der Sterne zu beobachten, mufs man einen der Arme des Fufses möglichst nahe in die Richtung des Meridians bringen. Hierdurch geschieht, wenn man genöthigt ist, von der Fufsschraube Gebrauch zu machen, um den Stern vollends unter den Faden zu bringen, die Bewegung, welche man dem Kreise giebt in der Kreisebene selbst, und verändert nicht die Verticalität.

In dieser Lage ist die Linie, welche die Axen der beiden anderen Schrauben verbindet, parallel dem ersten Vertical, und deren Bewegung geschieht in der günstigsten Richtung, um die Verticalität der Kreisebene herzustellen. Delambre bezeichnet die erste der drei Schrauben mit dem Namen der Meridianschraube oder der mittleren Schraube, die beiden anderen mit Seitenschrauben. Nachdem das Instrument auf einer festen Unterlage festgestellt, und die Kreisebene durch Bleiloth, Libellen und Stellschrauben bei jeder Azimuthalbewegung in senkrechte Lage gebracht worden ist, wird der verticale Kreis durch die Umdrehung der Säule und darauf folgende feinere Stellungen in das Vertical des zu beobachtenden Gestirns gebracht, der an dem Objectiv des oberen Fernrohrs befindliche Nonius wird auf den Nullpunkt des Limbus gestellt, und der Kreis mit dem unverrückt bleibenden Fernrohr so gedreht, dafs das Fadenkreuz das Gestirn schneidet; das Gestirn steht also auf dem Nullpunkt des Limbus. Hierauf dreht man die Scheibe genau um 180° horizontal herum, und das Fernrohr weist nun auf einen Punkt des Himmels, der entgegengesetzt soweit vom Zenith entfernt ist, als das beobachtete Gestirn. Nun wird das Fernrohr ohne den Kreis in die Richtung des Gestirns gedreht, und die Alhidade des Fernrohrs giebt nun den doppelt so grofsen Winkel auf dem Limbus an, um welchen das Gestirn vom Zenith absteht. Es ist also mit diesen beiden Beobach-

tungen eine Doppelrepetition des gesuchten Winkels geschehen, und während dieser Arbeit durch einen Beobachter hat ein zweiter dafür gesorgt, dafs das Instrument die ursprüngliche verticale Stellung beibehalten hat, und die Libellen durch die angegebenen Stellschrauben erforderlichenfalls corrigirt.

Ist die Zenithdistanz 20°, so giebt der Limbus 40° an. Wird nun der Kreis wieder 180° horizontal umgedreht, so zeigt das Instrument mit 40° auf dem Limbus wieder auf den entgegengesetzt liegenden gleich weit vom Zenith entfernten Punkt, und wird jetzt wieder das Fernrohr bei festbleibendem Kreise mit dem Fadenkreuz auf dasselbe Gestirn gerichtet, so schneidet der bei 0 befindliche Nonius mit 80° ab, und man hat die 4fache Repetition erreicht.

Gesetzt, man könnte mit dem Nonius Winkel auf höchstens 5 Sec. Genauigkeit ablesen, und nach vollendeter 4facher Repetition zeigte der Nonius auf dem Limbus den ∠ 80° 10′ 5″, so wäre der Zenithabstand = 20° 2′ 31¼″, und hierin besteht der Vortheil der Repetition oder Multiplication, welche beliebig vervielfacht werden kann, dafs das Maximum der Genauigkeit noch zu dividiren ist.

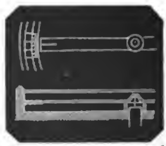
Boussole, ein Winkelmefs-Instrument mit Hülfe der frei spielenden Magnetnadel, indem diese immer einerlei Richtung behält, und wenn sie daraus durch äufsere Einwirkung entfernt wird, dieselbe wieder einnimmt (s. Abweichung der Magnetnadel). Die B. besteht aus einem in 360 Grade (auch halbe und Viertelgrade) eingetheilten Kreisring mit Diopteru zum

Fig. 233.



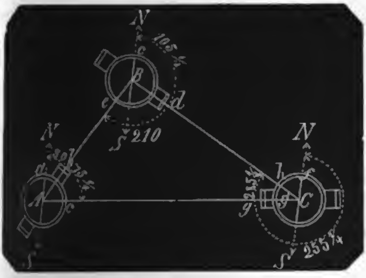
Visiren; in dessen Mittelpunkt ist senkrecht ein Stift eingesetzt, auf dessen Spitze ein magnetisirtes leichtes dünnes längliches Eisenplättchen von 5 bis 6 Zoll Länge frei spielen kann, und das also mit seinem Nordpol immer nach einer bestimmten Richtung zeigt, wenn die Vermessung damit nur auf wenige Meilen im Umkreise ausgedehnt wird. Der Ring mit der Nadel befindet sich in einem dosenförmigen Gehäuse, ist mit einer Glasplatte überdeckt; für den Transport sind die Dioptern um Charniere drehbar und flach umzulegen, und die Nadel ist durch eine einfache Schiebevorrichtung zu arretiren. Die Nadel spielt horizontal mit einem äufserst geringen Spielraum innerhalb des Ringes und zeigt mit einer Spitze, besser mit einem eingerissenen Strich die Theilung an.

Fig. 234.



Man stelle sich nur den einfachen Fall vor, dafs das △ *ABC* vermessen werden soll, und dafs man eine dazu geeignete Seite *AB* mit der Kette wirklich vermessen hat, so stellt der Feldmesser die B. nach einander über die Punkte *A*, *B*, *C* und die Magnetnadel wird in allen drei Punkten die von den Pfeilen angegebene gleiche Richtung *SN* zeigen. Die Visirebene der Dioptern steht am zweckmäfsigsten und wohl jetzt bei allen B. senkrecht auf einem Durchmesser des eingetheilten Kreisringes, und dieser ist dort mit 0° und 180° bezeichnet, so dafs die Objectivdiopter auf 0° steht, wenn nicht beide Dioptern zum Vor- und Rückwärtsvisiren eingerichtet sind. Gesetzt, der Feldmesser habe ein Instrument mit einfachen Dioptern, und er dreht nun den Ring so, dafs die Dioptern mit dem Nullpunkt nach *AB* gerichtet werden, so bleibt die Nadel in *SN*, und giebt den Bogen *ab* (mit z. B. 30°) an; notirt er nun, und dreht Null auf *AC*, so zeigt die Nadel mit *N* den Bogen *ac* (mit z. B. 75¼°), und der ∠ *ABC* ist = 45¼° gefunden. Hierauf das Instrument über *B* gesetzt, nach *C* visirt, zeigt *SN* in *c* den Bogen *cd* (z. B. 105¾°); hierauf nach *A* visirt, zeigt *SN* in *c* den Bogen *cde* = 210°, nämlich 180° + ∠ *aAB* = 180° + 30°, und wenn die Nadel den ∠ nicht genau 210° angiebt, so ist wo ein Fehler gemacht. Zugleich ist ∠ *ABC* = 210° − 105¾° = 104¼° gefunden. Das Instrument über *C* gebracht, nach *A* visirt, zeigt *N* in *f* den

Fig. 235.



Bogen $fSg = 255\frac{1}{4}°$, nämlich $180° + \angle aAC = 180° + 75\frac{1}{4}°$, sonst ist ein Fehler wo gemacht, und nach *B* visirt, zeigt *N* in *f* den Bogen $fSgh = 285\frac{1}{2}°$, nämlich $180° + \angle cBC = 180° + 105\frac{1}{2}°$; zugleich ist $\angle BCA = 30\frac{1}{4}°$ gefunden.

Sind die Dioptern am Instrument zum Vor- und Rückwärtsvisiren eingerichtet, so visirt man *B* nach *A* aus 0 über 180° und erhält eine Controlle für *BA* mit Bogen $ab = 30°$, eben so in *C* nach *B* und *A* aus 0 über 180°. Auch kann bei einfachen Dioptern der Kreisring mit 2 Zahlenreihen versehen werden, so dafs die Zahlen 0, 90°, 180°, 270° der einen Reihe mit den Zahlen 180°, 270°, 0°, 90° der andern Reihe zu denselben Theilstrichen gehören. Jeder Feldmesser hat sich mit seiner B. zu routiniren.

Fast alle Lehrbücher berühmter Autoritäten, von Tobias Mayer bis zu Schulz Montanus, sind auf die B. böse, in einigen Ländern ist sie den Feldmessern verboten (in Preufsen nicht), und es ist nicht zu läugnen, dafs sie viele Unvollkommenheiten in sich vereinigt: In der Nähe der Nadel darf kein Eisen sein, also auch der eingetheilte Ring und das Gehäuse müssen aus eisenfreiem Messing bestehen, welches nicht leicht zu haben ist, die Nadel mufs möglichst empfindlich und leicht beweglich sein, und so ist sie denn auch in der Ruhe, wie man es nennt und wo man die Theilung abliest, nicht ganz ohne Bewegung. Aus diesem Grunde kann ein Nonius nicht viel helfen, und es bleiben die Winkel auf höchstens ¼ Grad Schärfe bestimmbar.

Erwägt man indefs, dafs aufser der so leichten und schnellen Controlle für richtige Messung auf dem Felde die B. ihrer Einfachheit wegen jeder angehende Feldmesser in einer halben Stunde handhaben und gebrauchen lernt, dafs bei weitläufigen Feldmarken mit vielen winkligen Grenzen jede einzelne Linie mit einem Buchstaben bezeichnet mit deren Abweichung von der Magnetnadel in das Manual einzutragen ist, dafs man die ganze Vermessung tabellarisch notiren kann, dafs man, wenn auf die Charte eine beliebige lange Linie als magnetischer Meridian einmal festgestellt worden, eine ganze Menge zusammengehöriger Linien mit Hülfe des Boussolentransporteurs als Rose auftragen, und diese einzeln mit grofsen Dreiecken verschieben, und auf die richtige Länge gegenseitig abschneiden kann, so mufs man einsehen, dafs die Vermessung mit der B. die bequemste und einfachste aller Vermessungsarten ist, und sie gewährt auch hinreichende Zuverlässigkeit, wenn der Feldmesser nicht verabsäumt, überall Diagonalenwinkel zu messen, und grofse Dreiecke mit deren gegenseitiger Controllirung festzulegen, auch mehrere lange Linien mit der Kette wirklich zu vermessen.

Polygone, deren Diagonalen nicht visirt werden können, wie bei innerhalb liegender Waldung, wo also nur die Seiten mit der Kette, und deren Abweichung von der Nadel gemessen werden können, geben beim Auftragen selten eine genau schliefsende Figur, und die B. ist unzuverlässig. Zur Auffindung und Festlegung von Chausseelinien zwischen festen Endpunkten ist die B. das brauchbarste und die Arbeit förderndste Instrument. Aendrungen in der Richtung des magnetischen Meridians kann der Feldmesser an seiner eigenen Boussole zu jeder Zeit wahrnehmen, und eine seit Jahren inhibirte Vermessung mit Berichtigung der Nordlinie auf der Charte ohne Fehler zu begehen, fortsetzen.

Boyle'sches Gesetz ist das in dem Art. Aerodynamische Gesetze No. 5 angegebene Mariottesche Gesetz. Robert Boyle, ein Engländer, soll das Gesetz schon vor Mariotte aufgefunden haben, und es wird daher auch von den Engländern nur Boyle'sches Gesetz genannt.

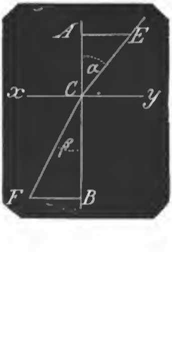
Brechende Fläche ist die Fläche, welche zwei durchsichtige Mittel verschiedener Dichtigkeit von einander trennt, in welcher also ein durchgehender Lichtstrahl gebrochen wird; wie z. B. Fig. 8 die Oberfläche des Wassers, in welcher der aus der Luft in *a* treffende Lichtstrahl *Sa* nach der Richtung *as* gebrochen wird;

Fig. 9 die Fläche *ca* des Glasprisma, in welcher der durch die Luft hindurchgegangene Strahl *sa* nach der Richtung *ab* gebrochen wird, und ebenso die Fläche *cb* des Prisma, in welcher der durch Glas gegangene Lichtstrahl *ab*, weil er nun durch Luft seinen Weg fortsetzt, in die Richtung *bs'* gebrochen wird. Besteht Fig. 28 das Prisma *ABC* aus Flintglas, das *ACD* aus Crownglas, so ist *AB* die b. F. zwischen Luft und Flintglas, *AC* zwischen Flint- und Crownglas und *CD* die zwischen Crownglas und Luft. Jedes Prisma hat 2 b. F.

Brechende Kante eines Prisma, die Kante, in welchen die beiden brechenden Flächen eines Prisma sich schneiden, z. B. in Fig. 27 *C*, *C'*.

Brechende Kraft eines Mediums ist ein Begriff, dessen Aufstellung und Feststellung auf einer Hypothese in Betreff der Brechbarkeit des Lichtstrahls beruht, und zwar auf derjenigen von vielen anderen Hypothesen, welche Newton darüber gegeben hat, nämlich die Brechung des Lichtstrahls, wenn dieser aus einem Mittel in ein anderes von anderer Dichtigkeit übergeht, rühre daher, dafs die Anziehungskraft des Mittels nach senkrechter Richtnug in Verhältnifs der Dichtigkeit wachse und abnehme. Ist also xy die brechende Fläche zwischen zwei Mitteln, das Mittel unterhalb xy dichter als das oberhalb, so wird der Strahl in der senkrechten Richtung AC, je näher er xy kommt, immer mehr angezogen und seine Geschwindigkeit wird gröfser; desgleichen ein in schiefer Richtung EC einfallender Strahl. Da aber die Anziehung nur in normaler auf xy befindlicher Richtung geschieht, so kann nur die normale Seitengeschwindigkeit (AC) wachsen, und die parallel xy statthabende Seitengeschwindigkeit (AE) mufs dieselbe bleiben. Dies ist aber nicht anders möglich, als dafs EC nach dem Einfallsloth CB hin gebrochen wird, weil nur dann bei einer Linie $BF \neq$ und $= AE$, $CB > AC$ wird.

Fig. 236.



Kommt der Lichtstrahl aus einem dichteren Mittel in ein dünneres, so nimmt die Anziehung bei xy ab, die mit xy parallelen Seitengeschwindigkeiten werden davon nicht berührt, sondern wieder nur die verticalen, BC mufs über xy hinaus kleiner werden, und das ist bei schief einfallendem Strahl nicht anders möglich, als wenn dieser von dem Einfallsloth CA abwärts nach CE gebrochen wird, weil mit $AE = BF$, $CE < BC$ wird.

Bezeichnet man den gröfseren Winkel zwischen Strahl und Einfallsloth mit α, den kleineren mit β, die kleinere Geschw. $EC = v$; die gröfsere $CF = v_1$ mit welcher der Strahl in dem dünneren und dem dichteren Mittel sich bewegt, so sind die anziehenden Kräfte P und P' nur von den lothrechten Seitengeschwindigkeiten $AC = v \cos\alpha$ und $CB = v_1 \cos\beta$ in Verhältnifs, und da anziehende Kräfte wie die Quadrate der zugehörigen Geschwindigkeiten sich verhalten

$$P : P^1 = v^2 \cos^2\alpha : v_1^2 \cos^2\beta \qquad (1)$$

und wenn

$$P = xv^2 \cos^2\alpha \qquad (2)$$

so ist

$$P^1 = xv_1^2 \cos^2\beta \qquad (3)$$

Die Wirkung der Anziehung P^1 des dichteren Mittels ist offenbar durch die der Anziehung P unterstützt worden, und man begreift unter absoluter Anziehung des dichteren Mittels die Differenz $P^1 - P$. Um diese oder vielmehr deren sichtbare Wirkung zu finden, hat man noch $AE = FB$ d. h.

$$v \sin\alpha = v_1 \sin\beta$$

also

$$xv^2 \sin^2\alpha = xv_1^2 \sin^2\beta \qquad (4)$$

Addirt man Gl. 4 und 3, so erhält man

$$xv^2 \sin^2\alpha + P^1 = xv_1^2$$

hierzu $2 : xv^2 \cos^2\alpha \qquad = P$

giebt addirt: $xv^2 + P^1 = xv_1^2 + P$

oder

$$P^1 - P = x(v_1^2 - v^2)$$

(aus 4)

$$= x\left(v_1^2 - v_1^2 \frac{\sin^2\beta}{\sin^2\alpha}\right)$$

woraus

$$P^1 - P = xv_1^2\left[\left(1 - \left(\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\right)^2\right]$$

Die sichtbare Wirkung der b. K. ist aber, wenn man die zwar constanten, aber unbekannten Gröfsen x, v^2 aus der Formel beseitigt:

$$\frac{P^1 - P}{xv_1^2} = 1 - \left(\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\right)^2$$

Trifft der Strahl aus einem dichteren Mittel ein dünneres, so erhält man

$$\frac{P - P^1}{xv_1^2} = \left(\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\right)^2 - 1$$

oder vielmehr

$$\frac{P - P^1}{xv^2} = \left(\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\right)^2 - 1$$

und unter der Gröfse $\frac{P^1 - P}{xv^2}$ oder $\frac{P - P^1}{xv^2}$ versteht man nun die brechende Kraft eines Mediums.

In dem Art. Ablenkung des Lichtstrahls, No. 1, ist angeführt, dafs zwischen zwei sich gleichbleibenden Mitteln das Verhältnifs $\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$ für alle Einfallswinkel constant ist, und Brechungsexponent genannt wird, woher für jedes Medium die brechende Kraft $\pm\left(\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\right)^2 \mp 1$ durch Beobachtung gefunden werden kann, wobei für die oberen Vorzeichen $\beta > \alpha$, für die unteren $\beta < \alpha$ ist.

Newton findet diese absolute b. K. unmittelbar, und es wird, nachdem Obiges vorausgeschickt ist, die Herleitung verständlich sein.

In dem Art. Ablenkung des Lichtstrahls, No. 1, ist gezeigt, was unter Grenzwinkel verstanden wird. Es sei β_1 der Grenzwinkel zwischen zwei Mitteln, so ist beim einfallenden Strahl $\alpha_1 = 90°$, und dieser hat mithin die lothrechte Seitengeschwindigkeit $= 0$; $\sin\alpha_1 = 1$, P ist

Fig. 237.



$= 0$ und $P^1 - P = P^1$. Es ist nun die lothrechte Seitengeschwindigkeit

$$P^1 = xv^2 \cos^2\beta_1 = xv^2(1 - \sin^2\beta_1)$$

und

$$\sin\beta_1 = \frac{\sin\beta_1}{1} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$$

der obige Brechungscoefficient; mithin die obige

$$\frac{P^1 - P}{xv^2} \text{ hier } \frac{P^1}{xv^2} = 1 - \left(\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\right)^2$$

Die absolute b. K. ist mit der Dichtigkeit d des Mittels proportional; bezeichnet man jene mit K, so nennt man die auf die Dichtigkeit 1 desselben Mittels reducirte b. K. $= \frac{K}{d}$ dessen specifische brechende Kraft.

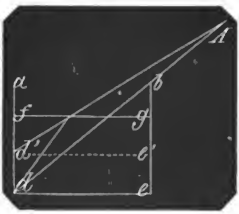
Brechender Winkel des Prisma ist der Winkel, den die beiden brechenden Flächen des Prisma als Neigungswinkel mit einander bilden.

Brechung der Bewegung ist gleichbedeutend mit Aenderung der Richtung eines sich bewegenden Körpers.

Brechung der Lichtstrahlen. Hierunter versteht man die Erscheinung, dafs der in gerader Linie fortgehende Lichtstrahl, wenn er auf einen Körper von gröfserer oder geringerer Dichtigkeit trifft, von hier ab seine Richtung ändert, und durch diesen anderen Körper in einer anders gerichteten geraden Linie fortgeht, so dafs beide Richtungen desselben Strahls eine gebrochene Linie bilden. Man erkennt dies augenfällig an vielen Erscheinungen, die uns sich darbieten. Auf einem Kahne befindlich, erscheint das Ruder *Sa* (Fig. 8, pag. 6) nicht wie auf dem Lande innerhalb des Wassers in gerader Linie fortgehend, sondern nach *as* geknickt.

Giefst man in ein leeres Gefäfs *abde* Wasser, z. B. bis zu *fg*, so scheint es flacher zu sein, der Boden *de* desselben scheint nun in *d'e'* sich zu befinden; denn der von dem Punkt *d* in's Auge *A* treffende Lichtstrahl nimmt nicht geradlinig durch *b*, sondern in der gebrochenen Linie *dh A* seinen Weg, und da man gewohnt ist, Gegenstände nur in gerader Richtung zu sehen, so versetzt man den Punkt *d*

Fig. 238.



in die Verlängerung von *Ah* nach *d'* und der Gefäfsboden scheint nun in *d'e'* sich zu befinden.

2. Die Gesetze der Lichtbrechung sind zum Theil schon in den Art.: Ablenkung des Lichtstrahls, achromatisch u. astronomische Refraction aufgeführt worden. Sie sind folgende:

A. Trifft ein Lichtstrahl senkrecht auf die ebene Fläche eines dichteren Körpers (eines durchsichtigen Mittels, eines Mittels) oder auf die krumme

Oberfläche in der Richtung des Krümmungshalbmessers, so wird er nicht gebrochen. Diese Richtung heifst zugleich das Einfallsloth, die Fläche, welche der Lichtstrahl trifft, die brechende Fläche und der Punkt, in welchem sie getroffen wird, der Einfallspunkt.

B. Trifft der Lichtstrahl die Fläche eines Mittels in jeder anderen Richtung, so wird er gebrochen. Der einfallende Strahl liegt mit dem gebrochenen Strahl und dem Einfallsloth in einer Ebene, der Brechungsebene; diese steht auf der brechenden Fläche, wenn sie eben ist, normal, und wenn sie krumm ist, wie z. B. bei Linsengläsern, normal auf der durch den Einfallspunkt zu denkenden berührenden Ebene.

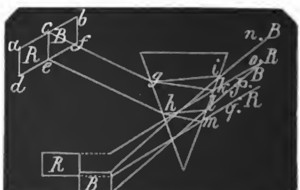
C. Bleiben die beiden verschieden dichten Mittel, durch welche der Lichtstrahl passirt, dieselben, so haben die Sinus der Einfallswinkel mit den Sinus der zugehörigen Brechungswinkel einerlei geometrisches Verhältnifs zu einander. Z. B. zwischen Luft und Wasser ist dies Verhältnifs = 1,336 (s. Ablenkung des Lichtstrahls, No. 1, brechende Kraft).

D. Mit der Brechung des Lichtstrahls geschieht zugleich dessen Zerspaltung in farbige Strahlen, welche alle durch dieselbe brechende Fläche zwischen zwei gleichbleibenden Mitteln unter verschiedenen Winkeln gebrochen werden, und es ist wahrscheinlich, dafs diese verschiedenen Brechungsvermögen auch der einzige Grund der Zerspaltung des Lichtstrahls sind, indem jeder der einzelnen Strahlen bei Berührung der brechenden Fläche seiner Natur folgt. Demnach würde der Lichtstrahl nicht chemisch, sondern mechanisch zerlegt, und man hätte sich den Lichtstrahl nicht als eine chemische, sondern als eine mechanische Vereinigung sehr vieler feinerer Farbenstrahlen zu denken; etwa wie der feine zu verwebende Seidenfaden aus 20 und mehreren von den Seidenraupen gesponnenen viel feineren Fäden dadurch künstlich zusammengesetzt wird, dafs von 20 und mehreren Cocons die Fäden alle durch ein sehr kleines Loch geleitet, straff durchgezogen werden, und durch ihre äufsere Klebrigkeit an einander haftend, zu einem einzigen homogen erscheinenden Faden sich vereinigen.

Es sei Fig. 26, pag. 23 *sa* ein auf *Ch* fallender Lichtstrahl, *ab'* und *af'* seien die äufseren Grenzen dessen Zerspaltung, wovon *ab'* roth, *af'* violett ist. Zwischen *b'af'* entstehen noch eine unzählige Anzahl anders gefärbter Strahlen, deren Grundfarben, sofern die Kunst aus diesen die übrigen durch Mischung hervorbringen kann) Roth, Gelb und Blau sind, und zwar der Reihenfolge nach Roth, Orange, Gelb, Grün, Blau, Violett, indem Roth und Gelb zu Orange, Gelb und Blau zu Grün sich mischen. Auffallend bleibt die äufserste Farbe Violett, da dies eine Mischung von Roth und Blau ist. Die in *h'C'* austretenden Farbestrahlen *b'd* und *f f'* und also auch die zwischenliegenden Strahlen sind einander ∦, daher ist die Zerspaltung des ursprünglichen Strahls nur sehr unvollkommen wahrzunehmen, weil beide brechende Flächen *Ch* und *h'C'* einander ∦ sind. Wird der Strahl dagegen durch ein Prisma geleitet, wie Fig. 25, so divergiren die gebrochenen Farbenstrahlen, und man kann sie in einiger Entfernung von dem Prisma durch eine vorgestellte weifse Tafel abgesondert auffangen. Dafs aber die Farbenstrahlen wirklich einzelne Theile des Lichtstrahls sind, ist daraus zu erkennen, dafs der Kegel *lgm*, der aus sämmtlichen Farbenstrahlen wieder zusammengesetzt wird, ein reines, weifses, ursprüngliches Licht darbietet.

Aber auch das reflectirte Licht bricht je nach seiner Farbe verschieden: Eine Tafel, links roth, rechts blau gefärbt, vor ein Prisma gestellt, bietet folgende Erscheinung:

Fig. 239.



Die Oberkante *ab* wirft Strahlen in der Ebene *cg*, die Unterkante *df* in der Ebene *eh* auf die brechende Fläche. *cb* und *ef* als blau werden stärker gebrochen nach Ebenen *gi*, *hl*, und treten in *in* nnd *lp* aus; *ac* und *de* als roth werden schwächer gebrochen nach Ebenen *gk*, *hm* und treten in *ko* und *mq* aus. Ein Auge in *nq* verfolgt nun die Strahlen geradlinig, und sieht die Tafel in 2 senkrechten Ab

sätzen, die linke rothe Hälfte höher, die rechte blaue Hälfte niedriger.

Brechung der Lichtstrahlen, doppelte, ist die Eigenschaft aller Krystalle, mit Ausnahme der des regulären Systems (s. Axensystem der Krystalle) jeden schief auffallenden Lichtstrahl in 2 Strahlen zu zerspalten. Die Krystalle des regulären Systems haben nur einfache Lichtbrechung, und der Brechungsexponent ist in allen Lagen des einfallenden Strahls gegen die brechende Fläche constant. Die Krystalle der folgenden beiden Systeme, des 2 und 1axigen und des 3 und 1axigen Systems haben doppelte Brechung der Art, dafs der eine Strahl einen immer constanten Brechungsexponenten hat, während bei dem anderen in jeder anderen Lage ein anderer, also ein veränderlicher Brechungsexponent stattfindet. Aus diesem Grunde wird der erste gebrochene Lichtstrahl gewöhnlicher, ordinärer, ordentlicher Strahl, der zweite gebrochene Lichtstrahl ungewöhnlicher, extraordinärer, aufserordentlicher Strahl genannt. Hat der einfallende Strahl eine solche Lage, dafs der ordentliche Strahl den möglich gröfsten Winkel mit der Hauptaxe des Krystalls bildet, so ist der Winkel zwischen diesem und dem aufserordentlichen Strahl ebenfalls am gröfsten; je näher der ordentliche Strahl an die Richtung ‡ der Hauptaxe fällt, desto kleiner wird der Winkel zwischen beiden gebrochenen Strahlen, und in der Richtung ‡ mit der Krystallhauptaxe treten beide gebrochene Strahlen in einem zusammen. Aus diesem Grunde nennt man jede der krystallographischen Hauptaxe parallele Linie die optische Axe, und da die zu den folgenden 3 Krystallisationssystemen gehörenden Krystalle 2 solcher Axen haben, die vorstehend genannten Krystalle einaxige Krystalle (d. h. optisch einaxige). Werden in diesen Krystallen die gewöhnlichen Strahlen stärker gebrochen als die zugehörigen ungewöhnlichen, so heifsen sie negative Krystalle, werden die gewöhnlichen Strahlen schwächer gebrochen, als die ungewöhnlichen, so heifsen sie positive Krystalle.

Die folgenden 3 Axensysteme, das 1 und 1axige, das 2 und 1gliedrige und das 1 und 1gliedrige System haben ebenfalls doppelte Brechung, allein keinen gewöhnlichen Strahl unter den gebrochenen; beide Strahlen haben veränderliche Brechungsexponenten und 2 optische Axen, sie sind 2axig, d. h. in den Richtungen ‡ dieser beiden Axen giebt es statt 2 nur einen gebrochenen Strahl; die Winkel, welche die beiden Axen bilden, und die Winkel, welche der einfallende Strahl mit dem Einfallsloth bilden mufs, damit der gebrochene Strahl in eine der Axen falle, sind in den verschiedenen Krystallen verschieden.

Brechungscoefficient (Dynamik) ist die Gröfse der Kraft, welche den Bruch, d. h. die Trennung der zusammenhangenden Theile eines festen Körpers bei gegebenen parallelepipedischen Dimensionen hervorbringt. Die Dimensionen werden in der Längen-Einheit, die Kraft wird in der Gewichts-Einheit ausgedrückt. Verschiedene Stoffe haben verschiedene Grade von Festigkeit, und somit verschiedene B., welche nur durch Versuche ermittelt werden können, und auch für die im praktischen Leben gebräuchlichsten Materialien ermittelt worden sind, und diese sind (allerdings nur näherungsweise) folgende:

1. Die Kraft gegen die absolute Festigkeit; d. h. für's Zerreifsen des Körpers durch Zugkraft nach dessen Länge, wenn der Querschnitt 1 preufs. □Zoll beträgt, in preufs. Pfunden.

Ahorn	17000	Pfd.
Akazie	14000	„
Apfelbaum	10000—15000	„
Basalt	1100	„
Birke	15000	„
Birnbaum	10000—11000	„
Blei, gegossen	900—1900	„
Blei, gewalzt	2000	„
Bleidraht (Eytelwein)	3900	„
Bronze, gegossen	34000	„
Buchsbaum (Eytelw.)	15800	„
engl. (Barlow)	20000	„
Ebenholz	13500	„
Eichenholz:		
Sommereich. Kern (Eyt.)	26000	„
zwisch. Kern u. Spl. (ders.)	21940	„
Splint (ders.)	14760	„
Steineichen (ders.)	22100	„
engl. (Barlow)	10000—11000	„
Eisen, deutsches gegossenes (Eytelw.)	70400	„
engl. gegossenes (Rennie)	95700	„
engl. (Mosely-Scheffler)	19000	„
schlesisches geschmiedet (Eytelw.)	78000	„
schwedisches geschmied. (Eytelw.)	76600	„
gewöhnl. geschmiedet	71000	„
engl. dgl. (Tredgold)	61700	„
„ dgl. (Mos.-Scheffler)	66000	„
Eisendraht (Eytelw.)	60400	„
engl. (Mos.-Scheffler)	90000	„
französischer	94000	„
engl. in Seilen	44000	„
Elfenbein	17000	„

26*

Erle (Eytelw.) . . . . . . 24700 Pfd.
englische . . . . . . 15000 „
Esche (Eytelw.) . . . . . . 21500 „
englische (Barlow) . . 17500 „
Fichte (Rothtanne), (Eytelw.) 11000 „
englische . . . . . . 12000 „
Fischbein . . . . 8000 „
Flieder . . . . 12000 „
Glas . . . . . . 2800 — 3000 „
Gold, gegossen . . . . . . 21000 „
Golddraht . . . . 67000 „
Granadillenholz . . . . . 17000 „
Guajakholz . . . 12000 — 14400 „
Hagedorn . . . . 11000 „
Hainbuche . . . . 20000 „
Hanfseile, neue . . 8000 — 9000 „
alte . . . . 6000 „
neue englische . . . 5600 „
Hasel . . . . 18000 „
Holunder . . . . 10500 „
Horn von Ochsen . . . . 9000 „
Kalkstein von Portland . . 900 „
zum lithographiren . . 450 „
oolithischer . . . . . . 200 „
Kampferbaum . . . . . . 16350 „
Kastanienbaum . . . . . . 12000 „
Ketten, eiserne, mit ovalen Gliedern . . . . 35000 „
mit geraden verbolzten Gliedern . . . . 47000 „
Kiefernholz, stärkstes . . . 21400 „
schwächstes . . . . 12500 „
englisches . . . . . . 12000 „
Kirschbaum, wild . . . . 14000 „
Klavierdraht . . 125400 — 136400 „
Knochen von Ochsen . . . 5000 „
Kupfer, gegossen englisches 20000 „
geg. japanisches . . . 20900 „
geg. spanisches . . . 21800 „
geg. ungarisches . . . 32600 „
geg. schwedisches . . 38900 „
geschmiedet englisches . 35000 „
geschm. schwedisches . 38900 „
geschm. französisches . 34000 „
Kupferdraht . . . 40000 — 70000 „
Lerche . . . . 10000 „
Linde . . . . 13900 „
englische . . . . . 18000 „
Mahagoni (Barlow) . . . . 8775 „
spanisches . . . . . . 14000 „
Marmor, weifser, (Tredgold) 1863 „
Mauerziegel (ders.) . . . . 283 „
Messing . . . . 18000 „
Messingdraht . . . 48500 — 70000 „
Mispelbaum . . . . . . 12000 „
Mörtel . . . . 50 „
hydraulischer . . . . 100 „
Nufsbaumholz . . . . . 14300 „
Olivenbaum . . . . . . 12600 „
Pappel . . . . 6000 „
Pflaumenbaum . . . . . . 12000 „
Platane . . . . 12000 „
Rohr, spanisches . . . . 6000 Pfd.
Rothbuche (Eytelw.) . . . . 22360 „
(Barlow) . . . . . . 11467 „
Sackerdanholz . . . . . . 22780 „
Sandelbaum . . . . 10130 „
Sandstein, stärkster . . . 750 „
Schiefer, italienischer . . . 11800 „
von Westmoreland . . 8100 „
schottischer . . . . . 9875 „
Silber, feines gegossenes . . 42000 „
Silberdraht . . . . 49700 „
Spiefsglanz, gegossen . . . 1093 „
Stahl zu Scheermessern . . 158200 „
zu gewöhnl Messern . 142400 „
mittelmäfsig biegsamer . 130800 „
bester biegsamer . . . 125500 „
bester gehärtet . . . 118100 „
englischer . 110000 — 133700 „
Teak, indische Eiche (Barlow) 15100 „
Ulme . . . . 14800 „
Wallnufsbaum . . . . . . 8000 „
Weide . . . . 15000 „
Weifsbuche . . . . 20400 „
Weifsdorn . . . . 18300 „
Weifstanne . . . . 12300 — 15400 „
Wismuth, gegossen . . . . 3200 „
Zeder . . . . 12000 „
Zink, gewalzt . . . . . . 7300 „
gegossen . . . . . . 8800 „
Zinn, engl. gegossen . . . 4400 „
Zuckerkistenholz . . . . 18800 „

2. Die Kraft gegen die relative Festigkeit; d. h. für's Zerbrechen des Körpers, dessen Querschnitt 1" breit, 1" hoch ist, durch Einwirkung normal auf die Länge in 1" Entfernung von der Drehaxe, in preufs. Pfunden.

Ahorn . . . . 9800 Pfd.
Akazie . . . . 11000 „
Birke . . . . 9500 „
Eiche . . . . 11000 „
Eisen, Gufseisen . . . . 40000 „
Schmiedeeisen . . . . 66000 „
Erle . . . . 10000 „
Esche . . . . 11000 „
Kiefer . . . . 10000 „
Lerche, grün . . . . . . 5200 „
Lerche, trocken . . . . . 7100 „
Mahagoni, spanisch . . . 7800 „
Mauerziegel . . . . 300 „
Pappel . . . . 6000 „
Portlandkalk . . . . . . 1000 „
Rothbuche . . . . 11000 „
Rothtanne . . . . 10000 „
Sandstein . . . . 700 „
Ulme . . . . 7600 „
Wallnufsbaum . . . . . . 8900 „
Weide . . . . 6700 „
Weifstanne . . . . 10500 „
Zeder . . . . 7000 „

3. Die Kraft gegen die rückwirkende

Festigkeit; d. h. für's Zerquetschen des Körpers, dessen Querschnitt 1 □Zoll beträgt, in preufs. Pfunden:

Apfelbaum	6700	Pfd.
Basalt	29000	„
Birke, grün	4700	„
trocken	6600	„
Birnbaum	7000	„
Buchsbaum, trocken	10500	„
Eiche, grün	4600	„
trocken	9800	„
Eisen, Gufseisen	140000	„
Schmiedeeisen	90000	„
Erle	7100	„
Esche	9300	„
Flieder	8700	„
Granit	5000—10000	„
Hainbuche	7500	„
Kalkstein	300— 9000	„
Kiefer	6300	„
Lerche, grün	3300	„
trocken	5700	„
Mahagoni	8400	„
Marmor	4000—11000	„
Mauerziegel	500— 2000	„
Mörtel	500	„
hydraulischer	700	„
Pappel, grün	3200	„
trocken	5300	„
Pflaumbaum, grün	3800	„
trocken	9600	„
Portlandkalk	6000	„
Rothbuche, grün	8000	„
trocken	9600	„
Rothtanne	5500	„
Sandstein, stärkster	10000	„
Ulme	10400	„
Wallnufsbaum	6800	„
Zeder	5200	„

Brechungsebene, s. u. Brechung der Lichtstrahlen.

Brechungsexponent für einen durchsichtigen Stoff ist, wie in dem Art.: Brechung der Lichtstrahlen schon angeführt, der constante Quotient des Sinus des Einfallswinkels, dividirt durch den Sinus des gebrochenen Winkels. Die Bestimmung desselben für jeden einzelnen Stoff, wenn der Lichtstrahl aus der Luft denselben trifft und durch ihn hindurchgeht, geschieht durch directe Messung mit einem Winkel-Instrument, indem man aus dem zu prüfenden Stoff ein Prisma formt, das Licht einer hellen Lampe mit einem dunklen Cylinder umgiebt, und in diesen ein feines Loch bohrt, durch welches nur ein Strahl auf einen bestimmten Punkt des Prisma fällt. Die Messung des Winkels des einfallenden und des gebrochenen Strahls wird um so genauer, je gröfser man den Einfallswinkel nimmt; der Quotient der Sinus wird berechnet. Für Flüssigkeiten bestimmt man den B. ebenfalls durch ein Prisma, nämlich durch ein hohles Glasprisma, mit ebenen, durchweg parallelen inneren und äufseren Seitenwänden, in welches die Flüssigkeit gegossen wird; desgleichen für Gase, bei welchen noch deren Dichtigkeit zu berücksichtigen ist.

Das Schleifen von genauen Prismen ist bei vielen Körpern fast unausführbar. Man hat aber Flüssigkeiten, in die solche feste Körper getaucht, fast ganz unsichtbar, also durchsichtig werden, indem die Flüssigkeit mit dem festen Körper einerlei Brechbarkeit hat, wie Crownglas in kanadischem Balsam, eine Mischung von Cassiaöl und Baumöl für Edelsteine und dergl. mehr. Hierdurch kann der B. des festen Körpers untersucht werden, ohne dafs er zum Prisma bearbeitet wird. Dieser Gegenstand gehört allein in die Physik.

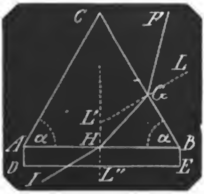
Aber auch undurchsichtige Körper haben Lichtbrechungsvermögen, allerdings ist ein auf einen solchen fallender Strahl bei seinem Fortgang im Innern nicht wahrzunehmen und zu verfolgen, er wird durch den Körper verschluckt; man kann aber dennoch den B. eines dunklen Körpers indirect finden, wenn man durch einen stärker brechenden durchsichtigen Stoff einen Lichtstrahl unter einem bestimmten Winkel auf ihn fallen läfst.

Im Art.: Ablenkung des Lichtstrahls ist gezeigt, dafs wenn bei dem Exponent $n = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$ also $n \sin \beta = \sin \alpha$, $n \sin \beta$ also auch $\sin \alpha > 1$ also $\alpha > 90°$ wird, unter dem $\angle \beta$ der Lichtstrahl nicht mehr in das weniger brechende Medium austritt, sondern zurücktritt und reflectirt. Bei dem Lichtstrahl aus Wasser in Luft findet dies statt, wenn β gröfser als $48° \, 27\frac{1}{2}'$ wird, weil $n = 1{,}336$ ist, und weil $1{,}336 \times \sin 48° \, 27\frac{1}{2}' = 1$ ist, wonach $\alpha = 90°$, also der Lichtstrahl längs des Wassers fortgeht und bei $\beta > 48° \, 27\frac{1}{2}'$ ins Wasser zurückkehrt und zum Spiegelbild wird.

Es sei *CAB* ein Glasprisma, dessen B. also bekannt (Tafelglas $n = 1{,}527$), *ABDE* ein untergelegter ebener dunkler Körper *K*, dessen Lichtbrechungsvermögen ermittelt werden soll. Ist nun *FG* ein einfallender Lichtstrahl, so würde dieser nach *GH* so gebrochen werden, dafs $n \cdot \sin L'GH = \sin LGF$, und wenn der B. zwischen Glas und $K = \frac{1}{n'}$, also zwischen dem weniger brechenden *K* und dem stärker brechenden Glas n', so würde

der in *H* auffallende Lichtstrahl *GH* nach *HI* so gebrochen werden, dafs *n' sin GHL'* = *sin IHL"*. Hiermit wird also der Lichtstrahl *GH* von dem dunklen Körper *K*

Fig. 240.



verschluckt, und man kann dessen weitere Richtung *HI* nicht verfolgen. Bringt man dagegen den Lichtpunkt *F* immer näher an *L*, so wird ∠ *FGL* kleiner, auch ∠ *HGL'* kleiner, folglich ∠ *GHL'* gröfser und ∠ *IHL"* gröfser und dieser endlich $= 90°$. In diesem Augenblick wird der Lichtstrahl *HI* nach der Richtung *HA* sichtbar.

Nun hat man

$$n' \sin GHL' = 1$$

oder da

$$\angle GHL' = 180° - L' - \angle HGL'$$
$$= \alpha - \angle HGL'$$

daher

$$n' \sin(\alpha - HGL') = 1$$

Ferner ist

$$n \sin HGL' = \sin FGL$$

woraus, wenn ∠ *FGL* gemessen wird, ∠ *HGL'* und *n'* bekannt sind.

So wie nun *n* zwischen Luft und Glas, so ist *n'* zwischen Glas und *K* constant, und es ist der B. zwischen Luft und *K* zu bestimmen. Bezeichnet man den ∠, der in *K* bei dem Einfallswinkel *HGL'* aus Glas der gebrochene ist, mit *x*, so hat man

$$n' \sin HGL' = \sin x$$

und

$$n \sin HGL' = \sin FGL$$

folglich ist $\frac{n}{n'} \sin x = \sin FGL$

und $\frac{n}{n'}$ der gesuchte B. zwischen Luft und *K*.

Brechungsfläche, s. v. w. brechende Fläche.

Brechungsgesetze, s. u. Brechung des Lichtstrahls.

Brechungspunkt, der Punkt einer brechenden Fläche, in welchem ein Lichtstrahl auffällt.

Brechungssinus ist der Sinus des Brechungswinkels; den Grund der Benennung s. u. Ablenkung des Lichtstrahls oder Brechungsexponent.

Brechungsverhältnifs ist das constante geometrische Verhältnifs zwischen dem Sinus des Einfallswinkels und dem Sinus des Brechungswinkels für 2 bestimmte Mittel von verschiedener Dichtigkeit. Z. B. zwischen Luft und Alkohol ist es = 1,374 d. h. wenn ein Lichtstrahl aus der Luft auf einen Alkoholspiegel unter irgend einem Einfallswinkel *e* trifft, und man bezeichnet den Brechungswinkel mit *b*, so ist $\frac{\sin e}{1,374} = \sin b$ oder $\frac{\sin e}{\sin b} = 1,374$

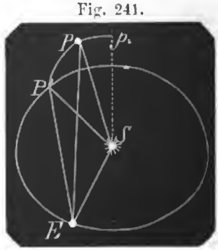
Brechungsvermögen wird auch die specifische brechende Kraft genannt, s. brechende Kraft am Schlufs.

Brechungswinkel ist der Winkel, den der gebrochene Strahl mit dem Einfallsloth bildet (s. Ablenkung des Lichtstrahls). In Fig. 8 ist ∠ *sae* der B., in Fig. 9 ∠ *eab* und auch ∠ *E'bs'* ist ein B., weil der durch Glas auf *cb* einfallende Strahl *ab*, da er von *b* aus in die Luft tritt, nach *bs'* gebrochen wird.

Kommt der Lichtstrahl aus einem dünneren Mittel in ein dichteres, so geschieht die Brechung nach dem Einfallsloth hin, der B. ist kleiner als der Einfallswinkel; aus einem dichteren Mittel in ein dünneres geschieht die Brechung des Strahls von dem Einfallsloth aus abwärts, der B. ist gröfser als der Einfallswinkel.

Breite, astronomische, s. zuerst astronomische Breite. Bedeutet *S* die Sonne, die Ellipse *DP'E* die Ekliptik, deren Ebene von allen Seiten bis in's Unendliche ausgedehnt zu denken ist, *E* den augenblicklichen Stand der Erde in derselben, *P* einen Planeten aufserhalb der Ekliptik, *PP'* den senkrechten Bogen auf derselben, der also verlängert das aus

Fig. 241.



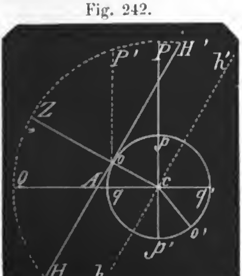
S auf die Ekliptik errichtet zu denkende Loth *Sp* trifft, so ist *PP'* die astron. B. von *P*. Dieser Bogen von der Sonne *S* aus gesehen, hat den ∠ *PSP* zum Maafs, von der Erde *E* aus gesehen das Maafs ∠ *PEP'*; beide Winkel sind von einander verschieden und ∠ *PSP'* ist die heliocentrische, ∠ *PEP'* die geocentrische Breite des Planeten *P*.

Die gerade Linie *PS*, die wahre Entfernung des Planeten von der Sonne heifst Radius vector des Planeten, die gerade Linie *PE* ist die wahre Entfernung des Planeten von der Erde. In dem in der Ekliptik liegenden geradlinigen △ *P'ES* ist *P'* der auf die Ekliptik reducirte Ort des Planeten, der für astronomische Berechnungen statt des wirklichen augenblicklichen Orts *P* gesetzt wird, *P'S* und *P'E* heifsen die curtirten (verkürzten) Abstände des Planeten von der Sonne und von der Erde. Der ∠ *P'SE* (Scheitelpunkt die Sonne) heifst die Commutation, der ∠ *P'ES* (Scheitelpunkt die Erde) heifst die Elongation, und ∠ *EP'S* (Scheitelpunkt der reducirte Ort des Planeten) die jährliche Parallaxe des Planeten. Ist *P* ein Fixstern, der Bogen *PP'* also von S wie von *E* unendlich fern, so fallen die ∠ *PEP'* und *PSP'* in einen Winkel, und die heliocentrische mit der geocentrischen B. in eine B. zusammen.

Breite, geocentrische, s. u. Breite, astronomische.

Breite, geographische. Diese wird von dem Aequator aus bis zu den Polen gemessen, und zwar als Bogen eines Meridians, den Halbmesser der Erde als Einheit genommen oder in einem Winkel, dessen Scheitelpunkt der Erdmittelpunkt ist, dessen fester Schenkel als Erdhalbmesser in der Aequatorebene liegt, und

Fig. 242.



dessen zweiter Schenkel zu dem jedesmaligen Ort der Erdoberfläche führt. In dem Durchschnitt der Erde sei *c* der Mittelpunkt, *p* der Nordpol, *p'* der Südpol, *qq'* der Aequator, *o*, *o'* Oerter der Erdoberfläche, so ist der Halbkreis *poqp'* der Meridian von *o*, *pq'o'p'* der von *o'*. Bogen *oq* oder ∠ *ocq* die g. B. von *o*, Bogen *o'q'* oder ∠ *o'cq'* die g. B. von *o'*; die erstere g. B. ist nördlich, die zweite südlich. Ein Ort in der Aequatorebene *qq'* hat keine g. B. oder dieselbe = Null; der Pol *p* hat 90° nördliche, der Pol *p'* hat 90° südliche g. B.

2. Denkt man sich die Linien *p'p*, *q'q* und *co* bis *P*, *Q*, *Z* in das unendliche ferne Himmelsgewölbe verlängert, desgleichen eine in *o* die Erdoberfläche tangirende Ebene *HH'*, so ist *P* der nördliche Weltpol, *Q* ein äufserster Punkt des Weltaequators, *Z* das Zenith und *HH'* der Horizont des Ortes *o*.

Es erscheint dem Beobachter in *o* der Himmelspol *P* in einer Höhe, welche der Bogen *PH'*, und der Aequatorpunkt *Q* in der Meridian-Ebene in einer Höhe, welche der Bogen *QH* ausdrückt; daher nennt man Bogen *PH'* oder ∠ *PBH'* die Polhöhe des Orts *o* und Bogen *QH* oder ∠ *QAH* die Aequatorhöhe des Orts *o*.

Nun ist ∠ *PBH'* = ∠ *oBc* = ∠ *ocq* d. h. die Polhöhe eines Orts ist = dessen g. B. Ferner ist ∠ *QAH* = ∠ *oqc* und ∠ *oqc* + *ocq* = 90°, d. h. die Polhöhe oder die g. B. eines Orts ergänzt dessen Aequatorhöhe zu 90°. Der Abstand des Pols vom Zenith, Bogen *PZ* oder ∠ *PcZ*, die Polardistanz oder die Zenithdistanz des Pols ist = der Aequatorhöhe des Orts und ergänzt die g. B. oder die Polhöhe desselben Orts zu 90°.

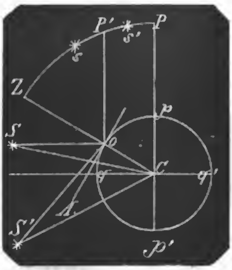
In dem Art.: astronomischer Horizont ist schon erklärt, dafs statt des (scheinbaren) Horizonts *HH'* durch den Ort *o* auch durch den Mittelpunkt *c* der Erde der wahre Horizont ∦ *HH'* genommen werden kann, und dafs für unendlich ferne Gegenstände die Bogen *PH'* und *Ph'* (∠ *PBH'* = ∠ *Pch'*) die Bogen *QH* und *Qh* (∠ *QAH* = ∠ *Qch*) u. s. w. gleich grofs sind.

3. Für jeden Ort der Erde die g. B. direct durch Messung vom Aequator aus zu bestimmen ist unausführbar; die Uebereinstimmung jeder g. B. mit der zugehörigen Polhöhe giebt das Mittel zur astronomischen Bestimmung derselben, und es wäre dies ein Leichtes, wenn in dem Pol *P* ein Fixstern stände; denn wegen der unendlichen Ferne *P* von der Erde würde die Visirlinie von *o* nach *P* ∦ mit *cP* in *oP'* fallen, und ∠ *P'oH'* wäre die

g. B. von *o*, wobei zu bemerken, dafs direct nur die Zenithdistanz ($\angle PoZ$) von *P* gemessen werden kann, so dafs durch $\angle PoH' = 90° - \angle PoZ$ die g. B. von *o* erhalten wird.

Allein der Nordpol wird durch keinen Stern bezeichnet; der dem Pol nächste Stern, der Polarstern im Schwanz des kleinen Bären steht gegenwärtig $1\frac{1}{2}$ Grad vom Nordpol entfernt und beschreibt mithin alle 24 Stunden einen Kreis von 3° im Durchmesser, wobei er zweimal in einem jedesmaligen Zeitabstande von 12 Stunden durch den Meridian eines Ortes geht (zweimal culminirt). Bedeuten *s*, *s'* die beiden Culminationspunkte des Polarsterns, so sind die Linien *oP'*, *os*, *os'*

Fig. 243.



wieder ⫲ mit denjenigen, welche aus *p* nach denselben Punkten *P*, *s*, *s'* genommen werden, und diese Punkte *s*, *s'* können zur Bestimmung der g. B. eines Orts *o* benutzt werden; denn es ist

$$\tfrac{1}{2}(\angle soZ + \angle s'oZ) = \angle PoZ$$

und die g. B. von *o* ist $= 90° - \angle PoZ$.

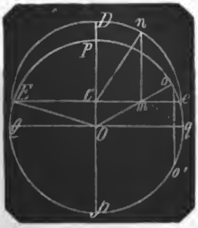
Von allen Circumpolarsternen eines Orts ist der Polarstern am geeignetsten dazu, weil er der höchste ist, und daher die von jedem beobachteten Winkel abzuziehende astronomische Refraction (s. d.) am geringsten ausfällt.

4. Für Orte, die vom Pol entfernt liegen, mufs man sich zur Bestimmung der g. B. anderer Fixsterne bedienen, die keine Circumpolarsterne sind, und deren gröfste Höhe im Augenblick der Culmination gemessen wird. Die Arbeit wird dadurch erleichtert, dafs man aus den Sternverzeichnissen die Culminationszeiten jedes ausgezeichneten Fixsterns für Orte, wo Sternwarten sind, genau kennt, und dafs daraus auch die für andere Orte ziemlich genau zu berechnen sind, so dafs man zu rechter Zeit an die Arbeit gehen kann. Ferner kennt man aus den Sternverzeichnissen die Abweichung jedes Fixsterns. Es sei *S* ein bekannter Fixstern in dem Augenblick, wo er für *o* culminirt, so mifst man $\angle ZoS = \angle ZcS$ die Zenithdistanz von *S* für *o* seine nördliche Abweichung ($\angle Scq$) ist in den Verzeichnissen gegeben, mithin ist die g. B. von $o = \angle ZoS + \angle Scq$. Ist *S'* der beobachtete Fixstern, seine südliche Abweichung $\angle qcS'$, seine Zenithdistanz $= \angle ZoS' = \angle ZcS'$, so ist die g. B. von $o = \angle ZoS' - \angle qcS'$. In beiden Fällen mufs die astronomische Refraction (s. d.) mit Minus in Rechnung gebracht werden.

5. Ist *S*, *S'* die Sonne, *S* ihr Stand im Sommer, *S'* im Winter, so kennt man für jeden einzelnen Tag deren nördliche oder südliche Abweichung. Man visirt nach dem oberen und nach dem unteren Rande, der Unterschied zwischen beiden oder der scheinbare Sonnendurchmesser beträgt zu Mittage 31′ 58″, das Mittel zwischen beiden giebt die Höhe oder den Zenithabstand deren Mittelpunkt, je nachdem man $\angle AoS$ oder $\angle ZoS$ gemessen hat; je nach der Höhe der Sonne über dem Horizont mufs die Refraction subtrahirt werden. Hier aber ist $\angle ZoS$ nicht $= \angle ZcS$, d. h. $\angle oSc$ ist nicht = Null, weil die Sonne *S* nicht ∞ fern, sondern etwa 21 Millionen Meilen also in einem mefsbaren Abstande von der Erde entfernt und $\angle oSc$, die Höhenparallaxe der Sonne beträgt 8,6″, welche von $\angle ZoS$ abgezogen werden müssen, um $\angle ZcS$ zu erhalten; hierzu die bekannte nördliche Abweichung *Scq* addirt giebt die g. B. von *o*. Wird ein Mittagsstand *S'* der Sonne im Winter gewählt, so ist $\angle ZoS' - [\angle oS'c = 8{,}6''] -$ Abweichung $qcS' =$ g. B. von *o*.

6. Man findet die g. B. eines Orts durch Zeichnung, wenn man die Dauer des längsten Tages daselbst weifs. Man beschreibe um den Punkt *o*, welcher die Erde und den Ort darauf vorstellen soll, einen beliebigen Kreis als Meridian an der Himmelskugel, theile diesen in Quadranten; *Pp* sei die Axe, *Qq* der Aequator. Zeichne $\angle EOQ =$ der Schiefe der Ekliptik, ziehe den Wendekreis *Ee* ⫲ *Qq* und beschreibe über *Ee* den Halbkreis. Ist nun die Zeit des längsten Tages in $O = h$ (z. B. 16) Stunden, so nimm Bogen $EDn = \frac{h}{24}$ $\left(\frac{16}{24} = \frac{2}{3}\right) \times EDe$ oder $\angle ECn = \frac{h}{24} \cdot 180°$ fälle das Loth *nm* auf *Ee*, ziehe *Oo* durch *m*, so ist $\angle DOo$ die g. B. von *O*.

Fig. 244.



Denn da $PEpqP$ der Meridian von O, Ee der Durchschnitt des Sonnen-Parallelkreises, so ist E der Stand der Sonne im Mittage, e der zu Mitternacht, m der Durchschnittspunkt des Standes der Sonne beim Aufgange, indem EDn als halber Tagebogen construirt ist, folglich ist m ein Punkt im Horizont von O, Oo der Halbmesser des Horizonts, und da OP die Weltaxe, so ist $\angle POo$, die Polhöhe = der g. B. von O. Ist der längste Tag 12 Stunden (das Minimum) so fällt n in D, m in C, Oo in OP, die Polhöhe ist = Null, und O liegt im Aequator Qq. Ist der längste Tag = 24 Stunden, so fällt n in e, m in e, Oo in Oe, die Polhöhe ist $= POe$, die Polardistanz $= eQq =$ der Schiefe der Ekliptik, mithin liegt o im Polarkreise.

Wenn man nach vollendeter Construction den Kreis $PQpq$ als Erdkugel betrachtet, und zieht von dem zuletzt erhaltenen Punkt o die Linie $oo' \mp Pp$, so hat man in oo' den Parallelkreis von o auf der Erde, wenn Pp als Aequator, qQ als Erdaxe angenommen wird.

7. Aus der vorstehenden Construction läfst sich eine Formel für Bestimmung der g. B. ableiten.

Setzt man die zu findende g. B. für einen Ort o $(\angle POo) = B$; die Schiefe der Ekliptik $(\angle EOQ) = e$; den Halbmesser $OQ = 1$, so ist $CE = \cos e$, $CO = \sin e$ und $Cm = \sin e \, tg\, B$. Ist nun die Dauer des längsten Tages in $o = (12 + h)$ Stunden gegeben, so ist $\angle DCn = \frac{h}{12} \cdot 90° = 7\frac{1}{2} h°$

$Cm = Cn \cdot \sin 7\frac{1}{2} h° = \cos e \cdot \sin 7\frac{1}{2} h°$, und man hat

$$\sin e \cdot tg\, B = \cos e \cdot \sin 7\tfrac{1}{2} h°$$

woraus

$$tg\, B = \sin \cdot (7\tfrac{1}{2} h°) \cdot \cot e$$

Der längste Tag in Berlin ist (s. Ascensionaldifferenz, No. 1, pag. 130)
= 16 Stunden 36 Minuten 22,4 Secunden, mithin

h = 4 Stunden 36 Min. 22,4 Sec., und

$7\frac{1}{2}h°$ = 34 Grad 32 Min. 48 Sec.

$e = 33°\ 30'$

Nun ist

$$\log \sin 34°\ 32'\ 48'' = 9{,}753\,6423$$
$$\log \cot 23°\ 30' = 10{,}361\,6981$$
$$\log tg\, B = \text{Summa } 10{,}115\,3404$$

und

$$B = 52°\ 31'\ 13''$$

Breite, geometrische, ist eine der beiden Dimensionen einer Fläche, gewöhnlich die kleinere, während die gröfsere Dimension bekanntlich Länge genannt wird.

Breite, heliocentrische, s. u. Breite astromische.

Breiten-Elemente sind die Elemente, durch welche die Bahnen der zu unsrem Sonnensystem gehörenden Gestirne in Beziehung auf die Ebene unsrer Erdbahn, der Ekliptik, der Lage nach bestimmt werden. Sie bestehen in 2 Bestimmungsstücken: in dem Neigungswinkel, den die Bahnebene des Gestirns mit der Erdbahnebene bildet und in der Lage der Knotenlinie gegen bestimmte Punkte der Erdbahn. Für dieses letzte Element wählt man den Frühlingspunkt und bestimmt den östlichen Abstand des aufsteigenden Knotens von demselben, d. h. die Länge des aufsteigenden Knotens (s. absteigender Knoten).

Breitengrade sind entweder geographisch oder astronomisch. Die Grade, 90 an der Zahl, in welche ein Meridianquadrant vom Erd-Aequator, dem Nullpunkt, bis zum Pol eingetheilt wird, sind die geographischen Breitengrade, diejenigen 90 Grade, in welche ein Quadrant von der Ekliptik bis zu deren Pol eingetheilt wird, sind die astronomischen (s. Breite, astronomische und geographische).

Breitenkreis ist entweder geographisch oder astronomisch. Der B. eines Orts der Erdoberfläche ist der Quadrant, welcher vom Pol durch den Ort nach dem Aequator geführt wird, und der Bogen zwischen dem Ort und dem Aequator ist die (geographische) Breite des Orts. Der B. eines Gestirns ist der Quadrant zwischen der Ekliptik und deren Pol, welcher durch den Stern geführt wird, und dessen Bogen zwischen dem Stern und der Ekliptik die (astronomische) Breite des Sterns.

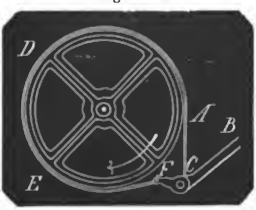
Breitenparallele heifsen in der Schiffersprache die (geographischen) Breitenkreise.

Breitenprofil ist eine durch die Breitendimension eines körperlichen Raums zu denkende Ebene; man sagt gewöhnlicher Querprofil oder Querschnitt.

Bremse (Mechanik). Ein Rad mit glattem Kranz bewegt sich mit möglichst grofser Winkelgeschwindigkeit nach der Pfeilrichtung um eine Welle, die mit einer Maschine in Verbindung steht, deren Bewegungen zu Zeiten ganz oder zum Theil vorübergehend gehemmt werden sollen. Zu diesem Zweck ist um den Radkranz ein geschmiedeter Reifen gelegt, und dieser mit beiden Enden an einen Hebel befestigt, und zwar das vordere Ende mit dem Drehpunkt *C*, das hintere Ende an dem in geringem Abstand von *C* beweglichen Punkt *F*, so dafs durch einen Druck auf den Endpunkt des langen Hebelarms *CB* der Punkt *F* über *C* bewegt wird, womit der Reifen sich fest um den Kranz legt, und durch Reibung die Bewegung des Rades hemmt (das Rad bremst). Wäre der Reifenbogen *AD* allein wirksam, so würde bei einem constanten mechanischen Moment der Radpheripherie, am Reifen in *D* eine um so geringere Tangentialkraft im Verhältnifs zu der in *A* erforderlich sein, als die Reibung der Fläche *AD* gegen den Radkranz, der Kraft in *D* zu Hülfe kommt, in *E* eine um so geringere in Verhältnifs zu der in *D*, als die Reibung des Bogens *DE* der Kraft in *E* zu Hülfe kommt; somit ist die in *FC* erforderliche Tangentialkraft am geringsten, und man ersieht, dafs bei einerlei Druck auf jedes Reifenelement die Wirkung der Bremse mit der Länge des Bogens wächst.

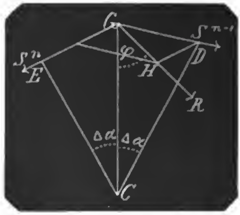
Setzt man den Halbmesser der äufseren Peripherie des Radkranzes, also zugleich der inneren des anliegenden Reifens $= r$, bezeichnet irgend eine Bogen-Einheit

Fig. 245.



von *A* aus nach *D*, *E* mit α, also Bogen *AD* mit $r\alpha$, setzt (Fig. 246) die beiden sehr kleinen $\angle DCG = GCE = \Delta\alpha$, also die zwischen *D*, *E* (Fig. 245) liegenden Bogen $DG = GE = r\,\Delta\alpha$, bezeichnet die gröfsere Tangentialspannung des Reifens nach *GD* mit S^{n-1}, die kleinere nach

Fig. 246.



GE mit S^n, so hat die Mittelkraft *R* zwischen beiden eine Richtung von der Mittellinie *GC* nach *D* hin, so dafs $\angle CGR$ = dem Reibungswinkel φ (s. Balancier, 2.)

Zeichnet man von irgend einem Punkt *H* in *GR* das # *DGEH*, so ist

$$S^{n-1} : S^n = GD : GE = GD : HD = \sin GHD : \sin HGD$$

Nun ist

$$\angle GHD = \angle EGH = \angle EGC + \varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\Delta\alpha}{2} + \varphi$$

und

$$\angle HGD = \frac{\pi}{2} - \frac{\Delta\alpha}{2} - \varphi$$

folglich

$$S^{n-1} : S^n = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\Delta\alpha}{2} + \varphi\right) : \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\Delta\alpha}{2} - \varphi\right)$$

oder

$$S^{n-1} : S^n = \cos\left(\frac{\Delta\alpha}{2} - \varphi\right) : \cos\left(\frac{\Delta\alpha}{2} - \varphi\right)$$

hieraus

$$S^{n-1} - S^n : S^n = \cos\left(\frac{\Delta\alpha}{2} - \varphi\right) - \cos\left(\frac{\Delta\alpha}{2} + \varphi\right) : \cos\left(\frac{\Delta\alpha}{2} + \varphi\right)$$

die Klammern aufgelöst und reducirt

$$\frac{S^{n-1} - S^n}{S^n} = \frac{2 \sin\frac{\Delta\alpha}{2} \sin\varphi}{\cos\frac{\Delta\alpha}{2} \cos\varphi - \sin\frac{\Delta\alpha}{2} \sin\varphi} = \frac{2 \,tg \frac{\Delta\alpha}{2}\, tg\,\varphi}{1 - tg\frac{\Delta\alpha}{2}\, tg\,\varphi}$$

Mit der beliebigen Abnahme von $\Delta\alpha$ rücken die Punkte *D* und *E* immer näher an *G*, die Geraden *GE* und *GD* können als die Bogenstücke *GE* und *GD*

betrachtet werden, $tg\,\Delta\alpha$ fällt mit dem Bogen $\Delta\alpha$ zusammen, und um so mehr kann im Zähler $tg\,\frac{\Delta\alpha}{2} = \frac{\Delta\alpha}{2}$ gesetzt werden. Desgleichen wird $tg\,\frac{\Delta\alpha}{2} \cdot tg\,\varphi$ immer kleiner, und wenn $\Delta\alpha$ im Verschwinden begriffen ist, verschwindet im Nenner der Werth von $tg\,\frac{\Delta\alpha}{2}\,tg\,\varphi$ gegen die Einheit. Demnach hat man für ein sehr kleines $\Delta\alpha$:

$$\frac{S^{n-1} - S^n}{S^n} = \Delta\alpha \cdot tg\,\varphi$$

beim Verschwinden von $\Delta\alpha$ ist die Differenz $S^{n-1} - S^n$ ebenfalls im Verschwinden begriffen, also das Differenzial von S^n; da aber mit dem Wachsthum von α die Spannungen S^{n-1}, S^n.... immer kleiner werden, so hat man

$$\frac{\partial S^n}{S^n} = -\,tg\,\varphi\,\partial\alpha$$

woher

$$\int\frac{\partial S^n}{S^n} = -\,tg\,\varphi\int\partial\alpha$$

also

$$logn\;S^n = -\,\alpha \cdot tg\,\varphi + C$$

Für $\alpha = 0$ wird S^n zur gröfsten Spannung S in dem Punkt A (Fig. 245), mithin hat man

$$logn\;S = C$$

und

$$logn\;S^n = -\,\alpha\;tg\,\varphi + logn\;S$$

oder

$$logn\,\frac{S}{S^n} = \alpha\;tg\,\varphi$$

oder

$$\frac{S}{S^n} = e^{\alpha\,tg\,\varphi}$$

woraus

$$S = S^n\;e^{\alpha\,tg\,\varphi}$$

Bezeichnet man mit b den ganzen Bogen für den Halbmesser = 1, mit welchem der Reifen den Bremskranz umschliefst, und die in F erforliche Kraft mit s, so hat man

$$S = s \cdot e^{b\,tg\,\alpha}$$

wo e die Basis des natürlichen Logarithmensystems = 2,7182818 .. ist.

Die Gröfse S der Spannung des Reifens ist also ganz unabhängig von dem Halbmesser des Bremsrades, sie wächst nur mit dem zu dem anliegenden Reifentheil gehörenden Centriwinkel.

Beispiel. Der Reifen umschliefse $\frac{3}{4}$ der Peripherie, so ist $b = \frac{3}{4} \cdot 2\pi = 4{,}7124$; der Coefficient für gleitende Reibung zwischen Schmiedeeisen und Gufseisen ist $\mu = tg\,\varphi = 0{,}19$, mithin $b \cdot tg\,\varphi = 0{,}895356$

e, die Basis des natürlichen Logarithmensystems ist 2,7182818 ...

$$log\;br\;\;e = 0{,}434294482$$

daher

$$log\;e^{0{,}895356} = 0{,}895356 \times 0{,}43429\ldots = 0{,}3888480$$

und

$$S = 2{,}4482 \cdot s$$

d. h. die in der Peripherie des Bremsrades wirkende Kraft S kann das 2,4482fache der in A zur Hemmung der Bewegung erforderlichen Thätigkeit s betragen. Ist nun der Hebelarm $CB = 2$ Fufs, der Hebelarm $CF = 3$ Zoll, so ist in B nur eine Anstrengung P von $\frac{3\text{ Zoll}}{2\text{ Fufs}}\,s = \frac{1}{8}\,s$ nöthig, und es kann sein $S = 19{,}5856 \cdot P$. Mit einem Druck P von 20 Pfund kann also eine Last S = 391,7 Pfund gehemmt werden.

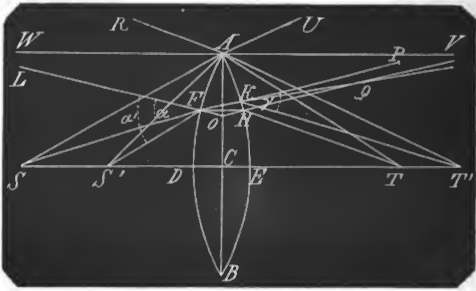
Brennglas, eine Glaslinse, mit welcher die Sonnenstrahlen aufgefangen und auf einen Punkt, den focus, concentrirt werden. In diesem Punkt ist nun eine Hitze, welche mit dem Grade, in welchem die Strahlen verdichtet worden sind, in Verhältnifs steht. Das B. ist in der Regel eine biconvexe Linse, weil diese die verhältnifsmäfsig gröfste Hitze hervorbringt. Aber auch planconvexe und concavconvexe Linsen äufsern die Wirkung eines B.

Um das eben Gesagte nachzuweisen, hat man in dem Art.: Ablenkung des Lichtstrahls, No. 2. B, den Nachweis, dafs wenn Fig. 10, pag. 7, der von einem auf ein Prisma fallenden Strahl sa herrührende gebrochene Strahl ab ein gleichschenkliges Dreieck abschneidet, der austretende Strahl bd gegen cb dieselbe Lage hat wie sa gegen ca, und dafs der brechende $\angle\,c$ = ist dem doppelten gebrochenen $\angle\,(2\lambda)$.

Ferner ist zu erwägen, dafs jedes durch Parallelen mit der Axe abgeschnittene Stück einer Linse AB (Fig. 247) wie AFH, $FHDE$, wenn A und FH, FH und DE sehr nahe an einander liegen, als ein Prisma betrachtet werden kann, und dafs dessen brechender Winkel, wenn man die brechenden Flächen bis zur Durchschnittskante verlängert denkt, immer kleiner wird, je näher das Prismatheilchen der Linsenaxe liegt, in welcher der Winkel = Null ist.

2. Es sei die Linse AB ein Brennglas, so ist dessen Stärke DE gegen den Durchmesser AB sehr klein, also auch der gröfste aller brechenden Prismenwinkel (c) der Winkel A oder B sehr klein. Es sei SF ein Lichtstrahl, der in $FH \mathrel{+\!\!\!\!\parallel} DE$ gebrochen wird, so ist der austretende Strahl HT so gelegen, dafs $TC = SC$.

Fig. 247.



Ist LO durch F das Einfallsloth, der Einfallswinkel $SFL = \alpha$, so ist $\angle OFH$ sein Brechungswinkel β, $c = 2\beta$, also $\beta = \frac{c}{2}$ und da c sehr klein ist, so ist β, und auch α etwa $= n\beta = 1{,}5\,\beta$ sehr klein, folglich $SC = TC$ sehr grofs.

Genau ist $\sin\alpha = n \sin\beta$, allein bei so kleinen Winkeln kann man, ohne einen bemerkbaren Fehler zu begehen

$$\alpha = n\beta$$

und da

$$c = 2\beta$$

$$\alpha = \tfrac{1}{2} nc$$

setzen, und unter α kann ebenso der $\angle SAR$ in A verstanden werden.

Ist S' ein zweiter leuchtender Punkt, sein Einfallswinkel $LFS' = \alpha'$, sein Brechungswinkel $KFO = \beta'$; sind KP, HQ Einfallslothe, die bei ihrer Nähe und der Kleinheit der ihnen zugehörigen Prismenwinkel mit einander $\parallel$ anzunehmen sind, so trifft der gebrochene Strahl FK, bis Q in OQ verlängert gedacht, die Fläche KH unter dem Einfallswinkel

$$PKQ = KQH = \angle FHO - \angle KFH$$
$$= \beta - (\beta' - \beta) = 2\beta - \beta'$$

Es sei $\angle KPT'$ der Winkel, unter welchem der Strahl FK nach KT' austritt $= \gamma$, so hat man, statt der Sinus die Bogen genommen,

$$\alpha : \beta = \alpha' : \beta' = \gamma : 2\beta - \beta'$$

Hieraus erhält man durch Umformung

$$1)\quad \alpha : \alpha' - \alpha = \beta : \beta' = \beta$$

$$2)\quad \alpha : \alpha - \gamma = \beta : \beta' = \beta$$

woraus

$$\alpha' - \alpha = \alpha - \gamma$$

Da man wie oben den Punkt F nach dem Punkt A verlegen kann, so heifst die Gleichung:

$$\angle RAS' - \angle RAS = \angle UAT - \angle UAT'$$

oder

$$\angle SAS' = \angle TAT'$$

Da nun der Punkt S aus $\alpha = \frac{1}{2} nc$ bekannt ist, so hat man, um für einen gegebenen Punkt S' den zugehörigen Brennpunkt T' zu finden, nur nöthig, den $\angle TAT' = \angle S'AS$ zu nehmen, woraus die Linie AT' sich ergiebt.

Für $\alpha' = 2\alpha$ fällt AT' in AU und es ist $\angle UAT' = 0$. Ist nun bei einem Brennglase c sehr klein, so können die Einfallslothe RA und UA in A nahe $\parallel$ der Axe DE, also in WV genommen werden; dann ist ebenso nahe $\angle ASC = \alpha$, und wenn $\angle S'AS = \alpha' - \alpha = \alpha$ genommen wird, so gehen die Strahlen, die aus S' auf das Glas fallen, hinter dem Glase nach AV und $\parallel AV$, d. h. $\parallel$ der Axe fort; oder gegenseitig: mit der Axe ST auf die Fläche AEB fallende Strahlen werden in den Punkt S' vereinigt und S' ist annähernd der **Brennpunkt** des Glases.

3. Es kommt nun darauf an, die Entfernung des Brennpunkts vom Mittel des Brennglases, d. h. die Brennweite w zu finden.

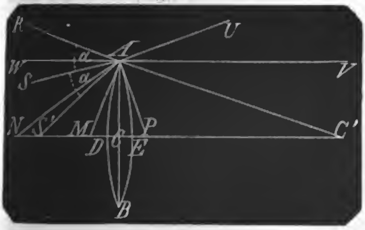
Sind Fig. 248 AM, AP Tangenten an den letzten Bogen-Elementen bei A, so ist $\angle MAC = \angle PAC = \frac{1}{2} c$. Ist wieder WV $\parallel$ der Axe DE, und sind RA, UA Einfallslothe in A, so sind diese normal auf AM und AP, und $\angle RAW = \angle UAV = \frac{1}{2} c$. Ist ferner $\angle RAS = \angle SAS' =$ dem No. 2 näher bestimmten α, so wird der Strahl $S'A$ nach AU gebrochen. Allein der Strahl soll nach AV, parallel der Axe gebrochen werden, und der Brennpunkt ist folglich ein noch vor S', etwa in N liegender Punkt, von welchem aus Strahlen wie NA nach $AV \parallel DE$ fortgehen, und man kann näherungsweise annehmen, dafs $\angle NAS' = \angle UAV = \frac{1}{2} c$ ist.

Ist AC' der Halbmesser r der Kugeloberfläche ADB wie der zweiten AEB, so kann man den aus N mit dem Halbmesser NC von C bis in WV beschriebenen Bogen dem aus C' mit $C'D$ von D bis in WV beschriebenen Bogen näherungsweise gleich setzen.

Nun ist

$$\angle ANC = \angle WAN$$
$$= \angle RAS' - (\angle RAW + \angle NAS')$$
$$= 2\alpha - 2 \cdot \frac{c}{2} = 2\left(\alpha - \frac{c}{2}\right)$$

Fig. 248.



Ferner

$$\triangle\, AC'C \sim \triangle\, MAC$$

folglich

$$\angle\, AC'C = \angle\, MAC = \frac{c}{2}$$

daher hat man näherungsweise

$$NC \cdot 2\left(\alpha - \frac{c}{2}\right) = r \cdot \frac{c}{2}$$

Es ist aber (nach No. 2)

$$\alpha = n \cdot \frac{c}{2}$$

daher hat man

$$NC \cdot 2\,(n-1) = r$$

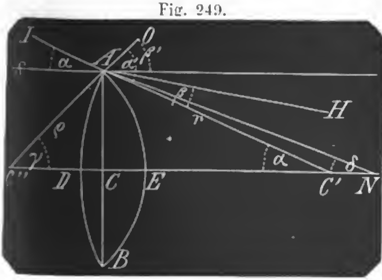
woraus

$$NC = w = \frac{r}{2(n-1)}$$

4. Dafs beide Kugeloberflächen des B. verschiedene Halbmesser $C'A = r$ und $C''A = \varrho$ haben, möchte in der Praxis nicht so leicht vorkommen; da indefs die Formel für w durch beide Halbmesser r und ϱ bestimmt wird, so findet man, $r = \infty$ gesetzt, w für ein planconvexes Glas und $r = -r$ gesetzt, w für ein concav convexes Glas, weshalb die Untersuchung für den Fall zweier verschiedener Kugelflächen hier geschehen soll.

Verlängere die Halbmesser $C''A$ bis O und $C'A$ bis J, so hat der Sonnenstrahl SA

Fig. 249.



den Einfallswinkel $JAS = AC'C'' = \alpha$, der Strahl werde unter dem $\angle\, HAC' = \beta$ innerhalb des Glases gebrochen, so tritt er in dieser Richtung nur bis zur Oberfläche AEB. Gesetzt, er träte in der Richtung AN in die Luft, so ist, da AO normal in A auf AEB, AO das Einfallsloth, und der Austrittswinkel $OAN = \alpha'$ hat den im Glase gebrochenen $\angle\, HAO = \beta'$ folglich ist zuerst

$$\alpha = n\beta;\; \alpha' = n\beta' \qquad (1)$$

Für ähnliche Betrachtungen wie in No. 3 hat man näherungsweise Bogen AE = Bogen AD = dem Bogen der von dem Brennpunkt N aus mit dem Halbmesser NC von C bis in SA beschrieben wird, oder wenn man $\angle\, AC''C$ mit γ, $\angle\, ANC$ mit δ bezeichnet,

$$\varrho\gamma = r\alpha = w\delta \qquad (2)$$

Aus 1 ist

$$\alpha : \beta = \alpha' : \beta' \qquad (3)$$

ferner ist

$$\beta + \beta' = \alpha + \gamma \qquad (4)$$

und

$$\delta = \alpha' - \gamma \qquad (5)$$

Aus 3 hat man

$$\alpha : \alpha + \alpha' = \beta : \beta + \beta'$$

also mit Hülfe von 4:

$$\alpha : \alpha + \alpha' = \beta : \alpha + \gamma$$

hieraus

$$\alpha - \beta : \beta = \alpha' + \gamma : \alpha + \gamma$$

woraus

$$\alpha' - \gamma = \frac{\alpha - \beta}{\beta}\,(\alpha + \gamma) \qquad (6)$$

Aus 2 ist

$$\varrho : r = \alpha : \gamma$$

oder

$$\varrho : r + \varrho = \alpha : \alpha + \gamma$$

woraus

$$\alpha + \gamma = \frac{r + \varrho}{\varrho}\,\alpha$$

Folglich aus 2, 5 und 6

$$w\delta = w\,\frac{\alpha - \beta}{\beta}\,\alpha \cdot \frac{r + \varrho}{\varrho} = r\alpha$$

also

$$w = \frac{r\varrho}{r + \varrho} \cdot \frac{\beta}{\alpha - \beta}$$

Setzt man für α seinen Werth $n\beta$, so entsteht

$$w = \frac{1}{n-1}\;\frac{r\varrho}{r + \varrho} \qquad \mathrm{I}$$

für $r = \varrho$ erhält man die Formel (No. 3)

$$w = \frac{r}{2(n-1)} \qquad \mathrm{II}$$

5. Um LN für ein planconvexes Glas zu finden, wird in Gl. I. $\varrho = \infty$

gesetzt. Es ist nun

$$\frac{1}{W} = (n-1)\frac{r+\varrho}{r\varrho} = (n-1)\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{\varrho}\right)$$

für $\varrho = \infty$ entsteht

$$\frac{1}{W} = (n-1)\frac{1}{r}$$

und

$$W = \frac{1}{n-1}\cdot r \qquad \text{III}$$

Die Brennweite eines planconvexes Glases ist also doppelt so grofs als bei dem biconvexen Glase.

Für ein concav-convexes Glas ist ϱ negativ und gröfser als r, weil die Concavität nur flacher sein kann, daher

$$\frac{1}{W} = (n-1)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\varrho}\right)$$

$$= (n-1)\frac{\varrho - r}{r\varrho}$$

und

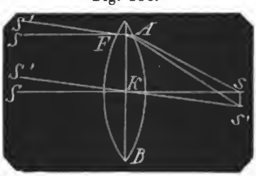
$$W = \frac{1}{n-1}\cdot\frac{r\varrho}{\varrho - r} \qquad \text{IV}$$

Je näher ϱ an r kommt, desto gröfser wird W, für $\varrho = r$ wird $W\ \infty$ und für $\varrho < r$ wird die Linse ein Zerstreuungsglas.

6. Welch einen Einflufs die geringere und gröfsere Brennweite auf die Wirkung des Brennglases hat, wird aus Folgendem klar:

Die Sonne ist kein leuchtender Punkt wie ein Fixstern, sondern sie erscheint in einer Scheibe, deren Durchmesser von der Erde aus betrachtet unter einem Winkel von 32 Minuten gesehen wird. Jeder von der Sonne beschienene Punkt wird also nicht von nur einem Strahl, sondern von einem Strahlenkegel, einer Vereinigung sehr vieler Strahlen erleuchtet und erwärmt.

Fig. 250.



Ist SK der von dem Sonnenmittel, $S'K$ der von dem oberen Rande der Sonne auf die Axe des B. fallende Strahl, so gehen beide Strahlen in gerader Linie fort (s. astronomisches Fernrohr) die Strahlen SF und $S'F$ brechen sich durch F, so dafs SF nach s in den Brennpunkt, $S'F$ senkrecht darunter in s', wo er den Strahl $S's'$ schneidet, gebrochen wird, und ss' ist der Raum in dem alle von dem oberen Sonnenhalbmesser auf AK fallenden Strahlen sich vereinigen; und wenn man aus s als Mittelpunkt in der Ebene ss' einen Kreis beschrieben denkt, so ist dieser Kreis der Ort, in dem alle von der Sonne auf das Brennglas AB fallenden Strahlen sich vereinigen. Sämmtliche Sonnenstrahlen sind vor AB im natürlichen Zustande, in ss' sind sie verdichtet, und zwar in dem umgekehrten Verhältnifs der in AB und ss' bestehenden Lichtflächen.

Nennt man R den Halbmesser des B., r den des Bildes in s, so sind die Sonnenstrahlen bei s um das $\left(\frac{R}{r}\right)^2$ fache verdichtet, und um das $\left(\frac{R}{r}\right)^2$ fache geschieht auch die Erwärmung.

Hieraus folgt, dafs die Verdichtung der Sonnenstrahlen, und mit dieser die erzeugte Hitze, also die Wirkung des B. um so gröfser ist, je gröfser der Halbmesser R des B., und je kleiner der Halbmesser r des Brennraums ist.

Es ist aber

$\angle S'KS = \angle s'Ks = 16$ Minuten, $Ks = W$

folglich

$$r = W\ tg\ 16'$$

und die Verdichtung

$$= \left(\frac{R}{W\ tg\ 16'}\right)^2$$

Der Halbmesser des Brennraums wächst also mit der Brennweite und diese mit dem Halbmesser der Kugeloberfläche. Ein B. ist also wieder um so wirksamer, je geringer die Brennweite, also je convexer es ist.

Bei einerlei Convexität hat das planconvexe Glas die doppelte Brennweite, dessen Wirkung ist also nur ¼ des biconvexen Glases. Bei dem concav-convexen Glase ist die Brennweite noch gröfser, sie kann ∞ werden, wo dann die Verdichtung = Null wird, sie kann negativ werden, wo Zerstreuung, also Erkältung hervorgeht; erst wenn der Halbmesser der concaven Fläche = ∞, wenn also die Concavität in die Ebene übergeht, wird die Brennkraft ¼ des biconvexen Glases.

$$tg\ 16' \text{ ist} = 0{,}0046542$$

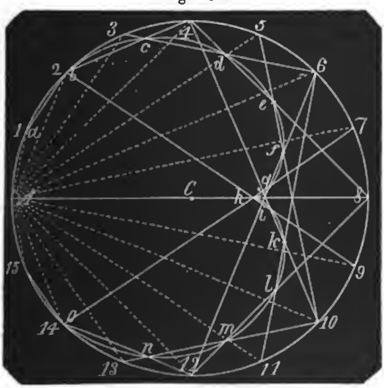
also

$$\frac{1}{tg^2\ 16'} = 46165$$

folglich ist die Verdichtung der Sonnenstrahlen und deren Wärme durch ein Brennglas = das 46165 $\left(\frac{R}{w}\right)^2$ fache.

Brennlinie. Wie ein Brennpunkt (s. Brennglas) derjenige Punkt genannt wird, in welchem viele Wärmestrahlen vereinigt werden, und dadurch in dem Punkt eine zündende Hitze erzeugen, so versteht man unter B. eine Linie, welche mehrere sehr nahe an einander befindliche Brennpunkte mit einander verbindet, wobei man sich jedoch unter jedem einzelnen dieser Brennpunkte den Durchschnittspunkt von nur 2 Strahlen zu denken hat. Sind in (Art. Antikaustische Linie) Fig. 68 die Linien *a'A*, *b'B* ... parallele, von der Sonne auf die Curve *ABCD* ... fallende Strahlen, und reflectirt *b'B* nach *Ba*, *c'C* nach *Cb* u. s. w. so geschicht dies dadurch, dafs die Normale auf die Curve in *B* mit *aB* und *b'B*, die Normale in *C* mit *bC* und *c'C*.. gleiche Winkel bildet. *abcd*.. ist, unter Voraussetzung, dafs *a*, *b*, *c*, *d* sehr nahe an einander liegen, die B. *a* ist der Vereinigungspunkt der beiden reflectirten Strahlen *Aa* und *Ba*, *b* von *Ba* und *Cb* u. s. w. Diese B. ist also nicht wie der Brennpunkt beim Brennglase durch Brechung, sondern durch Zurückwerfung von Lichtstrahlen entstanden; Brennlinien durch gebrochene Strahlen, die diakaustischen Linien, finden nirgends Anwendung, sie werden nur theoretisch betrachtet, und sollen deshalb hier fortbleiben; die B. durch Zurückwerfen, die katakaustischen Linien haben der Spiegelung wegen viel Interessantes, besonders wenn nur ein leuchtender Punkt angenommen wird, wie in dem folgenden Beispiel:

Fig. 251.



Es sei Fig. 251 eine hohle spiegelnde Kreislinie, *A* sei ein leuchtender Punkt, so wirft dieser nach jedem Punkt des Spiegels einen Strahl, welcher unter dem Winkel, mit welchem er den ans *C* zu denkenden Halbmesser trifft, wieder zurückgeworfen wird, und es entsteht für die B. eine Curve von der Form *bcdefg hiklmno*, die aus zwei congruenten Hälften besteht. Denn theilt man von *A* aus die Kreislinie in eine grofse Anzahl gleicher Theile, hier ist es in 16 Theile geschehen, zieht nach den Theilpunkten die geraden Linien A_1, $A_2 \ldots A_{15}$ als einfallende Strahlen, so reflectirt A_1 nach 2, A_2 nach 4, A_3 nach 6, A_4 nach 8 ... A_8 nach *A*, A_9 nach 2, A_{10} nach 4, A_{11} nach 6 ... A_{15} nach 14. *b* ist der erste Punkt als Durchschnitt der reflectirten Strahlen 1,2 und 2,4; *c* der zweite Punkt zwischen 2,4 und 3,6; *d* der dritte zwischen 3,6 und 4,8; *e* der vierte zwischen 4,8 und 5,10; *f* der fünfte zwischen 5,10 und 6,12; *g* der sechste zwischen 6,12 und 7,14; *h* der siebente zwischen 7,14 und 8,*A*; derselbe Punkt *h* der 8te zwischen 8,*A* und 9,2 u. s. w.

Je gröfser man die Anzahl der Theile nimmt desto näher rücken die Anfangspunkte *b*, *o* dem leuchtenden Punkt *A*, und in der Wirklichkeit beginnen sie sehr nahe demselben. Eben so ersieht man, dafs der mittlere Punkt *h* der B. dem Mittelpunkt *C* um so näher kommt, je näher man den Punkt 7 an 8 legt, und in der Wirklichkeit fallen *h* und *C* zusammen.

Man kann eine Unzahl von B. construiren, je nachdem man die Form der spiegelnden Linie und den Ort des leuchtenden Punktes wählt.

Brennpunkt. In dem Art.: Brennglas, ist gezeigt, dafs die Sonnenstrahlen mittelst eines Glases von geeignet construirten Oberflächen aufgefangen und nach einem einzigen Punkt geworfen, also verdichtet werden; die in den Lichtstrahlen befindlichen Wärmestrahlen werden also ebenfalls verdichtet, und erzeugen in diesem Punkt eine Hitze, welche zündet und schmelzt woher dieser Vereinigungspunkt der Strahlen, Brennpunkt, focus, genannt wird. Diesen Namen führt jeder Vereinigungsoder Sammelpunkt von Lichtstrahlen, wenn diese hier auch nicht zünden, wenn z. B. reflectirtes Licht gesammelt wird, so

in Fig. 91, pag. 143 in dem astronomischen Fernrohr heifst c' der gemeinschaftliche Brennpunkt der beiden Linsen *AB* und *DE*; in dem vor. Art. besteht ein B. aus der Vereinigung nur zweier reflectirter Strahlen.

Aus dem Art.: achromatisch ersieht man, dafs jeder Lichtstrahl durch Brechung zugleich in einzelne Farbenstrahlen zerspalten wird, von welchen jeder einzelne eine andere Richtung durch das Mittel nimmt; hieraus geht hervor, dafs die Aufsammlung von Lichtstrahlen in so vielen Punkten geschieht, als Strahlenfarben entstehen, oder dafs jede Strahlenfarbe ihren eigenen B. hat.

Die Zurückwerfung eines Lichtstrahls geschieht ohne dessen Zerspaltung, und zwar geschieht sie unter demselben Winkel mit dem Einfallsloth, den der einfallende Strahl mit demselben gebildet hat. *AB* sei eine Spiegelebene, die normal fallenden Lichtstrahlen *CF*, *DG*, *EH* werden nach denselben Entsendungspunkten *C*, *D*, *E* zurückgeworfen, der Lichtstrahl *CG* dagegen nach *GE*, wenn $\angle CGD = \angle EGD$ ist. Sieht man von *E* nach *G*, so empfängt man das Bild von dem Gegenstand *C* und zwar in der Entfernung *EG* + *CG*. Da man nun jeden Lichtstrahl nur geradlinig zu sehen gewohnt ist, so versetzt man das Bild von *D* in der Länge $EG + CG$ geradlinig nach C'; da nun $\angle C'GA = \angle CGA$, $C'G = CG$, so ist CFC' eine gerade Linie, $C'F = CF$, und man versetzt den Gegenstand *C* normal und in gleicher Entfernung *CF* hinter die Spiegelebene.

Fig. 252.

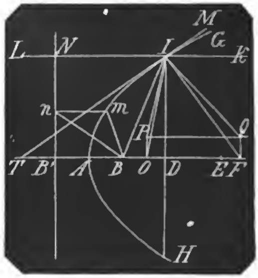


Man sieht, dafs Planspiegel nicht geeignet sind, Brennpunkte zu erzeugen. Stellt man in den Mittelpunkt *C* (Fig. 251) einer spiegelnden hohlen Kugelfläche ein Licht, so wirft es nach allen Punkten derselben Strahlen, jeder Strahl fällt senkrecht auf, und wird nach derselben Linie zurückgeworfen. Der Punkt *C* ist also zugleich der B. des Spiegels.

Aufser der Kreislinie oder vielmehr dem Kreisbogen und deren Umdrehungsfläche giebt es noch mehrere krumme Linien, die mit ihren Umdrehungsflächen Brennpunkte zulassen, und so ist denn auch der B. ein Begriff für die Geometrie geworden.

Brennpunkt der Parabel. In dem Art.: Apollonische Parabel ist die Entstehung der Parabel beschrieben; eben so der Begriff Parameter erklärt. Es sei *GAH* die Parabel, *A* deren Scheitel, *AF* deren Axe, von welcher die Curve in 2 congruente Theile *AG*, *AH* getheilt

Fig. 253.



wird, *AE* sei der Parameter $= p$, so ist das Gesetz für das Verhältnifs der rechtwinkligen Ordinaten zu deren Abscissen durch die Gleichung gegeben

$$y^2 = px$$

Es ist z. B.

$$DJ^2 = AE \cdot AD$$

Nimmt man $AD = \frac{1}{4} AE = \frac{1}{4} p$, so ist *B* der Brennpunkt der Parabel; es wird nämlich, wenn die Linie *GJAH* der Durchschnitt eines Hohlspiegels wäre, jeder $\parallel$ mit der Axe *AF* die Curve berührende Lichtstrahl nach dem Punkt *B* geworfen, so wie *KJ* nach *JB*, und es wird der parabolische Spiegel, von der Sonne getroffen, in *B* eine bedeutende Hitze erzeugen. Ebenso wird eine Flamme in *B* befindlich nach jedem Punkt der parabolischen Spiegelfläche einen Strahl werfen, und jeder dieser Strahlen wird, wie *BJ* nach *JK*, $\parallel$ der Axe zurückgeworfen, so dafs die kleine Flamme *B* zu einer Lichtscheibe von dem Durchmesser *GH* wird.

2. Nach dem Vorigen ist dieser einzige B. nur dadurch möglich, dafs jeder einfallende Strahl, wie *KJ*, mit dem zurückgeworfenen Strahl, dem Brennstrahl, wie *JB*, einen Winkel bildet, der von der Normale des Einfallspunkts, wie *JF* halbirt wird.

Zieht man an *J* die auf *JF* normale gerade Linie *MT*, so ist diese die Tangente der Parabel in *J* (s. berührende Linien) und verlängert man den Strahl *KJ* nach *L*, so mufs, weil $\angle TJF = R = \angle MJF$, also $\angle TJB = \angle MJK$, und da ferner $\angle MJK$ und *LJT* als Scheitelwinkel gleich sind, auch $\angle LJT = \angle BJT$

sein, d. h. die Halbirungslinie des $\angle BJL$ ist die Tangente in J, und jede Tangente und die dazu gehörende Normale ist für jeden Parabelpunkt äufserst leicht zu construiren, wenn der B. gegeben ist.

3. Eben so leicht ist es, die Parabel (also die Lehre für einen parabolischen Hohlspiegel) zu construiren, wenn der Abstand AB des B. vom Scheitel, die Brennweite gegeben ist: Man nehme auf der Axe rückwärts $AB' = AB$, ziehe $B'N$ (die Directrice) normal der Axe $B'F$, so hat man $NJ = JB$. Zieht man also auf $B'N$ mehrere Normalen wie in n, so erhält man den zugehörigen Punkt m der Parabel, wenn man $\angle nBm = \angle mnB$ macht.

4. Dafs $NJ = JB$, $nm = mB$ u. s. w. erhellt aus Folgendem:

Es ist

$AB = \frac{1}{4}p$, für J ist $AD = x$; $DJ^2 = px$

folglich

$$BJ^2 = BD^2 + DJ^2 = (x - \tfrac{1}{4}p)^2 + px$$
$$= x^2 + \tfrac{1}{16}p^2 - \tfrac{1}{2}px + px = x^2 + \tfrac{1}{16}p^2 + \tfrac{1}{2}px$$
$$= (x + \tfrac{1}{4}p)^2$$

und

$$BJ = x + \tfrac{1}{4}p$$

Für den Punkt m wird

$$Bm^2 = (\tfrac{1}{4}p - x)^2 + px = x^2 + \tfrac{1}{16}p^2 + \tfrac{1}{2}px$$
$$= (x + \tfrac{1}{4}p)^2$$

also jeder Brennstrahl ist = der zu dem Parabelpunkt gehörenden Abscisse + dem Abstand des Brennpunkts vom Scheitel.

Nimmt man nun $AB' = AB = \frac{1}{4}p$, so ist jede $\mp$ der Axe genommene Linie wie

$$NJ = AD + AB' = x + \tfrac{1}{4}p$$

mithin wie

$$NJ = BJ$$

Jeder Brennstrahl = dem Abstand des Parabelpunkts von der Directrice.

Da $\angle NJT = \angle BJT$

und

$$\angle BTJ = \angle NJT$$

so ist

$$\angle BTJ = \angle BJT$$

hieraus

$$BJ = TB = TA + AB$$

also

$$x + \tfrac{1}{4}p = TA + \tfrac{1}{4}p$$

woraus

$$TA = x$$

und die Subtangente

$$TD = 2AD$$

= der doppelten Abscisse, woraus bei gegebenen Parabelbogen die Construction von Tangenten sehr leicht ist.

5. Der B. ist übrigens der einzige Punkt der Axe, von dem aus alle geraden Linien nach der Curve in Beziehung auf x rational werden. (Aufser der Axe existirt gar kein Punkt, von dem aus dies der Fall ist.)

Denn setzt man für einen beliebigen Parabelpunkt J, $AD = x$, $DJ = y$, setzt vom Scheitel aus in der Axe einen beliebigen Abstand $AO < x$ oder $AF > x = z$ und senkrecht über O und F die Punkte P und Q in dem Abstand W von der Axe, so hat man

$$PJ^2 \text{ oder } QJ^2 = (y - w)^2 + (\pm x \mp z)^2$$
$$= y^2 - 2wy + w^2 + x^2 + z^2 - 2xz$$

Soll nun PJ oder QJ rational zu x werden, so ist dies ebenso von PJ^2 oder QJ^2 erforderlich. Nun ist $y^2 = px$, also $y = \sqrt{px}$, y also irrational in Beziehung auf x, daher darf in dem Ausdruck für PJ^2 oder QJ^2 das Glied $2wy$ nicht vorkommen, d. h. es mufs $w = o$ sein, der Punkt kann nur in der Axe liegen, PJ und QJ werden zu OJ und FJ, und es ist

$$OJ^2 \text{ oder } FJ^2 = px + x^2 + z^2 - 2xz$$
$$= x^2 + z^2 + (p - 2z)x$$

Soll nun der letzte Ausdruck ein wirkliches Quadrat werden, so mufs $p - 2z = \pm 2z$ sein, wo nur das obere Zeichen + gelten kann, weil für $- 2z$, $p = o$ entsteht, was unmöglich ist.

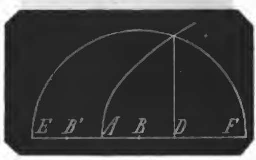
Für $p - 2z = + 2z$ ist aber $p = 4z$ oder $z = \frac{1}{4}p$, d. h. der Abstand des B. vom Scheitel.

6. Eine sehr einfache und sehr genau auszuführende Construction einer Parabel, also auch einer Lehre für einen parabolischen Hohlspiegel von dem B. aus erhält man aus folgender Betrachtung:

Es sei AB die gegebene Brennweite, A der Scheitel, B der Brennpunkt. Um nun den Parabelpunkt J über dem beliebigen Punkt D zu finden, hat man

$$AD = x,\ AB = \tfrac{1}{4}p$$

Fig. 254.



Nimmt man auf der über den Scheitel verlängerten Axe $AB' = \frac{1}{4}p$, so ist

$$B'D = x + \tfrac{1}{4}p$$
$$BD = x - \tfrac{1}{4}p$$

daher $B'D + BD = 2x$

und $B'D - BD = \frac{1}{2}p$

folglich

$$(B'D + BD)(B'D - BD) = \tfrac{1}{2}p \cdot 2x = px = y^2$$

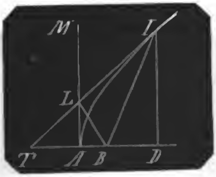
Nimmt man daher die beiden eingeklammerten Linien als Theile eines Durchmessers, also des Durchmessers $2B'D$, D als den Theilpunkt zwischen beiden, beschreibt über $2B'D$ den Halbkreis, so schneidet er in J die Länge JD ab; es ist $DJ^2 = px$ und J ein Parabelpunkt. Es ist also $B'D$ der Halbmesser des Kreises, B' der Mittelpunkt und EJF der Halbkreis; denn da nun $BE = B'D$, so ist $DF = B'D - BD$.

So kann man von A aus beliebig viele Theilpunkte wie D verzeichnen, Normalen errichten, mit dem jedesmaligen $B'D$ von dem constanten Punkt B' aus den Halbmesser nehmen, und mit diesem von dem constanten Punkt B aus die dem jedesmaligen D zugehörige Normale durch einen Bogen schneiden, wo man jedesmal einen Parabelpunkt erhält.

7. Aus der Eigenschaft der Parabel, dafs die Subtangente jedes Punkts = der doppelten Abscisse ist, ergiebt sich noch eine andere, wohl eben so einfache Construction der Parabel bei gegebenem B. Ist nämlich TD die Axe, B der Brennpunkt, TJ an J die Tangente, so ist die Subtangente $TD = 2AD$, also $TA = AD$, $TB = x + \frac{1}{4}p = BJ$, $\angle JTB = \angle TJB$, folglich halbirt ein Loth BL auf TJ die TJ und $TL = JL$. Errichtet man aber in A ein Loth AM auf der Axe TD, so ist $AM \mp DJ$, und es mufs durch den Punkt L gehen, weil $TA : AD = TL : LJ$ und $TA = AD$ ist.

Die Construction der Parabel ist demnach folgende: Errichte im Scheitel A ein Loth AM, ziehe aus dem Brennpunkt B eine beliebig gerade Linie (BL), errichte

Fig. 255.

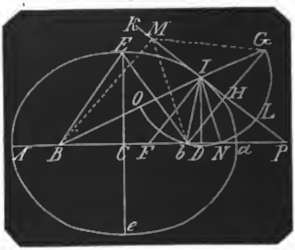


auf dieser ein Loth, welches die Axe (in T) schneidet. so ist diese (LT) die halbe Tangente eines Parabelpunkts, die rückwärts ihr gleiche (LT) bestimmt also diesen Parabelpunkt.

Die Construction No. 6 ist deshalb praktischer, weil man die Parabelpunkte in beliebigen Abständen von einander erhält.

Brennpunkt der Ellipse. 1) Die Ellipse $AEae$ entsteht, wenn man in 2 Punkten B, b die Enden eines biegsamen Fadens von der Länge Aa befestigt, und diesen durch zwischengehaltenen Stift unter fortdauernder Anspannung in einerlei Ebene herumführt. Befindet sich der Stift in A oder a, so überdecken sich die beiden Theile des Fadens, in allen übrigen Punkten wie J bilden sie ein Dreieck, dessen Summe der Seiten gleich grofs bleibt, in E und e sind die Dreiecke gleichschenklig. Die Linie Aa ist die grofse Axe, Ee die kleine Axe, die Linien BE, bE oder BJ, bJ u. s. w. heifsen Radii vectoren, und da diese in jedem Punkt mit der zu diesem Punkt gehörenden Normalen gleiche Winkel bilden, wie sogleich

Fig. 256.



nachgewiesen werden wird, so heifsen B, b die Brennpunkte der Ellipse. Jede Normale wie FJ kann nämlich als Einfallsloth betrachtet werden, und daher wird jeder aus dem leuchtenden Punkt B oder b auf jeden Punkt der elliptischen Linie geworfene Lichtstrahl nach dem Punkt b oder B reflectirt. Beide Axen Aa und Ee halbiren sich im Mittelpunkt C der Ellipse, und theilen diese in vier congruente Quadranten, der Abstand jedes der beiden Brennpunkte von dem Mittelpunkt heifst die Excentricität der Ellipse.

2. Verlängert man einen Radius vector z. B. BJ, beschreibt aus J mit dem 2ten Radius vector Jb, als Halbmesser den Halbkreis $ONLG$, zieht die Sehne Gb, halbirt diese in H, und zieht durch H und J die Linie KL, so ist diese die Tangente in J. Denn zieht man von einem beliebigen Punkt M der Linie KL nach B, b und G gerade Linien, so ist

$$MB + MG > BG$$
$$MG = Mb$$
folglich $MB + Mb > BG$

Nun ist

$$JG = Jb$$
daher $BG = JB + Jb = Aa$

mithin $MB + Mb > Aa$

Es liegt also der Punkt M und jeder andre Punkt der Linie KL mit Ausnahme des Punkts J aufserhalb der Ellipse und folglich ist KL Tangente in J.

Zieht man nun die Normale JF, so ist
$$\angle MJF = \angle LJF = R$$
und da
$$\angle MJB = LJG$$
als Scheitelwinkel, so ist auch
$$\angle FJB = \angle FJb$$
und BJ und bJ sind mit einander reflectirende Brennstrahlen.

3. Bezeichnet man für einen beliebigen Punkt J der Ellipse die vom Mittelpunkt C genommene Abscisse CD mit u, die Ordinate DJ mit y, die Excentricität $CB = Cb$ mit e, die halbe grofse Axe $AC = aC$ mit a, die halbe kleine Axe $CE = Ce$ mit b, so ist
$$BO \times BG = Bb \times BN$$
oder
$$(BG - OG) \times BG = Bb \times (Bb + 2bD)$$
d. i.
$$(2a - 2Jb) \times 2a = 2e \times [2e + (2u - 2e)]$$
woraus der Brennstrahl
$$Jb = a - \frac{eu}{a}$$
hieraus der Brennstrahl
$$JB = a + \frac{eu}{a}$$

5. Ferner hat man
$$bJ^2 = bD^2 + DJ^2$$
oder
$$\left(a - \frac{e \cdot u}{a}\right)^2 = (u - e)^2 + y^2$$
woraus
$$y^2 = \frac{a^2 - e^2}{a^2}(a^2 - u^2)$$
Nun ist
$$BE^2 = AC^2 = BC^2 + EC^2$$
d. i.
$$a^2 = e^2 + b^2$$
woraus
$$a^2 - e^2 = b^2$$
daher auch
$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - u^2)$$
und die Ordinate
$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - u^2}$$

Nimmt man den Anfangspunkt der Coordinaten in einem Scheitelpunkt A, bezeichnet die Abscisse mit x, so ist
$$x = a \pm u$$
also
$$u = \pm a \mp x$$
diesen Werth in den Ausdruck für y^2 gesetzt, giebt
$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$$
$$= \frac{2b^2}{a}x - \frac{b^2}{a^2}x^2$$

Man nennt $\frac{2b^2}{a}$ den Parameter der Ellipse, und bezeichnet diesen mit p, dann hat man
$$y^2 = px - \frac{p}{2a}x^2$$

Da $\frac{2b^2}{a} = p$, so ist $b^2 = p\,\frac{a}{2}$

also auch $(2b)^2 = 2a \cdot p$

d. h. die kleine Axe ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen dem Parameter und der grofsen Axe.

6. Da $\angle BJF = \angle bJF$

so ist
$$BJ : bJ = BF : bF$$
also
$$BJ + bJ : bJ = BF + bF : bF$$
oder
$$2a : a - \frac{eu}{a} = 2e : DF - (u - e)$$
woraus
$$DF = \left(a - \frac{eu}{a}\right)\frac{e}{a} + u - e$$
also die Subnormale:
$$DF = u\,\frac{a^2 - e^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2}u$$

7. Ferner ist
$$\triangle FJD \sim \triangle JPD$$
daher
$$DF : DJ = DJ : PD$$
oder
$$DF \cdot DP = DJ^2$$
d. h. Subnormale × Subtangente = dem Quadrat der Ordinate; und die Subtangente
$$DP = \frac{y^2}{\frac{b^2}{a^2}u} = \frac{a^2 - u^2}{u}$$

8. Es ist
$$FJ^2 = DJ^2 + DF^2 = y^2 + \left(\frac{b^2}{a^2}u\right)^2$$
mithin
$$FJ^2 = \frac{b^2}{a^2}\left[a^2 - u^2 + \frac{b^2}{a^2}u^2\right]$$
woraus die Normale
$$FJ = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)u^2}$$

9. Es ist endlich
$$JP^2 = DJ^2 + DP^2 = y^2 + \left(\frac{a^2 - u^2}{u}\right)^2$$

$$= \frac{b^2}{a^2}(a^2 - u^2) + \left(\frac{a^2 - u^2}{u}\right)^2$$

woher die Tangente

$$JP = \frac{\sqrt{(a^2 - u^2)(a^4 - a^2u^2 + b^2u^2)}}{a \cdot u}$$

10. Die Brennpunkte sind übrigens die einzigen Punkte in der Ebene der Ellipse, von denen aus die geraden Verbindungslinien mit Punkten der Curve rationale Functionen von u liefern. Wie bei der Parabel erweist es sich, dafs Punkte aufserhalb der Axe von dieser Eigenschaft gar nicht existiren.

Nimmt man den beliebigen Punkt J in der Ellipse, setzt $DJ = y$, $CD = u$, und einen beliebigen Punkt F in der Axe im Abstand $CF = z$ vom Mittelpunkt, so hat man

$$FJ^2 = FD^2 + DJ^2 = (u - z)^2 + y^2$$

$$= u^2 + z^2 - 2uz + \frac{b^2}{a^2}(a^2 - u^2)$$

$$= b^2 + \frac{a^2 - b^2}{a^2}u^2 - 2uz + z^2$$

Soll nun FJ rational zu u werden, so mufs der letzte Ausdruck ein vollständiges Quadrat sein, also von der Form

$$(\pm Au \mp B)^2 = A^2u^2 - 2ABu + B^2$$

Hieraus ergiebt sich

$$A = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

$$B = \sqrt{b^2 + z^2}$$

und

$$AB = z$$

hieraus

$$z = AB = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \cdot \sqrt{b^2 + z^2}$$

oder

$$z^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \cdot (b^2 + z^2)$$

woraus

$$z = \pm\sqrt{a^2 - b^2} = \pm\sqrt{BE^2 - CE^2} = \pm Cb$$

d. h. der Punkt F für rationale Functionen FJ von u liegt entweder in b oder B, und nur beide Brennpunkte haben die verlangte Eigenschaft.

Für die Ellipsen, als Bahnen der Weltkörper um die Sonne und um Planeten heifst derjenige B., in welchem die anziehende Sonne oder der den Mond anziehende Planet sich befindet, der Kraftpunkt, Centralpunkt, der Mittelpunkt der Kräfte; der andere B. wird der zweite oder der obere B. genannt. Die Summe deren Entfernungen von irgend einem Punkt des Umfangs ist = der grofsen Axe.

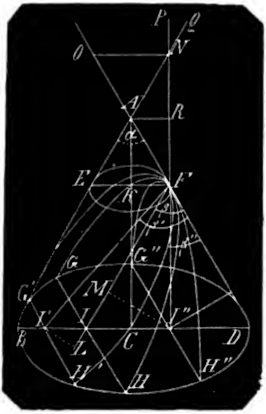
Brennpunkt der Hyperbel. Die Hyperbel ist eine Kegelschnittslinie, welche entsteht, wenn man Fig. 71, pag. 83 (Art.: Apollonische Parabel) den Durchschnittspunkt F als Scheitel beibehält, einen Punkt in BD für die Richtung der Axe aber rechts von J nach D hin verlegt, während ein zweiter Axenpunkt von J nach B hin eine Ellipse giebt, nämlich eine geschlossene Curve, indem der letztbezeichnete Durchschnitt verlängert die Seite AB unterhalb BD in einem zweiten Scheitel trifft. Ein von GH nach D hin verlegter Schnitt, die Hyperbel, trifft unterhalb BD keine Seite des Kegels, sie geht bis ins Unendliche fort; deren Ebene aber über F hinaus verlängert, schneidet den über A mit den Seiten BA und DA verlängerten Kegel, und bildet dort eine zweite Hyperbel, welche der ersten ≌ ist.

Die Hyperbel hat nun keinen eigentlichen B., keinen Punkt wie die Parabel, in den alle ∦ mit der Axe auf die hohle Linie fallenden Strahlen durch Reflexion vereinigt werden, oder wie die Ellipse, welche zwei B. hat, von denen jeder die Strahlen in sich vereinigt, welche von dem anderen ausgehend, in jedem Punkt der Curve reflectirt werden.

Jeder von irgend einem Punkt der hyperbolischen Linie in den sogenannten B. reflectirende Strahl rührt von einem einfallenden Strahl her, der eine andere Lage gegen die Axe hat, und zwar eine um so gröfsere Neigung mit derselben, je weiter der Hyperbelpunkt von dem Scheitel sich befindet. Stellt man also eine Leuchte in den B., so wird die Hyperbel deren Strahlen durch Reflexion zerstreuen, und der B. ist optisch betrachtet ein Zerstreuungspunkt; dagegen haben sämmtliche einfallende Strahlen, die in den B. reflectiren, eine Lage, dafs sie verlängert in einen Punkt zusammenlaufen, der hinter dem Scheitel in deren verlängerter Axe liegt, und der in der entgegengesetzt entstehenden Hyperbel die gleiche Lage mit dem B. der ersten Hyperbel hat. Diese beiden Punkte heifsen nun die Brennpunkte der Hyperbel. (S. das Nähere in dem folgenden Artikel.)

Brennpunkte der Kegelschnitte. Die für die Optik so sehr unterschiedenen Eigenschaften der 3 Kegelschnittslinien, und wenn man den Kreis als 4ten Kegelschnitt hinzu nimmt, dessen B. im Mittelpunkt liegt, so wie deren, in dem Art: „Bahn der Weltkörper" schon gedachten Bedeutung in der Himmelsmechanik giebt Veranlassung, den Grund deren Abweichungen, der in dem eigenthümlichen Verhältnifs zwischen den Ordinaten und Abscissen liegt, hier aufzusuchen.

Fig. 257.



Es sei *ABD* ein Kegel, der von der Spitze *A* aus nach beiden Seiten in's Unendliche verlängert gedacht werden kann. *ABD* sei ein Stück desselben als gerader Kegel abgeschnitten, d. h. $AB = AD$, und zugleich *BGDH* eine Kreisebene. Das geradlinige $\triangle ABD$ sei ein Axendreieck des Kegels, also *AC* die Axe des Kegels, *BD* der Durchmesser des Grundkreises.

Nimmt man einen beliebigen Scheitelpunkt *F*, so ist ein senkrecht auf $\triangle ABD$ geführter Schnitt

nach $EF \parallel BD$ ein Kreis,
„ $FJ \parallel AB$ eine Parabel,
„ FJ' wo $J'B < EF$ eine Ellipse,
„ FJ'' wo $J''B > EF$ eine Hyperbel.

Bezeichnet man $\angle BAD$ mit α, $\angle DFJ$ mit β, $\angle DFJ'$ mit β', $\angle DFJ''$ mit β'', die Linie *EF* mit *k*, so lassen sich die Coordinatengleichungen für die gedachten Curven finden, wie folgt:

A. Die Parabel. Zieht man *GH* durch *J* normal auf *BD*, und führt durch die beiden Linien *FJ* und *GH* eine Ebene, so schneidet diese den Kegelmantel in der parabolischen Linie *GFH*. Setzt man den festen Scheitel *F* als Anfangspunkt der Coordinaten, *FJ* als Abscisse $= x$, so sind die rechtwinkligen Ordinaten *JG*, *JH* einander gleich, weil *BD* der Durchmesser des Kreises *BGDH* ist, und man hat

$$JG^2 = BJ \cdot DJ$$

BJ ist $= EF = k$

Fällt man von *J* auf *FD* ein Loth, so ist dieses $= FJ \cdot \sin JFD = x \sin\beta = x \sin\alpha$, und auch $= DJ \cdot \sin FDJ = DJ \cos\frac{\alpha}{2}$ daher

$$x \sin\beta = DJ \cos\frac{\alpha}{2}$$

woraus

$$DJ = x \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}} = 2x \sin\frac{\alpha}{2}$$

also

$$GJ^2 = y^2 = 2k \sin\frac{\alpha}{2} \cdot x$$

Die für die hier angenommene Parabel constante Gröfse $2k \sin\frac{\alpha}{2}$ heifst der Parameter, und man hat allgemein

$$y^2 = p \cdot x$$

Das Quadrat der Ordinate ist also = dem Rectangel aus dem Parameter und der Abscisse, und aus diesem Grunde ist die Curve Parabel (Vergleichungs-, Gleichsetzungslinie) genannt worden.

B. Die Ellipse. $G'H'$ durch J' normal *BD* giebt die elliptische Linie $G'FH'$; $FJ' = x$; $J'G' = J'H' = y$ daher

$$y^2 = BJ' \cdot DJ'$$

Es ist

$$BJ' = BJ - JJ' = k - JJ'$$

Fällt man ein Loth $J'L$ auf die verlängerte *FJ*, so ist

$$J'L = FJ' \sin J'FJ = JJ' \cdot \sin J'JL$$

$$\angle J'FJ = \angle J'FD - \angle JFD = \beta' - \alpha$$

$$\angle J'JL = \angle FJD = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$$

daher

$$J'L = x \sin(\beta' - \alpha) = JJ' \cos\frac{\alpha}{2}$$

woraus

$$JJ' = \frac{\sin(\beta' - \alpha)}{\cos\frac{\alpha}{2}} x$$

Denkt man sich ferner ein Loth von J' auf *DF*, so ist dieses

$$= FJ' \cdot \sin J'FD = DJ' \sin J'DF$$

$$= x \sin\beta' = DJ' . \sin\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)$$

woraus

$$DJ' = \frac{\sin\beta'}{\cos\frac{\alpha}{2}} \cdot x$$

daher

$$y^2 = \left(k - \frac{\sin(\beta' - \alpha)}{\cos\frac{\alpha}{2}} x\right) \cdot \frac{\sin\beta'}{\cos\frac{\alpha}{2}} x$$

$$= k\frac{\sin\beta'}{\cos\frac{\alpha}{2}}x - \frac{\sin(\beta'-\alpha)\sin\beta'}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}x^2 \quad (1)$$

Setzt man wieder den Coefficient von x, hier

$$k\frac{\sin\beta'}{\cos\frac{\alpha}{2}} = p$$

als Parameter, so hat man

$$y^2 = px - \frac{\sin(\beta'-\alpha)}{k\cos\frac{\alpha}{2}}px^2 \quad (2)$$

Das Quadrat der Ordinate ist also kleiner als das Rectangel aus dem Parameter und der Abscisse, daher der Name Ellipse (Verminderungslinie, Mangellinie).

Für

$$x = \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin(\beta'-\alpha)}k$$

wird $y = 0$, und dies x ist die grofse Axe der Ellipse.

Für

$$x = \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin(\beta'-\alpha)}k - x'$$

entsteht aus 2

$$y_1{}^2 = px\left[1 - \frac{\sin(\beta'-\alpha)}{k\cos\frac{\alpha}{2}}\cdot\left(\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin(\beta'-\alpha)}k - x'\right)\right]$$

$$= px\left[1 - 1 + \frac{\sin(\beta'-\alpha)}{k\cos\frac{\alpha}{2}}x'\right] = px\frac{\sin(\beta'-\alpha)}{k\cos\frac{\alpha}{2}}x'$$

$$= p\left[\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin(\beta'-\alpha)}k - x'\right]\frac{\sin(\beta'-\alpha)}{k\cos\frac{\alpha}{2}}x'$$

$$= px' - p\frac{\sin(\beta'-\alpha)}{k\cos\frac{\alpha}{2}}(x')^2$$

mithin ist $x' = x$ und die Ordinaten von beiden Scheiteln aus, bei gleichen Abscissen gleich grofs, und die Ellipse besteht von beiden Scheiteln aus bis zur mittleren Ordinate bei der Abscisse

$$= \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin(\beta'-\alpha)}k$$

aus 2 congruenten Hälften.

C. Die Hyperbel. $G''H''$ durch J'' normal BD, giebt die hyperbolische Linie $G''FH''$; $FJ'' = x$; $J''G'' = J''H'' = y$ daher

$$y^2 = BJ''\cdot DJ''$$

Es ist

$$BJ'' = BJ + JJ'' = k + JJ''$$

Fällt man ein Loth $J''M$ von J'' auf FJ, so ist

$$J''M = FJ''\cdot\sin J''FJ = J''J\sin J''JF$$

$$\angle J''FJ = \angle DFJ - \angle DFJ'' = \alpha - \beta''$$

$$\angle J''JF = \angle FDB = 90° - \frac{\alpha}{2}$$

daher

$$J''M = x\sin(\alpha-\beta'') = JJ''\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$$

woraus

$$JJ'' = \frac{\sin(\alpha-\beta'')}{\cos\frac{\alpha}{2}}x$$

Denkt man sich ferner ein Loth von J'' auf DF, so ist dieses

$$= FJ''\cdot\sin\beta'' = DJ''\cdot\sin J''DF$$

$$= x\sin\beta'' = DJ''\cos\frac{\alpha}{2}$$

woraus

$$DJ'' = \frac{\sin\beta''}{\cos\frac{\alpha}{2}}\cdot x$$

daher

$$y^2 = \left(k + \frac{\sin(\alpha-\beta'')}{\cos\frac{\alpha}{2}}x\right)\cdot\frac{\sin\beta''}{\cos\frac{\alpha}{2}}x$$

$$= k\frac{\sin\beta''}{\cos\frac{\alpha}{2}}x + \frac{\sin(\alpha-\beta'')\sin\beta''}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}x^2 \quad (1)$$

Setzt man wieder den Coefficient von x, hier

$$k\frac{\sin\beta''}{\cos\frac{\alpha}{2}} = p$$

als Parameter, so hat man

$$y^2 = px + \frac{\sin(\alpha-\beta'')}{\cos\frac{\alpha}{2}}\frac{p}{k}x^2 \quad (2)$$

Das Quadrat der Ordinate ist also gröfser, als das Rectangel zwischen dem Pa-

rameter und der Abscisse; daher der Name Hyperbel (Vermehrungslinie, Ueberschufslinie).

Verlängert man die Axe FJ'' der Hyperbel rückwärts, so schneidet sie den Mantel des entgegengesetzten Kegels in N, zieht man $NO \nparallel EF$, bezeichnet NO mit k_1; $\angle PNQ$ mit β_1, so hat man

$$\angle ANF = \angle PNQ = \beta_1 = \alpha - \beta''$$

$$\angle OAN = \alpha$$

$$AF : AN = EF : NO = k : k_1$$

daher

$$k_1 = \frac{AN}{AF} \cdot k \qquad (3)$$

Nun ist

$$AF \cdot sin\, AFN = AN \cdot sin\, ANF$$

oder

$$AF\, sin\, \beta'' = AN \cdot sin\, (\alpha - \beta'')$$

daher

$$\frac{AN}{AF} = \frac{sin\, \beta''}{sin (\alpha - \beta'')} \qquad (4)$$

und

$$k_1 = \frac{sin\, \beta''}{sin\, (\alpha - \beta'')} k \qquad (5)$$

Ganz analog mit der Gl. für y^2 der ersten Hyperbel mufs bei der Abscisse x, wenn die Ordinate mit y_1 bezeichnet wird, die Gl. für $y_1{}^2$ sein.

$$y_1{}^2 = k_1 \frac{sin\, \beta_1}{cos \dfrac{\alpha}{2}} x + \frac{sin\, (\alpha - \beta_1)\, sin\, \beta_1}{cos^2 \dfrac{\alpha}{2}} x^2$$

für k_1 und β_1 die eben gefundenen Werthe gesetzt, giebt

$$y_1{}^2 = \frac{sin\, \beta''}{sin (\alpha - \beta'')} k \cdot \frac{sin\, (\alpha - \beta'')}{cos \dfrac{\alpha}{2}} x + \frac{sin\, (\alpha - \alpha + \beta'')\, sin\, (\alpha - \beta'')}{cos \dfrac{\alpha}{2}} x^2$$

reducirt giebt

$$y_1{}^2 = \frac{sin\, \beta''}{cos \dfrac{\alpha}{2}} x + \frac{sin\, (\alpha - \beta'')\, sin\, \beta''}{cos \dfrac{\alpha}{2}} x^2$$

woraus hervorgeht, dafs für einerlei x, $y_1 = y$ und dafs beide Hyperbeln $\cong$ sind.

3. Wie bei der Ellipse die gerade Linie zwischen den Scheiteln die grofse Axe genannt wird, so nennt man auch bei der Hyperbel die Linie FN zwischen beiden Scheiteln **die grofse Axe**, besser die **Hauptaxe**. Man erhält dieselbe, wenn man von F auf NE ein Loth gefällt denkt, aus der Gleichung

$$EF \cdot sin\, AEF = FN\, sin\, ENF$$

oder

$$k\, cos\, \frac{\alpha}{2} = FN\, sin\, (\alpha - \beta'')$$

woraus

$$FN = \frac{cos \dfrac{\alpha}{2}}{sin\, (\alpha - \beta'')} k \qquad (6)$$

und wenn man dieselbe, wie bei der Ellipse, mit $2a$ bezeichnet, so ist

$$k = 2 \frac{sin\, (\alpha - \beta'')}{cos \dfrac{\alpha}{2}} a$$

diesen Werth in Gl. 2, No. 2 C gesetzt, giebt

$$y^2 = px + \frac{p}{2a} x^2$$

Bezeichnet man ferner, wie bei der Ellipse, mit $2b$ eine **kleine Axe**, besser **Nebenaxe**, wenn

$$2a : 2b = 2b : p$$

so dafs

$$p = \frac{2b^2}{a}$$

so hat man

$$y^2 = \frac{b^2}{\dfrac{a}{2}} x + \frac{b^2}{a^2} x^2$$

oder

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} (2ax + x^2)$$

4. Verlegt man den Anfangspunkt der Coordinaten in den Mittelpunkt der Hauptaxe, bezeichnet hier wie bei der Ellipse die Abscissen mit u, so ist

$$u = a + x$$

also

$$x = u - a$$

daher

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} [2a(u - a) + (u - a)^2]$$

$$= \frac{b^2}{a^2} (u^2 - a^2)$$

Für gleiche und entgesetzte Werthe von u gehören also gleiche Ordinaten, und beide Hyperbeln sind $\cong$

5. Nachdem nun die Kegelschnittslinien construirt und mit einander verglichen

worden, ist deren Brennpunkte zu gedenken. Die B. der Parabel und der Ellipse sind in besonderen Artikeln schon speciell behandelt, und es soll dies nun noch für die Hyperbel geschehen.

Nimmt man von der Mitte M der Hauptaxe Aa aus zu beiden Seiten $u = \sqrt{a^2 + b^2}$, so erhält man die Brennpunkte B, b; für diese Punkte sind die Ordinaten y durch

$$y_1{}^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 + b^2 - a^2)$$

gegeben, und

$$y_1 = \frac{b^2}{a} = \tfrac{1}{2}p$$

wie bei der Parabel und der Ellipse.

Fig. 258.



Die Brennstrahlen nach irgend einem Punkt J der ersten Hyperbel bilden mit deren Tangente JT die gleichen Winkel bJT und BJT. Denn bezeichnet man die Abscisse MD mit u, JD mit y, so ist

$$bJ^2 = bD^2 + DJ^2 = (u + \sqrt{a^2 + b^2})^2 + \frac{b^2}{a^2}(u^2 - a^2)$$

woraus durch Reduction

$$bJ = \frac{u}{a}\sqrt{a^2 + b^2} + a \tag{1}$$

$$BJ^2 = BD^2 + DJ^2 = (u - \sqrt{a^2 + b^2})^2 + \frac{b^2}{a^2}(u^2 - a^2)$$

woraus

$$BJ = \frac{u}{a}\sqrt{a^2 + b^2} - a \tag{2}$$

folglich

$$bJ + BJ = \frac{2u}{a}\sqrt{a^2 + b^2} \tag{3}$$

und

$$bJ - BJ = 2a \tag{4}$$

Ist nun JT so gezogen, dafs $\angle bJT = \angle BJT$, so hat man

$$bJ : BJ = bT : BT$$

also auch

$$bJ + BJ : bJ - BJ = bT + BT : bT - BT$$

oder mit Hülfe von Gl. 1 und 2:

$$\frac{2u}{a}\sqrt{a^2 + b^2} : 2a = 2\sqrt{a^2 + b^2} : bT - BT$$

woraus

$$bT - BT = \frac{2a^2}{u}$$

hierzu

$$bT + BT = 2\sqrt{a^2 + b^2}$$

giebt

$$bT = \sqrt{a^2 + b^2} + \frac{a^2}{u} \tag{5}$$

und

$$BT = \sqrt{a^2 + b^2} - \frac{a^2}{u} \tag{6}$$

Nun kommt es noch darauf an, zu erweisen, dafs JT die Tangente von J ist. Denkt man sich von M aus eine zweite Abscisse u_1 kleiner oder gröfser als u, bezeichnet den Endpunkt mit D', errichtet das Loth $D'T'$ bis in die verlängerte TJ, so hat man nur zu zeigen, dafs $D'T'$ immer gröfser ist, als die zu D' gehörige Ordinate der Hyperbel. Man hat aber

$$TD : TD' = DJ : D'T'$$

oder

$$TB + BD : TB + BD' = y : D'T'$$

Nun ist nach Gl. 4

$$TB = \sqrt{a^2 + b^2} - \frac{a^2}{u}$$

$$BD = MD - MB = u - \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$BD' = MD' - MB = u_1 - \sqrt{a^2 + b^2}$$

demnach hat man die Proportion

$$u - \frac{a^2}{u} : u_1 - \frac{a^2}{u} = \frac{b}{a}\sqrt{u^2 - a^2} : D'T'$$

woraus

$$D'T' = \frac{uu_1 - a^2}{u^2 - a^2} \cdot \frac{b}{a}\sqrt{u^2 - a^2}$$

Die Ordinate in

$$D' = y_1 = \frac{b}{a}\sqrt{u_1{}^2 - a^2}$$

daher

$$D'T' : y_1 = uu_1 - a^2 : \sqrt{(u^2 - a^2)(u_1{}^2 - a^2)}$$

oder

$$(D'T')^2 : y_1{}^2 = (uu_1 - a^2)^2 : (u^2 - a^2)(u_1{}^2 - a^2)$$
$$= u^2u_1{}^2 + a^4 - 2a^2uu_1 : u^2u_1{}^2 + a^4 - a^2(u^2 + u_1{}^2)$$

Die beiden Hinterglieder stimmen nur in dem dritten Gliede nicht überein, und es kommt also nur darauf an, wie

$-2a^2uu_1$, zu $-a^2(u^2+u_1^2)$ oder wie $2uu_1$ zu $u^2+u_1^2$ sich verhält.

Es ist aber

$$u^2+u_1^2 > 2uu_1$$

denn ist $u > u_1$

so ist $u - u_1$ positiv,

und ist $u < u_1$

so ist $u_1 - u$ positiv,

also

$$(u-u_1)^2 = (u_1-u)^2 = u^2+u_1^2-2uu_1$$

positiv,

oder $u^2+u_1^2-2uu_1 > 0$

woher

$$u^2+u_1^2 > 2uu_1$$

folglich

$$-2a^2uu_1 > -a^2(u^2+u_1^2)$$

und folglich liegt jeder Punkt der geraden Linie TT' aufserhalb der Hyperbel, und TT' ist die Tangente in J.

Wie bei der Parabel und der Ellipse findet man auch bei der Hyperbel, dafs die Brennpunkte die einzigen Punkte sind, deren gerade Verbindungslinien mit den Punkten der Curve rationale Functionen der Abscisse sind.

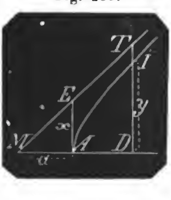
6. Aus No. 5 haben sich folgende Gesetze ergeben:

A. Die Differenz zweier zusammengehörender Brennstrahlen wie $BJ - bJ$ ist constant und = der Hauptaxe = $2a$.

B. Da nach Gl. 1 und 2 der Strahl von dem aufserhalb belegenen B. immer gröfser ist als der vom inneren B. herrührende, so ist auch immer $bT > BT$ oder $aT > AT$, und je weiter der Hyperbelpunkt vom Scheitel liegt (je gröfser u wird), desto näher rückt T an M. M ist die Grenze und der Durchschnittspunkt für die Tangente eines ∞ weit gelegenen Hyperbelpunkts, d. h. der Asymptote. Diese giebt also, da der aus B gezeichnete Strahl mit ihr ∥ läuft, die Grenze der Richtungen an, in welchen die aus B einfallenden Strahlen durch Zurückwerfung zerstreut werden.

Es sei MT die Asymptote, so ist die Lage derselben bestimmt, wenn man das im Scheitel bis in MT errichtete Loth AE kennt. Man nehme eine beliebige

Fig. 259.



Abscisse $MD = u$, errichte das Loth DT, setze $DJ = y$, $DT = z$, $AE = x$, so hat man

$$a : x = u : z$$

woraus

$$z = \frac{u}{a}x$$

und

$$z^2 = \frac{u^2}{a^2}x^2$$

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(u^2-a^2) = \frac{u^2}{a^2}b^2 - b^2$$

folglich

$$z^2 - y^2 = \frac{u^2}{a^2}(x^2-b^2) + b^2$$

und

$$\frac{(z^2-y^2-b^2)a^2}{u^2} = x^2 - b^2$$

für $u = \infty$ ist $z^2 - y^2 = 0$ und es wird zugleich

$$\frac{-b^2a^2}{u^2} = 0 = x^2 - b^2$$

woraus $x = b$ = der halben Nebenaxe.

Die Grenze des Zerstreuungswinkels φ der Lichtstrahlen bestimmt sich also durch

$$tg\,\varphi = \frac{b}{a}$$

Brennraum, ist der im Art.: Brennglas gedachte Kreis von dem Halbmesser ss' Fig. 250, pag. 414; $\angle s'Ks$ ist 16 Minuten = dem scheinbaren Halbmesser der Sonne, $ss' = Ks \cdot tg\,16' = 0{,}0046542\;Ks = \frac{1}{215}Ks$, d. h. der Halbmesser des B. ist $\frac{1}{215}$ der Brennweite.

Brennspiegel sind Spiegel, welche durch Reflexion der Sonnenstrahlen zünden; am vorzüglichsten eignet sich hierzu der parabolische Spiegel, bei welchem die Hitze im Brennpunkt entsteht (s. d.).

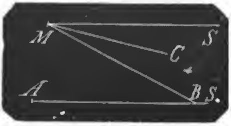
Man bildet den Spiegel, wenn man eine Parabel (als Chablone) um ihre Axe dreht.

Auch ebene Spiegel hat man so mit einander vereinigt, dafs sie einen gemeinschaftlichen Brennpunkt gebildet haben; da aber ein ebener Spiegel nur immer einen Strahl auf einen Brennpunkt werfen kann, und somit die Strahlen der Sonnenscheibe nur einfach auf den beabsichtigten Brennraum wirft, so ist ein aus ebenen Spiegeln bestehender Brennspiegelapparat nur von Wirkung, wenn möglichst viel Spiegelflächen mit einander vereinigt werden.

Sind $SA \ldots SM$ parallele Sonnenstrahlen, und ist AB als Brennweite bestimmt, so würde ein Spiegel M eine solche Lage haben müssen, dafs das Einfallsloth CM mit SM und BM gleiche Winkel bildet, und dies gilt von allen zwischen A und M noch aufzustellenden Spiegeln zu Ver-

stärkung der Hitze in *B*. Ein Vortheil eines solchen freilich complicirten Apparats besteht darin, dafs man die Brennweite *AB* beliebig grofs bestimmen kann.

Fig. 260.



Sollte die Erzählung wahr sein, dafs Archimedes des römischen Feldherrn Marcellus Schiffe während der Belagerung von Syrakus durch Brennspiegel angezündet hat, so ist bei der grofsen Entfernung des Feindes, also bei einer sehr grofs erforderlichen Brennweite nur ein aus mehreren ebenen Spiegeln zusammengesetzter Brennspiegel denkbar, den er dazu gebaut hat.

Aus dem Art.: Brenpunkt ist übrigens klar, dafs, um solchen Apparat zu construiren, die ebenen Spiegel um einen mittleren Spiegel herum facettenartig symmetrisch gruppirt werden, dafs die Mitten sämmtlicher Spiegel in einer hohlen Parabelfläche liegen, und dafs die Spiegelflächen selbst berührende Ebenen an derselben bilden müssen. Der mittlere Spiegel bildet den Scheitel der parabolischen hohlen Umdrehungsfläche, und der Parameter derselben mufs = der 4fachen Brennweite sein.

Bei dem heutigen hohen Stande der Technik würde ein metallener Brennspiegel von 5 Fufs Durchmesser, aus einer hohlen Parabelfläche bestehend, für eine Brennweite von 50 Fufs wohl auszuführen sein.

Man hat die Ordinate

$$y = 2{,}5 \text{ Fufs}$$

den Parameter

$$p = 4 \cdot 50 = 200 \text{ Fufs}$$

folglich die zu *y* gehörende gröfste Abscisse, die Tiefe des Spiegels

$$x = \frac{y^2}{p} = \frac{6{,}25}{200} \text{ Fufs} = 0{,}375 \text{ Zoll.}$$

Brennstrahl ist die gerade Verbindungslinie zwischen dem Brennpunkt und einem Punkt der krummen Linie oder der krummen Fläche, zu welcher der Brennpunkt (s. d.) gehört. In der Optik ist es jeder durch ein Brennglas nach dem Brennpunkt gebrochene und durch einen Brennspiegel nach dem Brennpunkt zurückgeworfene Lichtstrahl.

Brennweite ist der Abstand des Brennpunkts von dem Mittel des Brennglases oder von dem Scheitel des Brennspiegels.

Briggische Logarithmen sind die Exponenten von Potenzen, deren Wurzel die Zahl 10 ist. Der b. Logarithmus von 1000 ist 3, weil $10^3 = 1000$ ist; ebenso ist der b. L. von 2 = 0,30103 weil $10^{0,30103}$ d. i. 10 zur 0,30103ten Potenz erhoben = 2 ist. Denkt man sich eine tabellarisch geordnete Zusammenstellung aller b. L. der natürlich auf einander folgenden Zahlen von 1 bis zu einer sehr hohen Zahl, wie sie wirklich bis 108000 existiren, und welche Heinrich Briggs zu berechnen begonnen hat, so gewährt dieselbe beim praktischen Rechnen einen überaus grofsen Nutzen durch Abkürzung der Arbeit:

A. Hat man zwei Zahlen *a* und *b* mit einander zu multipliciren, so addirt man deren L. α, β, und hat in der dieser Summe $\alpha + \beta$ als L. entsprechenden Zahl das verlangte Product.

Denn es ist

$$a = 10^\alpha;\ b = 10^\beta$$

Nun ist

$$ab = 10^\alpha \cdot 10^\beta = 10^{\alpha + \beta}$$

folglich *ab* die Zahl, deren L. = $\alpha + \beta$ ist.

B. Hat man eine Zahl *a* durch die Zahl *b* zu dividiren, so subtrahirt man deren L. β von α, und hat man in der dieser Differenz $\alpha - \beta$ als L. entsprechenden Zahl den verlangten Quotient.

Denn

$$\frac{a}{b} = \frac{10^\alpha}{10^\beta} = 10^{\alpha - \beta}$$

folglich $\frac{a}{b}$ die Zahl, deren L. = $\alpha - \beta$ ist.

C. Hat man eine Zahl *a* zur *n*ten Potenz zu erheben, so multiplicirt man den L. α von *a* mit *n*, und hat in der diesem Product $n \cdot \alpha$ als L. entsprechenden Zahl die verlangte Potenz.

Denn

$$a^n = (10^\alpha)^n = 10^{\alpha n}$$

D. Hat man aus einer Zahl *a* die *n*te Wurzel zu ziehen, so dividirt man den L. α von *a* durch *n*, und hat in der diesem Quotient als L. entsprechenden Zahl die verlangte Wurzel.

Denn

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{10^\alpha} = 10^{\frac{\alpha}{n}}$$

E. Hat man zu berechnen, die wievielste Potenz eine Zahl *b* von der Zahl *a* ist, also *x* zu finden, wenn $a^x = b$ ist, so ist $x = \frac{\beta}{\alpha}$ wenn β der L. von *b* und α der L. von *a* ist.

Denn

$$a^x = (10^\alpha)^x = 10^{\alpha x}$$

und

$$b = 10^\beta$$

Daher ist

$$10^{\alpha x} = 10^\beta$$

und

$$10^x = 10^{\frac{\beta}{\alpha}}$$

woher

$$x = \frac{\beta}{\alpha}$$

F. Desgleichen findet man für $\sqrt[x]{a} = b$ $x = \frac{\alpha}{\beta}$, weil aus $\sqrt[x]{a} = b$ schon $a = b^x$ hervorgeht.

Als Beispiel für alle 6 Fälle sei auszurechnen

$$\sqrt[7]{\frac{3520^4 \times 29^3}{347^5}}$$

ein Exempel, welches ohne Hülfe der Logarithmen sehr viel Zeit und Mühe kosten würde. In den Logarithmentafeln findet man

$\log 3520 = 3{,}546\ 5427$		
$4 \log 3520 =$		$14{,}186\ 1708$
$\log 29 = 1{,}462\ 3980$		
$3 \log 29 =$		$4{,}387\ 1940$
$\log (3520^4 \times 29^3) =$		$18{,}573\ 3648$
$\log 437 = 2{,}648\ 4814$		
$5 \log 437^5 =$		$13{,}242\ 4070$
$\log \frac{3520^4 \cdot 29^3}{437^5} =$		$5{,}330\ 9578$
$\log \sqrt[7]{\frac{3520^4 \cdot 29^3}{437^5}} =$		$0{,}761\ 5654$

$$num \log 0{,}7615654 = 5{,}77518$$

d. h.

$$\sqrt[7]{\frac{3520^4 \cdot 29^3}{437^5}} = 5{,}77518$$

Wäre noch aufgegeben, zu bestimmen, die wievielste Wurzel dieser Ausdruck von 30 ist, ist also x zu bestimmen aus der Aufgabe

$$\sqrt[7]{\frac{3520^4 \cdot 29^3}{437^5}} = \sqrt[x]{30}$$

so hat man

$$\log \sqrt[7]{\frac{3520^4 \cdot 29^3}{437^5}} = 0{,}761\ 5654$$

$$\log 30 = 1{,}477\ 1213$$

und es ist

$$x = \frac{1477\ 1213}{761\ 5654}$$

Zur Ausführung dieser Division kann man sich wiederum der L. bedienen, und man erhält

$$\log 1477\ 1213 = 7{,}169\ 4162$$
$$\log 761\ \ 5654 = 6{,}881\ 7072$$
$$\log x = 0{,}287\ 7090$$

$$x = num \log 0{,}287\ 7090 = 1{,}93957$$

2. Anweisung zum Gebrauch der Logarithmentafeln ist jeder derselben vorangestellt, jedoch will ich noch Einiges über den Gebrauch der Proportionaltheile hinzufügen, die P. P. (partes prop.) bezeichnet sind.

Es sind in den Tafeln nur die L. bis zu 5stelligen Zahlen, und zwar bis zur höchsten derselben: 99999 angegeben.

Zur Auffindung des *Log.* von 147 71213 der obigen Aufgabe hat man in den Tafeln

$$\log 14771 = 4{,}169\ 4099$$

oder $\log 14771000 = 7{,}169\ 4099$

und $\log 14772000 = 7{,}169\ 4393$

Differenz 0,0000294

Nun verhalten sich nahe die Differenzen der *Log.* zweier von einander wenig unterschiedener Zahlen wie die Differenzen der Zahlen selbst; also in vorliegendem Falle:

$$\log 14772000 - \log 14771000 : \log 14771213 - \log 14771000$$
$$= 14772000 - 14771000 : 14771213 - 14771000$$

d. i.:

$$0{,}0000294 : \log 14771213 - 7{,}1694099 = 1000 : 213$$

und es ist nahe:

$$\log 14771213 = \frac{213 \cdot 0{,}0000294}{1000} + 7{,}1694099$$
$$= 7{,}1694099$$
$$+ 0{,}0000062622$$

und wenn man nur 7 Decimalstellen nehmen will . . . . $= 7{,}1694162$

In der Rubrik: P. P. ist nun die Differenz 0,0000294 angegeben

mit 294 und darunter

1 =	29	nämlich	$\frac{100}{1000} \cdot 294 = 29{,}4$
2 =	59	„	$\frac{200}{1000} \cdot 294 = 58{,}8$
3 =	88	„	$\frac{300}{1000} \cdot 294 = 88{,}2$
. . .	. . .	. . .	. . .
9 =	265	„	$\frac{900}{1000} \cdot 294 = 264{,}6$

Um nun mit Hülfe dieser in der Tabelle befindlichen Proportionaltheile den L. zu finden, suche zuerst die Differenz der L. 1694099 – 1694393, wie sie in den Tafeln gefunden werden, = 294, um in den P. P. die richtige Columne mit der Ueberschrift 294 zu erhalten.

Nimm *log* 141771 (00) = 7,1694099

die nächste Zahl 2 der noch fehlenden 213 giebt 59

die folgende Zahl 1 giebt 29

„ letzte „ 3 „ 88

Summa 7,169416178

wofür man 7,1694162 nimmt.

Die obige wirkliche Multiplication

$\frac{213}{100} \cdot 294$ giebt 62622

die Proportionaltheile geben . . 6178

Der Unterschied ist nicht unbedeutend, und es ist gut, wenn man das Ergebnifs aus den P. P. durch wirkliche Multiplication controlirt.

3. In der Aufgabe No. 1 war x aus seinem *Log* = 0,287 7090 zu bestimmen. In den Tafeln findet man

log = (0,)2876898; *num* = 1,9395

log = (0,)2877122; *num* = 1,9396

Will man noch mehrere Decimalstellen, so hat man nach dem obigen Näherungsgesetz

$$2877122 - 2876898 : 2877090 - 2876898$$
$$= 1{,}9396 - 1{,}9395 : x - 1{,}9395$$

oder

$$224 : 192 = 0{,}0001 : x - 1{,}9395$$

woraus

$$x = \frac{192 \cdot 0{,}0001}{224} + 1{,}9395$$
$$= 0{,}000085714 + 1{,}9395 = 1{,}9395857(14)$$

Unter den P. P. steht wieder die Zahl

		224		
und darunter	1	22	eigentlich	22,4
	2	45	„	44,8
	3	67	„	67,2
	4	90	„	89,6
	5	112	„	112,0
	6	134	„	134,4
	7	157	„	156,8
	8	179	„	179,2
	9	202	„	201,6

Gegeben ist	*log* = 0, 287 7090		
	log = (0,)287 6898	giebt	1,9395
Differenz	0, 000 0192		
In P. P.	179	„	0,00008
Differenz	130		
In P. P.	112	„	0,000005
Differenz	180		
In P. P.	179	„	0,0000008
x =			1,9395858

Die letzte Decimale ist also von der durch wirkliche Division erhaltenen schon verschieden.

4. Stellt man die Zahlen, deren *log* die natürlich auf einander folgenden Zahlen 1, 2, 3 . . . sind zusammen, also $10 = 10^1$, $100 = 10^2$, $1000 = 10^3$ u. s. w., so erhält man eine geometrische Reihe, in der die *log* die Stellenzahlen sind, nämlich

1	2	3	4
10	100	1000	10000 . . .

Das 3te Glied der Reihe ist das 4te, dividirt durch 10; das 2te Glied ist das 3te, dividirt durch 10; überhaupt das $n$te Glied ist $= \frac{1}{10}$ mal dem $(n+1)$ten Gliede, und die Stellenzahlen werden von rechts nach links immer um eine Einheit kleiner.

Setzt man daher die obige Reihe nach links weiter fort, so erhält man die Reihe der Zahlen

$$\tfrac{10}{10} = 1; \; \tfrac{10}{100} = 0{,}1; \; \tfrac{10}{1000} = 0{,}01$$

und deren Stellenzahlen 0, –1, –2, u. s. w. also:

log	–3	–2	–1	0	1	2	3
num:	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{10}$	1	10	100	1000

Will man nun Glieder einschalten, um auch die *log* der zwischen den dekadischen Zahlen liegenden Zahlen zu erhalten, so müssen diese in geometrischem Verhältnifs unter einander und mit den dekadi-

schen Gliedern der Reihe stehen. Z. B. ein Glied zwischen 1 und 10 würde $\sqrt[2]{10}$ sein, weil $1 : \sqrt{10} = \sqrt{10} : 10$, und dessen Stellenzahl oder *log* ist $= \frac{1}{2}$.

Gesetzt nun, man habe durch irgend ein arithmetisches Verfahren sämmtliche natürlich aufeinander folgende Zahlen eingeschaltet; also zwischen 1 und 10 die Zahlen 2, 3 . . bis 9, zwischen 10 und 100 die Zahlen 11 bis 99, zwischen 100 und 1000 die Zahlen 101 bis 999 u. s. w., so ist klar, dafs die Exponenten oder *log* der Zahlen von 1 bis 9 zwischen 0 und 1, die der Zahlen von 11 bis 99 zwischen 1 und 2, die der Zahlen zwischen 101 bis 999 zwischen 2 und 3 liegen. Drückt man die *log* durch Ganze und Decimalen aus, so ist demnach die Ganze der *log* für die Zahlen von 1 bis 9 = 0, die Ganze der *log* für die Zahlen von 10 bis 99 = 1, von 100 bis 999 = 2; überhaupt eine Zahl von *n* Ziffern hat einen *log*, dessen ganze Zahl $= n - 1$ ist.

Nach den schon berechneten Tafeln ist der *log* von 35745 $= 4{,}5532153$

Nun ist nach No 1, B:

$$\log \frac{35745}{10} = \log 3574{,}5 =$$

$$\log 35745 - \log 10 = 3{,}5532153$$

$$\log \frac{35745}{100} = \log 357{,}45 =$$

$$\log 35745 - \log 100 = 2{,}5532153$$

u. s. w.

Hat man demnach den *log* einer mit Decimalen versehenen Zahl zu bestimmen, so ist dieser = dem *log* der Zahl, das Komma fortgenommen, die dem *log* vorzuschreibende ganze Zahl richtet sich nach der Anzahl der Ziffern, welche die Ganzen der gegebenen Zahl haben.

Z. B. *log* 348,947 ist in den Decimalen = *log* 348 947 = ?,5427595.

Die Ganze der Zahl ist 348, diese besteht aus 3 Ziffern, und der *log* von 348,947 ist = 2,5427595.

Ist umgekehrt ein *log* gegeben=3,7690153 so hat man in den Tafeln nur die Zahl 7690153 zu suchen, sie ist 58751. Da nun in dem *log* die ganze Zahl = 3 ist, so hat dessen Zahl eine 4ziffrige ganze Zahl, und die Zahl ist 5875,1.

Die ganze Zahl oder die Zahl vor dem Komma in einem *log* heifst die Kennziffer, Charakteristik, weil sie die Rangordnung der zugehörigen Zahl, den diese in der dekadischen Reihe einnimmt, kennen lehrt; die allen Zahlen derselben Stelle in den verschiedenen Rangordnungen gemeinschaftlichen Decimalen heifsen die Mantisse (Zugabe).

Alle Zahlen, die kleiner als 1 sind, haben negative *log*; man giebt aber die Mantisse positiv an, und setzt nur die Charakteristik negativ.

In dem obigen Beispiel ist

$$\log 35{,}745 = 1{,}553\ 2153$$
$$\log 3{,}5745 = 0{,}553\ 2153$$
$$\log 0{,}35745 = 0{,}553\ 2153 - 1$$
$$\log 0{,}035745 = 0{,}553\ 2153 - 2$$

u. s. w.

Ueberhaupt eine Zahl mit *n* Nullen vor den Werth habenden Ziffern, die Null vor dem Komma mitgerechnet, giebt die Charakteristik $= - n$.

5. Interpolirt man nun in der Reihe zwischen 1 und 10 die Zahl $\sqrt[2]{10}$, so ist diese = 3,16227766, dessen *log* = 0,5

Man hat also den *log* einer zwischen 1 und 10 liegenden ganzen Zahl nicht gefunden; allein man hat doch den *log* einer Zahl, nämlich der grofsen Zahl 316227766 = 8,5.

Eine Zahl zwischen 10 und 100 eingeschaltet, ist $\sqrt[2]{1000} = 10\sqrt{10} = 31{,}6227766$; deren *log* ist 1,5. Eine Zahl zwischen 100 und 1000 wird $= \sqrt{100000} = 100\sqrt{10} = 316.227766$; deren *log* ist 2,5; und man ersieht, dafs die *log* dieser einzigen gleichliegenden Einschaltungszahlen nur in der Charakteristik verschieden sind, in der Mantisse aber dieselben bleiben.

Eine Zahl zwischen 1 und $\sqrt{10}$ eingeschaltet, giebt $\sqrt[4]{10} = 1{,}778279$; deren *log* 0,25.

Eine Zahl zwischen 10 und $10\sqrt{10}$ giebt $10\sqrt[4]{10} = 17{,}78279$; deren *log* = 1,25; und wieder sind die Decimalen in den *log* dieselben.

Fernere Einschaltungen zwischen

1 und $\sqrt[4]{10}$ giebt $\sqrt[8]{10} = 1{,}33352$; *log* = 0,125
1 „ $\sqrt[8]{10}$ „ $\sqrt[16]{10} = 1{,}15478$; *log* = 0,0625
1 „ $\sqrt[16]{10}$ „ $\sqrt[32]{10} = 1{,}07461$; *log* = 0,03125
1 „ $\sqrt[32]{10}$ „ $\sqrt[64]{10} = 1{,}03663$; *log* = 0,015626
1 „ $\sqrt[64]{10}$ „ $\sqrt[128]{10} = 1{,}01815$; *log* = 0,0078125

Fährt man so fort, so kommt man endlich zu einer Zahl 1,00001; aufserdem hat man die Logarithmen einer Anzahl grofser Zahlen gefunden, die durch 2, 3, 5 u. s. w. theilbar sind, so dafs, wenn die *log* dieser ersten Prim-Zahlen bekannt wären, die *log* einer grofsen Anzahl anderer Primzahlen ergeben würden, indem man die Zahlen durch einander dividirt, und deren *log* von einander subtrahirt.

Man kann sich aber durch die Methode des Interpolirens den ersten Primzahlen beliebig nähern; z. B.:

Es ist $\sqrt[2]{10} = 3{,}162278$; *log* $= 0{,}5$

„ „ $\sqrt[4]{10} = 1{,}778279$; *log* $= 0{,}25$

das Glied zwischen beiden ist

$\sqrt[8]{10^3} = 2{,}37137$; *log* $= 0{,}375$

das Glied zwischen $\sqrt[4]{10}$ und $\sqrt[8]{10^3}$ ist

$\sqrt[16]{10^5} = 2{,}053525$; *log* $= 0{,}3125$

das Glied zwischen $\sqrt[4]{10}$ und $\sqrt[16]{10^5}$ ist

$\sqrt[32]{10^9} = 1{,}90656$; *log* $= 0{,}28025$

das Glied zwischen $\sqrt[16]{10^5}$ und $\sqrt[32]{10^9}$ ist

$\sqrt[64]{10^{19}} = 1{,}97868$; *log* $= 0{,}296375$

Zwischen $\sqrt[16]{10^5}$ und $\sqrt[64]{10^{19}}$

$\sqrt[128]{10^{39}} = 2{,}01575$; *log* $= 0{,}3044375$

Zwischen $\sqrt[64]{10^{19}}$ und $\sqrt[128]{10^{39}}$ ist

$\sqrt[256]{10^{77}} = 1{,}99713$; *log* $= 0{,}30040\ 625$

Zwischen $\sqrt[128]{10^{39}}$ und $\sqrt[256]{10^{77}}$ ist

$\sqrt[512]{10^{155}} = 2{,}00642$; *log* $= 0{,}30242\ 1875$

Zwischen $\sqrt[256]{10^{77}}$ und $\sqrt[512]{10^{155}}$ ist

$\sqrt[1024]{10^{309}} = 2{,}00177$; *log* $= 0{,}30141\ 40625$

Zwischen $\sqrt[256]{10^{77}}$ und $\sqrt[1024]{10^{309}}$ ist

$\sqrt[2048]{10^{617}} = 1{,}99945$;
log $= 0{,}30091\ 01562\ 5$

Zwischen $\sqrt[2048]{10^{617}}$ und $\sqrt[1024]{10^{309}}$ ist

$\sqrt[4096]{10^{1235}} = 2{,}00061$;
log $= 0{,}30116\ 21093\ 75$

Zwischen $\sqrt[2048]{10^{617}}$ und $\sqrt[4096]{10^{1235}}$ ist

$\sqrt[8192]{10^{2469}} = 2{,}00003$;
log $= 0{,}30103\ 61328\ 125$

Zwischen $\sqrt[2048]{10^{617}}$ und $\sqrt[8192]{10^{2469}}$ ist

$\sqrt[16384]{10^{4937}} = 1{,}99974$;
log $= 0{,}30097\ 31445\ 3125$

Zwischen $\sqrt[8192]{10^{2469}}$ und $\sqrt[16384]{10^{4937}}$ ist

$\sqrt[32768]{10^{9875}} = 1{,}99988$;
log $= 0{,}30100\ 46386\ 71875$

Zwischen $\sqrt[8192]{10^{2469}}$ und $\sqrt[32768]{10^{9875}}$ ist

$\sqrt[65536]{10^{19751}} = 1{,}99995$;
log $= 0{,}30102\ 03857\ 42187\ 5$

Zwischen $\sqrt[8192]{10^{2469}}$ und $\sqrt[65536]{10^{19751}}$ ist

$\sqrt[131072]{10^{39503}} = 1{,}9999913$;
log $= 0{,}30102\ 82092\ 77343\ 4375$

Zwischen $\sqrt[8192]{10^{2469}}$ und $\sqrt[131072]{10^{39503}}$ ist

$\sqrt[262144]{10^{79007}} = 20000100$;
log $= 0{,}30103\ 21710\ 44921$

Endlich erhält man *log* 2 = 0,3010299956.. den man in den Tafeln für eine 7stellige Mantisse mit 0,3010300 aufführt.

Man nähert sich eben so der nächsten Primzahl 3, wenn man zwischen $\sqrt[2]{10} = 3{,}162278$ und $\sqrt[8]{10^3} = 2{,}37137$ wiederholentlich interpolirt; den folgenden Primzahlen 5 und 7, wenn man zwischen 10 und $\sqrt[2]{10}$ interpolirt; den Primzahlen 11 bis 97 durch Interpoliren zwischen 10 und 100.

Die vielen Zwischen-Arbeiten, um zu einer Primzahl zu kommen, sind nicht vergeblich, denn es werden dadurch die *log* höherer Primzahlen gefunden. Z. B.: Es ist oben durch Interpoliren ermittelt:

log 2053525 = 3125

Dividirt man 2053525 durch 25, so erhält man 82141, eine 5stellige Primzahl. Hat man nun *log* 5 = 6989700 gefunden, so ist

log 25 = *log* 5^2	= 3979400
abgezogen von	3125000
giebt *log* 82141	= 9145600

Dieses Verfahren des Interpolirens beruht auf der Eingangs geschehenen Erklärung von Brigg. Log., und es ist auch eine grofse Anzahl von *log* durch Briggs nach demselben berechnet worden, wobei er sich noch der ad 2 gedachten Differenzenrechnung als Abkürzung bedient hat. Leichtere Methoden dafür werden in dem Art.: Logarithmus, angegeben werden. Vergl.: Basis eines Logarithmensystems.

Brille. Dieses so sehr gebräuchliche optische Instrument, um dem Auge beim Sehen zu Hülfe zu kommen, ist je nach Beschaffenheit des Augenfehlers zweierlei Art: fernsehend oder nahe sehend. Die erstere B. entfernt das Bild eines nahen Gegenstandes dem nur fern sehenden Auge; die zweite B. rückt das Bild eines fernen Gegenstandes dem nur nahe sehenden Auge näher.

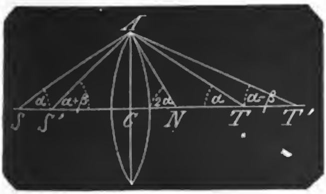
A. Brille für die Nähe, B. für Fernsehende, biconvexe B.

In dem Art. Brennglas, No. 2, ist erwiesen, dafs wenn Fig. 247 $\angle ASC = \angle ATC = \alpha$, und T der Brennpunkt des erleuchtenden Punktes S ist, der unter $\angle AS'C = \alpha + \beta$ einfallende Strahl den Brennpunkt T' hat, welcher unter $\angle AT'C = \alpha - \beta$ gelegen ist, und dafs der Brennpunkt N für ∓ der Axe einfallende Strahlen unter dem $\angle ANC = 2\alpha$ liegt. Man hat demnach wie dort näherungsweise $S'C \cdot$ Bog. $(\alpha + \beta) = T'C$.

Bog. $(\alpha - \beta) = NC \cdot$ Bog. 2α, oder wenn man die beliebige Länge $S'C = a$, die zugehörige $T'O = b$ und $NC = f$ setzt

$$a(\alpha + \beta) = b(\alpha - \beta) = 2f \cdot \alpha.$$

Fig. 261.



hieraus

$$\alpha' = \frac{b-a}{b+a}\alpha$$

also

$$b\left(\alpha - \frac{b-a}{b+a}\alpha\right) = 2f\alpha$$

woraus

$$f = \frac{ab}{a+b} \qquad (1)$$

oder wenn man umkehrt und $\frac{1}{f} = \frac{a+b}{ab}$ setzt, wie die Formel in der Regel ausgesprochen wird

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{a} \qquad (2)$$

woraus man bei gegebener Brennweite f und dem Abstand a eines leuchtenden Punkts, den Abstand b des zugehörigen Brennpunkts finden kann.

Ist $a > f$, so bleibt b positiv, und zwar ist

$$b = \frac{af}{a-f} \qquad (3)$$

Es existirt also ein Brennpunkt T' in der Axe DE in der Entfernung $CT' = b$.

Ist $a = f$, so wird $\frac{1}{b} = 0$, also

$$b = \infty \qquad (4)$$

d. h. die Strahlen laufen mit der Axe DE ∓, denn erst in unendlicher Entfernung entsteht ein Durchschnittspunkt T'

Ist $a < f$, so wird b negativ und zwar

$$b = -\frac{af}{f-a} \qquad (5)$$

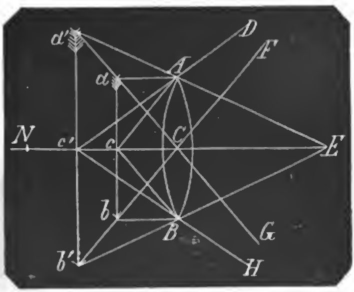
Ist nämlich der leuchtende Punkt S' zwischen dem Brennpunkt N und der Brille, so entstehen hinter derselben divergirende Strahlen, die rückwärts verlängert in einem Punkt von der Entfernung

$$b = \frac{af}{f-a}$$

in der Axe sich vereinigen.

2. Die vorstehenden Sätze sollen nun auf die biconvexe Linse als Brille angewendet werden. Es sei AB ein Brillenglas für eine weitsichtige Person, der ein naher Gegenstand ab in die Ferne gerückt werden mufs, damit sie ihn deutlich sehe, so ist dieser Gegenstand ab zwischen das Glas und dessen Brennpunkt N zu stellen. Die Strahlen durch C gehen geradlinig durch, und das Auge hinter AB, welches sämmtliche durch AB fallende Strahlen empfängt, sieht die Punkte a, c, b nach den Richtungen Ga, Ec und Fb. Der von c auf A fallende Strahl wird divergirend nach AD gebrochen (wie der von c auf B nach BH), das Auge sieht also den Punkt c

Fig. 262.



zugleich in der Richtung DA, und versetzt c in Gemeinschaft mit dem in der Richtung Ec aus c empfangenen Strahl nach c' und c' ist das Bild von c. Die Länge $c'C$ ist also das zuletzt ermittelte $-b = -\frac{af}{f-a}$ (Formel 5), woraus $cC = a$ und $NC = f$ ist.

Eben so wird der Strahl aA nach AE gebrochen, und das Auge versetzt den Punkt a gemeinschaftlich mit dem Strahl Ga nach a' und a' ist das Bild von a, so wie b' von b.

Die Strahlen von a auf die Fläche zwischen A und C fallend, werden alle zwischen AE und CG gebrochen, und zwar so, dafs sie sämmtlich nach a' gerichtet sind; die Strahlen von c auf Punkte zwischen A, C fallend in Strahlen zwischen AD und cE und alle so gelegen, dafs sie nach c' gerichtet sind; desgleichen die Strahlen von b auf die Fläche zwischen B und C brechen zwischen BE und das Auge wirft sie nach b'. $a'b'$ ist das entferntere und gröfsere Bild des Gegenstandes ab, und dessen Vergröfserung geschieht in dem Verhältnifs von

$$cC : c'C = a : b.$$

3. Je nachdem ab innerhalb der Brennweite NC seine Stellung hat, fällt sein Bild $a'b'$ innerhalb oder aufserhalb der Brennweite.

Es sei

$$cC = a = \tfrac{1}{20} f$$

so ist

$$-b = -\frac{\tfrac{1}{20} f^2}{\tfrac{19}{20} f} = \tfrac{1}{19} f$$

das Bild liegt also in einem Abstande von dem Gegenstande $= (\tfrac{1}{19} - \tfrac{1}{20}) f = \tfrac{1}{380} f$ und die Vergröfserung beträgt $\dfrac{f}{f-a} = \tfrac{20}{19}$, das Bild ist also nur um $\tfrac{1}{19}$ gröfser. Dies Resultat stimmt mit der Erfahrung: wenn man nämlich ein Brillenglas dicht auf eine Schrift hält, so nimmt man eine Vergröfserung derselben kaum wahr.

Es sei

$$cC = a = \tfrac{19}{20} f,$$

so ist

$$b = \frac{\tfrac{19}{20} f^2}{f - \tfrac{19}{20} f} = 19 f$$

und die Vergröfsernng beträgt das $\dfrac{b}{a}$ = 20fache, was auch die Erfahrung giebt; denn wenn man ein Brillenglas von der Schrift immer weiter entfernt, so erscheint sie immer gröfser aber auch immer undeutlicher; endlich verschwindet sie ganz, und wenn man noch weiter entfernt, so erscheint sie wieder kleiner aber verkehrt; Eigenschaften, die noch zu erklären sind.

Für $a = \tfrac{1}{2} f$ entsteht $b = f$, das Bild erscheint in dem Brennpnnkt und in dessen mit der Axe des Glases parallelen Ebene, die Vergröfserung beträgt das Doppelte; es ist also diese Stellung der zu lesenden Schrift angemessen, und wer eine Brille zum Lesen braucht, wählt solche, bei welcher er in angemessener Entfernung vom Auge die Schrift lesbar findet.

Die Brennweite W ist nach dem Art.: Brennglas, No. 4, Formel II.

$$= \frac{r}{2(n-1)}$$

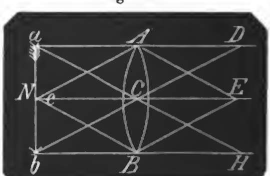
Setzt man den Brechungsexponent $n = \tfrac{3}{2}$, so hat man W (hier f bezeichnet) $= r$; wer also bei 10 Zoll Entfernung eine Schrift lesen will, nimmt eine B. No. 20, d. h. eine B., deren Gläser aus Kugeloberflächen von 20 Zoll Halbmesser bestehen, und die Schrift wird ihm durch die B. auf 20 Zoll Entfernung fortgerückt.

Erscheint dem unbewaffneten Auge ein Gegenstand erst in 30 Zoll Entfernnng deutlich, so hat er die Schrift bei derselben B. 12 Zoll weit vom bewaffneten Auge zu entfernen, weil für $b = 30''$, $f = 20''$ aus obiger Formel $a = 12''$ entsteht, nnd das Bild erscheint ihm 10″ weit hinter dem Brennpunkt.

Bei $10'' = a =$ der Entfernung der Schrift und $b = 30''$ erhält man $f = 15''$ und das Bild erscheint in der doppelten Brennweite, wobei es noch scharf ist.

4. Stellt man den Gegenstand in den Brennpunkt N, so werden die von a und b auf A nnd B ∦ der Axe einfallenden Strahlen in dem Punkt E gebrochen, der von C so weit absteht, als N von C, denn so wie N der Brennpunkt der parallelen Strahlen AD, BH, so ist E der Brennpunkt für die parallelen Strahlen aA, bB; die aus $c(N)$ auf AB fallenden Strahlen gehen dagegen hinter dem Glase sämmtlich ∦ der Axe weiter fort. Anstatt also, dafs der Punkt c durch divergirende Strahlen wie DA, Fig. 264, nach einem Punkt c' der Axe als Bild geworfen wird, entsteht als Bild von c

Fig. 263.



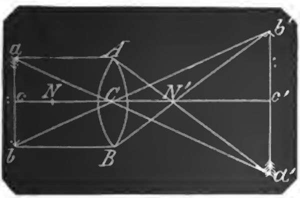
eine Kreisfläche von der Gröfse des Glases, und zwar in unendlicher Entfernung. Die von a und b durch C fallenden Strahlen gehen nun wieder geradlinig nach CH und CD weiter fort. Daher ist aH ∦ AE und bD ∦ BE. Also auch von den Pnnkten a nnd b entstehen Bilder wie a', b', Fig. 264, hier erst unendlich weit von CN entfernt, weil EA und Ha erst in unendlicher Ferne sich schneiden, und

dies gilt von allen übrigen Punkten des Gegenstandes *ab*: Das Auge empfängt nur einen Lichteindruck ohne Bild. Führt man *ab* um ein Geringes dem Glase näher, so entstehen zwar Durchschnittspunkte *a'*, *b'*, *c'*, wie Fig. 264, allein diese liegen so entfernt, und in dem Bilde *a'b'* sind die Punkte von *ab* so weit noch auseinander gerückt, dafs der Gegenstand nicht zu erkennen ist, wie man sich mit einem Brillenglase überzeugen kann.

5. Entfernt man *ab* von *N* aus weiter vom Glase, so entsteht der No. 1, Fig. 261 u. No. 3 gedachte Fall: *ab* steht in *S'* oder *S*, und *T'*, *T* sind die zu ihnen gehörenden Brennpunkte.

Die Strahlen (Fig. 264) *aA*, *bB* ‡ *cC* gehen gebrochen durch den Brennpunkt *N'*, die Strahlen *aC*, *bC*, *cC* gehen ungebrochen fort, und es entsteht ein verkehrtes Bild *a'c'b'* von *acb*, welches um so entfernter und gröfser ist, je näher

Fig. 264.

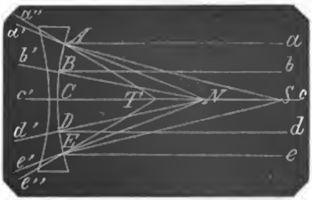


der Gegenstand *acb* dem Brennpunkt *N* sich befindet, und das um so näher und kleiner wird, je weiter man *ab* von *N* entfernt. Für $cC = 2NC$ entsteht das Bild *a'b'* in der gleichen Entfernung $Cc' = 2CN'$ und ist mit dem Gegenstande gleich grofs. Um das verkehrte Bild von *ab* betrachten zu können, mufs das Auge genau in *a'b'* sich befinden.

B. Brille für die Ferne, B. für Nahsehende, biconcave B.

Setzt man No. 3 in $W = f = \frac{r}{2(n-1)}$ für biconvexe Gläser $-r$ für r, so hat man die Brennweite $W = -\frac{r}{2(n-1)}$ für biconcave Gläser; und $n = \frac{3}{2}$ genommen $f = -r$, d. h. parallel mit der Axe einfallende Strahlen divergiren der Art, dafs sie aus dem Brennpunkt *N* zu kommen scheinen, der hier zum Zerstreuungspunkt wird. Von einem leuchtenden Punkt *S* aus divergiren die Strahlen noch stärker, und diese vereinigen sich verlängert in einen Punkt *T*: die parallelen Strahlen *aA*, *bB*, *cC*, *dD*, *eE* brechen sich nach den Richtungen *Aa'*, *Bb'*, *Cc'*, *Dd'*, *Ee'*, und diese vereinigen sich, rückwärts verlängert in dem Brennpunkt *N*. Die von *S* aus einfallenden Strahlen *SA*, ... *SE* brechen sich nach *Aa''* ... *Ee''*,

Fig. 265.



welche verlängert in *T* sich vereinigen; $NC = f$, $TC < f$. Setzt man nämlich in F. 3, No. 1, $-f$ für f, weil der Brennpunkt concaver Gläser dem convexer Gläser entgegengesetzt liegt, so erhält man

$$b = \frac{a \cdot (-f)}{a+f} = -\frac{af}{a+f}$$

Es ist also *b* jederzeit negativ, und liegt auf einerlei Seite mit *a*. Schreibt man

$$b = -\frac{f}{1+\frac{f}{a}}$$

so ersieht man, dafs der Vereinigungspunkt *T* von Strahlen, die aus einem leuchtenden Punkt *S* herrühren, immer zwischen das Glas und den Brennpunkt fällt und schreibt man

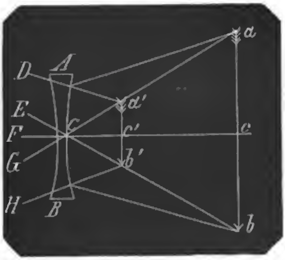
$$b = -\frac{f}{1+\frac{f}{a}}$$

so ersieht man, dafs *b* immer kleiner als *a* wird: für $a(SC) = nf$ wird $b(TC) = \frac{n}{n+1} f$ und für $a = \frac{1}{n} f$ wird $b = \frac{1}{n+1} f$.

Wie das Bild eines fernen Gegenstandes *ab* durch die B. nach *a'b'* und zwar innerhalb der Brennweite gerückt wird, zeigt Fig. 266. Die Strahlen *aC*, *cC*, *bC* gehen geradlinig nach *CG*, *CF*, *CE* durch. Der Strahl *aA* bricht divergent nach *AD* und durch *DA* verlängert in Gemeinschaft mit dem Strahl *Ga* wird das Bild von *a* nach *a'* geworfen; eben so das Bild *b'* durch die Strahlen *Eb* und *HB* und *a'b'* ist das nahe aber kleinere Bild des fernen Gegenstandes *ab*. Ist *ab* eine kleine Länge, und beträgt *Cc* nur wenige Fufs,

so wird jeder kleine Theil von *ab* unter einem hinreichend grofsen Winkel gesehen, und das Bild *a'b'* wird genau erkannt, wie z. B. eine zu lesende Schrift; ist dagegen *ab* 100 Fufs entfernt, so ist auch

Fig. 266.



der unter dem $\angle aCb$ gesehene Gegenstand sehr grofs, und kleine Tleilchen desselben (z. B. Schrift) fallen unter einem zu kleinen Winkel auf das Glas, als dafs deren Bilder in *a'b'* genau zu erkennen wären, dafs also eine in *ab* befindliche Schrift lesbar würde.

Bruch (Arithmetik) gebrochene Zahl, ist eine Zahl, deren Einheit (Bruch-Einheit) ein aliquoter Theil der Einheit (1) von ganzen Zahlen ist, und die Bruch-einheit selbst. Da die ganze Einheit unzählig viele aliquote Theile haben kann, so giebt es auch unzählig viele Brüche, die sich auf verschiedene Einheiten beziehen. $\frac{5}{6}$ ist ein B., dessen Einheit $\frac{1}{6}$ ist; die Zahl 6, welche die Einheit nennt, heifst der Nenner, die Zahl 5, welche sie zählt, der Zähler. Der B. $\frac{5}{6}$ ist also der Inbegriff von 5 Theilen, deren die Eins 6 begreift, oder $\frac{5}{6}$ ist einer der 6 gleichen Theile, in welche die Zahl 5 getheilt ist. Nimmt man alle 6 Theile der Eins zusammen, d. i. 6 mal $\frac{1}{6} = \frac{6}{6}$, oder theilt man die Zahl 6 in 6 gleiche Theile, d. h. 6 dividirt durch 6, so erhält man die Eins wieder. Ueberhaupt ein B. mit gleichem Zähler und Nenner z. B. $\frac{8}{8} = 1$, also die absolute Einheit in Bruchform.

Brüche, die sich auf einerlei Einheiten beziehen (einerlei Nenner haben) heifsen gleichartig oder gleichnamig.

2. Ein B. < z. B. $\frac{1}{3}$ heifst eigentlicher oder ächter B. Ein B. > 1 z. B. $\frac{7}{4}$ heifst uneigentlicher oder unächter B.

Ein unächter B. als ganze Zahl mit hinzugeschriebenem ächten Bruch z. B. $3\frac{3}{8}$ heifst gemischter B., besser eine gemischte Zahl. In dieser Beziehung heifsen B. ohne vorgeschriebene Ganze, z. B. $\frac{3}{4}$, $\frac{8}{7}$ reine B.

Brüche, deren Zähler oder deren Nenner, oder deren Zähler und Nenner aus B bestehen, z. B. $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{8}}$ $\frac{\frac{4}{5}}{6}$ $\frac{7}{\frac{3}{11}}$ heifsen zusammengesetzte oder complexe, unreine B. oder Doppelbrüche. In dieser Beziehung heifsen B, deren Zähler und Nenner ganze Zahlen sind, z. B. $\frac{4}{13}$, $\frac{13}{6}$ einfache B.

3. Ein zusammengesetzter B. anderer Art ist der Kettenbruch: dieser hat den Zähler 1 und zum Nenner eine gemischte Zahl, deren ächter B. den Zähler 1 hat; z. B. $\frac{1}{2\frac{1}{8}}$ der zweite Nenner (hier 8) kann wieder aus einer gemischten Zahl bestehen, deren B. den Zähler 1 hat; z. B.

$$\frac{1}{2\frac{1}{6\frac{1}{4}}}$$

Der letzte Nenner (hier 4) kann nun ebenfalls statt einer ganzen Zahl eine gemischte Zahl sein, und so fort, deshalb schreibt man den ersten Kettenbruch

$$\frac{1}{2+\frac{1}{8}}$$

den zweiten

$$\frac{1}{2+\cfrac{1}{6+\frac{1}{4}}}$$

ein dritter würde geschrieben werden

$$\frac{1}{5+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{3+\frac{1}{3}}}}$$

u. s. w., wodurch ein klarer Ueberblick gewonnen wird.

4. Brüche, deren Zähler = 1 und deren Nenner dekadische Zahlen sind, heifsen dekadische Brüche als

$$\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000} \ldots$$

und in dieser Beziehung nennt man die dekadischen Zahlen

1, 10, 100 ....

dekadische Ganze.

Jeder der eben geschriebenen B. ist 10mal so klein, als der ihm links nebenstehende; denn wenn man jedes Zehntel einer Zahl in 10 Theile theilt, so ist die Zahl in 100 Theile getheilt u. s. w. Setzt man die Zahlenfolge nach demselben Gesetz nach links weiter fort, so erhält man

$$\ldots.\ 1000\ 100\ 10\ 1\ \frac{1}{10}\ \frac{1}{100}\ \frac{1}{1000}\ \ldots.$$

So wie man nun bei einer nach dekadischem System geschriebenen Zahl die einzelnen ganzen Zahlen als Vielfache der zu derselben Zifferstelle gehörenden Einheit betrachtet, so kann dies auch mit den Brüchen geschehen.

Die Zahl 2453 ist $2 \times 1000 + 4 \times 100 + 5 \times 10 + 3 \times 1$ wo 1000, 100, 10, 1 die Einheiten der Zifferstellen sind. Setzt man aber durch ein Komma (245,3) fest, daſs die 5 in der Einerstelle steht, so hat man die Zahl $245{,}3 = 200 + 40 + 5 + \frac{3}{10}$ oder $\frac{2453}{10}$; eben so ist die Zahl 1,245 $= 1 + \frac{2}{10} + \frac{4}{100} + \frac{5}{1000} = 1\frac{245}{1000} = \frac{1245}{1000}$.

Die Zahl 0,48 heiſst: keine Ganze $+ \frac{4}{10} + \frac{8}{100}$ (sprich: $\frac{4}{10}, \frac{8}{100}$ ohne plus) $= \frac{48}{100}$

In der Zahl 034 ist die Null an sich unnütz; sie bedeutet, daſs keine Tausende da sind; in der Zahl 6,540 ist die Null an sich unnütz; denn sie zeigt nur, daſs keine Tausendtel da sind; 00437, 12,00 ist = 437; 12. Dagegen 0,005 heiſst: keine Ganze, keine Zehntel, keine Hundertel + 5 Tausendtel $= \frac{5}{1000}$

Solche in Form ganzer Zahlen mit einem Einerkomma geschriebenen Brüche heiſsen Decimalbrüche, deren es wieder ächte und unächte giebt. Die Ziffern rechts dem Komma heiſsen Decimalstellen.

5. Wird zu Zähler und Nenner eines B. einerlei Zahl addirt, oder von denselben einerlei Zahl subtrahirt, so wird der Werth des B. jedesmal geändert. Ist der B. ächt, so wird er bei Addition von einerlei Zahl gröſser, bei Subtraction kleiner. Bei unächten B. geschieht das Entgegengesetzte.

$$\frac{a+n}{b+n} - \frac{a}{b} = n \cdot \frac{b-a}{b(b+n)}$$

also für $b > a$ ist

$$\frac{a+n}{b+n} > \frac{a}{b}$$

Vergleicht man $\frac{a-n}{b-n}$ mit $\frac{a}{b}$ so findet man

$$\frac{a}{b} - \frac{a-n}{b-n} = n \cdot \frac{b-a}{b(b-n)}$$

also

$$\frac{a-n}{b-n} < \frac{a}{b}$$

wobei $n < b$ sein muſs. Für $b < a$ entsteht das Entgegengesetzte.

Man bringt einen B. auf die kleinsten Zahlen (s. Abbreviren der B., Aufheben der B.) durch Auffindung des gröſsten gemeinschaftlichen Theilers zwischen Zähler und Nenner, und dies geschieht nach und nach folgendermaſsen:
Dividire Zähler und Nenner durch den Zähler, z. B.

$$\frac{65}{104} = \frac{1}{1\frac{39}{65}} \text{ heiſst } \frac{65}{104} = \frac{65}{1 \cdot 65 + 39}$$

Die 104 ist verschwunden, und man sieht, daſs der gröſste gemeinschaftliche Theiler zwischen 39 und 65 auch der zwischen 65 und 104 ist. Verfahre also ebenso mit $\frac{39}{65}$ so erhält man

$$\frac{1}{1\frac{26}{39}} \text{ d. h. } \frac{39}{65} = \frac{39}{1 \cdot 39 + 26}$$

und der gröſste gemeinschaftliche Theiler zwischen 26 und 39 ist auch der zwischen 39 und 65, folglich auch der zwischen 65 und 104. So weiter entsteht

$$\frac{26}{39} = \frac{1}{1\frac{13}{26}} = \frac{26}{1 \cdot 26 + 13}$$

so daſs 13, der gröſste gemeinschaftliche Theiler zwischen 65 und 104, gefunden ist.

Man sieht, daſs man bei dieser Operation den einfachen B. in den Kettenbruch

$$\frac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}$$

verwandelt hat, und dieser giebt immer den Werth eines B. in den kleinsten Zahlen an, wenn man ihn wieder in einen reinen B. umformt. Die Operation geschieht praktisch, wie folgende Darstellung zeigt:

```
 65     65 | 104 | 1
104           65 |
           --------------
              39 | 65 | 1
                   39 |
                 -----------
                   26 | 39 | 1
                        26 |
                      ----------
                        13 | 26 | 2
                             26 |
                           -------
                              0
```

und die Partialquotienten 1, 1, 1, 2 bilden zugleich der Reihe nach die ganzen Nenner des Kettenbruchs.

6. Brüche können nur addirt und von einander subtrahirt werden, wenn sie sich auf einerlei Einheit beziehen, d. h. einerlei Nenner haben (s. Addition No. 6) z. B.

$$\frac{5}{9} + \frac{2}{9} = \frac{7}{9};\quad \frac{8}{11} - \frac{3}{11} = \frac{5}{11}$$

Bei ungleichen Nennern sind erst gleiche Nenner zu schaffen, z. B. bei $\frac{4}{5} - \frac{2}{3}$, wo

der kleinste gemeinschaftliche Nenner, (der kleinste Generalnenner) nur $3 \cdot 5 = 15$ sein kann; dann hat man

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{10}{15}$$

und

$$\frac{4}{5} = \frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{12}{15}$$

mithin

$$\frac{4}{5} - \frac{2}{3} = \frac{12}{15} - \frac{10}{15} = \frac{2}{15}$$

Die Brüche $\frac{3}{8} - \frac{1}{4}$ haben 8 zum kleinsten Generalnenner, mithin $\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$ genommen, giebt

$$\frac{3}{8} - \frac{2}{8} = \frac{1}{8}$$

Für die Addition mehrerer Brüche, deren Nenner zum Theil zusammengesetzte Zahlen unter sich sind, verfahre man, um ihren kleinsten Dividuus zu finden, nach folgendem Beispiel:

$$\frac{3}{4} + \frac{7}{8} + \frac{5}{9} + \frac{5}{12} + \frac{2}{3} + \frac{3}{16} + \frac{13}{18}$$

schreibe die Nenner neben einander, wie

4, 8, 9, 12, 3, 16, 18

und streiche die Zahlen fort, welche Theiler von einer der übrigen Zahlen sind, also 4 als Theiler von 8; 8 als Theiler von 16; 3 als Theiler von 9; 9 als Theiler von 18, wie nachstehende Reihe, worin nur 12, 16, 18 übrig bleiben. Man nehme

4,	8,	9,	12,	3,	16,	18
4,			3,		4,	18
3,			1,		4,	6
2,			1,		2,	3

nun den gröfsten Theiler zweier (oder mehrerer) Zahlen, hier 4; diese vorgeschrieben, dividirt, kommt für 12 die 3; für 16 die 4, 18 bleibt 18; dividire so weiter und die Factoren des kleinsten Generalnenners sind $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 144$. Oder bei demselben Beispiel

4,	8,	9,	12,	3,	16,	18
3,			4,		16,	6
2,			2,		8,	3
2,			1,		4,	3

mithin der Generalnenner wie oben:

$3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 =$ (geordnet) $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 = 144$

Um den Zähler für $\frac{3}{4}$ zu finden, läfst man den Factor 4 fort und multiplicirt

$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \times 3 = 36 \cdot 3 =$ 108

Für $\frac{7}{8}$ läfst man die Factoren $2 \cdot 4 = 8$ fort, und multiplicirt $2 \cdot 3 \cdot 3 \times 7 = 18 \cdot 7 =$ 126

Latus 234

Transport 234

Für $\frac{5}{9}$ läfst man die Factoren $3 \cdot 3 = 9$ fort, und multiplicirt $2 \cdot 2 \cdot 4 \times 5 = 16 \cdot 5 =$ 80

Für $\frac{11}{12}$ läfst man die Factoren $3 \cdot 4 = 12$ fort und multiplicirt $2 \cdot 2 \cdot 3 \times 11 = 12 \cdot 11 =$ 132

Für $\frac{2}{3}$ läfst man den Factor 3 fort und multiplicirt $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \times 2 = 48 . 2 =$ 96

Für $\frac{3}{16}$ läfst man die Factoren $2 \cdot 2 \cdot 4 = 16$ fort und multiplicirt $3 \cdot 3 \times 3 = 9 \cdot 3 =$ 27

Für $\frac{13}{18}$ läfst man die Factoren $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$ fort und multiplicirt $2 \cdot 4 \times 13 = 8 \cdot 13 =$ 104

Summa = 673

mithin die Summe

$$\frac{673}{144} = 4\frac{97}{144}$$

7. Ein B. kann durch eine ganze Zahl, eine ganze Zahl durch einen B., und ein B. durch einen B. multiplicirt und dividirt werden.

Ein B. wird durch eine ganze Zahl multiplicirt, wenn die Anzahl seiner Einheiten mit der Zahl vervielfacht werden, die Anzahl der Einheiten drückt aber der Zähler aus, mithin wird der Zähler multiplicirt: z. B.

$$\frac{3}{8} \times 4 = \frac{3 \cdot 4}{8} = \frac{12}{8}$$

hier kann mit 4 gehoben werden: nun ist aber

$$\frac{3}{8} = \frac{3}{2 \cdot 4}$$

mithin

$$\frac{3}{2 \cdot 4} \times 4 = \frac{3}{2}$$

folglich wird auch ein B. durch eine ganze Zahl multiplicirt, wenn man den Nenner mit derselben dividirt. Umgekehrte Operationen ergiebt die Division eines B. durch eine ganze Zahl; z. B.

$$\frac{6}{7} : 3 = \frac{6 : 3}{7} = \frac{2}{7}$$

oder

$$\frac{6}{7} : 3 = \frac{6}{7 \cdot 3} = \frac{2 \cdot 3}{7 \cdot 3} = \frac{2}{7}$$

Mit einem B. multipliciren, heifst mit dem durch den Nenner getheilten Zähler multipliciren, also mit dem Zähler multipliciren und mit dem Nenner dividiren; z. B.

$$8 \times \frac{5}{12} = \frac{8 \cdot 5}{12} = \frac{40}{12} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$$

und

$$\frac{3}{4} \times \frac{8}{9} = \frac{3 \cdot 8}{4 \cdot 9} = \left(\text{rechne } \frac{3 \cdot 8}{4 \cdot 9 \cdot 3} \text{ dann } \frac{3 \cdot 8 \cdot 2}{4 \cdot 9 \cdot 4}\right) = \frac{2}{3}$$

Umgekehrte Operationen giebt die Division durch einen B.; also man dividirt durch einen B., wenn man diesen umkehrt und damit multiplicirt. Z. B.

$$8:\frac{4}{5}=8\times\frac{5}{4}=\frac{8\cdot 5}{4}\left(\text{rechne }\frac{8\cdot 5\cdot 2}{4}\right)=10$$

$$\frac{5}{6}:\frac{15}{16}=\frac{5}{6}\cdot\frac{16}{15}=\frac{5\cdot 16}{6\cdot 15}\left(\text{rechne }\frac{5\cdot 16}{6\cdot 15\cdot 3}\right.$$

$$\left.\text{dann }\frac{5\cdot 16\cdot 8}{6\cdot 15\cdot 3\cdot 3}\right)=\frac{8}{9}$$

8. Man nennt die Zahl, welche aus der Vertauschung des Zählers mit dem Nenner entsteht, den umgekehrten Werth oder den reciproken Werth der ersten Zahl, z. B. $\frac{4}{3}$ ist der reciproke Werth von von $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{1}=4$ der von $\frac{1}{4}$, und $\frac{1}{2}$ der von $\frac{2}{1}=2$.

Bruch (Dynamik), die gewaltsame Trennung der durch Cohäsion verbundenen Elemente eines festen Körpers. Diese geschieht entweder 1) durch Zug, indem die Elemente geradlinig auseinander gezogen werden, und zerreifsend sich trennen; 2) durch Biegung, indem auf den Körper hebelartig eingewirkt wird, und das Zerreifsen um eine sich bildende Drehaxe geschieht; das eigentliche Zerbrechen eines Körpers; 3) durch Druck, indem die Elemente geradlinig zusammengedrückt werden, und nach den Seitenrichtungen hin einander ausweichen, eine Erscheinung, die man mit Zerquetschen bezeichnet.

Beim Zug werden die Körpertheilchen nur ausgedehnt, bei der Biegung werden die auf einer Seite der Drehaxe befindlichen Theilchen ausgedehnt, die auf der andern Seite befindlichen zusammengedrückt, und die Axe des Querschnitts, in der die Körpertheilchen weder ausgedehnt noch zusammengedrückt werden, heifst die neutrale Axe. Beim Zerquetschen werden die Körpertheilchen nur zusammengedrückt.

Man hat noch B. durch eine vierte Art von Einwirkung, nämlich dadurch, dafs der Körper an beiden Enden nach entgegengesetzten Richtungen um seine Axe gedreht wird; diese Wirkung, die Torsion (Verdrehungskraft) findet auf jede Welle statt, an welcher Kraft und Widerstand zugleich wirkt (vergl. Belastung, Brechungscoefficient).

Bruch (Mineral.) ist der Erfolg der unregelmäfsigen Structur eines Fossils, wenn es zertheilt wird; die Flächen, in welchen die Theilung geschieht, heifsen Bruchflächen. Diese erscheinen uneben, muschelig, oder splittrig oder hakig, oder bröcklig, erdig, im Gegensatz zu den glatten und ebenen Spaltungsflächen von Fossilien regelmäfsiger Structur (vgl. Blätterdurchgang).

Bruchpotenz ist eine Potenz, deren Exponent ein Bruch ist, als:

$$10^{\frac{1}{7}};\ 2^{\frac{3}{4}}$$

Nun ist

$$10^{\frac{1}{7}}=\sqrt[7]{10};\ 2^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{2^3}$$

Der Zähler des Exponent zeigt also an, auf die wievielte Potenz die Grundzahl erhoben, und der Nenner, die wievielte Wurzel aus der mit dem Zähler gebildeten Potenz gezogen werden soll. Ein Mehreres s. u. Buchstabenrechnung, F.

Buchstaben, als allgemeine Zahlengröfsen, von denen jede einzelne symbolisch jede bestimmte Zahl vertritt, s. u. algebraische Zeichen. Unter *a*, *b*, *c*, ... kann man sich jede bestimmte Zahl von 0 ab vorstellen; nur ist *b* eine andere Zahl als *a* und *c* eine dritte von beiden verschiedene Zahl.

Buchstabenrechnung, die Rechnung mit Buchstaben, ist der elementare Theil der Analysis, und sie verhält sich zu dieser wie ein Handwerk zu der ihm gleichnamigen Kunst. Der Art.: Algebraische Zeichen giebt vollständig die bei der B. übliche Bezeichnung; es sind also nur noch die Rechnungsarten zu betrachten.

A. Die Addition ist schon in dem Art.: Addition gezeigt. Die Subtraction ist eben so einfach, denn die allgemeine Regel ist: Man gebe dem Subtrahend das entgegengesetzte Vorzeichen und addire ihn so zum Minuend; also

$$3a-(+2a)=3a+(-2a)=a$$

dieser Fall ist in dem Resultat von selbst klar, nämlich, dafs wenn $2a$ von $3a$ abgezogen werden, ein a als Rest bleibt.

Dafs aber

$$3a-(-2a)=3a+(+2a)=5a$$

erhellt, wenn man dem Minuend den ihn nicht ändernden Werth $=0$ hinzusetzt, und diesem die Form $+2a-2a$ giebt; alsdann ist der Minuend

$$=3a+2a-2a$$

und man sieht, dafs wenn $-2a$ hinfortgenommen wird, $3a+2a=5a$ als Rest bleibt. Die Subtraction zusammengesetzter Buchstabenausdrücke geschieht demnach, wie bei der Addition, und dafs man die entgegengesetzten Vorzeichen im Subtrahend entweder darunter schreibt, wie in dem nachfolgenden Beispiel, oder es auch nur in Gedanken thut:

$$\begin{array}{ll} \text{Min.} & =4ab+3c-5d-2f \\ \text{Subtr.} & =2ab-4c+3d-4f \\ & \quad\ \ -\quad\ +\quad -\quad + \\ \hline \text{Rest} & =2ab+7c-8d+2f \end{array}$$

Bei gleichen Factoren von Producten, die von einander abzuziehen sind, wendet man die Klammer an (s. algebraische Zeichen) als

$$ab - cb = b(a - c)$$

womit die angezeigte Differenz $ab - cd$ in ein Product verwandelt worden ist. Die Addition und Subtraction von Brüchen geschieht, dafs man den einzelnen Gliedern einen gemeinschaftlichen Nenner giebt, und die Zähler dann addirt und subtrahirt. Z. B.

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \pm \frac{bc}{bd} = \frac{ad \pm bc}{bd}$$

$$a \pm \frac{b}{c} = \frac{ac \pm b}{c}$$

$$\frac{b}{c} \pm a = \frac{b \pm ac}{c}$$

B. Die Multiplication einfacher Buchstaben-Ausdrücke geschieht durch das Nebeneinandersetzen derselben:

$$a \times b = ab;\ c \times d \times e = cde$$

sind die Factoren Brüche, so multiplicirt man Zähler mit Zähler, Nenner mit Nenner und hebt wo möglich auf:

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$\frac{a}{b} \times \frac{b}{c} = \frac{ab}{bc} = \frac{a}{c}$$

Multiplicationen zusammengesetzter Zahlen geschehen partialiter:

$$a \times (b + c)$$

heifst, es soll $(b + c)$ ver-a-facht werden, und dies geschieht, wenn man b mal a, dann c mal a nimmt, und beide Partialproducte addirt; es ist also

$$a \times (b + c) = ab + ac$$

Ist der Multiplicator ebenfalls zusammengesetzt, so wird auch mit diesem theilweise multiplicirt:

1. $(a+b)\times(c+d)$ ist $= a(c+d)+b(c+d)$
$= ac+ad+bc+bd$

$(a+b)\times(a+b)$ multiplicire:

$$\begin{aligned} a(a+b) &= a^2 + ab \\ b(a+b) &= \qquad\ ab + b^2 \\ \hline (a+b)\times(a+b) &= \text{Summa} = a^2 + 2ab + b^2 \end{aligned}$$

2. $(a-b)\times(a-b)$ multiplicire:

$$\begin{aligned} a\times(a-b) &= a^2 - ab \\ -b\times(a-b) &= \qquad - ab + b^2 \\ \hline (a-b)\times(a-b) &= \text{Summa} = a^2 - 2ab + b^2 \end{aligned}$$

Aus diesem Beispiel geht auch hervor, welche Vorzeichen des Products entstehen, je nachdem die Vorzeichen der Factoren sind; haben nämlich beide Factoren gleiche Vorzeichen, so erhält das Product das Vorzeichen +, haben beide Factoren ungleiche Vorzeichen, so erhält das Product das Vorzeichen −. Denn $+a$ mit $+b$ zu multipliciren heifst: $+a$ soll $+b$ oder b mal genommen werden, es mufs also das Product $+ab$ sein; eben so heifst $-a$ mit $+b$ zu multipliciren, $-a$ soll b mal genommen werden, und das $b$fache von $(-a)$ ist offenbar $(-ab)$. Dagegen heifst: $+a$ mit $-b$ zu multipliciren, $+a$ soll b mal und entgegengesetzt genommen werden, also $-(+a\times b) = -ab$, und eben so $-a$ mit $-b$ zu multipliren, $-a$ soll b mal und entgegengesetzt genommen werden, d. h. $-ab$ entgegensetzt, also $+ab$.

3. $(a+b)\times(a-b)$ multiplicire:

$$\begin{aligned} a(a-b) &= a^2 - ab \\ +b(a-b) &= \qquad + ab - b^2 \\ \hline (a+b)(a-b) &= \text{Summa} = a^2 - b^2 \end{aligned}$$

4. $(a^2+ab+b^2)(a-b)$ multiplicire:

$$\begin{aligned} a\times(a^2+ab+b^2) &= a^3 + a^2b + ab^2 \\ -b\times(a^2+ab+b^2) &= \qquad - a^2b - ab^2 - b^3 \\ \hline \text{Product} &= a^3 - b^3 \end{aligned}$$

5. $(a-b)(a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \ldots + a^2b^{n-2} + ab^{n-1} + b^n)$

giebt das Product $a^{n+1} - b^{n+1}$

Man findet ferner:

6. $(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$
7. $(a+b)(a^3 - a^2b + ab^2 - b^3) = a^4 - b^4$
8. $(a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) = a^5 + b^5$
9. $(a+b)(a^n - a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 - \ldots \pm a^2b^{n-2} \mp ab^{n-1} \pm b^n) = a^{n+1} \pm b^{n+1}$

wo $+b^{n+1}$ für ein gerades n, $-b^{n+1}$ für ein ungrades n gilt.

C. Die Division einfacher Buchstaben-Ausdrücke geschieht dadurch, dafs man sie in Bruchform bringt:

$$a : b = \frac{a}{b}$$

Gleiche Buchstaben durch einander dividirt heben sich zu 1 auf

$$a : a = \frac{a}{a} = 1;\ ab : ac = \frac{b}{c}$$

Brüche dividirt man durcheinander, indem man den Divisor umkehrt, und ihn nun mit dem Dividend multiplicirt (s. Bruch, No. 7.)

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

$$a : \frac{b}{c} = a \cdot \frac{c}{b} = \frac{ac}{b}$$

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{bc}$$

2. Da

$$(+a)\,(+b) = +ab \text{ so ist } \frac{+ab}{+a} = +b$$

$$(+a)\,(-b) = -ab \text{ so ist } \frac{-ab}{+a} = -b$$

$$(-a)\,(+b) = -ab \text{ so ist } \frac{-ab}{-a} = +b$$

$$(-a)\,(-b) = +ab \text{ so ist } \frac{+ab}{-a} = -b$$

Haben also Dividend und Divisor gleiche Vorzeichen, so wird der Quotient positiv, bei ungleichen Zeichen wird der Quotient negativ.

3. Die Division einer mehrgliedrigen Gröfse durch einen einfachen oder mehrgliedrigen Divisor geschieht partiell.

1. Beisp.:

$$(aa \mp ab \pm bb) : b \text{ giebt } \frac{aa}{b} \mp a \pm b$$

oder wenn man ein Product von n gleichen Factoren: $aaaa\ldots$ als Potenz $= a^n$ schreibt:

$$(a^2 \mp ab \pm b^2) : b \text{ giebt } \frac{a^2}{b} \mp a \pm b$$

indem man jedes einzelne Glied dividirt und die Partialquotienten durch die Vorzeichen der Dividendusglieder verbindet.

2. Beisp.:

$$(a^2 + 2ab + b^2) : (a + b)$$

Man übersieht, dafs man von den ersten beiden Gliedern $a^2 + ab = a(a+b)$ fortnehmen kann. Geschieht dies, so ist der Rest $= ab + b^2$ und dieser ist $= ab + b^2 = b(a+1)$ hinfortgenommen, bleibt der Rest $= 0$.

Der Quotient ist also $a + b$, und man hat so verfahren, als wenn man das Exempel schriebe

$$(a^2 + ab + ab + b^2) : (a + b)$$

und verführe wie bei dem ersten Beispiel, nämlich

$$\frac{a^2 + ab}{a + b} + \frac{ab + b^2}{a + b} = \frac{a(a+b)}{a+b} + \frac{b(a+b)}{a+b} = a + b$$

Nicht immer sind die Partialquotienten sogleich zu erkennen, es mufs sodann versuchsweise verfahren werden.

3. Beisp.:

$$(a^3 - b^3) : (a - b)$$

schreib

$$\begin{array}{l|l}
a^3 - b^3 & a - b \\
\underline{a^3 - a^2b} & a^2 + ab + b^2 \\
\quad + a^2b - b^3 & \\
\quad \underline{a^2b - ab^2} & \\
\qquad + ab^2 - b^3 & \\
\qquad ab^2 - b^3 &
\end{array}$$

Man sagt nämlich, a in a^3 geht a^2mal, setzt a^2 als ersten Theilquotient unter $a - b$, multiplicirt $(a - b)$ mit a^2, giebt $a^3 - a^2b$, setzt dies Product unter $a^3 - b^3$, zieht ab und erhält den Rest $ab^2 - b^3$, man hat also $(a-b)$, a^2mal abgezogen, und es ist nun zu rechnen, wie oft $a - b$ noch in diesem Rest enthalten ist; man sagt $+a$ in $+a^2b$ geht $+ab$mal; $+ab$ ist der zweite Theilquotient, ab mit $a - b$ multiplicirt giebt $a^2b - ab^2$, dies darunter gesetzt, abgezogen, bleibt Rest $+ ab^2 - b^3$; $+a$ in $+ab^2 = +b^2$ giebt den 3. Theilquotient und $b^2 \times (a - b)$ ist $=$ dem Rest, folglich ist der gesuchte Quotient

$$= a^2 + ab + b^2$$

Geht der Divisor in den Dividend nicht auf, so erhält man als Quotient eine unendliche Reihe.

Beispiel $\frac{a}{1+x}$ schreib:

$$\begin{array}{l|l}
 & 1 + x \\
a & \\
\underline{a + ax} & a - ax + ax^2 - ax^3 + \ldots \pm ax^n \\
\quad - ax & \\
\quad \underline{- ax - ax^2} & \\
\qquad + ax^2 & \\
\qquad \underline{+ ax^2 + ax^3} & \\
\qquad\quad - ax^3 &
\end{array}$$

oder dasselbe Beispiel $\frac{a}{x+1}$ schreib

$$\begin{array}{l|l}
 & x + 1 \\
a & \\
\underline{a + \frac{a}{x}} & \frac{a}{x} - \frac{a}{x^2} + \frac{a}{x^3} - \ldots \pm \frac{a}{x^n} \\
\quad - \frac{a}{x} & \\
\quad \underline{- \frac{a}{x} - \frac{a}{x^2}} & \\
\qquad + \frac{a}{x^2} &
\end{array}$$

und man hat aus beiden Resultaten

$$a - ax + ax^2 - \ldots \pm ax^n = \frac{a}{x} - \frac{a}{x^2} + \ldots \pm \frac{a}{x^n}$$

D. Die Rechnung mit Potenzen hat auch ihre 4 Species.

Addirt und subtrahirt können nur Potenzen werden, wenn sie einerlei Wurzel und einerlei Exponent haben, wenn sie also einander gleich sind.

$$a^r - 3a^r + 7a^r = 5a^r$$
$$ax^n + bx^n - cx^n = (a + b - c)x^n$$

Potenzen mit verschiedenen Wurzeln und mit verschiedenen Exponenten werden eben so addirt und subtrahirt, wie ungleiche Buchstabengröfsen:

$a^n \pm b^n \mp a^m$ bleibt $a^n \pm b^n \mp a^m$

Multiplicirt und dividirt können Potenzen nur werden, wenn sie gleiche Wurzeln oder bei verschiedenen Wurzeln gleiche Exponenten haben:

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

Denn a^m ist das Product, welches aus m Factoren besteht, von denen jeder $= a$ ist, und a^n ist das Product, in dem a als Factor n mal ist, folglich hat das Product $a^m \cdot a^n$ die Zahl a als Factor $(m + n)$ mal, eine Potenz, die durch a^{m+n} ausgedrückt wird. Hiernach ist

2. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = \frac{1}{a^{n-m}}$

nämlich a^{m-n} wenn $m > n$; $\frac{1}{a^{n-m}}$ wenn $n > m$ ist.

Setzt man $m \gtrless n$, so bleiben beide Quotienten gültig, und es ist allgemein:

$$a^{m-n} = \frac{1}{a^{n-m}}$$

also

$$\frac{a^7}{a^5} = a^{7-5} = \frac{1}{a^{5-7}} = a^2 = \frac{1}{a^{-2}}$$

und

$$\frac{a^3}{a^8} = a^{-5} = \frac{1}{a^5}$$

Hiernach erklären sich Potenzen mit negativen Exponenten, und man kann auch mit solchen multipliciren und dividiren, als

$$a^{-3} \times a^{+4} = a^{4-3} = a = \frac{1}{a^{-1}}$$
$$a^{-3} \times a^{-4} = a^{-7} = \frac{1}{a^7}$$
$$\frac{a^{-3}}{a^{-5}} = a^{-3+5} = a^2 = \frac{1}{a^{-2}}$$
$$\frac{a^{+3}}{a^{-5}} = a^{3+5} = a^8 = \frac{1}{a^{-8}}$$
$$\frac{a^{-3}}{a^{+5}} = a^{-8} = \frac{1}{a^8}$$

2. $a^n \times b^n = (ab)^n$

$$\frac{a^n}{b} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

E. Wurzelgröfsen können nur addirt und subtrahirt werden, wenn sie gleiche Potenzen und gleiche Exponenten haben.

$$a\sqrt[m]{c} \pm b\sqrt[m]{c} = (a \pm b)\sqrt[m]{c}$$

$a\sqrt[m]{c} \pm b\sqrt[n]{d}$ bleibt $a\sqrt[m]{c} \pm b\sqrt[n]{d}$

$a\sqrt[m]{c} \pm b\sqrt[m]{d}$ bleibt $a\sqrt[m]{c} \pm b\sqrt[m]{d}$

$a\sqrt[m]{c} \pm b\sqrt[n]{c}$ bleibt $a\sqrt[m]{c} \pm b\sqrt[n]{c}$

Dagegen kommt es vor, dafs Reductionen möglich werden, wenn nämlich in Buchstaben- oder Zahlen-Ausdrücken Formen wie

$$\sqrt[n]{a^n b}, \quad \sqrt[n]{a^{m+n} b}$$

u. dgl. mehr sich befinden, so dafs eine theilweise Wurzelausziehung geschehen kann.

Beisp. I.:

$7 \cdot \sqrt[3]{54} + 3\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{2} - 5\sqrt[3]{128}$ ist

$$= 7\sqrt[3]{2 \cdot 3^3} + 3\sqrt[3]{2 \cdot 2^3} + \sqrt[3]{2} - 5\sqrt[3]{2 \cdot 4^3}$$
$$= (21 + 6 + 1 - 20)\sqrt[3]{2} = 8\sqrt[3]{2}$$

Beisp. II.:

$$\sqrt{\frac{a^4c}{b^3}} + \sqrt{\frac{a^2c^3}{bd^2}} - \sqrt{\frac{a^2cd^2}{be^2}}$$
$$= \frac{a^2}{b^2}\sqrt{\frac{c}{b}} + \frac{ac}{d}\sqrt{\frac{c}{b}} - \frac{ad}{e}\sqrt{\frac{c}{b}}$$
$$= \left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{ac}{d} - \frac{ad}{e}\right)\sqrt{\frac{c}{b}}$$

Wurzelgröfsen können mit einander nur multiplicirt werden, wenn sie einerlei Exponent haben, als

$$\sqrt[m]{a} \times \sqrt[m]{b} \times \sqrt[m]{c} = \sqrt[m]{abc}$$

Haben die Gröfsen verschiedene Exponenten, so kann man sie in Wurzeln von gleichen Exponenten verwandeln, wie man Brüchen von verschiedenen Nennern einerlei Nenner giebt. Es ist nämlich

$$\sqrt[n]{a^n} = a$$

denn setzt man

$$a^n = b$$

so ist $\sqrt[n]{a^n} = \sqrt[n]{b} =$ der derjenigen Zahl, welche $n$mal multiplicirt b giebt, und diese Zahl ist keine andere als a; weil a, $n$mal mit sich selbst multiplicirt $a^n = b$ ist. Dem-

nach ist z. B. $\sqrt[m]{a}=\sqrt[mn]{a^n}$, und diese Formänderung giebt das Mittel für Herstellung einerlei Exponenten. Denn soll $\sqrt[m]{a}$ mit $\sqrt[n]{a}$ multiplicirt werden, so erhält man

$$\sqrt[m]{a}\times\sqrt[n]{a}=\sqrt[mn]{a^n}\cdot\sqrt[mn]{a^m}=\sqrt[mn]{a^{n+m}}$$

Beispiele:

1. $\sqrt[n]{a^m}\times\sqrt[m]{a^n}=\sqrt[mn]{a^{mm}}\times\sqrt[mn]{a^{nn}}=\sqrt[mn]{a^{mm+nn}}=\sqrt[mn]{(a^{m+n})^2}=\sqrt[\frac{mn}{2}]{a^{m+n}}$
2. $\sqrt[n]{a}\times\sqrt[m]{b}=\sqrt[mn]{a^m}\times\sqrt[mn]{b^n}=\sqrt[mn]{a^mb^n}$
3. $b\sqrt{a}\times c\sqrt{a}=abc$
4. $\sqrt[3]{4}\times\sqrt[6]{3}\times\sqrt[8]{8}=\sqrt[24]{4^8}\times\sqrt[24]{3^4}\times\sqrt[24]{8^3}=\sqrt[24]{2^{16}}\cdot\sqrt[24]{3^4}\cdot\sqrt[24]{2^9}=\sqrt[24]{2^{16}\cdot 3^4\cdot 2^9}=2\sqrt[24]{2\cdot 3^4}=2\sqrt[24]{162}$
5. $(3+\sqrt{5})\times(2-\sqrt{5})=6-3\sqrt{5}+2\sqrt{5}-5=1-\sqrt{5}$
6. $\sqrt[n]{a+\sqrt{b}}\times\sqrt[n]{a-\sqrt{b}}=\sqrt[n]{(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})}=\sqrt[n]{a^2-b}$

Wurzelgrößen können durch einander nur dividirt werden, wenn sie einerlei Exponent haben.

$$\sqrt[m]{a}:\sqrt[m]{b}=\sqrt[m]{\frac{a}{b}}$$

$$\sqrt[m]{a}:\sqrt[n]{b}=\sqrt[mn]{a^n}:\sqrt[mn]{b^m}=\sqrt[mn]{\frac{a^n}{b^m}}$$

F. So wie

$$\sqrt[n]{a}=\sqrt[m.n]{a^n}$$

so ist auch

$$\sqrt[mn]{a^n}=\sqrt[\frac{mn}{n}]{a^{\frac{n}{n}}}=\sqrt[m]{a}$$

und

$$\sqrt[mn]{a^r}=\sqrt[n]{a^{\frac{r}{m}}}=a^{\frac{r}{mn}}$$

überhaupt

$$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$$

Die Rechnung mit Wurzelgrößen kann also in eine Rechnung mit Potenzen und zwar mit Bruchpotenzen verwandelt werden, und man hat folgende alle möglichen Fälle einschließende Formeln:

1. $\sqrt[m]{a^n}=a^{\frac{n}{m}}$
2. $\dfrac{1}{\sqrt[m]{a^n}}=\dfrac{1}{a^{\frac{n}{m}}}=a^{-\frac{n}{m}}$
3. $\sqrt[m]{a^nb^pc^q}=a^{\frac{n}{m}}\cdot b^{\frac{p}{m}}\cdot c^{\frac{q}{m}}=(a^nb^pc^q)^{\frac{1}{m}}$
4. $\sqrt[m]{\dfrac{a^nb^p}{c^qd^r}}=\dfrac{a^{\frac{n}{m}}b^{\frac{p}{m}}}{c^{\frac{q}{m}}d^{\frac{r}{m}}}=\left(\dfrac{a^nb^p}{c^qd^r}\right)^{\frac{1}{m}}=a^{\frac{n}{m}}b^{\frac{p}{m}}c^{-\frac{q}{m}}d^{-\frac{r}{m}}=(a^nb^pc^{-q}d^{-r})^{\frac{1}{m}}$
5. $\sqrt[q]{(\sqrt[n]{a^m})^p}=\sqrt[qn]{a^{mp}}=a^{\frac{mp}{qn}}$
6. $\sqrt[q]{\left(\dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}}\right)^p}=\dfrac{1}{\sqrt[qn]{a^{mp}}}=\dfrac{1}{a^{\frac{mp}{qn}}}=a^{-\frac{mp}{qn}}$

Rechnung mit Bruchpotenzen.

$$a^{\frac{m}{n}}\times a^{\frac{p}{q}}=a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}=a^{\frac{mq+np}{nq}}$$

$$a^{\frac{m}{n}}\times a^{-\frac{p}{q}}=a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}=a^{\frac{mq-np}{nq}}$$

$$a^{-\frac{m}{n}}\times a^{-\frac{p}{q}}=a^{-\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}=a^{-\left(\frac{m}{n}+\frac{p}{q}\right)}=a^{-\frac{mq+np}{nq}}$$

$$a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} - \frac{p}{q}} = a^{\frac{mq-np}{nq}}$$

$$a^{\frac{m}{n}} : a^{-\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}} = a^{\frac{mq+np}{nq}}$$

$$a^{-\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = a^{-\frac{m}{n} - \frac{p}{q}} = a^{-\left(\frac{m}{n} + \frac{p}{q}\right)} = a^{-\frac{mq+np}{nq}}$$

$$a^{-\frac{m}{n}} : a^{-\frac{p}{q}} = a^{-\frac{m}{n} + \frac{p}{q}} = a^{\frac{np-mq}{nq}} = a^{-\frac{mq-np}{nq}}$$

$$a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{3}{4}} \times a^{\frac{5}{6}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}} = a^{2\frac{1}{12}} = a^{2+\frac{1}{12}} = a^2 \cdot a^{\frac{1}{12}} = a^2 \sqrt[12]{a}$$

$$a^{-\frac{1}{2}} \times a^{\frac{3}{4}} \times a^{\frac{5}{6}} = a^{-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}} = a^{1\frac{1}{12}} = a^{1+\frac{1}{12}} = a\sqrt[12]{a}$$

$$a^{\frac{5}{6}} : a^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{5}{6}-\frac{3}{4}} = a^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{a}$$

$$a^{\frac{5}{6}} : a^{-\frac{1}{2}} = a^{\frac{5}{6}+\frac{1}{2}} = a^{\frac{4}{3}} = a^{1+\frac{1}{3}} = a\sqrt[3]{a}$$

$$\left(a^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{6}{12}} = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$$

Bürgerliches Jahr s. u. astronomisches Jahr.

Bürgerlicher Monat s. u. astronomischer Monat.

Bürgerlicher Tag s. u. astronomischer Tag.

Bürgerliche Zeit s. u. astronomischer Tag.

Inhaltsverzeichnifs und Sachregister.

(Die Gegenstände als Ueberschriften der Artikel sind gesperrt gedruckt, das Sternchen bei der Seitenzahl bedeutet die zweite Spalte.)

L.

M.

N.

O.

T.

U.

V.

W.

Z.

MATHEMATISCHES

WÖRTERBUCH

ALPHABETISCHE ZUSAMMENSTELLUNG

SÄMMTLICHER

IN DIE MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN GEHÖRENDER GEGENSTÄNDE IN ERKLÄRENDEN UND BEWEISENDEN SYNTHETISCH UND ANALYTISCH BEARBEITETEN ABHANDLUNGEN

VON

LUDWIG HOFFMANN

BAUMEISTER IN BERLIN.

II. BAND

C—D.

BERLIN

VERLAG VON GUSTAV BOSSELMANN

1859.

C.

Caliber ist kreisrunder Querschnitt bei geraden Cylindern und Kugeln; bei ersteren ist es vornehmlich der innere Querschnitt einer Röhre, wie bei den Geschützen, den Thermometerröhren; Aräometerscalen bedürfen eines genauen äußeren C. Bei Kugeln versteht man unter C. deren gröfste Kreisebene. Die Gröfse des C. wird durch den Durchmesser gemessen und angegeben. Eine Röhre von durchweg einerlei C. heifst eine calibrirte Röhre. Bei Barometern ist die Calibrirung der Röhre nicht wesentlich, weil einerlei Luftdruck sich unabhängig von dem C. durch einerlei Höhe der barometrischen Flüssigkeit ausspricht; um so wichtiger ist sie beim Thermometer, das zu wissenschaftlichen Zwecken bestimmt ist, weil die thermometrische Flüssigkeit von der Wärme eine cubische Ausdehnung erfährt, so dafs einerlei Wärme-Abstände bei verschiedenem Röhrencaliber verschiedene Längen-Ausdehnungen, also die Grade unrichtig zeigen, wenn der Fundamentalabstand zwischen dem Gefrier- und dem Siedepunkt in lauter gleich lange Theile getheilt ist. Man prüft solche Röhre in Betreff ihres C., indem man eine kurze Länge Quecksilber in dieselbe bringt, diese vom Anfang bis zum Ende der Röhre nach und nach verschiebt, und mit Hülfe eines genauen Maafsstabes mikroskopisch untersucht, ob das Quecksilber überall einerlei Länge hat.

Liegt daran, die Weite einer Röhre, besonders eines Haarröhrchens, zu erfahren, so wägt man die Röhre, bringt darauf eine möglichst grofse Länge Quecksilber hinein, wägt wieder, erfährt aus der Differenz beider Gewichte das Gewicht des Quecksilbers q, mifst dessen Länge l, und wenn das bekannte spec. Gew. des Quecksilbers $= s$, γ das absolute Gew. der Kubik-Einheit destillirten Wassers ist, so hat man die Weite d der Röhre =

$$= 2\sqrt{\frac{q}{\pi . l \, s \, \gamma}}$$

Calorimeter, ein von Lavoisier erfundener Apparat, um die specifische Wärme eines Stoffs dadurch, dafs man ihn Eis schmelzen läfst, zu ermitteln. Die Theorie des C. ist folgende: Für einerlei Wirkung durch die Wärme ist auch stets einerlei Wärmemenge erforderlich, z. B. um die Kubik-Einheit eines bestimmten Stoffs von 0° bis auf 100° Cels. zu erhöhen, oder um ihn von 100° auf 0° abzukühlen. Verschiedene Stoffe brauchen verschiedene Wärmemengen dazu, d. h. verschiedene Stoffe haben verschiedene Wärmecapacitäten, und die Wärmemenge, die einem Stoff zugeführt werden mufs, damit seine Temperatur von 0° auf 1° oder auf 100° Cels. steige, oder die er abgiebt, um von 1° oder von 100° Cels. auf 0° herabzukommen, ist seine specifische Wärme.

Da man Wärmemengen nicht absolut aufzufinden vermag, so sind alle Angaben von specifischer Wärme relativ, indem sie auf einen Normalstoff, dessen specifische Wärme als Einheit genommen wird, sich gründen. Dieser Stoff ist das destillirte Wasser, welches 79° Wärme abgiebt, um ein gleiches Gewicht Eis zu schmelzen, d. h. 1 Pfd. Wasser von 79° Temperatur schmelzt 1 Pfd. Eis von 0° zu Wasser von 0° Temp. und geht selbst zu 0° Temp. hinab, so dafs 2 Pfd. Wasser von 0° entstehen.

Wenn nun 1000 Cent Quecksilber von 100° Cels. 42 Cent. Eis von 0° zu Wasser von 0° schmelzen, bis sie selbst auf

die Temperatur 0° hinab gekommen sind, so hat man die specifische Wärme x des Quecksilbers zu der des Wassers = 1 aus der Proportion:

$$\left.\begin{array}{lll} 100^\circ & \text{Quecks.}: 79^\circ & \text{Wasser} \\ 1000^\circ\ \text{Cent} & \text{„}\quad : 42^\circ & \text{Cent Eis} \end{array}\right\} = 1 : x$$

woraus

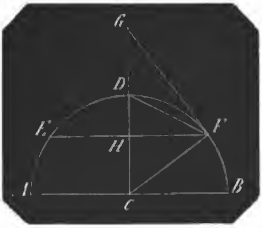
$$x = 0{,}03318$$

Der Apparat ist in allen physikalischen Lehrbüchern beschrieben und abgebildet: Er besteht aus drei blechenen Gefäfsen, die mit Spielraum in einander stehen. Das innerste empfängt den Körper, dessen specifische Wärme zu ermitteln ist; zwischen diesem Gefäfs und dem mittleren wird Eis von 0° eingelegt, welches durch die Wärme des eingelegten Körpers zum Theil zu Wasser schmilzt, das durch ein Rohr in ein besonderes Gefäfs fliefst und mit diesem abgewägt werden kann. Zwischen das mittlere und äufsere Gefäfs wird ebenfalls Eis gepackt, damit die Wärme der äufseren Luft auf den inneren Schmelzprocefs keinen Einflufs üben könne. Das Verfahren bei den Versuchen, und die nöthigen Vorsichtsmafsregeln zu Erlangung richtiger Resultate gehören in die Physik.

Calotte ist jeder der beiden Theile einer Kugeloberfläche, die von einer Ebene geschnitten wird. Denkt man sich den auf der Durchschnitts-Ebene normalen Durchmesser, so trifft dieser in jeder C. den Punkt, welcher von allen übrigen Calottenpunkten den gröfsten Abstand von der Ebene hat, und dieser Abstand heifst die H ö h e d e r C., die Durchschnittsebene ist die G r u n d e b e n e d. C.

Es sei ADB ein Halbkreis, EF eine mit dem Durchmesser AB parallele Sehne, DC der Halbmesser normal AB, so beschreibt bei der Umdrehung des Halbkreises um DC der Quadrant DFB eine Halbkugel-Oberfläche, und der Bogen DF eine C.

Fig. 267.



Um den Flächen-Inhalt der C. zu bestimmen, ziehe die Sehne DF und die Tangente GF an F bis in die Verlängerung von CD, so beschreiben beide geraden Linien DF und GF zwei Kegelmäntel, von welchen offenbar der erste kleiner, und der zweite gröfser als der Inhalt I der C. ist, die aber beide immer näher dem Inhalt I kommen, je näher EF an D gelegt wird.

Die Inhalte der Kegelmäntel sind gleich geradlinigen Dreiecken, deren Grundlinie der von dem Punkt F beschriebene Kreisumfang ist, und deren Höhen die Geraden DF und GF sind. Mithin ist der Kegelmantel, der entsteht durch DF

$$= \pi \cdot FH \cdot DF$$

durch GF

$$= \pi \cdot FH \cdot GF$$

Bezeichnet man den Halbmesser CF mit r, die Höhe DH der C. mit x, so hat man

$$FH = \sqrt{r^2 - (r-x)^2} = \sqrt{(2r-x)x}$$

$$DF = \sqrt{2rx}$$

und da

$$\triangle\, GFH \backsim \triangle\, FCH$$

also

$$GF : FH = FC : CH$$

oder

$$GF : \sqrt{(2r-x)x} = r : r - x$$

$$GF = \frac{r}{r-x} \sqrt{(2r-x)x}$$

die Kegelfläche durch DF ist mithin

$$= \pi \sqrt{(2r-x)x} \cdot \sqrt{2rx} = \pi r x \sqrt{2 \cdot \frac{2r-x}{r}}$$

die Kegelfläche durch GF

$$= \pi \sqrt{(2r-x)x} \cdot \frac{r}{r-x} \sqrt{(2r-x)x}$$

$$= \pi r x \frac{2r-x}{r-x}$$

folglich

$$\pi r x \sqrt{2\frac{2r-x}{r}} < I < \pi r x \frac{2r-x}{r-x}$$

Da mit beliebiger Abnahme von x die beiden einschliefsenden Gröfsen der mittleren I beliebig nahe gebracht werden können, so ist offenbar

$$I = \pi r x \cdot K$$

wo K eine Gröfse ist, die zwischen $\sqrt{2\frac{2r-x}{r}}$ und $\frac{2r-x}{r-x}$ oder zwischen $\sqrt{2\left(2-\frac{x}{r}\right)}$ und $\left(2+\frac{x}{r}\right) : \left(1-\frac{x}{r}\right)$

Mit beliebiger Abnahme von x verschwindet aber $\frac{x}{r}$ gegen 1 u. 2 immer mehr, und beide Gröfsen können dem Werth

= 2 beliebig nahe gebracht werden; demnach ist $K = 2$ und

$$I = 2\pi r x$$

für $x = r$ entsteht die Halbkugelfläche $= 2\pi r^2$, und die ganze Kugeloberfläche ist $= 4\pi r^2$ = dem Vierfachen der gröfsten Kreisfläche.

Camera clara. Hierunter versteht man 2 optische Apparate, nämlich 1) die im folgenden Art. abgehandelte Camera lucida, besonders bei den Franzosen, die diese chambre claire nennen, und 2) die in dem darauf folgenden Art. beschriebene Camera obscura in der unter No. 2 gedachten Abänderung, weil man hier das Bild nicht mehr in einer dunklen Kammer, sondern im Hellen auf einer mattgeschliffenen Glasplatte sieht.

Camera lucida od. clara ein von Wollaston erfundener optischer Apparat zum Nachzeichnen von Gegenständen. Er besteht aus einem prismatischen Glaskörper von der Form *ABDC* im Querschnitt, in welchem $AB = BD$ einen rechten Winkel und $AC = DC$ einen Winkel von 135° bilden.

Die Construction dieses Profils ist sehr einfach; denn zieht man die Diagonale *BC*, so hat man

$$\angle ACB = \angle BCD = \frac{135^\circ}{2} = 67\tfrac{1}{2}^\circ$$

$$\angle ABC = 45^\circ$$

folglich $\angle BAC = 180^\circ - (67\tfrac{1}{2}^\circ + 45^\circ) = 67\tfrac{1}{2}^\circ$

Hat man demnach $AB = BD$, $\angle ABD = 90^\circ$ gezeichnet, so halbire $\angle ABD$ durch *BC* und nimm $BC = AB$, wonach der Punkt *C* und die Linien *AC* und *DC* sich ergeben.

Man stellt den Glaskörper auf ein Stativ mit der Grundkante *BD* senkrecht, mit der durch *AB* liegenden Seitenebene des Prisma waagerecht, belegt die Oberfläche mit einem Pigment, und läfst nur an der Kante *A* in der Mitte der Länge eine kleine runde Oeffnung für das durchsehende Auge; die Ebene *BD* wird dem

Fig. 268.



aufzunehmenden Gegenstande, einer Landschaft z. B., entgegenstellt. Mit diesem Apparat erreicht man, wie weiter nachgewiesen werden wird, dafs die von dem äufseren Gegenstande auf die Ebene *CD* fallenden Strahlen reflectirt unter demselben Reflectionswinkel auf die Ebene *AC* geworfen werden, und von dieser nach der Ebene *AB* wiederum unter demselben Winkel reflectiren, so dafs die reflectirten Strahlen unter denselben Winkeln in das bei *A* befindliche Auge fallen, unter welchen die ursprünglichen Strahlen in *BD* eintreten, und dort gesehen werden würden, dafs mithin der Gegenstand bei *A* in seiner natürlichen Gröfse erscheint, und zwar waagerecht ausgebreitet, weil das Auge das empfangene Bild des Gegenstandes senkrecht herabwirft. Legt man daher unter dem Glaskörper auf eine horizontale Ebene ein Stück weifses Papier, und richtet die Pupille des Auges zur Hälfte über die Oeffnung, zur Hälfte auf das Papier, so lassen sich die einzelnen Linien des Gegenstandes mit dem Bleistift überzeichnen, und man erhält das Bild in einem um so kleineren Maafsstabe, je näher das Papier der Oberfläche *AB* gelegt wird.

Die Länge $AC = DC$ hat man

$$2AB \sin \tfrac{1}{2}ABC = 2AB \sin \frac{45^\circ}{2}$$

$$= AB\sqrt{2(1 - \cos 45^\circ)} = AB\sqrt{2(1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{2})}$$

$$= 0{,}765 \cdot AB$$

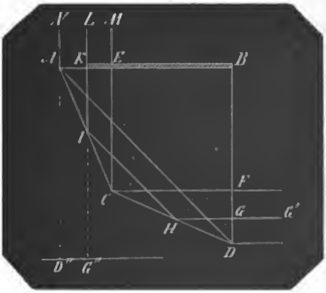
Fällt man von *C* die Lothe *CE* und *CF* auf *AB* und *CD*, so sind die Projectionen $AE = DF = AB(1 - \cos 45^\circ) = 0{,}293 \cdot AB$.

Behufs der Aufnahme eines entfernten Gegenstandes genügt es, wenn die Seiten *AB*, *BD* 3 bis 6 Linien breit, und das Prisma bis 1 Zoll lang ist.

2. Es sei Fig. 269 *G'G* ein auf die Ebene *BD* fallender horizontaler Lichtstrahl, so geht derselbe geradlinig fort bis *H*. Da nun $\angle GHD = 22\tfrac{1}{2}^\circ$ also klei-

ner als $48\frac{1}{4}°$, so kann er (s. Ablenkung des Lichtstrahls, pag. 9) nicht austreten, sondern reflectirt, und zwar unter dem $\angle IHC = \angle GHD = 22\frac{1}{2}°$; da nun $\angle ICH = 135°$, so ist auch $\angle CIH = 22\frac{1}{2}°$, mithin reflectirt der Strahl HI nochmals unter dem $\angle AIK = 22\frac{1}{2}°$; es ist $\angle AKI = 90°$ und der Strahl IK geht geradlinig und

Fig. 269.



senkrecht nach IL in die Höhe. Dasselbe findet mit allen horizontal auf die Ebene CD fallenden Strahlen statt: der Strahl auf D reflectirt nach DA und erscheint in der senkrechten AN, der Strahl auf C reflectirt nach CE und erscheint in der senkrechten CM, und der vor DF befindliche senkrechte Gegenstand erscheint in dem gleichgrofsen waagerechten Bilde NM. Reicht die Oeffnung bei A nur bis K, so werden auch nur die Strahlen, die auf den Theil DH der Ebene CD fallen, zwischen N und L gesehen, und der vor DG senkrechte Gegenstand erscheint auf dem Papier in $D''G''$, wohin nämlich das Auge vor A die Strahlen wirft.

3 Es sei $G'G$ (Fig. 270) der Strahl von einem unter dem Horizont xy in der Verlängerung von GG' befindlichen fernen Punkt, $\angle yGG' = \alpha$, so bricht der Strahl nach GH, so dafs (s. Ablenkung u. s. w., pag. 9) $\frac{2}{3} \sin \alpha = \sin HGx = \sin \beta$.

Da nun

$$\angle GxD = 22\tfrac{1}{2}°$$

so ist

$$\angle GHD = 22\tfrac{1}{2}° - \beta$$

folglich $\angle IHC$ des reflectirten Strahls

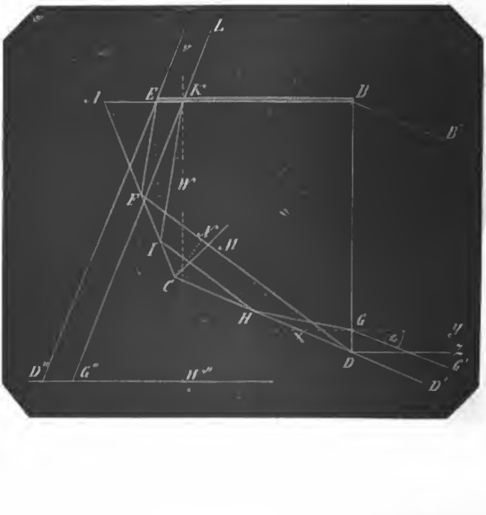
$$HI = 22\tfrac{1}{2}° - \beta$$

und folglich

$$\angle HIC = 22\tfrac{1}{2}° + \beta$$

Der Strahl HI reflectirt also nach IK, so dafs $\angle KIA = \angle HIC = 22\frac{1}{2}° + \beta$. Wenn daher vw das Einfallsloth in K ist, so ist $\angle wKI = \beta = \angle HGx$; der Strahl IK bricht also unter dem $\angle vKL = yGG' = \angle \alpha$, und das Auge in Lv sieht den Gegenstand G' unter demselben Winkel, unter welchem es den Gegenstand in G sehen würde. Ein horizontaler Strahl durch G' würde

Fig. 270.



in vw erscheinen, er würde von dem Auge auf die Papierebene nach w'' der Strahl LK nach G'' geworfen werden; man erhält also das Bild von G' in G'' unter dem richtigen Depressionswinkel $G''Kw'' = vKL = yGG'$.

Der Strahl $G'G$ ist unter solchem Depressionswinkel genommen, dafs er in K nicht mehr ins Auge trifft, weil K schon mit Pigment bedeckt ist, und zugleich so, dafs wenn von dem äufsersten Punkt E der Augenöffnung $EF \parallel KI$ gezogen wird, die Parallele aus F mit HI den äufsersten Punkt D der Ebene CD trifft. Zu diesem gebrochenen Strahl DF gehört nur der in $D \parallel$ mit GG' einfallende Strahl $D'D$. Die unter dem Depressionswinkel $\alpha = zDD'$ auf BD fallenden Strahlen sind also die äufsersten, die ins Auge treffen, und sie erscheinen als tiefste Linie des Bildes auf der Papierebene in D'', wenn $ED'' \parallel LG''$ gezogen wird. Hoher liegende Punkte wie G' erscheinen dadurch, dafs von ihnen Strahlen unter kleineren Depressionswinkeln auf BD fallen, z. B. von G' auf Punkte zwischen D und G.

Wegen der kleinen Dimension von BD kommt es übrigens gar nicht darauf an, in welcher Höhe von BD ein Strahl einfällt, ob also der Strahl $D'D$ oder $G'G$ oder $B'B$ unter dem Depressionswinkel α der unterste des entfernten Gegenstandes ist, welcher noch auf der Papierebene als Bild erscheint.

Um den gröfstmöglichen Depressionswinkel $zDD' = yGG' = \alpha$ zu bestimmen, hat man den Brechungswinkel desselben $HGx = \beta$, der immer kleiner als $22\frac{1}{2}^\circ$ ist; ferner ist die Breite AE der Durchsehöffnung zu bestimmen, und es sei, wenn $AB = a$ ist, $AE = \frac{1}{n} a$.

Nun hat man in dem $\triangle CDF$:

$$CD : CF = \sin CFD : \sin CDF$$
$$= \sin(22\tfrac{1}{2}^\circ + \beta) : \sin(22\tfrac{1}{2}^\circ - \beta)$$
$$= \sin 22\tfrac{1}{2}^\circ \cos\beta + \cos 22\tfrac{1}{2}^\circ \sin\beta$$
$$: \sin 22\tfrac{1}{2}^\circ \cos\beta - \cos 22\tfrac{1}{2}^\circ \sin\beta$$

also, da $CD = AC$ ist

$$CA : CF = 1 + \cot 22\tfrac{1}{2}^\circ \, tg\,\beta : 1 - \cot 22\tfrac{1}{2}^\circ \cdot tg\,\beta \qquad (1)$$

Zieht man die Diagonale BC und schneidet diese DF in M, so hat man

$$\triangle FAE \sim \triangle FCM$$

daher

$$AF : AE = CF : CM$$

oder

$$AF + CF : CF = AE + CM : CM$$

oder

$$CA : CF = \frac{1}{n} a + CM : CM \qquad (2)$$

Fällt man das Loth CN auf DF so ist

$$\angle NDC = 22\tfrac{1}{2}^\circ - \beta$$

daher

$$\angle NCD = 90^\circ - (22\tfrac{1}{2}^\circ - \beta) = 67\tfrac{1}{2}^\circ + \beta$$

und da

$$\angle MCD = 67\tfrac{1}{2}^\circ$$

so ist

$$\angle NCM = \beta$$

und

$$CN = CM \cos\beta = CD \sin(22\tfrac{1}{2}^\circ - \beta)$$

Den Werth von CM in Gl. 2 gesetzt, giebt

$$CA : CF = \frac{1}{n} a + CD \cdot \frac{\sin(22\frac{1}{2}^\circ - \beta)}{\cos\beta} : CD \cdot \frac{\sin(22\frac{1}{2}^\circ - \beta)}{\cos\beta}$$

oder

$$CA : CF = \frac{1}{n} a + CD[\sin 22\tfrac{1}{2}^\circ - \cos 22\tfrac{1}{2}^\circ tg\,\beta] : CD[\sin 22\tfrac{1}{2}^\circ - \cos 22\tfrac{1}{2}^\circ tg\,\beta]$$

Diese Gl. mit 1 verbunden giebt

$$1 + \cot 22\tfrac{1}{2}^\circ \, tg\,\beta : 1 - \cot 22\tfrac{1}{2}^\circ \, tg\,\beta = \frac{1}{n} a + CD[\sin 22\tfrac{1}{2}^\circ - \cos 22\tfrac{1}{2}^\circ \, tg\,\beta] : CD[\sin 22\tfrac{1}{2}^\circ - \cos 22\tfrac{1}{2}^\circ \, tg\,\beta]$$

woraus durch Addition und Subtraction der Glieder

$$2 : 2 \cot 22\tfrac{1}{2}^\circ \, tg\,\beta = \frac{1}{n} a + 2CD[\sin 22\tfrac{1}{2}^\circ - \cos 22\tfrac{1}{2}^\circ \, tg\,\beta] : \frac{1}{n} a$$

Nach No. 1 ist $CD = 0{,}765 \cdot a$

$$\sin 22\tfrac{1}{2}^\circ = 0{,}3826834$$
$$\cos 22\tfrac{1}{2}^\circ = 0{,}9238795$$
$$\cot 22\tfrac{1}{2}^\circ = 2{,}4142136$$

Diese Werthe eingesetzt, entsteht:

$$2 : 4{,}8284272 \cdot tg\,\beta = \frac{a}{n} + 0{,}5855056 \cdot a - 1{,}4135356 \cdot a \, tg\,\beta : \frac{1}{n} a$$

woraus reducirt und nach β geordnet:

$$tg^2\beta - \left[\frac{1}{1{,}4135356 \cdot n} + \frac{0{,}5855055}{1{,}4135356}\right] tg\,\beta + \frac{2}{6{,}8251537 \cdot n} = 0$$

oder

$$tg^2\beta - \left[\frac{0{,}70746}{n} + 0{,}4142135\right] tg\,\beta + \frac{0{,}293034}{n} = 0$$

hieraus

$$tg\,\beta = +\frac{0{,}35373}{n} + 0{,}2071067 \pm \sqrt{\left(0{,}0428932 - \frac{0{,}146514}{n} + \frac{0{,}125125}{n^2}\right)}$$

Ob das Vorzeichen der Wurzel + oder

— genommen werden mufs, prüft man, indem man für n den höchsten zulässigen Werth = 1 setzt, wobei dann die Durchsehöffnung von A bis B reicht und woraus dann nothwendig für β der Werth $22\frac{1}{2}°$ entstehen mufs.

Man findet für $n = 1$

$$tg\,\beta = 0{,}5608367 \pm 0{,}1466431$$

nun ist aber schon das erste Glied

$$0{,}5608367 = tg\ 29°\ 17'$$

also gröfser als $22\frac{1}{2}°$.

Nimmt man das negative Vorzeichen, so erhält man

$$tg\,\beta = 0{,}4141936$$

es ist aber

$$tg\ 22\tfrac{1}{2}° = 0{,}4142136 = tg\,\beta$$

indem der geringe Unterschied zwischen beiden in der Rechnung mit zu wenigen Decimalen liegt; folglich mufs das negative Vorzeichen genommen werden.

Für $n = 10$ hat man

$$tg\,\beta = 0{,}2424797 - 0{,}1717352 = 0{,}0707445$$

woraus

$$\beta = 4°\ 1\tfrac{1}{2}'$$

Für $n = 5$ erhält man

$$tg\,\beta = 0{,}2778527 - 0{,}1363649 = 0{,}1414878$$

woraus

$$\beta = 8°\ 3'$$

Nun ist

$$sin\ 4°\ 1\tfrac{1}{2}' = 0{,}070\ 1918$$

$$sin\ \alpha = \tfrac{3}{2}\ sin\ 4°\ 1\tfrac{1}{2}' = 0{,}105\ 2877$$

woraus

$$\alpha = 6°\ 2\tfrac{1}{2}'$$

Für $n = 10$, d. h. wenn die Durchsehöffnung $\frac{1}{10}\,AB$ ist, beträgt also der gröfste Winkel, unter welchem ein unterhalb des Horizonts befindlicher Gegenstand noch aufgenommen werden kann $6°\ 2\frac{1}{2}'$.

$$sin\ 8°\ 3' \text{ ist } = 0{,}140\ 0372$$

$$sin\ \alpha = \tfrac{3}{2}\ sin\ 8°\ 3' = 0{,}210\ 0558$$

woraus

$$\alpha = 12°\ 7\tfrac{1}{2}'$$

Beträgt also die Durchsehöffnung $\frac{1}{5}AB$, so ist der gröfste Depressionswinkel für eine aufzunehmende Landschaft $12°\ 7\frac{1}{2}'$

5. Den gröfstmöglichen Elevationswinkel, unter welchem ein Gegenstand noch aufzunehmen ist, findet man durch folgende Betrachtung:

Sind LC, BH Einfallslothe auf CD, so ist

$$\angle LCA = 45°$$

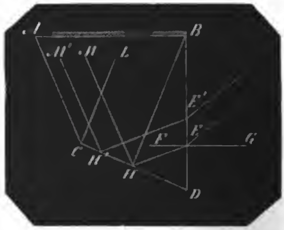
ein Strahl HM, der unter dem $\angle BHM = 45°$ reflectirt wird, läuft mit AC ∦, trifft also die Fläche AC nicht mehr, und giebt, wenn er so nahe an C fällt, dafs er bei A ins Auge trifft, ein verkehrtes Bild des Gegenstandes, von dem er ausgeht; ein Winkel $BHM = 45°$ ist also die Grenze des gröfsten Reflectionswinkels, und zu diesem gehört ein Einfallswinkel $EHB = 45°$. Hieraus hat man

$$\angle HED = 67\tfrac{1}{2}°$$

und wenn FG das Einfallsloth durch E auf BD ist,

$$\angle FEH = 22\tfrac{1}{2}°$$

Fig. 271.



zu dem Strahl EH als ein in BD gebrochener Strahl gehört aber ein einfallender Strahl IE in der Richtung, dafs

$$sin\ GEI = \tfrac{3}{2}\ sin\ FEH = \tfrac{3}{2}\ sin\ 22\tfrac{1}{2}° = 0{,}5740251$$

woraus

$$GEI = 35°\ 1\tfrac{1}{2}'$$

und dieser Winkel ist die Grenze des Elevationswinkels, unter welchem ein Gegenstand noch aufgenommen werden kann. Der Strahl selbst aber liefert dem Auge ein verkehrtes Bild, wie schon erwähnt; denn gesetzt, der reflectirte Strahl HM des gebrochenen Strahls EH träfe in's Auge, so wirft dies den Gegenstand in der Richtung MH auf's Papier; denkt man sich nun von einem über I liegenden Gegenstand I' den Strahl $I'E'$ ∦ IE, so bricht dieser nach $E'H'$ ∦ EH und kommt in der Richtung $H'M'$ in's Auge, dieses wirft das Bild in der Richtung $M'H'$ auf's Papier, und I', ein höherer Gegenstand als I, erscheint auf dem Papier als niedriger gelegen. Daher geben die obersten Punkte des Gegenstandes ein undeutliches, verwischtes Bild.

6. Nun sind noch die Strahlen zu betrachten, die durch BD unmittelbar auf die Fläche AC fallen, die also entweder gebrochen durch AC hindurch gehen und keinen Einflufs auf das in A sichtbare Bild haben, oder einfach reflectirend gegen AB geworfen werden, und ein verkehrtes Bild geben.

Die horizontalen Strahlen wie IE treten ungebrochen in den Glaskörper und treffen die Fläche AC unter dem $\angle LFE = 22\frac{1}{2}°$ mit dem Einfallsloth LM. Der Strahl EF geht also durch den Glaskörper in einer Richtung FG weiter fort, ohne in's Auge zu kommen.

Der unter dem möglich gröfsten Elevationswinkel einfallende und nach *EH* Fig. 271 gebrochene Strahl würde, wenn er näher an *B* einfiele, die Fläche *AC* normal treffen, also wie *LM*, Fig. 272, ungebrochen hindurch gehen. Die von der Horizontale ab aufwärts befindlichen Punkte des Gegenstandes, deren in *BD*

Fig. 272.



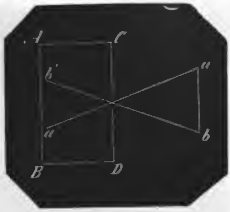
gebrochene Strahlen unmittelbar auf *AC* fallen, thun also dem Bilde keinen Schaden.

Unter den von einem unterhalb der Horizontale befindlichen Punkt herrührenden gebrochenen Strahlen gehen alle durch *AC* gebrochen hindurch, die mit dem Einfallsloth *LF* einen $\angle LFE'$ bilden, der kleiner als $41\frac{3}{4}^\circ$ ist, also einen $\angle EFE' < (41\frac{3}{4}^\circ - 22\frac{1}{2}^\circ = 19\frac{1}{4}^\circ)$.

In No. 4 ist aber gezeigt, dafs wenn die Durchsehöffnung bei $A = \frac{1}{16} AB$ genommen wird, der gröfstmögliche $\angle EFE' = 4^\circ\ 1\frac{1}{2}'$ ist; bei der Oeffnung $= \frac{1}{3} AB$ kann $\angle EFE'$ höchstens $8^\circ\ 3'$ sein, und wenn die Durchsehöffnung die ganze Breite *AB* einnimmt, ist ein $\angle EFE'$ von $22\frac{1}{2}^\circ$ möglich. Demnach thun auch die Strahlen der unterhalb des Horizonts befindlichen Punkte des aufzunehmenden Gegenstandes, deren gebrochene Strahlen unmittelbar auf die Fläche *AC* fallen, dem Bilde bei *A* keinen Schaden.

Camera obscura. Ein von Porta um die Mitte des 16. Jahrhunderts erfundener optischer Apparat, mit welchem Bilder entfernter Gegenstände aufgefangen werden. Es sei ***ABCD*** ein dunkler Raum, in der Mitte der Wand ***CD*** befinde sich eine kleine Oeffnung, so werden von dem erleuchteten Gegenstande ***ab*** durch die Oeffnung auf die dunkle Wand ***AB*** Lichtstrahlen geworfen, und es entsteht von ***ab*** das verkehrte Bild ***a′b′***. Der Erfindung dieser C. obsc. verdankt die spätere, die C. lucida ihren Namen, wenngleich dieselbe keine Camera ist.

Fig. 273.



Man hat verschiedene Abänderungen dieses einfachen Apparats, die sich darauf beziehen, das auf die dunkle Fläche geworfene Bild nachzuzeichnen; am vollkommensten ist sie für die Erzeugung der sogenannten Lichtbilder, indem das auf einer dunklen Metallfläche erzeugte Bild durch chemische Einwirkung des Lichts fixirt wird. Alle diese Einrichtungen gehören nicht hierher.

2. Dagegen ist folgende Abänderung näher zu betrachten, die man auch Camera clara (helle Kammer) nennt. Zu dieser C. clara wird nämlich der Apparat, wenn man statt der Oeffnung in *CD* eine verschiebbare Sammellinse *C′C″* einlegt, welche die Lichtstrahlen auf einen unter 45° geneigten Spiegel *AI* wirft, von dem sie gegen eine in der Decke befindliche mattgeschliffene Glasplatte *AK* reflectiren, und auf dieser ein richtiges mit Bleistift nachzuzeichnendes Bild hervorbringen. Hierbei mufs die Axe *FB* durch *C* der Linse *C′C″* auf der Hinterwand *AE* genau normal verbleiben, und das Rohr mufs so gestellt werden, dafs *CB* die Brennweite, also *B* der Brennpunkt ist.

In den Art. „Astronomisches Fernrohr“ und „Brennglas“ ist gezeigt, dafs dann (der Spiegel *AI* fortgedacht) von dem vor der Linse *C′C″* befindlichen Gegenstand auf der Ebene *AE* ein verkehrtes Bild entsteht, der Strahl *FC* auf die Mitte *C* der Linse und normal auf dieselbe treffend geht ungebrochen bis *B* und die von *F* auf andere Punkte der Linse fallenden Strahlen werden ebenfalls nach dem Punkt *B* gebrochen; so der Strahl *F′C′* nach *C′B*, der Strahl *F″C″* nach *C″B*, und es entsteht in *B* ein aus sehr vielen Strahlen zusammengesetztes und scharfes Bild des Punktes *F*.

Wird nun der Spiegel eingelegt, so fängt dieser alle nach *B* gerichteten Strahlen auf; so den Strahl *CB* in *b*, den Strahl *C′B* in *b′* und den Strahl *C″B* in *b″*.

Es entsteht also auf dem Spiegel kein

Fig. 274.

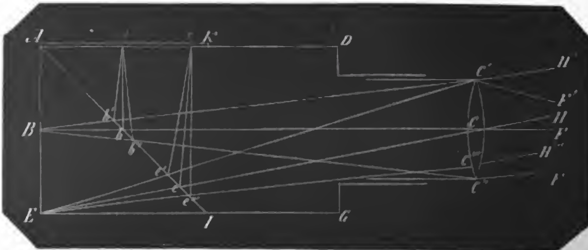


Bild des Punkts F, sondern eine aus den sehr vielen von F auf die Linse fallenden Strahlen gebildete kleine elliptische Lichtfläche, indem die vor der senkrecht durch das Linsenmittel C gerichteten Linie $C'C''$ auf die Linse fallenden Strahlen hinter die Ellipsenaxe $b'b''$ und die hinter $C'C''$ fallenden Strahlen vor $b'b''$ auf den Spiegel geworfen werden. Alle diese Strahlen werden aber gegen die Glasplatte AK geworfen, und zwar nach nur einem Punkt β, der $\perp AE$ über b liegt, so daſs mittelst des Spiegels der Punkt β zum Vertreter des Brennpunkts B eingesetzt ist.

Der Strahl Cb nämlich reflectirt unter dem $\angle \beta bA = \angle CbI = \angle BAb = \angle EAI = 45°$, folglich ist $\angle Bb\beta = 90°$ und $b\beta \perp AE$, $b\beta = bB$ und $A\beta = AB$.

Der Strahl $C'b'$ reflectirt unter einem Winkel an Ab', der = ist dem $\angle C'b'I = \angle Ab'B$; bezeichnet man den Punkt auf AK, in welchen der Strahl von b' aus die Fläche AK trifft anstatt mit β, vorläufig mit β', so ist, da

$$Ab' = Ab'$$
$$\angle BAb' = \angle \beta'Ab'$$
$$\angle Bb'A = \angle \beta'b'A$$
$$\triangle Ab'B \cong \triangle Ab'\beta'$$

folglich

$$A\beta' = AB$$

nun ist

$$A\beta = AB$$

folglich fällt β' mit β zusammen, und so läſst sich von allen übrigen von $C''C'''$ auf AI geworfenen Strahlen erweisen, daſs sie in β zusammentreffen.

Alle übrigen Strahlen von Punkten auſser denen von F, welche auf den Mittelpunkt C der Linse fallen, gehen ungebrochen fort, und treffen, wenn der Spiegel fortgenommen wird, die Fläche AE. So trifft der Strahl HC von einem höheren Punkt H des Gegenstandes geradlinig in E, und alle übrigen von demselben Punkt H auf andere Punkte der Linse fallenden Strahlen werden nach dem Punkt E als Vereinigungspunkt derselben gebrochen; so der Strahl $H'C'$ nach $C'E$ und der Strahl $H'''C'''$ nach $C'''E$. Bei eingelegtem Spiegel AI werden alle diese Strahlen wie in e, e', e''' zu einer kleinen elliptischen Lichtfläche aufgefangen und nach einem einzigen Punkt η der Glasplatte AK geworfen, der gegen AI die gleiche Lage mit E hat, wie dies durch Congruenz der Dreiecke eben so leicht zu erweisen ist, wie oben von den Strahlen aus b, b', b''.

Ein Gleiches gilt von allen übrigen Punkten des Gegenstandes; die oberen Punkte desselben werden von dem Spiegel unterhalb aufgefangen, und wenn der Zeichner vor A sich stellt, auf die Glasplatte wieder nach oben geworfen. Eben so fängt der Spiegel die unteren Punkte des Gegenstandes oberhalb, die rechts befindlichen links, die links befindlichen rechts auf, und wirft diese Punkte alle auf die Glasplatte in der umgekehrten, also in derselben Ordnung, wie sie an dem Gegenstande sich befinden.

Daſs an den Rändern, wie bei I und A nicht so viele Lichtstrahlen eines Punktes des Gegenstandes aufgefangen werden, als in der Mitte des Spiegels, nämlich in dem Umfange, dessen Gröſse die Linse $C'C''$ zur Projection hat, macht jene auf AK nach dem Rande hin befindlichen Bilder nur allmählich dunkler aber nicht weniger correct. Das Dreieck AEI der Camera kann natürlich ganz fehlen, wenn nur der Spiegel AI und die Glasplatte AK die gezeichnete Lage zur Linse $C'C''$ haben. Nimmt man die Glasplatte AK hinweg, sieht durch die Oeffnung AK auf den Spiegel, wobei man mit Tüchern um den Kopf das Eindringen von Licht durch AK verhindert, so bemerkt man, wie auch

aus dem obigen Vortrag hervorgeht, auf dem Spiegel kein Bild, sondern denselben als eine erleuchtete Fläche, deren Farben von dem Gegenstande abhangen, auf den die Linse gerichtet ist.

Canalwaage, Wasserwaage, ein Nivellir-Instrument, welches an sich unvollkommen ist, und nur da angewendet wird, wo es auf große Genauigkeit nicht ankommt, dann aber recht gute Dienste leistet, als für landwirthschaftliche Zwecke, z. B. behufs der Ebenung eines in den Profilen unregelmäßsigen Platzes, zu Anlage von Abzugsgräben u. dgl.

Es besteht aus einem horizontalen Rohr *AB* von starkem Metallblech, mit aufrecht gebogenen Tüllen an beiden Enden, in welche von beiden Seiten offene Glasröhren wasserdicht und senkrecht eingesetzt werden. In den hohlen Raum wird durch

Fig. 275.



die obere Oeffnung eines der beiden Gläser Wasser eingegossen, bis es auf etwa $\frac{1}{3}$ der Höhe in den Gläsern steht. Die beiden sichtbaren Wasserspiegel geben die Horizontale *DE* an, und ein Auge in *D* visirt längs *DE* nach einem entfernten Punkt, der nun als in einerlei Horizontalen mit *DE* liegend, markirt wird. Das Instrument hat in der Mitte einen Ansatz *F*, mit dem es während des Visirens auf ein Stativ gesetzt wird.

Die Horizontale *DE* wird um so genauer visirt, je länger *AB* ist, woher die Röhre *AB* unter 2 Fufs lang nicht genommen werden darf. Wegen der Capillarität ist der Wasserspiegel in einem Glase concav, man visirt also *DE* nur in den Rändern des Spiegels; auch steht der Wasserspiegel in communicirenden ungleich weiten Röhren ungleich hoch, in der engeren Röhre höher, daher man beide Gläser gleich weit und überhaupt nicht zu eng, mindestens $\frac{1}{4}$ Zoll weit nehmen mufs, und das Rohr *AB* ist vor dem Visiren möglichst horizontal, oder vielmehr, die Gläser sind möglichst vertical zu stellen, wobei man ein Bleiloth zu Hülfe nehmen kann. Beim Eingiefsen von Wasser und während des Transports dürfen in dem Rohr *AB* keine Luftblasen zum Verhalten kommen, weil diese eine ungleiche Spannung gegen die beiden Wassersäulen äufsern und somit eine ungleiche Höhe, also eine unrichtige Horizontale veranlassen können.

Capillaranziehung, Capillarattraction ist die Erscheinung, dafs Flüssigkeiten in engen Röhren durch die Adhäsion deren Wandungen in die Höhe gezogen werden, so dafs sie den Flüssigkeitsspiegel eines damit communicirenden weiteren Gefäfses überragen.

Capillardepression, die Erscheinung, dafs Flüssigkeiten in engen Röhren, von deren Wandungen sie nicht angezogen werden, dieselben also auch nicht benetzen, vermöge der überwiegenden Cohäsion ihrer Massentheilchen unter den Flüssigkeitsspiegel eines mit der Röhre communicirenden weiteren Gefäfses sinken.

Capillarität (capillus, das Haar), Haarröhrchen-Anziehung ist die in den vorigen beiden Art. aufgeführte Erscheinung; die des zweiten Art. eigentlich eine Haarröhrchen-Abstofsung, wie man sie aber nicht nennt. Die aufsteigende C. hat zum Grunde, dafs die Adhäsion der Röhrenwandungen gegen die denselben nahen Flüssigkeitstheilen gröfser ist als die auf dieselben wirkende Schwerkraft, und die absteigende C., dafs die Cohäsion der Massentheilchen, in Folge welcher diese den möglich kleinsten Raum als Kugel einnehmen wollen und hinabsinken um den darunter befindlichen Theilchen näher zu kommen, die auf die umliegende Flüssigkeit wirkende Schwerkraft überwindet.

Eine bekannte Erscheinung im Leben giebt Zeugnifs von der bedeutenden Wirkung der C.; nämlich dafs ein Waschschwamm, der nur mit der untersten Spitze in Wasser eingesenkt wird und bleibt, sehr bald bis auf die obersten Theilchen hinein das Wasser auffängt; eben so geschieht dies mit Holzkohlen und andern porösen Körpern, indem die Poren enge Röhrchen sind, deren Wandungen das Wasser adhäriren (vergl. Adhäsion am Schlufs).

2. In einer weiten Glasröhre ist der Flüssigkeits-Spiegel in der Mitte eine waagerechte Ebene, an dem Rande gekrümmt; ist die Flüssigkeit benetzend, wie Wasser, so ist die Krümmung hohl und an dem Rande aufsteigend, ist sie nicht benetzend, wie Quecksilber, so ist

die Krümmung erhaben, an dem Rande absteigend. So weit der Spiegel eben ist, so weit wirkt die Schwerkraft allein, und weder von Abhäsion noch von Cohäsion eingeschränkt. Wo aber die Krümmung beginnt, da beginnt auch der Einflufs der Adhäsion oder der Cohäsion und er steigert sich bis an den Rand, wo er am gröfsten wird. Die Wassermenge, welche gegen den Rand über dem mittleren Wasserspiegel in die Höhe gezogen worden, drückt zugleich die Kraft aus, mit welcher die Adhäsion der Schwere das Gleichgewicht hält, denn um dieselbe Wassermenge ist der Wasserspiegel gesunken. Eben so drückt die Quecksilbermenge, welche längs dem Rande unterhalb des mittleren Spiegels fehlt, die Kraft der Cohäsion gegen die Schwere aus, denn um dieselbe ist der Quecksilberspiegel in der Mitte gestiegen.

Je weiter die Röhre ist, auf desto mehr Flüssigkeitstheile wirkt die Schwere, desto weiter nach dem Rande pflanzt sie sich fort, desto geringer werden die Randwirkungen und desto schmaler die Krümmungen längs derselben. Je enger dagegen die Röhre, je geringer ist die Menge der Flüssigkeitstheilchen, auf welche die Schwere ungehindert wirkt, desto weniger Einflufs hat sie auf die Randflüssigkeit, und deren Krümmungen werden breiter. Ist eine cylindrische Röhre so eng, dafs die mittlere Ebene in einen Punkt verschwindet, so findet keine alleinige Wirkung der Schwere mehr statt, und die Röhre ist ein Capillaritätsgefäfs, welches schon bei $\frac{1}{4}$ Zoll Durchmesser anfängt, so dafs die Röhre wegen dieser noch bedeutenden Weite nicht gut schon Haarröhrchen genannt werden kann.

Die Wirkung der Adhäsion, so wie die der Cohäsion auf eine Flüssigkeit im Haarröhrchen, die C., wächst natürlich mit der Länge des Randes, die ihr entgegenwirkende Schwerkraft wächst (oder die C. nimmt ab) mit der Summe der Flüssigkeits-Elemente, auf welche die Schwere wirkt, also mit dem Querschnitt der Röhre; bezeichnen also D, d die Durchmesser zweier Haarröhrchen, C, c deren Capillaritätswirkungen, so ist

$$1)\quad C : c = \pi D : \pi d$$

$$2)\quad C : c = \frac{1}{\frac{\pi}{4} D^2} : \frac{1}{\frac{\pi}{4} d^2}$$

mithin

$$C : c = \frac{1}{D} : \frac{1}{d}$$

woraus das Gesetz hervorgeht:

die Capillaritäten zweier verschieden weiten Röhren für einerlei Flüssigkeit verhalten sich umgekehrt wie deren Durchmesser.

Dieses Gesetz modificirt sich um etwas nach folgender Betrachtung:

Wird ein Haarröhrchen A in eine in dem weiten Gefäfs B befindliche Flüssigkeit getaucht, welche die Wandung der Röhre benetzt, so macht sich die C. dadurch geltend, dafs die Flüssigkeit der Schwere entgegen in das Röhrchen um eine Höhe h aufsteigt und eine Oberfläche bildet, die näherungsweise als Hohlkugelfläche von dem Halbmesser r der Röhre betrachtet werden kann. Die C. wird also ausgesprochen durch das Gewicht der aufgestiegenen Flüssigkeit; der Raum-Inhalt derselben ist ein Cylinder von der Höhe h und dem Halbmesser $r = \pi r^2 h +$ einem

Fig. 276.



Meniscus von der Höhe r und dem Halbmesser r, der also = ist einem Cylinder von dem Halbmesser r und der Höhe $r = \pi r^3 -$ einer Halbkugel von dem Halbmesser $r = \frac{2}{3} \pi r^3$. Der Rauminhalt der aufgezogenen Flüssigkeit ist demnach

$$\pi r^2 h + \pi r^3 - \tfrac{2}{3} \pi r^3 = \pi r^2 (h + \tfrac{1}{3} r)$$

Nennt man das Gewicht der Kubikeinheit γ, so hat man die Capillarität

$$= \pi r^2 (h + \tfrac{1}{3} r) \gamma$$

Bezeichnet man wie oben die Capillarität der Längeneinheit mit c, so beträgt dieselbe für die Röhre vom Halbmesser r (weil deren Wandumfang = $2\pi r$ ist) $2\pi rc$, und man hat

$$2\pi rc = \pi r^2 (h + \tfrac{1}{3} r) \gamma$$

woraus

$$c = r(h + \tfrac{1}{3} r) \frac{\gamma}{2}$$

oder

$$\frac{2c}{\gamma} = r(h + \tfrac{1}{3} r) \qquad (1)$$

und

$$h = \frac{2c}{\gamma r} - \tfrac{1}{3} r \qquad (2)$$

Für eine Röhre von dem Halbmesser R, der Höhe H, hat man bei derselben Flüssigkeit die Capillarität c

$$c = R(H + \tfrac{1}{3}R)\frac{\gamma}{2}$$

oder

$$\frac{2c}{\gamma} = R(H + \tfrac{1}{3}R) \qquad (3)$$

und

$$H = \frac{2c}{\gamma R} - \tfrac{1}{3}R \qquad (4)$$

daher

$$\frac{2c}{\gamma} = R(H + \tfrac{1}{3}R) = r(h + \tfrac{1}{3}r)$$

und

$$H : h = \frac{2c}{\gamma R} - \tfrac{1}{3}R : \frac{2c}{\gamma r} - \tfrac{1}{3}r$$

Diese Formeln stimmen auch so genau, als es zu verlangen ist mit den Versuchen: Gay Lussac beobachtete, dafs Wasser in einer Röhre von 1,2944 Millimeter Weite aufstieg auf $23{,}1634^{mm}$ Höhe, in einer Röhre von $1{,}9038^{mm}$ Weite auf $15{,}5861^{mm}$ Höhe. Legt man die erste Beobachtung zu Grunde, so hat man nach Formel 1

$$\frac{2c}{\gamma} = \frac{1{,}2944}{2}\left[23{,}1634 + \tfrac{1}{3}\,\frac{1{,}2944}{2}\right] = 15{,}130975$$

Diesen Werth in Formel 4 gesetzt und auf die 2. Beobachtung angewendet giebt

$$H = \frac{15{,}130975}{\tfrac{1}{2}\cdot 1{,}9038} - \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot 1{,}9038 = 15{,}57825^{mm}$$

beobachtet ist $H = 15{,}58610^{mm}$

Differenz $= 0{,}00785_{mm}$

Bei der C.-Depression, wenn nämlich die Röhre tiefer in die Flüssigkeit getaucht wird, entsteht ein leerer Raum

Fig. 277.



abwärts von der Form des vollen Raums bei der C.-Attraction; es sind also die obigen 4 Formeln auch für die C.-Depression gültig.

Capillaritätsgefäfse s. u. Capillarität.

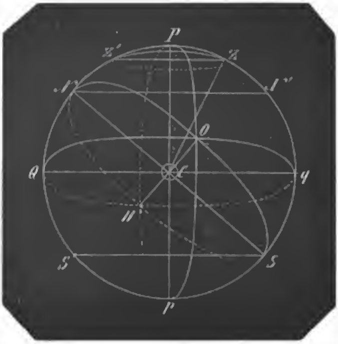
Cardanische Formel, Cardan's Regel, s. Algebraische Gleichung, No. 21, wo sie entwickelt ist, No. 22, wo die Fälle der Anwendbarkeit dargelegt und No. 23, wo Anwendungen derselben gegeben sind.

Cardinalpunkte sind für irgend einen Ort der Erdoberfläche die an der hohlen Himmelskugel befindlichen Punkte: Ost, West, Süd, Nord; diejenigen Punkte also, welche den Umfang des wahren Horizonts in 4 Quadranten theilen. Von diesen sind der Ostpunkt und der Westpunkt die Durchschnittspunkte des Aequators, der Nordpunkt und der Südpunkt die des Meridians mit dem Horizont (s. astronomischer Horizont 1 und 8).

Die eben gedachten Kreise: der Aequator und der Meridian, schneiden den scheinbaren Horizont in 4 über dem wahren Horizont belegenen Punkten, die ebenfalls Cardinalpunkte des scheinbaren Horizonts und Ost, West, Süd, Nord heifsen, woher man auch wohl die zum wahren Horizont gehörenden C.-P. wahrer Ost-, West-, Süd-, Nordpunkt nennt. Besonders sind in der Nautik diese Bezeichnungen gebräuchlich, und man nennt dort die gerade Verbindungslinie zwischen dem wahren Nord- und dem wahren Südpunkt die wahre Mittagslinie oder die wahre Nord-Südlinie, so wie die gerade Linie zwischen dem wahren Westpunkt die wahre Ost-Westlinie.

Es sei $PQpq$ ein Meridian der Himmelskugel, P der Nordpol, p der Südpol, Pp die Himmels-Axe, Qq die in dem Meridian $PQpq$ belegene Durchschnittslinie des Aequators, welche die Axe in dem Mittelpunkt C schneidet, um den die Erdkugel als kleiner Kreis angedeutet ist. $QOqW$ sei der Aequator, $POpW$ der durch die Pole normal darauf geführte Kreis, welcher den Aequator in den Punkten O, W schneidet, so sind die Punkte Q, O, q, W, Q 90° von einander entfernt, und jeder andere normal auf die Meridian-Ebene $PQpq$ durch den Mittelpunkt C gelegte Kreis schneidet die beiden Kreise $POpW$ und $QOqW$ in OW. So z. B. der Kreis $NOSW$, welcher der wahre Horizont desjenigen Orts o der Erde ist, dessen Zenith z in der normal auf $NOSW$

Fig. 278.



in C gerichteten Linie Cz und eben so in dem Meridian PQpq liegt. Für diesen Ort o der Erde ist also N der Nordpunkt, S der Südpunkt, O der Ostpunkt und W der Westpunkt.

Für alle übrigen Orte o der nördlichen Halbkugel in demselben Meridian, mit Ausnahme wenn z in P, wenn also o im Nordpol der Erde selbst liegt, bleiben o und W die Durchschnittspunkte der Horizonte mit dem Aequator und O bleibt der Ostpunkt, W der Westpunkt.

Denkt man sich einen Ort o durch seinen Parallelkreis um die Erde geführt, also dessen Zenith z um den Parallelkreis zz', so entspricht jedem andern dieser Orte o mit seinem zugehörigen z ein anderer Horizont, die aber sämmtlich innerhalb der Parallelkreise NN' und SS' verbleiben, und die Durchschnittspunkte O und W werden durch alle Punkte des Aequators geführt. Dasselbe geschieht für alle anderen Orte o der Erde unter anderer geographischer Breite mit den zugehörigen Zenithen in anderen Parallelkreisen und ebenfalls für alle Orte o der südlichen Halbkugel; es ist mithin der Aequator der geometrische Ort der Ost- und Westpunkte für alle Orte der Erdoberfläche.

Liegt z und sein Ort o in der östlichen Halbkugel (indem man irgend einen Meridian als den ersten feststellt), also z' und sein Ort o' in demselben Meridian in der westlichen Halbkugel, so ist W der Ostpunkt und O der Westpunkt für o'. Dasselbe findet zwischen allen anderen Orten o und o' in anderen Parallelkreisen statt, daher ist für Orte in entgegengesetzten Meridianen gegenseitig der Ostpunkt des einen der Westpunkt des anderen.

Fällt z in P oder p, d. h. ist der Ort o der Nordpol oder der Südpol der Erde, so decken sich Horizont und Aequator, es sind keine Durchschnittspunkte O und W vorhanden, deshalb haben die Erdpole weder Ost- noch Westpunkt, oder vielmehr, jeder Punkt des Horizonts ist zugleich Ostpunkt und Westpunkt.

Je nachdem der Ort in der östlichen oder westlichen Halbkugel liegt, je nachdem liegt der Nordpunkt in der westlichen oder östlichen Halbkugel; ist o der Nordpol oder der Südpol, so ist jeder Punkt des Horizonts der Nordpunkt und zugleich der Südpunkt, wie er der Ost- und der Westpunkt ist. Liegt o mit z im Aequator, so ist der Nordpunkt der Nordpol, der Südpunkt der Südpol.

Die den Cardinalpunkten nahen Punkte des Horizonts heifsen Himmelsgegenden, sie sind Osten, Westen, Süden und Norden; die beiden Erdpole haben keine Himmelsgegenden.

Cardi ide, eine Curve, mufs geschrieben werden: Kardioide, von καρδία, das Herz, also herzähnliche Curve, ist ähnlich der Brennlinie Fig. 251.

Cartesianische Wirbel, die vor Newton von Descartes (Cartesius) aufgestellte Theorie, nach welcher jeder Weltkörper von einer feinen Materie umgeben ist, die wirbelartig sich bewegt, den Weltkörper mit sich fortreifst und ihn durch seine Bahn führt. Erwägt man, dafs diese Wirbel den damals schon bekannten Bahnen gemäfs sich bewegen mufsten, und dafs, obgleich die von Newton entdeckten Gesetze der Anziehungskraft durchaus sich bewähren, die Anziehungskraft aber eben so wenig als alle anderen Naturkräfte in ihren physikalischen Eigenschaften zu ergründen ist, so gaben die Cartesischen W., von dem Centralkörper, einer Sonne ausgehend gedacht, eine fafsliche bildliche Anschauung von der primitiven Wirkung der Anziehungskraft, freilich nicht als fortreifsend, sondern vielmehr die Centrifugalkraft einschränkend. (Vgl. Attraction No. 4.)

Cassinische Curve, von Cassini erfunden, in welcher nach ihm die Bewegung der Erde um die Sonne geschehen soll; ist ohne wissenschaftlichen Werth, und auch, wahrscheinlich scherzweise, Cassinoide genannt worden.

Cata — und **Caust** — s. Kata = und Kaust.

Centralbewegung ist die Bewegung eines Punkts in geschlossener krummer Linie um einen anderen Punkt; der erste ist der bewegte Punkt, der letzte der Centralpunkt, die krumme Linie die Bahn des bewegten Punkts, die in irgend einem Augenblick der Bewegung zu denkende gerade Verbindungslinie zwischen beiden Punkten der Radius vector (der führende, der leitende Strahl). Bewegt sich der Centralpunkt, so soll der bewegte Punkt dieselbe Bewegung haben, d. h. mit dem Centralpunkt + fortschreiten, und er beschreibt dann eine Spirale, die ebenfalls geschlossen ist, wenn der Centralpunkt der bewegte Punkt eines anderen Centralpunkts ist.

In der Wirklichkeit bewegen sich Punkte nicht einzeln, sondern Massen, d. h. Summen mit einander vereinigter Massenpunkte; unter dem Centralpunkt und dem bewegten Punkt werden dann die Mittelpunkte der Massen verstanden, auch sagt man Centralmasse, bewegte Masse, Centralkörper, bewegter Körper.

Centralbewegungen geschehen entweder auf vorgeschriebenen Wegen oder im freien Raum, erstere z. B. beim Schwung einer Masse an einem straffen Faden um dessen Endpunkt, beim Regulator mit Schwungkugeln um eine Axe, letztere in der Bewegung der Weltkörper. Drehende Bewegungen um feste Axen, wie beim Räderwerk, werden unter Centralbewegung nicht verstanden.

Centralbewegungen sind nicht anders denkbar, als dafs der bewegte Punkt mittelst einer Kraft zu einer Bewegung veranlafst worden, die nun geradlinig war und geblieben wäre, wenn nicht ein anderer aufserhalb der Bewegungsrichtung befindlicher fester Punkt eine anziehende Wirkung auf ihn ausgeübt, den Punkt von der ursprünglich geradlinigen Richtung abgelenkt hätte, und der nun denselben durch fortdauernde Einwirkung auf ihn um sich herumführt. Der Centralpunkt heifst deshalb auch Kraftpunkt, Mittelpunkt der Kräfte.

Die Entwickelung der bei solchen Zusammenwirkungen nothwendigen Entstehung einer Rundbewung um den Centralpunkt ist in dem Art.: Bahn No. 2 bis 5, mit Fig. 164 bis 166, pag. 270 geschehen; in No. 6 mit Fig. 167 sind die dynamischen Gesetze entwickelt, unter welchen die Bahn ein Kreis wird; in dem Art.: Bahn der Weltkörper, mit Fig. 184 bis 190, pag. 289 sind die Curven untersucht, welche bei dem durch Newton entdeckten Attractionsgesetz für die Bahnen der Weltkörper möglich sind, und in dem folgenden Art.: Bahn der Weltkörper, die Ellipse, ist diese Curve als die einzige Bahn wiederkehrender also wirklich in Centralbewegung begriffener Weltkörper speciell abgehandelt.

Es ist nun noch zu erörtern, dafs der Mittelpunkt des Centralkörpers keinesweges auch der Mittelpunkt der Bewegung, der Kraftpunkt ist, sondern dafs dieser in dem Schwerpunkt sämmtlicher zu demselben System gehörenden Massen besteht. Um den einfachsten Fall zu erläutern, hat man in dem Art.: Attraction No. 9, dafs zwei Massen M und m in dem Verhältnifs ihrer Gröfsen auf einander einwirken; bedeutet also E die Masse der Erde, M die Masse des Mondes, so zieht die Erde den Mond mit der Masse E, der Mond die Erde mit der Masse M an. Geschieht nun eine Drehung des Mondes um die Erde, so kann nach dem System der Statik das System zwischen Erde und Mond als Kräfte im freien Raum nur im Gleichgewicht sein, wenn zugleich eine Drehung der Erde um den Mond geschieht, und beide Drehungen sind nur um den gemeinschaftlichen Schwerpunkt beider Weltkörper möglich. Ist demnach L die Entfernung zwischen den Mittelpunkten von Erde und Mond, so geschieht die Drehung um einen Punkt C in der Entfernung $CE = l_e$ von der Erde, und und in der Entfernung $CM = l_m$ von dem Monde, dafs:

$$l_e \cdot E = l_m \cdot M$$

woraus

$$l_e = \frac{M}{E} \cdot l_m = \frac{M}{E + M} \cdot L$$

und

$$l_m = \frac{E}{M} \cdot l_e = \frac{E}{E + M} \cdot L$$

Wegen der elliptischen Bewegung des Mondes um die Erde ist die Länge L und mit dieser auch der Punkt C zwischen E und M veränderlich.

Man kann auch durch folgende Betrachtung zu diesem Resultat gelangen: Nach dem Art.: Bahn No. 6, pag. 272 hat man die Geschwindigkeit V einer durch die Schwungkraft P in der Entfernung r vom Mittelpunkt bewegten Masse durch die Formel

$$V^2 = 2gr\frac{P}{m}$$

Der schwingende Mond hat keine andere Schwungkraft P als seine Masse M, mithin ist $\frac{P}{m} = \frac{M}{M} = 1$; und die schwin-

gende Erde hat ebenfalls $P=E$ und $m=E$, folglich $\frac{P}{m}=\frac{E}{E}=1$; dagegen ist im ersten Fall M die angezogene, E die anziehende Masse, die Beschleunigung g also $= G\frac{M}{E}$ wenn G die Beschleunigungseinheit ist; im zweiten Fall ist E die angezogene Masse, M die anziehende Masse, mithin $g = G\frac{E}{M}$, die Entfernung r ist in beiden Fällen $= L$. Nennt man daher v_e die Geschwindigkeit der Erde, v_m die des Mondes, so hat man

$$v_e^2 = 2LG\frac{M}{E}$$

$$v_m^2 = 2LG\frac{E}{M}$$

daher

$$v_e^2 : v_m^2 = 2LG\frac{M}{E} : 2LG\frac{E}{M} = M^2 : E^2$$

oder

$$v_e : v_m = M : E$$

Da aber die Geschwindigkeiten in einerlei System wie deren Hebelsarme sich verhalten, so verhält sich

$$l_e : l_m = M : E$$

also

$$l_e + l_m : \begin{cases} l_e \\ l_m \end{cases} = E + M : \begin{cases} M \\ E \end{cases}$$

da nun $l_e + l_m = L$, so hat man die Längen l_e und l_m wie schon oben gefunden ist.

Um den vorstehenden Satz auf das System zwischen Erde und Mond anzuwenden, hat man die Masse des Mondes zu der der Erde wie

$$1 : 87{,}73$$

die kleinste Entfernung des Mondes von der Erde 48990 geogr. Ml., die gröfste 54670 Ml.; bei 48990 Ml. hat man also die Entfernung des gemeinschaftlichen Schwerpunkts vom Mittelpunkt der Erde oder

$$l_e = \frac{1}{87{,}73+1} \times 48890 = 552{,}125 \text{ Ml.}$$

Bei 54670 Ml. Entfernung:

$$l_e = \frac{1}{87{,}73+1} \times 54670 = 616{,}139 \text{ Ml.}$$

Der Punkt, der mit Erde und Mond in der Ekliptik um die Sonne sich bewegt, ändert also seinen Ort in der Drehaxe zwischen Erde und Mond um eine Länge von 616,139 − 552,125 = 64,014 Ml., und zwar fortdauernd allmälich und in Perioden eines anomalistischen Monats von 27 Tagen 13 Std. $5\frac{1}{4}$ Minuten, in welcher Zeit der Mond aus der Erdnähe in denselben Punkt der nächstfolgenden Erdnähe, oder aus Erdferne wieder in die Erdferne gelangt, und in der der Schwerpunkt den Weg von 64,014 Ml. hin und her macht.

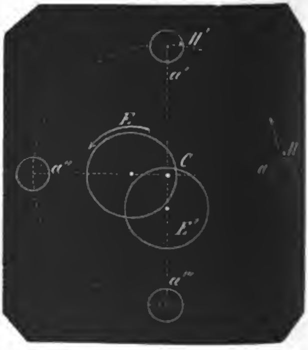
Aufser der Bahn in der Ekliptik macht folglich die Erde noch fortdauernd Seitenbewegungen, die bald nach der Sonne hinwärts, bald von der Sonne abwärts geschehen. Bei 64,014 geogr. Meilen zu 1970,175 preufs. Ruthen beträgt diese Seitenbewegung in der halben Zeit von 13 Tg. 18 Std. $32\frac{5}{8}$ Min. = $19832\frac{5}{8}$ Min. 126118,78 preufs. Ruthen, also im Mittel per Min. 6,359 Ruthen = 76,308 preufs. Fufs, per Secunde im Mittel 1,2718 preufs. Fufs.

Der Halbmesser der Erde ist 859,5 geogr. Meilen, der Schwerpunkt liegt also noch innerhalb der Erdkugel, und zwar während der Erdnähe des Mondes 307,375 geogr. Ml. und während der Erdferne des Mondes 243,36 geogr. Ml. von der Erdoberfläche nach dem Erdmittel hin.

Während nun der Mond von Abend nach Morgen um den Schwerpunkt C sich dreht, dreht sich die Erde auf der ihm entgegengesetzten Seite um denselben Punkt C, so dafs die Mittelpunkte der Erde und des Mondes mit dem Schwerpunkt C immer in einer geraden Linie verbleiben; wenn z. B. der Mond M die Lage M' erhalten hat, befindet sich die Erde E in der Lage E'.

Der Mond dreht sich bekanntlich um die Erde der Art, dafs er bei einmaligem Umgange zugleich eine vollständige Axendrehung gemacht hat; so z. B. kommt der Punkt a nach und nach in die Lagen a', a'', a''', a. Bei der Erde ist dies nicht der Fall, diese bleibt während der Dre-

Fig. 279.



hung um den Schwerpunkt in allen Punkten und deren gegenseitigen Lagen ⫩ mit sich selbst, wenn man von deren in jedesmal 24 Stunden stattfindenden Axendrehung absieht, und die also von der Drehung der Erde um jenen Schwerpunkt *C* ganz unabhängig bleibt.

Eben so hat das ganze Sonnensystem einen Schwerpunkt, der mit jeder veränderten Stellung der Planeten ein anderer ist, der also in jedem Augenblick sich ändert, und um den jedesmal Sonne und Planeten sich drehen. Demnach liegt streng genommen keine einzige Planetenbahn in einer Ebene.

Es dürfte von Interesse sein, diesen Schwerpunkt des Sonnensystems näher zu betrachten: Die kleineren Planeten Vesta, Juno, Ceres, Pallas und die übrigen in der Neuzeit entdeckten sehr kleinen Planeten zwischen Mars und Jupiter haben auf die Aendrung des Schwerpunkts einen nur geringen Einflufs, und sollen hier unberücksichtigt bleiben, und nur die folgenden Planeten mit ihren Entfernungen L von dem Mittelpunkt der Sonne, die Länge des Sonnenhalbmessers = 1 gesetzt, und deren Massen m, die Masse M der Sonne = 1 gesetzt, kommen in Betracht:

Mercur	$L = 83,7$	$m = 1 : 2025810 = 0,00000049$
Venus	$L = 156,4$	$m = 1 : 401847 = 0,00000245$
Erde	$L = 216,2$	$m = 1 : 354936 = 0,00000282$
Mars	$L = 329,4$	$m = 1 : 2680337 = 0,00000037$
Jupiter	$L = 1124,3$	$m = 1 : 1054 = 0,00094877$
Saturn	$L = 2061,8$	$m = 1 : 3500 = 0,00028572$
Uranus	$L = 4146,8$	$m = 1 : 17918 = 0,00005581$
	Summe der Planeten-Massen	= 0,00129643
	Masse der Sonne	= 1
	Summe der Masse	= 1,00129643

Bezieht man die statischen Momente der obigen Massen sämmtlich auf den Mittelpunkt der Sonne, so hat man das Moment:

$$\text{des Mercur} = \frac{83,7}{2025810} = 0,0000413$$

$$\text{der Venus} = \frac{156,4}{401847} = 0,0003832$$

$$\text{der Erde} = \frac{216,2}{354936} = 0,0006091$$

$$\text{des Mars} = \frac{329,4}{2680337} = 0,0001229$$

$$\text{des Jupiter} = \frac{1124,3}{1054} = 1,0666983$$

$$\text{des Saturn} = \frac{2061,8}{3500} = 0,5890857$$

$$\text{des Uranus} = \frac{4146,8}{17918} = 0,2314321$$

die Summe der Momente = 1,8883726

das Moment der Sonne ist = Null.

Die gröfste Entfernung vom Mittelpunkt der Sonne hat der Schwerpunkt offenbar, wenn sämmtliche Planeten auf einer Seite der Sonne in einerlei geraden Linie stehen. Alsdann ist

die Summe der Momente der Planetenmassen = 1,8883726

die Summe sämmtlicher Massen in der Entfernung x vom Sonnenmittel diesen Momenten das Gleichgewicht haltend giebt das Moment

$$1,00129643 \times x$$

folglich

$$1,00129643 \times x = 1,8883726$$

woraus die Entfernung des Schwerpunkts *C* vom Sonnenmittel *S* (Fig. 280)

$$x = \frac{1,8883726}{1,00129643} = 1,886$$

also noch 0,886 Halbmesser weit aufserhalb der Sonnenoberfläche liegt der Schwerpunkt, um welchen die Sonne sich dreht.

Fig. 280.



Die geringste Entfernung des Schwerpunkts von der Sonne findet statt, wenn der Jupiter auf der einen Seite, und sämmtliche übrige Planeten auf der an-

deren Seite der Sonne geradlinig ihm gegenüber stehen. Dann ist

das Moment des Jupiter	1,0666983
das Moment d. übrigen Planeten	0,8216743
die Summe der Momente	0,2450240

und man hat die Entfernung x' des Schwerpunkts C vom Sonnenmittel S (Fig. 281)

$$0{,}2450\,240 = 1{,}00129643 \times x'$$

woraus

$$x' = \frac{0{,}2450240}{1{,}00129643} = 0{,}2446$$

also im kleinsten Abstande noch gegen ¼ des Sonnenhalbmessers liegt der Schwerpunkt vom Mittel entfernt, um den die Sonne sich dreht.

Fig. 281.



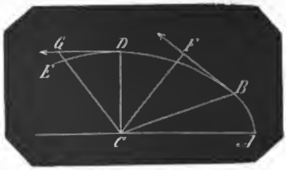
Wenngleich nun die Abstände aller möglichen wirklichen Schwerpunkte bei der Sonne nicht unbedeutend sind, so betrachtet man dennoch mit Kepler die **Mittelpunkte** der Sonne und der Planeten, als wenn sie die wirklichen Kraftpunkte, der der Sonne für die Planeten, die der Planeten für deren Trabanten wären.

Centrale ist die gerade Verbindungslinie der Mittelpunkte zweier Kreise oder Kugeln.

Centralkräfte sind diejenigen Kräfte, durch welche Centralbewegungen geschehen. Man versteht in der Regel darunter die **Centripetalkraft**, **Anziehungskraft**, und die **Centrifugalkraft**, **Fliehkraft**; mehrere Mathematiker nehmen aber nur die erstgenannte als Centralkraft an, und betrachten das, was die letztere sein soll, als Beharrungszustand einer in Bewegung befindlichen Masse. Der Streit ist interessant und nicht unwichtig, woher folgende kurze Erläuterungen hier Platz finden sollen.

Es befinde sich in dem Punkt C eine Masse M, die als anziehende Kraft eine andere Masse m durch die Bahn $ABDE \ldots A$ führt; diese Masse m hat nun in jedem Punkt ihrer Bahn das Bestreben, nach der erhaltenen Richtung, d. h. nach der in diesem Punkt an der Bahn zu denkenden Tangente fortzugehen, so z. B. in B nach der Richtung BF, in D nach der Richtung DG, und sie würde dies thun, wenn die Masse M in C irgend

Fig. 282.



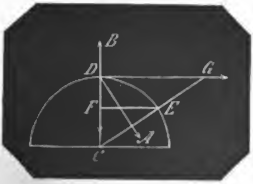
einmal anziehend auf m zu wirken aufhörte. Die Masse M heifst nun die Centripetalkraft (petére, begehren) und das Bestreben der Masse m, nach der Tangente zu entweichen, die Centrifugalkraft; erstere wirkt nach der Richtung des Radius vector (s. Centralbewegung) (BC, DC) letztere nach der Tangente (BF, DG).

Die letztere Kraft wird als Kraft geleugnet, weil das Bestreben der Masse m, nach der Tangente fortzugehen, nur die Wirkung des Beharrungsvermögens ist, und die Bezeichnung Centrifugalkraft wird auch deshalb für unangemessen angesehen, weil da, wo der Radius vector (CB) mit der Tangentialrichtung (BF) einen spitzen Winkel bildet, die ersten Elemente der wirklichen Bewegung nach der Tangente das Centrum nicht **fliehen**, sondern ihm **näher** kommen, was bei einer elliptischen Bahn innerhalb zweier Quadranten, nämlich dem von A bis D, und dem diesem Quadrant diametral gegenüber liegenden stattfindet.

Ferner leitet man einen Widerspruch aus der Annahme einer Centrifugalkraft folgendermafsen her: Wenn zwei Kräfte nach DC und DG gerichtet wirken, so können diese zu einer Mittelkraft nach einer Richtung DA zusammengesetzt werden, welche dieselbe Wirkung hat, als die beiden ursprünglichen Kräfte zusammengenommen, es müfste also auch die Bewegung der Masse nach dieser Richtung geschehen, welches aber nicht geschieht.

Die Gröfse der Centrifugalkraft für den Kreis wird entwickelt, indem man voraussetzt, vermöge der Centripetalkraft falle die Masse m in einer Zeit t um eine Länge DF; da nun m in der Peripherie verbleibt, so ist m während dieser Zeit nach E gelangt, wenn $FE \mp DG$ ist. Zieht

Fig. 283.

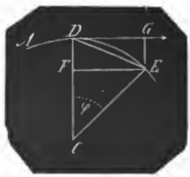


man nun EG durch E, so würde m ohne Mitwirkung der Centripetalkraft in G gekommen sein. Die Centrifugalkraft entfernt also m um EG von C und die Centripetalkraft nähert m aus G nach E, beide Kräfte sind also einander gleich, und heben sich einander auf. Entgegnet wird wiederum, dafs eine nach DC gerichtete Kraft nur aufgehoben werden könne durch eine ihr gleiche nach entgegengesetzter Richtung DB wirkende Kraft; geschehe dies aber, so bewege sich die Masse nach der einzigen noch möglichen Richtung, der Tangente, und nicht im Kreise herum.

Auch mir kommt eine Ansicht über die Centralkräfte zu, und diese ist folgende: die bewegte Masse m strebt nach der Tangente sich zu bewegen nur in Folge des Beharrungsvermögens, d. h. sie strebt die Bewegung, in welcher sie begriffen ist, im nächsten Augenblick mit derselben Geschwindigkeit und nach derselben Richtung fortzusetzen. Kraft aber kann mit Beharrungsvermögen unmittelbar nicht verglichen werden; soll also die Vergleichung stattfinden, so mufs die Gröfse des Beharrungsstandes, die Gröfse der Bewegung, d. h. Masse mal Geschwindigkeit in der ihr zugehörigen Kraft ausgedrückt werden, und diese ist der Impuls, den die Masse in ruhendem Zustande empfangen müfste, um ihre innehabende Geschwindigkeit anzunehmen. Es hindert aber durchaus nichts, bei der Untersuchung der Bewegung einer Masse in irgend einem Punkt D ihrer Bahn anzunehmen, dafs diese Masse in der Zeit vorher geruht und durch augenblicklichen Impuls erst ihre Geschwindigkeit erhalten hat, und dieser Impuls ist die Centrifugalkraft der Masse m in dem Punkt D ihrer Bahn.

Die Gröfse der Centrifugalkraft und der Centripetalkraft wird nun folgender Art entwickelt. Es sei ADE ein Kreisbogen, C dessen Mittelpunkt, der Kraftpunkt, der Ort der Centripetalkraft, in D befinde sich die Masse m, DG sei die Tangente in D, also die Richtung der Centrifugalkraft. Denkt man sich die Masse m in der Zeit t durch die Kraft in C um die Länge DF nach C hin bewegt, so hat die Centrifugalkraft dieselbe Masse m fortdauernd nach DG und in Parallelen mit DG ebenfalls fortgezogen, und m befindet sich endlich in der Linie $FE \# DG$. Da nun m in dem Kreisbogen verbleibt, so ist der Punkt E in demselben der Ort von m nach Verlauf der Zeit t, und die Sehne DE der aus den beiden Seitenwegen DF und DG zusammengesetzte Mittelweg. Vollendet man also durch die Linie $EG \# DC$ das $\#$, so erhält man DG, den durch die Centrifugalkraft innerhalb der Zeit t veranlafsten Weg der Masse m.

Fig. 284.



Der Weg DE ist aber mit einer nach DC wirkenden veränderlichen Kraft durchlaufen worden, indem die in C befindliche Anziehungskraft anfangs in der Entfernung DC, am Ende in der Entfernung FC auf die Masse m gewirkt hat, und die Wirkungen der Anziehungskräfte umgekehrt wie die Quadrate ihrer Entfernungen von dem angezogenen Punkt sich verhalten.

Bezeichnet man die Kraft für m in D mit P', für m in F mit P'', so ist also

$$P'' = \frac{DC^2}{FC^2} P'$$

und setzt man

$$DC = r, \ \angle DCE = \varphi$$

so ist

$$P'' = \frac{r^2}{r^2 \cos^2\varphi} P' = \frac{P'}{\cos^2\varphi}$$

die beschleunigenden Kräfte sind

$$\frac{P'}{m} \text{ und } \frac{P'}{m \cos^2\varphi}$$

die Beschleunigungen

$$g\frac{P'}{m} \text{ und } g\frac{P'}{m \cos^2\varphi}$$

und wenn jede für sich die Zeit t hindurch eingewirkt hätte, die Wege in der Zeit t

$$gt^2 \cdot \frac{P'}{m} \text{ und } gt^2 \frac{P'}{m \cos^2\varphi}$$

Da die Masse m innerhalb des Kreisumfangs, also in constanter Entfernung r

von C bleibt, so hat man eine constante Kraft P zu finden, die in dem Abstande r verbleibend, die Masse m in der Zeit t durch denselben Weg führt, durch den die veränderlichen Kräfte von der kleinsten P' bis zur gröfsten $\frac{P'}{\cos^2\varphi}$ nach und nach innerhalb der Zeit t einwirkend, die Masse m geführt haben. Diese Kraft P vergleicht sich mit den Kräften P' und P'' wie

$$\frac{P}{r^2} : \frac{P'}{r^2} : \frac{P'}{r^2 \cos^2\varphi} = P : P' : P''$$

und P ist offenbar gröfser als P' und kleiner als P''; deren Beschleunigung ist $g\frac{P}{m}$ und der Weg der Masse m in der Zeit t

$$= gt^2\frac{P}{m} = DF = \frac{\text{Sehne } DE^2}{2r}$$

Man hat also

$$gt^2\frac{P'}{m} < \frac{\text{Sehne } DE^2}{2r} < gt^2\frac{P'}{m\cos^2\varphi}$$

oder

$$P' < \frac{\text{Sehne } DE^2}{2grt^2}\, m < \frac{P'}{\cos^2\varphi}$$

Nun kann aber die Differenz

$$\frac{P'}{\cos^2\varphi} - P' = P'\left[\frac{1}{1-\sin^2\varphi} - 1\right]$$

der äufseren Glieder mit beliebiger Abnahme von φ beliebig klein werden. Kennt man daher eine Constante, gegen welche das Mittelglied $\frac{\text{Sehne } DE^2}{2gr\,t^2}\, m$ mit beliebiger Abnahme von φ ebenfalls beliebig klein werden kann, so ist diese $= P$. Nun sind aber in diesem Mittelgliede Sehne DE und t die einzigen Veränderlichen; mit der Abnahme von φ nimmt t ab, und die Sehne wird dem Kreisbogen beliebig nahe gebracht. Es hat aber die Masse m durch den in D empfangenen Impuls die Länge DG gleichförmig durchlaufen, und wenn die Zeit t der Bewegung sehr klein war, so bestand der Weg in dem an D befindlichen Element der Tangente, welche mit dem des Bogens zusammenfällt; es ist also das erste Bogenelement gleichförmig durchlaufen, und geschieht dies in allen folgenden Bogenelementen, mit welchen die ersten Elemente der folgenden Tangenten ebenfalls zusammenfallen; daher wird der Bogen DE in der Zeit t gleichförmig durchlaufen, und derselbe ist also, wenn man mit v die Geschwindigkeit per Secunde bezeichnet$=vt$, mithin ist die Centripetalkraft

$$P = \frac{v^2t^2}{2grt^2}\, m = \frac{v^4}{2gr}\, m$$

die Beschleunigung der durch sie bewegten Masse

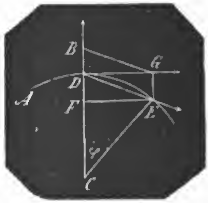
$$g\frac{P}{m} = \frac{v^2}{2r}$$

und die Geschwindigkeit in der Bahn

$$v = \sqrt{\left(2gr \cdot \frac{P}{m}\right)}$$

Mit der Centripetalkraft P ist nun nicht zugleich die in der Zeit t nach der Tangente den Weg DG erzeugende Centrifugalkraft gefunden, wohl aber die in die Richtung CD fallende Seitenkraft derselben. Denn zerlegt man den Weg DG

Fig. 285.



nach den Seitenrichtungen CD und DE, den einzig möglichen, so geschieht dies durch das # $DEGB$. DE ist die Länge des einen, DB die des anderen Seitenweges. Nun ist $DB = EG = DF =$ dem Wege, den die Centripetalkraft veranlafst. Wenn aber durch zwei Kräfte in gleichen Zeiten, gleiche Massen durch gleiche Wege geführt werden, so sind die Kräfte einander gleich, mithin ist die Centripetalkraft gleich der in dieselbe Richtung fallenden Seitenkraft der Centrifugalkraft: Oder vielmehr wenn man die nach der Tangente wirkende Kraft allgemein Tangentialkraft nennt, so ist deren nach dem Mittelpunkt des Kreises gerichtete Seitenkraft ausschliefslich diejenige, welche in dem System als das Centrum direct fliehende Kraft, als Centrifugalkraft auftritt, und die Centripetalkraft ist gleich der Centrifugalkraft.

Beide gleich grofsen Kräfte in einerlei geraden Linie heben sich einander auf, und es bleibt nur die nach der Sehne DE wirkende Kraft übrig, eine Seitenkraft des ursprünglichen Impulses, die wie dieser selbst gleichförmige Bewegung veranlafst.

Beide in der Zeit t zu durchlaufenden Wege DF und DB sind einander gleich und entgegensetzt; es wird also keiner von beiden durchlaufen, und nur der Weg

durch die Sehne *DE* bleibt übrig, welcher gleichförmig durchlaufen wird. Die Sehne *DE* aber kommt dem Bogen *DE* immer näher, je kleiner φ genommen wird, und kann mit beliebiger Abnahme von φ dem Bogen beliebig nahe gebracht werden, so dafs für die Summe der durchlaufenen sehr kleinen Sehnen die Peripherie des Kreises zu setzen ist. (Vergl. den Art.: Bahn, No. 7, die Entwickelung der Gröfse der Schwungkraft.)

Mit dem Vorstehenden ist nachgewiesen, dafs eine Centrifugalkraft vorhanden ist, und dafs diese zu den Centralkräften gehört.

Centrallinie s. v. w. Centrale.

Centralprojection, die P. eines Gegenstandes auf eine Ebene der Art genommen, dafs sämmtliche von jenem auf diese treffenden geraden Linien nach einem hinter der Ebene befindlichen Punkt gerichtet sind.

Centralpunkt ist jeder Punkt, der als Mittelpunkt eines Systems betrachtet werden kann, wie der Mittelpunkt eines Kreises, einer Kugel, s. z. B. auch Bahn der Weltkörper, Central-Bewegung. Der Punkt, nach welchem alle Linien für eine Centralprojection gerichtet sind, kann auch C. genannt werden.

Centralsonne, eine S., um welche sich ein oder mehrere andere Sonnensysteme bewegen; so ist auch unsre Sonne wahrscheinlich ein Sternsatellit einer nahe der Milchstrafse befindlichen C., und hat zu dieser dieselbe Beziehung wie ein Planet, z. B. unsre Erde, zu unsrer Sonne hat.

Centrifugalkraft ist in dem Art.: Centralbewegung definirt, und die Gröfse derselben entwickelt:

$$P = \frac{v^2}{2gr}\,M$$

wenn v die Geschwindigkeit der Masse M in der Entfernung r vom Centralpunkt und g die Beschleunigung durch die Schwerkraft $= 15\tfrac{5}{8}$ preufs. Fufs bedeuten.

Die Beschleunigung einer Kraft P, die eine Masse M im Kreise herumtreibt, ist

$$g \cdot \frac{P}{M} = \frac{v^2}{2r}$$

Beispiel. Jeder Punkt des Erdaequators dreht sich alle 24 Stunden um die Erdaxe, und macht daher einen Weg

in 24 Stunden	von	5400	geogr.	Ml.
„ 1 Stunde	„	225	„	„
„ 1 Minute	„	3,75	„	„
„ 1 Secunde	„	0,0625	„	„

Die geogr. Meile hat 23642 preufs. F., mithin ist die Geschwindigkeit eines Punkts im Aequator $v = 0{,}0625 \times 23642 = 1477\tfrac{5}{8}$ preufs. Fufs.

Die Beschleunigung von P erhält man demnach, da r der Halbmesser der Erde $= 859{,}5$ geogr. Ml. ist

$$G = g\frac{P}{M} = \frac{0{,}0625^2 \,\square\,\text{Ml.}}{2 \cdot 859{,}5\,\text{Ml.}}$$

$$= \frac{0{,}0625^2}{2 \cdot 859{,}5} \times 23642 \text{ Fufs} = 0{,}053724 \text{ pr. F.}$$

mit welcher jeder Punkt des Aequators in jedem Punkt seiner Bahn das Bestreben hat, in der ersten Secunde senkrecht aufwärts zu steigen.

Die Beschleunigung g der Schwerkraft ist $15\tfrac{5}{8}$ preufs. Fufs, die Beschleunigungen also

$$G : g = 0{,}053724 : 15\tfrac{5}{8}$$

woraus

$$G = \frac{0{,}053724}{15\tfrac{5}{8}}\,g = \frac{1}{290{,}83}\,g$$

Um zu erfahren, wie schnell die Erde um ihre Axe sich drehen müfste, wenn die Centrifugalkraft im Aequator der Schwerkraft gleich werden sollte, hat man die Gleichung:

$$\frac{v^2 \,\square\text{Meilen}}{2 \cdot 859{,}5\text{ Ml.}} = \frac{v^2}{2 \cdot 859{,}5} \times 23642 \text{ Fufs} = 15\tfrac{5}{8} \text{ Fufs}$$

woraus

$$v = \sqrt{\frac{125}{4} \cdot \frac{859{,}5}{23642}} \text{ Ml.} = 1{,}0658 \text{ Meilen.}$$

Die Anzahl der Drehungen der Erde per 24 Stunden müfste also sein

$$\frac{1{,}0658}{0{,}0625} = 17{,}054 \text{ mal}$$

Man konnte auch aus der oben gefundenen Zahl $\frac{1}{290{,}83}$ die $\sqrt[2]{\ }$ ziehen wo man $\frac{1}{17{,}054}$ erhält.

Bei dieser Geschwindigkeit der Erde würden die Körper am Aequator kein Gewicht haben, sie würden nicht fallen, und zum Steigen wie zum Fallen für einerlei Geschwindigkeit einen gleich grofsen Impuls erfordern. Gegenwärtig beträgt die Länge des Secundenpendels am Aequator 15,054 pariser Fufs; bei 17maliger Schnelligkeit der Erde würde kein Pendel schwingen, die Länge des Secundenpendels an den Polen 15,132 par. Fufs würde dieselbe bleiben.

Wenn Massen um feste Axen sich drehen, so bezeichnet man die daraus hervorgehende C. mit dem Namen Schwungkraft.

Centripetalkraft s. u. Centralkräfte.

Centrirt heifsen Maschinentheile: Wel-

len, Räder, Scheiben u. s w., wenn deren Axen zugleich deren Drehaxen sind.

Centriwinkel, Winkel am Mittelpunkt, ist der Winkel in einem Kreise, dessen Spitze der Mittelpunkt, und dessen Schenkel Halbmesser sind; sämmtliche Mittelpunktswinkel in einem Kreise sind = 4 rechten Winkeln.

Centrum, Mittelpunkt einer Linie, einer Fläche, eines Körpers, ist derjenige Punkt, um den alle Theile der geometrischen Gröfse entweder gleichmäfsig oder symmetrisch belegen sind.

In den ersten Fall gehören nur die Kreislinie, die Kreisebene und die Kugel, in den zweiten alle übrigen Gröfsen, denen ein Mittelpunkt zukommt, als die Ellipse, deren C. in dem Durchschnittspunkt der grofsen und der kleinen Axe liegt. Jeder Krystall hat einen Mittelpunkt, der zugleich der Durchschnittspunkt und Halbirungspunkt sämmtlicher Axen des Krystalls ist.

Ceres (Ç) Von den zwischen Mars und Jupiter sich bewegenden kleinen Planeten der, welcher zuerst entdeckt worden ist. Es geschah dies im Jahr 1801 von Piazzi in Palermo, und den Namen Ceres erhielt der Planet, weil im Alterthum Ceres die Schutzgöttin Siciliens war. Ceres ist der vierte der oberen Planeten (Mars, Vesta, Juno, Ceres, Pallas...) deren kleinste Entfernung von der Sonne ist 52¾ Millionen Meilen, deren gröfste 61½, deren mittlere gegen 57 Millionen Meilen, deren Entfernung von der Erde 32 bis 82 Millionen Meilen, Neigung deren Bahn gegen die Ekliptik 10° 36′ 55″ und noch im Abnehmen begriffen; deren Excentricität = 0,076738 der halben grofsen Axe, ebenfalls noch im Abnehmen begriffen, deren siderische Umlaufszeit 4 Jahr 223 Tage 10½ Stunden, deren synodische 1 Jahr 101 Tage 3 Stunden. Der Planet ist mit nebelartiger, hoher Atmosphäre umgeben, welche ungleich erscheint, und bis 650 Meilen im Durchmesser betragen soll, der feste Kern der C. ist von Herschel zu 35 Meilen Durchmesser, später von Schröter zu 352 Meilen festgestellt worden.

Die C. wird als ein noch nicht vollendeter Weltkörper betrachtet; nicht nur die Veränderlichkeit seiner Atmosphäre, sondern auch die verschiedenen Farben, bläulich, röthlich, weifslich, in welchen er zu verschiedenen Zeiten glänzt, läfst schliefsen, dafs das Feste, Flüssige und Luftförmige sich noch nicht geschieden hat. Dasselbe gilt von den andern dreien, Vesta, Juno, Pallas. Man hält diese vier Weltkörper, welche ziemlich gleiche Bahnen und Umlaufszeiten haben, für Trümmer eines einzigen zwischen Mars und Jupiter vorhanden gewesenen Planeten, und es erhält diese Ansicht immer mehr Wahrscheinlichkeit, da später und noch heut immer neue Planetoiden entdeckt werden. die alle mit jenen Vieren in fast einerlei Entfernung von der Sonne sich befinden, und die alle diesen ehemals einzigen Planeten ausgemacht haben können.

Charakteristik Bezeichnung der Eigenthümlichkeit eines Gegenstandes, wodurch dieser von allen übrigen derselben Art unterschieden ist.

Die Ziffern 3 5 7 9 1 sollen nach dem dekadischen System, also zu einer Zahl geschrieben sein, so hat man

0,35791
3,5791
35,791

u. s. w.

Jede der folgenden Zahlen ist die zehnfache der vorstehenden, und dieses Eigenthümliche, dies Charakteristische giebt ihnen das Komma, woher bei Decimalbrüchen das Komma Charakteristik heifst.

Die Zahl 6060695 als briggischer Logarithmus hat den Numerus 40371, derselbe dekadisch geschrieben; allein den wirklichen Werth desselben ergiebt erst die dem Logarithmus voranstehende Ganze, als

0,6060695	hat den num:	4,0371
1,6060695	„ „ „	40,371
2,6060695	„ „ „	403,71
0,6060695−2	„ „ „	0,040371

u. s. w.

Deshalb heifst die ganze Zahl des Logarithmus die Charakteristik, Kennziffer, die Decimalen heifsen die Mantisse (Zugabe).

Desgleichen heifst die Constante in der Formel für die Berechnung des Umlaufs der Planeten in Theilen der halben grofsen Axe unserer Ekliptik

$$k = 0{,}0172021$$

Die Charakteristik unseres Sonnensystems (s. Bahn der Weltkörper, pag. 308). Für jedes andere Sonnensystem würde eine andere Ch. gefunden werden, weil dieselbe nur von der Masse des Centralkörpers (der Sonne) abhängig ist.

Chiliagon (χιλιας, Tausend) ein Vieleck von 1000 Seiten, Tausendeck, das reguläre Ch. hat den Centriwinkel für eine Seite

$$= \frac{360°}{1000} = 21' \ 36''$$

2) den Umfangswinkel zwischen 2 benachbarten Seiten

$$\frac{1000-2}{1000}\cdot 180° = 178°\ 38'\ 24''$$

3) die Seite s für den Halbmesser R des umbeschriebenen Kreises

$$s = 2R\cdot sin\,\frac{180°}{1000} = 2R\ sin\ 10'\ 48''$$

4) die Seite s' für den Halbmesser des inbeschriebenen Kreises

$$s' = 2r\,tg\,\frac{180°}{1000} = 2r\,tg\ 10'\ 48''$$

5) der Halbmesser R des umbeschriebenen Kreises für die Seite s

$$R = \tfrac{1}{2}s\cdot cosec\,\frac{180°}{1000} = \tfrac{1}{2}s\cdot cosec\ 10'\ 48''$$

6) der Halbmesser r des inbeschriebenen Kreises für die Seite s

$$r = \tfrac{1}{2}s\cdot cotg\,\frac{180°}{1000} = \tfrac{1}{2}s\cdot cot\ 10'\ 48''$$

7) der Flächeninhalt J

$$= \frac{1000}{2}\cdot R^2\,sin\,\frac{360°}{1000} = \frac{1000}{2}\cdot R^2\,sin\,21'36''$$

$$= 1000\,r^2\cdot tg\cdot\frac{180°}{1000} = 1000\,r^2\cdot tg\ 10'\ 48''$$

$$= \frac{1000}{4}\,s^2\cdot cot\,\frac{180°}{1000} = \frac{1000}{4}\,s^2\cdot cot\ 10'\ 48''$$

Sinus und Tangente für 10′ 48″ sind in der 7ten Decimalstelle noch nicht unterschieden, wie Vega's Tafeln nachweisen, und somit auch nicht cosecante $= \frac{1}{sin}$ und cotangente $= \frac{1}{tg}$

Sollen also R von r, s von s' unterschieden werden, so hat man sin und tg aus den nach Potenzen der Bogen fortschreitenden Reihen auf mehr Decimalen zu berechnen.

Man hat

$$sin\,\alpha = \frac{\alpha}{1} - \frac{\alpha^3}{2\cdot 3} + \frac{\alpha^5}{2\cdot3\cdot4\cdot5} - \frac{\alpha^7}{2\cdot3\ldots7} + \ldots$$

hier ist

$$\angle\,\alpha = 10'\ 48''$$

$$\text{Bogen}\ \alpha = \frac{180°}{1000}\cdot\frac{\pi}{180°} = \frac{\pi}{1000}$$

daher

$$\begin{aligned}
sin\,\alpha &= +\ \frac{\alpha}{1} &&= +0{,}00314\ 15926\ 536\\
&\quad -\ \frac{\alpha^3}{2\cdot3} &&= -0{,}00000\ 00051\ 677\\
&\quad +\ \frac{\alpha^5}{2\cdot3\cdot4\cdot5} &&= +0{,}00000\ 00000\ 000\ldots\\
\hline
sin\,\alpha & &&= 0{,}00314\ 15874\ 859
\end{aligned}$$

hieraus:

3) $s = 2R\ sin\,\alpha = \quad 0{,}00628\ 31749\ 718R$

Ferner hat man für die Auffindung von s'

$$tg\,\alpha = \alpha + \tfrac{1}{3}\alpha^3 + \frac{2}{3\cdot5}\,\alpha^5 + \frac{17}{3\cdot3\cdot5\cdot7}\,\alpha^7 + \ldots$$

$$\text{Bogen}\ \alpha = \frac{\pi}{1000},\ \text{daher}$$

$$\begin{aligned}
tg\,\alpha &= +\ \alpha &&= +0{,}00314\ 15926\ 536\\
&\quad +\ \tfrac{1}{3}\alpha^3 &&= +0{,}00000\ 00103\ 354\\
&\quad +\ \frac{2}{3\cdot5}\cdot\alpha^5 &&= +0{,}00000\ 00000\ 000\\
\hline
tg\,\alpha & &&= 0{,}00314\ 16029\ 890
\end{aligned}$$

hieraus

4) $s' = 2r\,tg\,\alpha = \quad 0{,}00628\ 32059\ 780\times r$

Um R zu finden, hat man

$$cosec\,\alpha = \frac{1}{\alpha} + \tfrac{1}{6}\alpha + \frac{7}{360}\,\alpha^3 + \frac{31}{15120}\alpha^5 + \ldots$$

$$\text{Bogen}\ \alpha = \frac{1}{1000}\pi,\ \text{daher}$$

$$\begin{aligned}
cosec\,\alpha &= +\ \frac{1}{\alpha} = \frac{1000}{\pi} &&= +318{,}30988\ 61837\ 9\\
&\quad +\ \tfrac{1}{6}\alpha &&= +\quad 0{,}00052\ 35987\ 8\\
&\quad +\ \frac{7}{360}\alpha^3 &&= +\quad 0{,}00000\ 00006\ 0\\
\hline
cosec\,\alpha & &&= 318{,}31040\ 97831\ 7
\end{aligned}$$

hieraus

5) $R = \tfrac{1}{2}s\cdot cosec\,\alpha \quad = 159{,}15520\ 48915\ 8\times s$

Um r zu finden, hat man

$$cot\,\alpha = \frac{1}{\alpha} - \tfrac{1}{3}\alpha - \frac{1}{3\cdot3\cdot5}\,\alpha^3 - \frac{2}{3\cdot3\cdot3\cdot5\cdot7}\,\alpha^5 - \ldots$$

$$\text{Bogen}\ \alpha = \frac{1}{1000}\pi,\ \text{daher}$$

$$\begin{aligned}
cot\,\alpha &= \frac{1}{\alpha} = \frac{1000}{\pi} &&= +318{,}30988\ 61837\ 9\\
&\quad -\ \tfrac{1}{3}\alpha &&= -\quad 0{,}00104\ 71975\ 6\\
&\quad -\ \tfrac{1}{45}\alpha^3 &&= -\quad 0{,}00000\ 00006\ 9\\
\hline
cot\,\alpha & &&= 318{,}30883\ 89855\ 4
\end{aligned}$$

hieraus

$$6)\quad r = \tfrac{1}{2} s \cdot \cot \alpha = 159{,}15441\ 94927\ 7 \times s$$

Für den Flächen-Inhalt J hat man

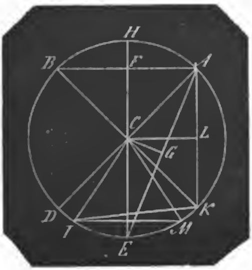
$$J = 1000\, r^2\, tg\, \alpha = 1000 \times 0{,}00314\ 16029\ 89 \cdot r^2$$
$$= 3{,}14160\ 2989 \times r^2$$

oder

$$J = \frac{1000}{4} s^2 \cdot \cot \alpha = \frac{1000}{4} \cdot 318{,}30883\ 89855\ 4 \times s^2$$
$$= 79577{,}20974\ 638 \times s^2$$

Chorde, Sehne, im Allgemeinen die gerade Verbindungslinie zweier Punkte einer krummen Linie, ohne dafs diese geschnitten wird, besonders aber die gerade Verbindungslinie AB zweier Punkte A, B eines Kreisumfangs. Trifft die Ch. AD

Fig. 286.



durch den Mittelpunkt C, so ist sie ein Durchmesser des Kreises, und theilt die Kreislinie und die Kreisebene in 2 congruente Theile.

2. Zu gleichen Mittelpunktswinkeln gehören gleiche Sehnen. Denn ist $\angle ACB = \angle ACK$, so werden diese von 4 gleichen Seiten, den Radien, eingeschlossen, $\triangle ACB \cong \triangle ACK$, und folglich $AB = AK$.

Wie das aus der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks auf die Grundlinie gefällte Loth die Grundlinie halbirt, so halbirt ein aus dem Mittelpunkt auf eine Sehne gefälltes Loth die Sehne.

Ist $\triangle ABC \cong \triangle AKC$, also $AB = AK$, also $\frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} AK$ nämlich $AF = AL$, so sind auch die Lothe $CF = CL$, d. h. gleiche Sehnen in einem Kreise sind gleich weit vom Mittelpunkt entfernt und gegenseitig.

Die Aufgabe: in einem Kreise eine Sehne von gegebener Länge a zu verzeichnen, in der oder in deren Richtung zugleich ein gegebener Punkt A liegt, ist demnach zu lösen, dafs man von einem beliebigen Punkt der Peripherie aus eine Sehne von der Länge a einträgt, vom Mittelpunkt ein Loth auf dieselbe fällt, mit diesem als Halbmesser einen concentrischen Kreis beschreibt, und durch den Punkt A an diesen Kreis eine Tangente zieht, dessen Theil zwischen den Durchschnittspunkten der äufseren Peripherie die verlangte Sehne ist.

Sobald a nicht $=$ dem Durchmesser d des Kreises ist, giebt es 2 gleiche Sehnen a, für $a > d$ und für $a <$ als die kleinst mögliche Sehne, nämlich die auf der geraden Verbindungslinie zwischen dem Mittelpunkt und einem innerhalb des Kreises liegenden Punkt A' normale Sehne, ist die Aufgabe unmöglich.

3. Sind CF, CG Lothe auf AB, AE, und ist $CF > CG$, so ist in den beiden rechtwinkligen Dreiecken ACF und ACG auch $AF < AG$ und somit $AB < AE$ d. h. je kleiner die Sehnen in einem Kreise sind, desto weiter sind sie vom Mittelpunkt entfernt.

4. Sind die Sehnen AB und $JM \parallel$, so sind die Bogen BJ und AM, welche sie abschneiden, einander gleich. Denn die Normalen vom Mittelpunkt auf beiden Sehnen liegen in einerlei Durchmesser EH. Da nun

$$\angle HCB = \angle HCA$$
$$\angle ECJ = \angle ECM$$

so ist auch $\angle BCJ = \angle ACK$ woraus Bogen $BJ =$ Bogen AM.

5. Zwei Sehnen, die in einem Punkt der Peripherie zusammentreffen, bilden dort einen Peripheriewinkel, Umfangswinkel, wie die Sehnen BA und EA in A den Peripherie-$\angle ABE$; auch $\angle BAC$, $\angle JMC$ sind Peripheriewinkel.

Der Peripheriewinkel ist halb so grofs, als der mit ihm auf gleichem Bogen stehende Centriwinkel. $\angle BAE = \frac{1}{2} \angle BCE$.

Denn zieht man AD durch C, so sind als Aufsenwinkel der Dreiecke BAC und EAC

$$\angle BCD = \angle CAB + \angle CBA = 2 \angle CAB$$
und $$\angle ECD = \angle CAE + \angle CEA = 2 \angle CAE$$
also $$\angle BCE = \angle BAE$$
oder $$\tfrac{1}{2} \angle BCE = \angle BAE$$

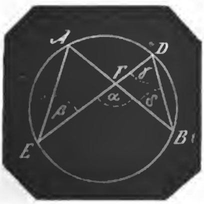
Daher sind Peripheriewinkel zu einer-

lei oder gleichen Sehnen desselben Kreises einander gleich, zu gleichen Peripheriewinkeln gehören gleiche Sehnen, zu gleichen Sehnen 2 Paare gleicher Peripheriewinkel, und die zu einer Sehne gehörenden entgegengesetzt liegenden Peripheriewinkel ergänzen sich einander zu 2 rechten Winkeln.

Die Aufgabe: durch einen in der Ebene eines Kreises gegebenen Punkt A eine gerade Linie zu verzeichnen, welche in dem Kreise eine Sehne bildet, die einem gegebenen Peripheriewinkel α zugehört, ist demnach zu lösen, dafs man an irgend einem Punkt des Kreisumfangs den gegebenen $\angle \alpha$ zeichnet, die Endpunkte dessen Schenkel zur Sehne verbindet, vom Mittelpunkt auf diese eine Normale fällt, mit dieser als Halbmesser einen concentrischen Kreis beschreibt, und durch A an diesen eine Tangente zieht. Wie bei der Aufgabe No. 2 entstehen hier zwei Sehnen; ist der Punkt A innerhalb des später zu construirenden concentrischen Kreises gegeben, so ist die Aufgabe unmöglich, denn jeder durch A gezogenen Sehne gehört ein gröfserer Peripheriewinkel zu, als der gegebene α.

6. Schneiden sich zwei Sehnen AB, DE innerhalb des Kreises, so ist jeder der von ihnen gebildeten Winkel = der

Fig. 287.



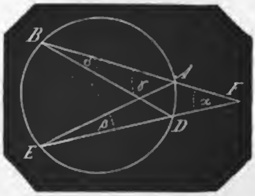
Summe derjenigen beiden Peripherinwinkel, welche auf den beiden zwischen den Sehnen liegenden Bogen stehen, z. B.

$$\alpha = \beta + \gamma$$

Denn α als Aufsenwinkel $= \angle \gamma + \delta$, δ aber $= \beta$, weil β und δ auf einerlei Bogen AD stehen.

Schneiden sich die Sehnen aufserhalb des Kreises, so ist der von ihnen gebildete $\angle \alpha =$ der Differenz beider auf den zwischen den Sehnen befindlichen Bogen stehenden Peripheriewinkel γ und β, nämlich $\alpha = \gamma - \beta$.

Fig. 288.



7. Schneiden sich zwei Sehnen AB, DE normal, und man zieht die 4 Halbmesser nach deren Endpunkten, so ergänzen sich die gegenüberliegenden Centriwinkel gegenseitig zu 2 Rechten.

$$\angle DCA + BCE = \angle BCD + \angle ACE = 2R$$

Fig. 289.



Denn zieht man die Sehne AE, so ist

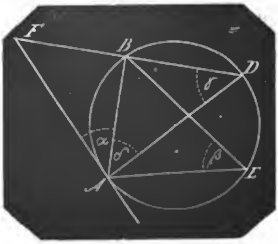
$$\angle DCA = 2 \angle DEA = 2 \angle FEA$$

$$\angle BCE = 2 \angle BAE = 2 \angle FAE$$

$$\angle DCA + \angle BCE = 2(\angle FEA + \angle FAE) = 2 \angle AFE = 2R$$

8. Der Winkel α, den eine Tangente AF des Kreises in ihrem Berührungspunkt A mit einer Sehne AB bildet, ist = dem Peripheriewinkel β in dem gegenüberliegenden Kreisabschnitt $BDEA$.

Fig. 290.



Denn zieht man den Durchmesser AD und die Sehne BD, so ist

$$\angle \alpha + \delta = R$$

auch $\angle ABD = R$

also $\angle \delta + \gamma = R$

folglich $\alpha = \gamma$

γ aber $= \beta$, weil beide auf demselben Bogen AB stehen, daher $\alpha = \beta$.

Wenn durch den Berührungspunkt F zweier Kreise mit einander 2 gerade Linien AB, DE bis zu deren Umfängen gezogen werden, so sind die beiden Sehnen BD, AE, welche die Durchschnittspunkte mit einander verbinden, einander parallel.

Denn zieht man die Tangente GH durch F, so ist nach No. 8

$$\angle GFB = \angle BDF$$

ebenso $\angle AFH = \angle AEF$

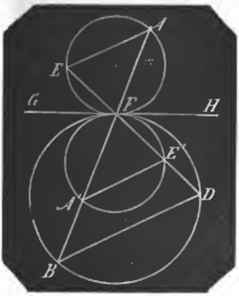
aber $\angle GFB = \angle AFH$ als Scheitel$\angle$

daher $\angle BDF = \angle AEF$

ebenso $\angle DBF = \angle EAF$

woher $BD \parallel AE$

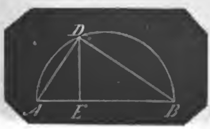
Fig. 291.



Dasselbe ergiebt sich, wenn die beiden Kreise innerhalb sich berühren, wo dann E in E', A in A' fällt und $A'E' \parallel BD$.

10. Ist AB ein Durchmesser, DE normal darauf, so sind die Dreiecke ADE, DBE und ABD einander ähnlich, und es folgt daraus

Fig. 292.



$$AE : DE = DE : BE \qquad (1)$$

oder

$$DE^2 = AE \cdot BE \qquad (2)$$

ferner

$$AE : AD = AD : AB \qquad (3)$$

oder

$$AD^2 = AE \cdot AB \qquad (4)$$

ebenso

$$BD^2 = BE \cdot AB \qquad (5)$$

Aus beiden letzten Gleichungen hat man

$$AE \cdot AB : BE \cdot AB = AD^2 : BD^2$$

und es folgt noch

$$AE : BE = AD^2 : BD^2 \qquad (6)$$

11. Schneiden sich zwei Sehnen, so ist das Rechteck aus den Abschnitten der einen Sehne mit dem Rechteck aus den Abschnitten der anderen gleich grofs.

Denn da (Fig. 287 und Fig. 288)

$$\angle \beta = \angle \delta$$

so ist

$$\triangle AEF \sim \triangle DBF$$

folglich

$$AF : EF = DF : BF$$

woraus

$$AF \cdot BF = DF \cdot EF$$

Schneidet eine Tangente (Fig. 290) AF eine verlängerte Sehne DB in F, so ist das Quadrat der Tangente = dem Rectangel aus den Abschnitten der Sehne.

Denn da $\angle F = \angle F$

$\angle \alpha = \angle \gamma$

so ist $\triangle FAB \sim \triangle FDA$

woraus

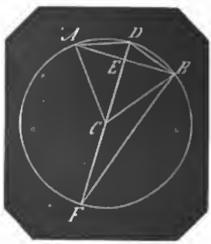
$$AF : BF = DF : AF$$

oder

$$AF^2 = BF \cdot DF.$$

12. Es sei der Halbmesser $BC = AC = r$, eine Sehne $AB = a$, $AD = BD$ die zu dem

Fig. 293.



halben Bogen gehörende Sehne $= b$. Nennt man den Abschnitt $DE = x$, so ist $CE = r - x$, $AE = BE = \frac{a}{2}$ und man hat

$$x : b = b : 2r$$

woraus

$$x = \frac{b^2}{2r}$$

Es ist aber

$$x^2 = b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

oder

$$\frac{b^4}{4r^2} = b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

woraus

$$b^4 - 4b^2r^2 + a^2r^2 = 0$$

die allgemeine Gleichung zwischen 2 Sehnen, von denen die eine zu dem halben Bogen oder Centriwinkel der anderen gehört.

Man erhält aus derselben

$$\text{I.} \quad a = \frac{b}{r}\sqrt{4r^2 - b^2}$$

$$b = \sqrt{2r^2 \pm r\sqrt{4r^2 - a^2}}$$

und da b als $\sqrt{2r^2} = r\sqrt{2}$, nämlich als Seite des regulären Vierecks im Kreise das Maximum ist, wobei nämlich

$$r\sqrt{4r^2 - a^2} = 0$$

also $a = 2r$ wird, so kann nur das Vorzeichen $-$ gelten, und es ist

$$\text{II.} \quad b = \sqrt{2r - 4r\sqrt{r^2 - a^2}}$$

$$\text{III.} \quad r = \frac{b^2}{\sqrt{4b^2 - a^2}}$$

Die Formeln I und II geben das Mittel, die Seite eines regulären n-Eecks algebraisch auszudrücken, wenn die Seite des $2n$-Ecks oder die des $\frac{n}{2}$-Ecks gegeben ist. Z. B. wird synthetisch bewiesen, dafs die Seite des regulären Sechsecks im Kreise $= r$ ist.

Aus Formel I erhält man demnach die Seite des regulären Dreiecks, wenn man r für b setzt:

$$a = \frac{r}{r}\sqrt{4r^2 - r^2} = r\sqrt{3}$$

und aus Formel II erhält man die Seite des regulären Zwölfsecks, wenn man r für a setzt:

$$b = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - r^2}} = \sqrt{2r^2 - r^2\sqrt{3}}$$
$$= r\sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

aus diesem die Seite des Vierundzwanzigecks u. s. w.

13. Setzt man $\angle ACD = \angle BCD = \alpha$, so hat man, wenn man DC bis F verlängert, und BF zieht, $\angle DBF = 90°$ folglich

$$BD = b = 2r \sin F = 2r \sin\frac{\alpha}{2} \qquad (1)$$

ebenso

$$a = 2r \sin \alpha = 4r \sin\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\alpha}{2} \qquad (2)$$

mithin

$$\frac{a}{b} = 2 \cos\frac{\alpha}{2} \qquad (3)$$

woraus

$$a = 2b \cos\frac{\alpha}{2} \qquad (4)$$

$$b = \frac{a}{2}\sec\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2\cos\frac{\alpha}{2}} \qquad (5)$$

was auch beides aus der Figur unmittelbar entnommen werden kann, weil

$$\angle DAB = \angle DBA = \frac{\alpha}{2}$$

Aus diesen 5 Formeln sind die Seiten der regulären Vielecke im Kreis trigonometrisch zu finden. Aus Formel I und II hat man dieselben für den Radius $= r$, z. B. für den Halbmesser $= 1$

Die Seite a

des Vierecks $= 2 \cdot \sin 45° = 1{,}4142136$

„ Achtecks $= 2 \cdot \sin 22\frac{1}{2}° = 0{,}7653668$

„ Sechsechs $= 2 \cdot \sin 30° = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$

Chronologie ist die Wissenschaft von der Abmessung, Eintheilung und Vergleichung der Zeit bei verschiedenen Völkern und zu verschiedenen Zeitaltern.

Die Natur hat uns Erdbewohnern zwei constante Zeitmaafsstäbe gegeben: Die Zeit, in welcher die Erde eine vollständige Umdrehung um ihre Axe macht und die Zeit, in welcher die Erde eine vollständige Umdrehung in der Ekliptik um die Sonne macht. Der erste Zeitabschnitt ist der Tag, der zweite das Jahr; aber beide sind mit einander incommensurabel, und dieser Umstand bildet den wesentlichsten Grund für die Schwierigkeiten, welche Zeitmessungen darbieten. Das Jahr, nämlich die Zeit, in welcher die Erde in ihrer Bahn genau 360° beschreibt, enthält zwischen 336 und 367 Tage, und zwar 366,25638 ... Tage, welches in Unterabtheilungen 366 Tage 6 Stunden 9 Minuten und etwa 11 Secunden beträgt.

2. Aufser der eben gedachten Schwierigkeit kommt dazu, dafs diese beiden constanten Maafsstäbe für das bürgerliche Leben unmittelbar nicht anzuwenden sind; die eben gedachten Zeiten sind Sternzeit, der Mensch bedarf aber der Sonnenzeit, und in dem Art. Bogenmaafs, pag. 389 mit Fig. 231 wird nachgewiesen, dafs das Sternjahr mit dem ihm gleich grofsen Sonnenjahr genau einen Sonnentag weniger enthält als Sterntage, demnach würde das Jahr 365,25638 Sonnentage enthalten.

3. Aber auch dieses Jahr ist für den bürgerlichen Bedarf nicht anwendbar: Es ist durchaus erforderlich, dafs nach Verlauf eines Jahres die Sonne genau denselben Stand zur Erde einnehme, den sie im Augenblick des begonnenen Jahres

inne hatte. Ein Jahr hat also zu dauern von dem Augenblick an, wo die Erde in dem Frühlingspunkt steht, bis zum Wiedereintritt derselben in den Frühlingspunkt, oder von Herbst- zu Herbstpunkt, oder von Winter- zu Winterpunkt, oder von Sommer- zu Sommerpunkt.

Frühlings- und Herbstpunkt sind nun die Durchschnittspunkte der Ekliptik mit der Aequatorebene; diese bleibt unverrückbar, die Ekliptik dagegen macht eine kleine Bewegung von Ost nach West, welche jährlich 50,1 Bogensecunden beträgt, um welche sie die Erde bei deren jährlichem Umlauf in der Ekliptik entgegenkommt, so dafs in dem für das bürgerliche Leben allein anwendbaren Jahr die Erde 50,1 Secunden weniger als 360 Grad zurücklegt, welches an Zeit 20 Minuten 20,4 Secunden = 0,014125 Tage weniger beträgt als die obigen 365,25638 Tage (s. astronomisches Jahr, pag. 148). Dieses der bürgerlichen Zeitrechnung zu Grunde liegende **tropische Jahr** hat also 365,242255 Sonnentage = 365 Tage 5 Stunden 48 Minuten und etwa 51 Secunden Sonnenzeit und 366,242255 Sterntage = 366 Tage 5 Stunden 48 Minuten und etwa 51 Secunden Sternzeit.

Demnach ist

ein Sonnentag $= \frac{366,242255}{365,242255} = 1,002738$ Sterntage = 24 Stunden 3 Minuten 56,5632 Sec. Sternzeit

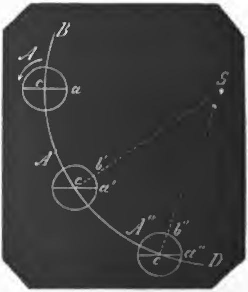
eine Sonnenstunde $= \frac{366,242255}{365,242255} = 1,002738$ Sternstunden = 1 Std. 9,8568 Sec. Sternzeit

eine Sonnenminute $= \frac{366,242255}{365,242255} = 1,002738$ Sternmin. = 1 Min. 9,8568 Terzien Sternzeit.

4. Diesem dem bürgerlichen Jahr (s. d. Art. pag. 442) zu Grunde liegenden tropischen Jahr hat aber die Natur wiederum nicht constante Tage als Unterabtheilungen gegeben: jeder (wahre) Sonnentag ist an Länge dem ihm vorangegangenen und dem ihm nachfolgenden Tage ungleich, und so sind es auch deren Stunden, so dafs die Stunde, der genau 24ste Theil eines Tages verschieden ist von der Stunde des vorangegangenen und von der des nachfolgenden Tages, desgleichen die Minute und die Secunde, während alle Sterntage, Sternstunden, Sternminuten dieselben sind und bleiben.

Die Verschiedenheit der Sonnenzeit liegt darin, dafs die Erde mit verschiedenen Geschwindigkeiten die Ekliptik durchläuft. Im Perihel bewegt sich die Erde am schnellsten, im Aphel am langsamsten; auf dem Wege vom Perihel nach dem Aphel hin immer langsamer, vom Aphel nach dem Perihel hin immer schneller.

Fig. 294.



Es sei BAD ein Theil der Ekliptik, S der Stand der Sonne. Ist A das Aphel, AA' der Bogen, den die Erde in einem Sonnentage durchläuft, so würde dieselbe einen gröfseren Bogen AA'' durchlaufen, wenn A das Perihel wäre. In A hat der Punkt a der Erdoberfläche Mittag, in A' hat b', in A'' hat b'' Mittag, indem die Radien ca, cb', cb'' nach der Sonne S hingerichtet sind. In A' hat der Punkt a eine volle Umdrehung bis a' um die Erdaxe + dem Bogen $a'b'$ durchlaufen; in A'' hat a eine volle Umdrehung bis a'' um die Erdaxe + dem Bogen $a''b''$ durchlaufen. Da nun die Zeit der Umdrehung der Erde um ihre Axe (von a bis a' oder a''), der Sterntag constant ist, Bogen $a''b''$ > Bogen $a'b'$ so ist der Sonnentag von A bis A' kleiner als der von A bis A''.

Ueberhaupt nehmen die Sonnentage mit ihren 24 Sonnenstunden immer mehr ab, je mehr die Erde vom Perihel nach dem Aphel hin sich bewegt, und immer mehr zu, je näher die Erde wieder dem Perihel

kommt. Für uns, die Bewohner der nördlichen Halbkugel ist Winter, wenn die Erde in der Nähe des Perihels, und Sommer, wenn sie in der Nähe des Aphels sich befindet; im Winter haben wir also längere, im Sommer kürzere Tage, Stunden, Minuten und Secunden. Der Unterschied zwischen dem längsten und dem kürzesten dieser Tage beträgt gegen vier Minuten.

5. Solche Verschiedenheit darf aber in der Zeit für den bürgerlichen Verkehr nicht vorkommen: die Tage und deren Unterabtheilungen müssen von Anfang bis Ende des Jahres einerlei bleiben. Aus diesem Grunde denkt man sich neben der wirklichen Erde von ungleichförmiger Bewegung eine zweite Erde von gleichförmiger Bewegung in der Ekliptik, oder wie man zu sagen pflegt, neben der wirklichen Sonne von (scheinbar) ungleichförmiger Bewegung eine zweite von (scheinbar) gleichförmiger Bewegung am Himmel, eine nicht vorhandene **mittlere Sonne**, welche die gleichmäfsige Zeit, die **mittlere Sonnenzeit** bestimmt, während die erste, die **wahre Sonne**, **wahre Sonnenzeit** angiebt, und indem beide Sonnen in einerlei Zeit, nämlich in einem Jahr, die Ekliptik (scheinbar) durchlaufen.

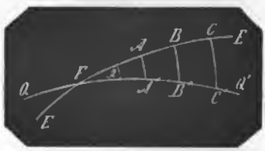
Der Art.: Absiden, pag. 15 mit Fig. 17 zeigt, dafs die halbe Ekliptik vom Perihel P über den Frühlingspunkt F nach dem Aphel A in einerlei Zeit mit der anderen halben Ekliptik von A über den Herbstpunkt H nach P von der Erde zurückgelegt wird. In P ist die Geschwindigkeit der Erde am gröfsten, in A am geringsten; die Erde bedarf also einer längeren Zeit zu Durchlaufung der halben Ellipse FAH als zu der anderen Hälfte HPF. Hieraus geht nothwendig hervor, dafs wenn beide Sonnen in ihren Umläufen jährlich übereinstimmen sollen, nur die Punkte P und A, das Perihel und das Aphel es sein können, in welchen beide Sonnen, die wahre und die mittlere, in der Ekliptik zusammentreffen, und dafs beide in allen anderen Punkten derselben auseinanderstehen.

Die wahre Sonne S läuft von P bis F schneller als die mittlere Sonne S'; ist S in F, so ist S' noch vor F; von F ab läuft S langsamer als S' und S' holt S in A ein. Von hier ab geht S langsamer als S'; S bleibt zurück und S' trifft früher in H ein als S, dagegen wird S' von S in P wieder eingeholt.

6 Die mittlere Sonne durchläuft nun die Ekliptik gleichförmig; allein die gleich weit von einander entfernten Punkte der **Ekliptik** sind es nicht, welche Tag für Tag culminiren müssen, um gleich grofse mittlere Tage zu geben, sondern die Punkte im **Aequator**, der sich fortdauernd um die Erdaxe gleichförmig umdreht, weil dessen Ebene normal der Erdaxe ist und verbleibt, während die Ekliptik ihn und die Erdaxe schief durchschneidet. Dafs aber mit Punkten von gleichweiten Abständen in der Ekliptik nicht zugleich gleich weit von einander entfernte Punkte im Aequator culminiren, geht aus folgender Betrachtung hervor:

Es sei QQ' der Aequator, EE' die Ekliptik, beide schneiden sich im Frühlingspunkt F, $\angle e (= 23\frac{1}{2}°)$ sei die Schiefe der

Fig. 295.



Ekliptik $FA = AB = BC =$ u. s. w. seien die gleich grofsen Wege, welche die mittlere Sonne in den aufeinander folgenden Tagen zurücklegt, so sind, wenn man die sphärischen Projectionen der Punkte A, B, C ... auf den Aequator nimmt, wenn man also die Bogen AA', BB', CC' ... normal auf QQ' fällt, F, A', B', C' ... die Punkte im Aequator, welche mit den Punkten F, A, B, C ... zugleich culminiren.

Nun ist

$$tg\ FA' = tg\ FA \cdot \cos e$$
$$tg\ FB' = tg\ FB \cdot \cos e$$
$$tg\ FC' = tg\ FC \cdot \cos e$$

u. s. w.

Setzt man $FA = AB = AC \ldots = c$

$FA' = w_1$; $A'B' = w_2$; $B'C' = w_3$ ... w_n

so hat man

$$w_1 = tg\ c \cdot \cos e$$
$$w_2 = (tg\ 2c - tg\ c) \cdot \cos e$$
$$w_3 = (tg\ 3c - tg\ 2c) \cdot \cos e$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$w_n = [tg(nc) - tg(n-1)c)]\ \cos c$$

Nun ist

$$tg\ \alpha - tg\ \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}$$

folglich

$$tg\ 2c - tg\ c = \frac{\sin c}{\cos 2c \cdot \cos c}$$

$$tg\,3c - tg\,2c = \frac{\sin c}{\cos 3c \cdot \cos 2c}$$

. . . .

$$tg\,nc - tg(n-1)c = \frac{\sin c}{\cos nc \cdot \cos(n-1)c}$$

hieraus

$$w_1 = tg\,c \cdot \cos e$$

$$w_2 = \frac{\sin c}{\cos 2c \cdot \cos c} \cos e = \frac{1}{\cos 2c} w_1$$

$$w_3 = \frac{\sin c}{\cos 3c \cdot \cos 2c} \cos e = \frac{\cos c}{\cos 3c} w_2$$

$$w_4 = \frac{\sin c}{\cos 4c \cdot \cos 3c} \cos e = \frac{\cos 2c}{\cos 4c} w_3$$

. . . .

$$w_n = \frac{\cos (n-2)c}{\cos nc} w_{n-1}$$

Wendet man die Formel an:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\,\cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

schreibt in die Formeln für w_1; w_2; w_3 ... w_n von w_3 an bis w_n für α nach und nach die Werthe c, $2c$, $3c$, ... $(n-2)c$ für β immer den Werth $2c$ und dividirt jedesmal Zähler und Nenner durch den Zähler, so erhält man

$$w_1 = w_1$$

$$w_2 = \frac{1}{\cos 2c} w_1$$

$$w_3 = \frac{1}{\cos 2c - \sin 2c\;tg\,c} w_2$$

$$w_4 = \frac{1}{\cos 2c - \sin 2c \cdot tg\,2c} w_3$$

$$w_5 = \frac{1}{\cos 2c - \sin 2c \cdot tg\,3c} w_4$$

. . . .

$$w_n = \frac{1}{\cos 2c - \sin 2c \cdot tg(n-2)c} w_{n-1}$$

Da nun *cos* ein ächter Bruch ist, so ist $w_2 > w_1$; in w_3 ist der Nenner kleiner als in w_2, daher ist $w_3 > w$, und da die Tangenten in allen folgenden Ausdrücken wachsen, die Subtrahenden der Nenner also immer gröfser, folglich die Nenner selbst immer kleiner werden, so ist jeder folgende Weg der Sonne im Aequator immer gröfser als der in gleicher Zeit zuvor zurückgelegte Weg derselben.

7. Wenn also die ad 5 und 6 gedachte mittlere Sonne S' die Ekliptik gleichförmig durchläuft, so durchlaufen deren Projectionen den Aequator ungleichförmig, und es ist auch diese Sonne zur Zeitbestimmung nicht anwendbar. Nur eine eingebildete zweite, eine dritte Sonne S'' welche die Ekliptik zwar ungleichförmig, aber so durchläuft, dafs deren Projectionen auf den Aequator in gleichen auf einander folgenden Zeiten gleich weit von einander abstehen, oder was dasselbe ist, eine Sonne S'', die den Aequator gleichförmig durchläuft, ist es, welche die Zeit bestimmen kann.

Geht man auf die Formel zu Fig. 295 zurück

$$tg\,FA' = tg\,FA\;\cos e$$

so ist für $FA = 90°$, $tg\,FA = \infty$ folglich auch $tg\,FA' = \infty$ und $FA' = 90°$. Im Sommerpunkt also culminirt die mittlere Sonne S' mit deren Projection S'' auf den Aequator zu einerlei Zeit. Für $FA' = 180°$ nämlich im Herbstpunkt, wo die mittlere Sonne S' mit deren Projection S'' in einerlei Punkt zusammenfällt, und im Winterpunkt ($FA' = FA = 270°$) culminiren beide eingebildete Sonnen wieder in einerlei Zeit. Auf diese Eigenschaft der Uebereinstimmung beider Sonnen in vier Hauptpunkten gründet sich die Annahme der eben gedachten dritten Sonne S''.

8. Die Bestimmung der gleichförmig erforderlichen Zeit geschieht nun folgendermafsen: die wahre Sonne S, welche sichtaar die Ekliptik ungleichförmig durchläuft, deren beide von der grofsen Axe AP (Fig. 17, pag. 15) geschiedene Hälften PFH und AHP aber in gleichen Zeiten, jede Hälfte in einem halben Jahre zurückgelegt werden, giebt in dem Lauf von P über F, A, H bis wieder zu P die Zeit des Jahres an. Die erste mittlere in der Ekliptik gleichförmig sich bewegende Sonne S' trifft mit der wahren Sonne S in den Absiden P und A zusammen, in allen anderen Punkten stehen beide auseinander. Die dritte, die zweite mittlere Sonne S'', welche die gleichförmige, die mittlere Zeit bestimmt, bewegt sich im Aequator gleichförmig, trifft mit der zweiten Sonne S' in den Nachtgleichenpunkten F und H zusammen, und in den Wendepunkten a und b (Fig. 17), dem Sommerpunkt und dem Winterpunkt culminiren sie beide in einerlei Zeit.

Hierbei ist noch festzuhalten, dafs die Punkte F, a, H, b jährlich um 50,1 Bogensecunden von Ost nach West der Erde entgegenrücken, so dafs Frühlings- und Herbstpunkt von der kleinen Axe, und Sommer- und Winterpunkt von der grofsen Axe der Ekliptik immer mehr sich entfernen.

Die um ein Geringes aber während des Jahres veränderlich im Abstande verschiedenen Orte der sichtbaren Sonne S von der eingebildeten dritten Sonne S'' veranlassen den Unterschied zwischen der von den Sonnenuhren richtig angegebenen wahren Sonnenzeit und der von den Pendeluhren angebenen mittleren

Sonnenzeit. Diese Unterschiede sind für das ganze Jahr in jedem Hauskalender tabellarisch geordnet aufgeführt.

9. Die astronomische mittlere Zeit, das Sonnenjahr zu 365,242255 ganz gleichen Tagen zu 24 Stunden ist also unsre Uhrzeit. Das bürgerliche Jahr kann aber nur **ganze Tage** haben: bekanntlich hat das Gemeinjahr 365 Tage, der Decimalbruch wird zunächst ausgeglichen, dafs alle vier Jahr ein Jahr (Schaltjahr) von 366 Tagen eingeschaltet wird; da aber der Decimalbruch kleiner als $\frac{1}{4}$ ist, so geschieht eine fernere Ausgleichung dadurch, dafs man alle 100 Jahre ein Schaltjahr wiederum in ein Gemeinjahr von 365 Tagen umwandelt.

Diese Einrichtung macht den bekannten Kalender aus, dessen Richtigkeit wir allein der in ihren Erkenntnissen soweit gediehenen astronomischen Wissenschaft verdanken. Der Art.: **Kalender**, der auf den vorstehenden Aufsatz sich gründet, wird auch kurz das Historische der mathematischen Chronologie enthalten und erhellen, dafs die Unrichtigkeit und oft erforderlich gewesene Aenderung der Zeitrechnung in noch zu mangelhaften Standpunkten der Sternkunde ihren Grund hatte.

Chronometer (χρονος die Zeit, μετρειν messen) **Zeitmesser.** Die Zeit ist ein einfacher Begriff wie der Raum, sie ist daher nicht zu definiren, denn diejenigen Definitionen, welche die Philosophie davon giebt, passen auch auf andere Dinge. Man hat ein Bild von der Zeit, wenn man sich eine gerade Linie vorstellt; nach einer Richtung, der Vergangenheit hin, unabsehbar, an deren Ende der uns unbekannte Anfang liegt; oder vielmehr, da solcher Anfang ganz undenkbar ist, nach der Vergangenheit hin unendlich. Der Endpunkt der geraden Linie ist die Gegenwart, welche mit jedem folgenden Augenblick wieder in die Vergangenheit tritt, so dafs dieser Gegenwartspunkt eine stetige Bewegung macht, und die Linie verlängert; die jedem Zeitaugenblick zugehörenden verschiedenen Begebenheiten können in rechtwinkligen Ordinaten verzeichnet gedacht werden.

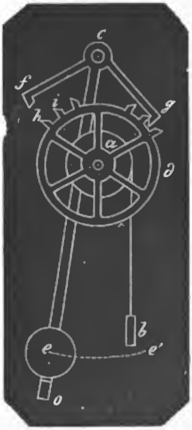
Die in dem vor. Art. erklärte Sternzeit und die mittlere Sonnenzeit mufs in deren Theilen: Tag, Stunde, Minute, Secunde in jedem Augenblick angegeben werden können, wenn jene für die Astronomie, diese für das bürgerliche Leben von Nutzen sein soll. Da der zu messende Gegenstand in stetiger Bewegung ist, so kann ein Maafsstab nicht angelegt werden wie bei einer ruhenden Raumgröfse: das Maafs mufs selbst beweglich sein; Bewegung erfolgt aber nur mittelst einwirkender Kraft; eine solche ist an jedem Ort der Erdoberfläche und in jedem Zeitaugenblick unmittelbar in der Schwerkraft gegeben; und in der That sind die ältesten C. auf diese Kraft in den Wasseruhren und Sanduhren gegründet, indem Wasser oder Sand durch kleine Oeffnungen in Gefäfse fiel, die so geaicht waren, dafs deren Anfüllung in einer bestimmten Zeit geschah. Wenn nun auch kleine Gefäfse oder grofse Gefäfse mit Theilstrichen Messung von kleinen Zeiten gestatten, so war doch die Abwartung dieser C., damit die Gefäfse rechtzeitig ausgegossen und gefüllt würden, umständlich und auch, abgesehen von den Temperatur-Einflüssen, unzuverlässig.

Gegenwärtig wird die Schwerkraft auf Gewichte angewendet; das Gewicht wird um eine Schnur befestigt, die um eine Walze geschlungen, diese umdreht, womit zugleich ein Räderwerk in Bewegung gesetzt wird. Bekanntlich fällt ein Gewicht mit jedem folgenden Augenblick schneller, die Walze wird also mit Beschleunigung umgedreht, was für eine gleichmäfsig nothwendige Zeitmessung nicht pafst. Erst durch die Entdeckung Galilei's im 17. Jahrhundert, dafs das Pendel isochrone Schwingungen macht, und Huygens Anwendung davon zu periodischen Hemmungen des fallenden Gewichts ist man zu Gewichts-Chronometern gekommen. Es ist äufserst merkwürdig, dafs für eine und dieselbe Maschine der menschliche Geist eine und dieselbe Kraft, die Schwerkraft in dem Gewicht als bewegende Kraft und in dem Pendel als das Entgegengesetzte, als Hemmung der Bewegung wirksam zu sein nöthigt. Die Einrichtung ist folgende:

Es sei a die Walze, um die eine Schnur mehrmals umgewunden ist, an welcher das Gewicht b hängt und die Walze umzudrehen strebt; mit der Walze a ist ein Stirnrad d verbunden. An der mehr oberhalb befindlichen Axe c, die ‡ der Walzenaxe liegt, ist ein Pendel ce aufgehängt, welches zur Seite der Walze Oscillationen macht, und mit der Pendelaxe ist der Winkel fcg fest verbunden. Dieser endigt in 2 Haken, welche abwechselnd in die Radzähne greifen, der Haken g, wie gezeichnet, wenn das Pendel seine weiteste Lage links hat und der Haken f, wenn das Pendel am weitesten rechts ausschlägt.

Während nämlich das Mittel der Pendellinse aus e nach e' schwingt, löst der Haken g von links nach rechts aus dem

Fig. 296.



Zahn sich aus, und der Haken *f* dreht sich, nachdem das nun frei wirkende Gewicht *b* um eine kleine Länge gefallen ist, und die Walze so viel nach rechts umgedreht hat, zwischen die Zähne *i* und *h*

Fig. 297.



Da das Pendel seine Schwingungen in gleichen Zeiten macht, so wird auch immer in gleichen Zeitabständen ein Zahn ausgelöst, und ein Zahn ergriffen, und die Welle in gleichen Zeitabständen gedreht und in Ruhe versetzt, das Gewicht *b* fällt also, wenn ein Zahn ausgelöst ist, immer nur während einerlei Zeit, und da das Fallen immer von der Ruhe aus stattfindet, immer nur um einerlei Weg, den zugleich der Walzenumfang in einem Bogen zurücklegt. Steht nun mit der gleichmäfsig sich umdrehenden Welle ein Räderwerk in Verbindung, welches auf Zeiger wirkt, die Stunden, Minuten und Secunden angeben, so hat man in der obigen Maschine ein C.

Es ist noch zu erwähnen, dafs das Pendel durch die Reibung der Axenzapfen in den Lagern und die Luftwiderstände nach und nach zum Stillstand kommen würde, weshalb demselben immer ein kleiner Impuls von Neuem gegeben werden mufs, der die gedachten Widerstände jedesmal aufhebt, und es wird dies auf verschiedene Weise bewirkt. Nach Fig. 296 und 297 geschieht dies dadurch, dafs wenn der Winkelarm *g* nach der Richtung des Pfeils *km* auslösend sich dreht, und den Zahn bei seinem Bestreben zur Bewegung nach dem Pfeil *hn* vermöge des Gewichts *b* schon in die gezeichnete Lage (Fig. 297) hat kommen lassen, der Zahn *h* den Arm *g* bei dessen Bewegung nach *km* um den Drehpunkt *c* längs dessen schräger Fläche *kl* schiebend und hebend unterstützt. Ein Gleiches geschieht bei dem Arm *f* während dessen Auslösung.

Ein zweites C. wird noch construirt, das Taschenchronometer, wo man statt der Schwerkraft die Elasticität einer gespannten Stahlfeder als bewegende Kraft anwendet, und deren Wirkung anstatt durch das Pendel durch die sogenannte Unruhe; einen mit Spiralfeder versehenen Schwungring gehemmt wird.

Es sei *a* eine hohle um die mittlere Spindel drehbare Trommel; an der Spindel ist eine Stahlfeder befestigt, diese mehrere Male, als hier gezeichnet, umwunden und mit dem anderen Ende in *b* gegen die innere Trommelwandung genietet. Mit

Fig. 298.

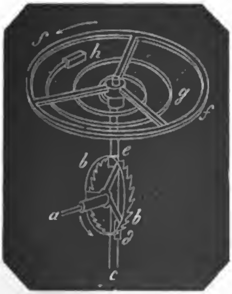


dem Druck dieses äufseren Endes der Feder gegen die Trommel zu deren Umdrehung ist die bewegende Kraft des C. hergestellt. Bei den bekannten Spindeluhren ist um die äufsere etwas hohe Trommel eine Stahlkette gewickelt, und diese über die Schneckentrommel geleitet, welche durch den Zug der Kette umgedreht wird. Bei den Cylinder- und Ankeruhren ist diese Kette nicht vorhanden, und dafür einfacher auf eine der beiden Trommelebenen ein Stirnrad gelegt, welches die Bewegung fortpflanzt. Zuerst ist die Feder am gespanntesten, die Bewegung würde also anfangs am schnellsten geschehen, und nach und nach im-

mer langsamer werden, daher ist auch hier eine regulirende Hemmung nöthig.

Diese Hemmung besteht darin, dafs die letzte Welle *a* des Räderwerks mit einem Steigrade *b* versehen ist, in dessen Zähne

Fig. 299.



wechselsweise die Flügel *d*, *e* der senkrechten Spindel *c* eingreifen. An das obere Ende der Spindel ist der metallene Schwungring *f*, die Unruhe, mit Armen befestigt, und eine feine Spiralfeder *g* mit einem Ende an dessen Nabe genietet und mit dem anderen Ende durch einen Stift *h* gesteckt, der mit dem Gehäuseboden verschiebbar befestigt ist.

Wenn die Betriebsfeder (Fig. 298) mittelst des Räderwerks die Welle *a* mit dem Steigrade *b* nach der Pfeilrichtung umdreht, so trifft ein unterer Sperrzahn den Flügel *d*, wodurch die Spindel *c* mit der Unruhe *f* nach deren Pfeilrichtung sich bewegt und zugleich den Flügel *e*, der einen rechten Winkel mit dem Flügel *d* bildet, zwischen zwei obere Zähne des Steigrades einführt, und die weitere Bewegung des Steigrades hemmt. Durch die Drehung der Unruhe wird nun die Spirale *g* zusammengezogen, und wenn die Unruhe einen Bogen von etwa 90° zurückgelegt hat, ist die Spannung der Feder *g* so grofs, dafs sie die Kraft der Hauptbetriebsfeder (Fig. 298) übertrifft. Hierdurch bleibt die Unruhe nicht allein stehen, sondern sie wird gezwungen, nach entgegengesetzter Richtung umzulaufen, wobei sie für die Beschreibung eines hin reichend grofsen Bogens durch die Schwungkraft ihrer verhältnifsmäfsig grofsen Masse unterstützt wird. Mit dieser Bewegung läfst der Flügel *e* den Zahn los und der Flügel *d* dreht sich vor den folgenden unteren Zahn, den er hemmt, der ihn aber durch den von der Hauptbetriebsfeder empfangenden Druck wieder zurückschiebt, und die Unruhe wiederum zur entgegengesetzten Drehung veranlafst; und so geht das abwechselnde Spiel der Hemmung während des Ganges des C. von Statten.

Wie bei dem Gewichts-Chronometer Bewegung und Hemmung vermöge der Schwerkraft geschieht, so hier beides durch Elasticität von Federn.

Mit den Hemmungen sind zugleich die Regulirungen der C. verbunden. Je länger ein Pendel ist, desto langsamer schwingt es, desto weniger oft in einerlei Zeit geschehen die einzelnen Hemmungen und die einzelnen gleich grofsen Fortrückungen der Walze, des Räderwerks und der Zeiger. Dasselbe ist mit der Spiralfeder *g*, Fig. 299 der Fall: je länger sie ist, desto gröfsere Bogen beschreibt die Unruhe, und desto langsamer geschehen die einzelnen Hemmungen des Steigrades. Geht also ein C. nach, so mufs das Pendel oder der schwingende Theil der Feder verkürzt werden; geht das C. vor, so sind beide zu verlängern.

Zu diesem Zweck befindet sich unter der Pendellinse, Fig. 296, die Schraubenmutter O, mit welcher die Linse und mit dieser der Schwerpunkt des Pendels auf- und niedergeschraubt, also das Pendel verkürzt oder verlängert werden kann. Beim Taschenchronometer geschieht die Längen-Aenderung der Spirale mit dem Uhrschlüssel durch den Mittelstift der Stellscheibe, mit welcher die Klemme *h* vor- und zurückgeschoben werden kann.

Mit diesem Aufsatz hat nur das Grundprincip bei Construction des C. gegeben werden sollen, ein Weiteres im Art.: Compensation.

C.rcularbewegung s. v. w. Centralbewegung s. Bewegung No. 2.

Circummeridianhöhen sind die nahe dem Meridian genommenen Höhen eines Gestirns. Aus den beobachteten gleich grofsen Höhen des Gestirns vor und nach dessen Culmination und dem genau gemessenen Abstand der Zeit zwischen beiden Beobachtungen findet man in dem Mittel dieser Zeit den Zeitpunkt, in welchem der Durchgang des Gestirns durch den Meridian des Orts stattgefunden hat.

Circumpolarsterne sind dem Wortlaut nach alle Gestirne, denn alle scheinen um die Pole sich zu drehen. Man bezeichnet aber damit diejenigen Fixsterne die dem Beobachtungsort nie untergehen, indem sie dem Pole so nahe sind, dafs deren untere Culmination noch über dem Horizont des Beobachtungsortes stattfindet.

Orte im Aequator haben keine C.; für die Erdpole ist jeder zu derselben Himmelshalbkugel gehörende Stern ein C. Je näher ein Ort dem Pole liegt, desto mehr C. hat er aufzuweisen, weil sein Horizont einen um so gröfseren Winkel mit dem Pole bildet, eine um so gröfsere Polhöhe hat.

Der dem Nordpol zunächst stehende Fixstern ist der Polarstern, er befindet sich gegenwärtig 1° 35′ vom Pol entfernt, für Orte im Aequator culminirt er also in einer Höhe von 1° 35′, und geht eben so tief unter; für Orte von 2 × 1° 35′ = 3° 10′ nördliche geographische Breite ist er der einzige C., und zwar tangirt er bei seinem unteren Durchgang durch den Meridian den Horizont.

Die C. sind für die Astronomie und die Geographie von gröfster Wichtigkeit, denn man erfährt durch sie die Polhöhe oder geographische Breite des Beobachtungsorts, indem man die Höhen, deren oberen und deren unteren Culmination beobachtet, und von beiden Höhen das Mittel nimmt, welches die Polhöhe angiebt. Ferner findet man durch die C. die richtige Mittagslinie des Orts; denn die Zeit zwischen der oberen und der unteren Culmination eines C. beträgt genau die Hälfte der Zeit, in welcher eine obere oder eine untere Culmination zum zweitenmal wiederkehrt (der Sterntag), so dafs danach die Linie des Beobachtungs-Instruments mittelst mehrerer Beobachtungen rectificirt werden kann.

Wenn nämlich zwischen der oberen und der unteren Culmination eine gröfsere Zeit liegt als zwischen der eben gedachten unteren und der zunächst folgenden oberen Culmination, so hat die lothrechte Ebene der Axe des Instruments zuerst mehr als den Halbkreis der Bahn des C. abgeschnitten, die Ebene ist nicht nach dem Pol, sondern nach rechts von demselben gerichtet, und das Instrument mufs so weit nach links gewendet werden, dafs die senkrechte Axenebene auf den Pol trifft, und die Axe die Mittagslinie angiebt.

Coefficient ist in der niederen Arithmetik die bekannte Zahl als Factor vor der Unbekannten: in ax, by^2 z. B. sind a, b als Factoren der Unbekannten x, y^2 deren C. Bei Unbekannten ohne bekannten Factor, wie z, x^3, ist der C. = 1. In der Analysis sind C. die unveränderlichen bekannten oder unbekannten Gröfsen, wenn sie Factoren der Veränderlichen sind. Soll $\sqrt{a^2 + x^2}$, wo a constant, x veränderlich ist, in eine Reihe nach fortlaufenden Potenzen von x entwickelt werden so setzt man

$$\sqrt{a^2 + x^2} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots$$

wo A, B, C, D... unbekannte noch zu bestimmende von x unabhängige also unveränderliche Gröfsen sind; sie heifsen unbestimmte Coefficienten, und auch A gehört dazu, indem man A mit $x^0 = 1$ multiplicirt denkt.

Cofunctionen sind in der Trigonometrie die Functionen der Complementswinkel, also der Cosinus, die Cotangente, die Cosecante und der Cosinus versus.

Cohärenz ist die Kraft, mit welcher die gleichartigen Massentheilchen einander sich anziehen, und dadurch zu dem Körper sich gestalten (s. Adhärenz und den folgenden Art.).

Cohäsion, die Wirkung der Cohärenz (vergl. Affinität, Anziehung und Atom). Die Naturphilosophen haben sich viel mit den Ursachen der C. beschäftigt und Hypothesen dafür aufgestellt. Diese sind hier nicht so nothwendig, als für Erscheinungen, deren Gesetze zu erforschen von der gröfsten Wichtigkeit ist; als: die Bewegung der Weltkörper, die Wirkungen der Electricität u. s. w., deren Gesetze nicht eher aufzufinden waren, als bis man Hypothesen zu Grunde legte, die mit den Erscheinungen übereinstimmend sich allgemein bewährten, ohne dafs wir dennoch wissen, ob sie richtig sind.

Man nimmt an, dafs die C. eine gleiche Ursach mit der Attraction habe, und auch dafs beide Naturkräfte verschieden seien. Ersteres ist mir deshalb wahrscheinlicher, weil ich annehme, dafs der Schöpfer zu seinen Zwecken die möglichst einfachen Mittel anwendet. Die Grade der Attraction (s. d.), der Anziehung in der Ferne werden bestimmt durch die Gröfse der Masse in directem, und durch die Quadrate deren Entfernungen in indirectem Verhältnifs. Wollte man nun annehmen, dafs die Atome, welche durch die C. zu einem Körper sich gestalten, in unmittelbarer Berührung, also in der Entfernung = Null sich befänden, so würde die Gröfse der Anziehung überall unendlich grofs sein, alle Körper würden also einerlei Festigkeit haben.

Die nicht hoch genug zu schätzende Atomentheorie (s. Atom und die diesem folg. Art.) hebt Annahme und Schlufs auf: die Atome berühren sich nicht; sie ziehen sie an bis zu einer Entfernung, in der sie von einander verbleiben, die in Verhältnifs zu der Kleinheit ihrer Masse vielleicht sehr bedeutend ist und die, Vernunftschlüssen nach, abhängig ist von der jedem Stoff eigenthümlich zukom-

menden Gröfse einer als abstofsende Kraft wirkenden Wärme-Atmosphäre, die jedes einzelne Atom umgiebt.

Diese verschiedenen Abstände der Atome in Körpern verschiedenen Stoffs machen die verschiedenen Festigkeiten der Körper aus. Körper, um deren Atome nur geringe Wärme-Atmosphären sich befinden, sind fest, wie Eisen, Stein; wird ihnen eine gröfsere Wärmemenge zugeführt, so nimmt diese die um die Atome befindlichen leeren Räume ein, diese erweitern sich, während die Atome selbst unverändert bleiben; die Atome werden auseinandergerückt, die Festigkeit des Körpers wird vermindert, er wird weich, später flüssig und luftförmig. Eisen bedarf einer bedeutend gröfseren Menge Wärme um flüssig zu werden, als Zink; da nun die Atomgewichte beider Stoffe etwa wie 7:8 und deren Atomvolum (Atom + leerer Raum) etwa wie 5:6 sich verhalten, so kann man sich vorstellen, dafs die Atome selbst beim Eisen von gröfserem Umfang als beim Zink sind, so dafs die Eisenatome näher an einander liegen, als die Zinkatome, was auch mit dem Verhältnifs der Festigkeit beider Stoffe übereinstimmt, und dafs mithin für das Eisen eine bedeutend gröfsere Wärme erforderlich ist, als für das Zink, um in beiden Stoffen die Atome um gleich viel auseinander zu bringen, d. h. um beide Stoffe in den Zustand einerlei Festigkeit, in den Zustand der Flüssigkeit zu bringen.

Von der Gröfse der C. sind die Aggregat-Zustände (s. d.) der Körper abhängig. Körper sind f e s t, t r o p f b a r - f l ü s s i g und l u f t f ö r m i g; zwischen den ersten beiden Hauptzuständen noch ein mittlerer, der weiche, mufsige; zwischen beiden letzten ein mittlerer, wie der Wrasen, der beim Kochen von Wasser, oder der Wasserrauch, der uns in der Atmosphäre als Wolke erscheint.

Die luftförmigen Körper haben nicht abstofsende Kraft in den materiellen Theilen, sondern, da sie in einem zusammengeprefsten Zustande sich befinden, nur das Bestreben, sich in die dem Gase eigenthümliche uns unbekannte geringere Dichtigkeit zu versetzen, was ihre Expansibilität ausmacht. Bei einer permanent abstofsenden Kraft der Theile müfste die Atmosphäre das ganze Weltall ausfüllen.

Das Zerfliefsen der tropfbar flüssigen Körper liegt darin, dafs ihre C. von der Schwerkraft unsres Erdkörpers überwunden wird; daher auch das langsamere Zerfliefsen dickflüssiger Körper von gröfserer C. Beim freien Fall flüssiger Körper von geringem Volum dagegen kommt die C. zur Erscheinung, weil alle Theile des Körpers einerlei Geschwindigkeit haben. Der Regen fällt in Tropfen, je kleiner diese sind, desto kugeliger sind sie; je gröfser, desto mehr Geschwindigkeit hat fortdauernd der untere Theil des Tropfens gegen den oberen, der Tropfen ist also in senkrechter Richtung länglich. Gröfsere Massen fallen in noch längeren Formen, in S t r ö m e n.

Plateau hat auch bei einer gröfseren Masse Flüssigkeit die C. von der Schwere zu isoliren gelehrt: Oel in ein Gefäfs gegossen, fliefst über den Boden, bis es eine horizontale Oberfläche angenommen hat. Wasser darüber gegossen, durchdringt das Oel, dieses steigt in die Höhe, und lagert sich auf die Oberfläche des Wassers. Denn die Schwere übt auf jedes Massenelement gleich grofsen Einflufs, in jedem Molekül Wasser ist aber mehr Masse als in dem gleich grofsen Molekül Oel (Wasser ist schwerer als Oel), folglich ist die Wirkung der Schwere auf das Wasser gröfser als auf das Oel.

Uebergiefst man dagegen das Oel mit Weingeist, so bleibt dieser über dem Oel, weil er leichter als Oel ist. Tropft man nun nach und nach Wasser in den Weingeist, so entsteht eine immer schwerere Mischung; diese kann der Schwere des Oels beliebig nahe gebracht werden, sie erhält also mit dem Oel immer näher einerlei Fallbestreben; d. h. das Oel wird immer weniger von der Schwerkraft der Erde afficirt, folglich wird die C. des Oelkörpers immer unabhängiger von der Schwerkraft, immer selbstständiger, und sie macht sich dadurch geltend, dafs sie den Oelkörper hebt, und ihn nach und nach zu einer Kugel gestaltet.

Man kann hierbei die C. durch Centrifugalkraft zum Theil wieder aufheben, indem man durch die Oelkugel einen Draht mit Scheibe führt, und diesen umdreht, wodurch die Kugel in Rotation versetzt wird, und sich oben und unten abplattet; bei vermehrter Schnelligkeit der Scheibe löst sich ein Ring von der Oelkugel ab, der ebenfalls rotirt, wie der Ring des Saturns.

Cohäsionskraft ist Cohärenz.

Collective Gröfse od. d i s c r e t e G r ö f s e (colligĕre sammlen, discernĕre unterscheiden, zertheilen) s. v. w. Zahl. Für die erste Bezeichnung ist die Einheit, für die zweite die Ganzheit zu Grunde gelegt: der erste Name besagt eine Gröfse, die aus Einheiten zusammengelesen oder aufgesammlet wird; der zweite Name eine Gröfse, die in Einheiten zu unterscheiden,

zu zertheilen ist. Beiden Bezeichnungen gegenüber steht die continuirliche oder concrete Gröfse, welche die Gröfse im Raum ist.

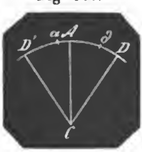
Collectivglas ist jedes Glas, welches die Lichtstrahlen sammlet und in einen Punkt vereinigt, also jedes auf einer oder beiden Oberflächen convexe Glas (vergl. Brennglas 5). Man versteht unter C. aber auch besonders das in einem zusammengesetzten Mikroskop befindliche Zwischenglas, welches die durch das Objectivglas convergirenden Strahlen noch mehr convergirt, um das von dem Objectiv hervorgebrachte Luftbild zu verkleinern, in seinen Umrissen schärfer zu erhalten, das Gesichtsfeld des Oculars zu vergröfsern, und die nachtheilige Farbenzerstreuung aufzuheben.

Collimation (collimare oder collineare nach gerader Linie richten, zielen) bedeutet das Zusammenfallen zweier Richtungslinien, nämlich der wirklichen Linie zwischen dem Auge und dem Object mit der Linie, in welcher man nach demselben Objecte zielt (visirt); und zwar bei einem Winkel-Instrument das Zusammenfallen der Visirlinie mit dem von der Alhidade bezeichneten richtigen Kreistheil des Limbus. Findet diese C. nicht statt, so wird der gemessene Winkel unrichtig abgelesen: das Instrument hat einen Collimationsfehler.

Collimationsfehler, ein Fehler aus Mangel der Collimation bei einem Winkelinstrument. Wenn bei Messung eines Winkels beide Schenkel einzeln visirt werden, so heben sich beide C. einander auf. Wenn aber nur ein Schenkel visirt wird, indem der Nullpunkt des Instruments auf eine Reihe von Beobachtungen fixirt ist, entweder in der vertikalen (nach dem Zenith), oder in der Horizontalebene, z. B. in der Mittagslinie, dann kann der Nullpunkt aus seiner festgestellten Lage gerückt sein, und es ist die Messung auf einen C. zu untersuchen. Es geschieht dies durch Repitition (vergl. Borda'scher Kreis S. 394).

Es sei AC die Axe des Instruments,

Fig. 300.



A der Nullpunkt, CD die Visirlinie nach einem Stern. Vermuthet man, dafs Bogen AD in Folge eines C nicht genau angegeben wird, so dreht man das Instrument um, wo dann CD in CD' fällt. Fixirt man in dieser Lage das Instrument, dreht das Fernrohr aus der Linie CD' wieder in die Visirlinie, und diese fällt in d, so dafs $Ad < AD'$, so ist offenbar nicht AC die richtige Verticale, sondern aC in derjenigen Richtung, dafs $D'a = da$; Bogen $AD' = AD$ als Zenithdistanz des Sterns ist also unrichtig abgelesen: sie ist

$$\frac{dD'}{2} = \frac{Ad + AD}{2}$$

Collimationslinie, die in den beiden vor. Art. angeführte Visirlinie.

Combination (Arithm.) ist die Zusammenstellung einer Anzahl aus mehreren gegebenen gleichartigen Gröfsen, welche hier Elemente genannt und in der Regel durch Buchstaben, auch wohl durch Ziffern ausgedrückt werden.

Es seien

$$a,\ b,\ c,\ d,\ e \ldots.$$

die gegebenen Elemente, so sind

$$a,\ ab,\ cba,\ dacb,\ abced \ldots.$$

$$aa,\ aaa,\ abab,\ aabbbc \ldots.$$

Combinationen. Bei den C. der ersten Reihe sind alle Elemente von einander verschieden, diese C. heifsen C. ohne Wiederholung; bei den C. der zweiten Reihe kommen einzelne Elemente mehrere Male vor, diese C. heifsen C. mit Wiederholung, und es können die gleichen Elemente wie Potenzen geschrieben werden: also $a^2 = aa$; $a^3 = aaa$; $a^2b^2 = aabb = abab$ u. s. w. Die Anzahl der gleichen Elemente heifst der Wiederholungsexponent.

Die C. werden nach der Anzahl der combinirten Elemente, welche der Exponent der C. heifst, in Klassen getheilt. Ein einzelnes der gegebenen Elemente ist eigentlich keine C., sie heifst jedoch C. der ersten Klasse. Union, wie $a, b, c, d \ldots$, ihr Exponent ist $= 1$. Eine C. von 2 Elementen ($ab, bb, cd \ldots$) heifst C. der zweiten Klasse, Binion, deren Exponent ist $= 2$. Eine C. von 3 Elementen ($aaa, abc, \ldots$) heifst Ternion, eine C. von 4 Elementen Quaternion, von 5 Elementen Quinion, von 6 Elementen Senion u. s. w.

Eine C. heifst geordnet, wenn die Buchstaben in der Ordnung des Alphabets einander folgen; $abcd$, $aabb$, $abcc$ sind geordnete; bac, $dacb \ldots$. ungeordnete C. Eben so wird die Zusam-

menstellung sämmtlicher C. aus gegebenen Elementen lexicographisch geordnet.

C. die mit dem erten Buchstaben (*a*) anfangen, heifsen C. der ersten Ordnung. *aa*, *ab*, *ac*... sind C. der 2ten Classe erster Ordnung; *bbb*, *bbc*, *bcc*, *bcd*... sind C. der 3. Classe zweiter Ordn. u. s. w.

C. heifsen ähnlich oder einerlei Gattung, wenn sie in der Anzahl der Elemente und der Wiederholungen übereinstimmen, wie *aaa*, *bbb*; oder *abc*, *bcd*; oder *aabc*, *bbcd* u. s. w.

2. Combinationen ohne Wiederholungen.

So viele Elemente gegeben sind, so viele Klassen von C. sind möglich.

1 Element = *a*.

C. 1. Kl. = *a*.

2 Elemente = *a*, *b*.

C. 1. Kl.: *a*; *b*.
C. 2. „ *ab*.

3 Elemente = *a*, *b*, *c*.

C. 1. Kl.: *a*; *b*; *c*.
C. 2. „ *ab*, *ac*; *bc*.
C. 3. Kl.: *abc*.

4 Elemente = *a*, *b*, *c*, *d*.

C. 1. Kl.: *a*; *b*; *c*; *d*.
C. 2. „ *ab*, *ac*, *ad*; *bc*, *bd*; *cd*.
C. 3. „ *abc*, *abd*; *bcd*.
C. 4. „ *abcd*.

5 Elemente = *a*, *b*, *c*, *d*, *e*.

C. 1. Kl.: *a*; *b*; *c*; *d*; *e*.
C. 2. „ *ab*, *ac*, *ad*, *ae*; *bc*, *bd*, *be*; *cd*, *ce*; *de*.
C. 3. „ *abc*, *abd*, *abe*, *acd*, *ace*, *ade*; *bcd*, *bce*, *bde*; *cde*.
C. 4. „ *abcd*, *abce*, *abde*, *acde*; *bcde*.
C. 5. „ *abcde*.

Die Bildung sämmtlicher C. aus mehreren Elementen geht aus den vorstehenden C. hervor. Bei *n* Elementen hat die 1ste Klasse *n* C., die *n* Klasse eine C. Um die Anzahl der C. bei gegebenen *n* Elementen für die übrigen Klassen in Formeln auszudrücken, hat man folgende Betrachtung für die einfachste Ermittelungsweise:

Verbindet man jede der *n* Unionen mit jedem der übrigen $(n-1)$ Elemente, so erhält man $n(n-1)$ Binionen; in diesen ist nun jede Binion zweimal vorhanden, als: *ab*, *ba*; *bd*, *db* u. s. w.; mithin gehört zur 2ten Klasse nur die Hälfte sämmtlicher Binionen, nämlich

$$\tfrac{1}{2}n(n-1)$$

Verbindet man für die dritte Klasse jede dieser $\frac{1}{2}n(n-1)$ Binionen mit jedem der übrigen $(n-2)$ Elemente, so erhält man $\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)$ Ternionen; allein jede derselben ist 3mal vorhanden, als: $(ab)c$, $(ac)b$, $(bc)a$ u. s. w.; mithin ist die Anzahl der C. der dritten Klasse =

$$\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{3}n(n-1)(n-2).$$

Verbindet man für die 4te Klasse jede dieser Ternionen mit jedem der übrigen $(n-3)$ Elemente, so erhält man

$\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)(n-3)$ Quaternionen in diesen sind aber alle C. 4mal vorhanden, z. B. $(abc)d$, $(abd)c$, $(acd)b$, $(bcd)a$, und folglich gehören zur 4ten Klasse nur

$$\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{4}n(n-1)(n-2)(n-3)\text{ C.}$$

So fortgefahren, findet man für die *m*te Klasse

$$\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{4}\ldots\frac{1}{m}\,n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)$$

Die Anzahl der C. ohne Wiederholungen für *n* Elemente hat man demnach

$$\text{für die 1. Klasse} = \frac{n}{1}$$

$$\text{„ „ 2. „} = \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}$$

$$\text{„ „ 3. „} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}$$

$$\text{„ „ 4. „} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$$

. . . .

$$\text{„ „ } m.\text{ „} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ \ldots\ m}$$

Beispiele. 1. Wenn man aus einem Dominospiel (von 0 bis 6) von 28 Steinen 6 Steine zum Spiel zu ziehen hat, so kann man $\frac{28\cdot 27\cdot 26\cdot 25\cdot 24\cdot 23}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} = 376740$ verschieden zusammengesetzte Steine erhalten.

2. Jeder der 3 L'hombrespieler erhält aus dem Spiel von 40 Karten 9 Karten, 13 Karten bleiben als Talon. Jeder Spieler kann also

$$\frac{40\cdot 39\cdot 38\cdot 37\cdot 36\cdot 35\cdot 34\cdot 33\cdot 32}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9} = 273\,438880$$

verschiedene Spiele erhalten, und der Talon kann aus

$$\frac{40\cdot 39\cdot 38\ldots 31\cdot 30\cdot 29\cdot 28}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 10\cdot 11\cdot 12\cdot 13} = 12033\ 222880$$

verschieden zusammengesetzten Karten bestehen.

3. Combinationen mit Wiederholungen.

1 Element = *a*.

C. 1. Klasse = *a*.
2. „ = *aa*.
3. „ = *aaa*.
u. s. w.

2 Elemente = *a*, *b*.

C. 1. Klasse = *a*; *b*.
2. „ = *aa*, *ab*; *bb*.
3. „ = *aaa*, *aab*, *abb*; *bbb*.

C. 4. Klasse = *aaaa*, *aaab*, *aabb*, *abbb*; *bbbb*.

u. s. w.

3 Elemente: *a*, *b*, *c*.

C. 1. Klasse: *a*; *b*; *c*.
2. „ *aa*, *ab*, *ac*; *bb*, *bc*; *cc*.
3. „ *aaa*, *aab*, *aac*, *abb*, *abc*, *acc*; *bbb*, *bbc*, *bcc*; *ccc*.
4. „ *aaaa*, *aaab*, *aaac*, *aabb*, *aabc*, *aacc*, *abbb*, *abbc*, *abcc*, *accc*; *bbbb*, *bbbc*, *bbcc*, *bccc*; *cccc*.

u. s. w.

Die Anzahl aller Unionen oder C. 1ster Klasse bei *n* Elementen ist $= n$. Die Anzahl aller C. ohne Wiederholungen 2ter Klasse ist nach No. 2 $= \frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2}$ hierzu kommen *n* Verdoppelungen, giebt C. mit Wiederholungen 2ter Klasse =

$$\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} + n = \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}$$

Um die Anzahl der Ternionen zu finden, hat man die der Ternionen ohne Wiederholung $= \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ D. h. die Anzahl der Ternionen von der Form (abc). Hierzu kommen die Ternionen von der Form (a^3) in der Anzahl *n* und die von der Form (a^2b) in der Anzahl $n(n-1)$, indem *n* Elemente verdoppelt, mit jedem der übrigen $(n-1)$ Elemente verbunden werden. Die Anzahl der Ternionen mit Wiederholungen ist also:

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + n + n(n-1) = \frac{n}{6}(n^2 + 3n + 2) = \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

Eben so findet man die Anzahl der Quinionen, der Senionen u. s. w.

Die Anzahl der C. mit Wiederholungen für *n* Elemente hat man demnach

für die 1. Klasse $= \frac{n}{1}$

„ „ 2. „ $= \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}$

„ „ 3. „ $= \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$

„ „ 4. „ $= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$

. . . .

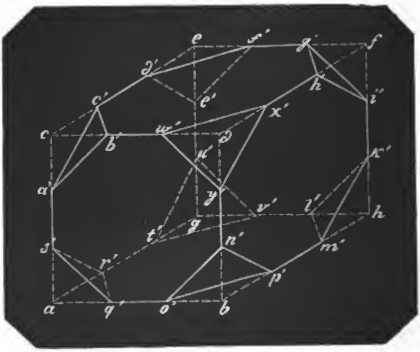
„ „ *m* „ $= \frac{n(n+1)(n+2) \ldots (n+m-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m}$

Beispiel. Mit 2 Würfeln sind $\frac{6 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 21$ verschiedene Würfe möglich, mit 3 Würfeln $\frac{6 \quad 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56$ Würfe.

Rechnet man dagegen die Würfe aufser den Paschen doppelt [1, 2 und 2, 1] so werden mit 2 Würfeln $6^2 = 36$, mit 3 Würfeln $6^3 = 216$ Würfe gemacht, indem hier die möglichen 36 Würfe zweier Würfel jeder mit den 6 Augen des 3ten Würfels zusammen treffen können.

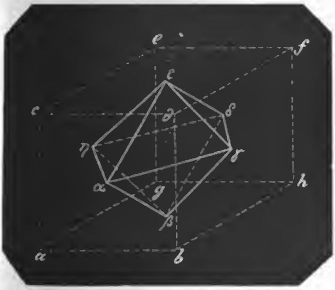
Combination (Kryst.) zusammengesetzte Form, ist die Vereinigung verschiedener einfachen Formen zu einem Krystall. Fig. 300 zeigt die C. eines

Fig. 301.



Hexaeders und Octaeders; die hier vorherrschende Form des Hexaeders ist punktirt vollständig dargestellt, die dreieckigen Flächen, welche die Ecken des Hexaeders abstumpfen, sind die Octaederflächen; vergröfsert man diese immer mehr, so entsteht aus ihnen das vollständige Octaeder und das Hexaeder verschwindet, wie dies Fig. 301 darstellt.

Fig. 302.



Nämlich bei fortdauernder gleichmäfsiger Verlängerung der Kanten fallen *a'b'* und *o'n'* in die Diagonale *ad*, die Kanten *q's'* und *w'y'* in die Diagonale *bc*, die genannten 4 Kanten schneiden sich in dem Mittelpunkt α, Fig. 301, d. h. sie verschwinden als eine Ecke α. Eben so verschwinden die Kanten *m'k'*, *x'y'*, *n'p'*, *h'i'* in dem Durchschnittspunkt γ der Diagonalen *dh* und *bf*, die Kanten *g'i'*, *u'r'*, *e'f'*, *k'l'* in dem Durchschnittspunkt δ der Diagonalen *eh* und *fg*, die Kanten *a'c'*, *l'u'*, *r's'*, *d'e'* in dem Punkt η, die Kanten *b'c'*, *g'h'*, *d'f'*, *w'x'* in dem Punkt ε, und die Kanten *q'v'*, *l'm'*, *o'p'*, *t'v'* in dem Punkt β. Diese 8 Durchschnittspunkte geben die 8 Ecken des neugebildeten Octaeders mit den 8 dreieckigen Flächen $\alpha\gamma\beta$, $\gamma\delta\beta$, $\delta\eta\beta$, $\eta\alpha\beta$; $\alpha\gamma\varepsilon$, $\gamma\delta\varepsilon$, $\delta\eta\varepsilon$, $\eta\alpha\varepsilon$. Das Octaeder hat die 3 Basen $\alpha\gamma\delta\eta$ mit den äufseren Ecken β, ε; $\gamma\varepsilon\eta\beta$ mit den äufseren Ecken α, δ und $\alpha\beta\delta\varepsilon$ mit den äufseren Ecken γ, η.

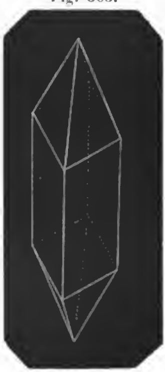
Man kann sich auch vorstellen, dafs sämmtliche 8 Octaederflächen Fig. 300 in ihren Ebenen nach allen Richtungen beliebig erweitert werden; alsdann schneiden sich die vier bei *c*, *e*, *f*, *d* befindlichen Flächen in einer über dem Quadrat *cefd* liegenden Ecke, die 4 bei *a*, *b*, *g*, *h* befindlichen Flächen in einer unter *abgh* liegenden Ecke, die 4 Flächen bei *a*, *b*, *c*, *d* in einer vor *abcd* liegenden Ecke u. s. w. Es entsteht ein Octaeder, welches die vorherrschenden Hexaederflächen umschliefst.

Eben so kann man durch Fortrückung der Hexaederflächen die Octaederflächen verdrängen. Entweder läfst man die Fläche *b' s' o' y'* bis in die Ebene *c' x' r' p'* sich ‖ mit sich selbst bewegen, wo sie ein Quadrat ist; die ihre parallele Fläche bis in die Ebene *d' h' m' t'* desgleichen zum Quadrat; die diesen angrenzenden Seitenflächen bis in die Ebenen *b' f' v' q'* und *g' w' o' l'*; ferner die obere und die untere Fläche bis in die Ebenen *a' e' i' y'* und *s' n' u' k'* und man erhält ein Hexaeder, dessen Flächen die Octaederflächen innerhalb berühren. Oder man verbreitet die Hexaederflächen bis zu den Durchschnittspunkten *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, wo dann das Hexaeder entsteht, welches die Octaederflächen umschliefst.

2. Durch die C. mehrerer einfachen Formen entsteht die c o m b i n i r t e F o r m; die zu derselben einfachen Form gehörenden Flächen heifsen g l e i c h n a m i g, die Flächen der anderen einfachen Form in Beziehung auf die der ersteren einfachen Form u n g l e i c h n a m i g. Durch Erweiterung gleichnamiger Flächen, bis dahin, dafs die ungleichnamigen Flächen gänzlich verdrängt werden, entsteht aus der combinirten Form eine einfache Form.

Man hat C., in welchen gleichnamige Flächen erweitert, keine vollständige Form geben, z. B. bei der C. der quadratischen Säule und des Octaeders, Fig. 302 wo die 4 Säulenflächen allein keine vollständige Form bilden können. Solche Flächen heifsen z u s a m m e n g e h ö r i g e F l ä c h e n.

Fig. 303.



Die aufgesetzten 8 Octaederflächen bilden gehörig verbreitet, ein vollständiges Octaeder. Die Kanten, in welchen die Flächen zweier verschiedenen Formen sich schneiden, heifsen Combinationskanten, wie Fig. 300 *b'c'*, in welcher die Octaederfläche *c'b'a'* und die obere Hexaederfläche sich schneiden. Die Ecken, in welchen die Flächen verschiedener Formen zusammentreffen, heifsen Combinationsecken, wie *b'*, *c'* u. s. w.

Es giebt Krystalle combinirter Form, in welchen die Combinations-Ecken und -Kanten abgestumpft sind; bei den Ecken findet immer eine schiefe, bei den Kanten selten eine gerade Abstumpfung statt.

Combinationsexponent (Arithm.) ist die Anzahl der Elemente in einer Combination (s. d. No. 1).

Commensurable Gröfsen sind solche, die ein gemeinschaftliches Maafs haben, also alle ganze Zahlen, weil diese die Einheit 1 zum Maafs haben, alle Brüche von gleichen Nennern; z. B. $\frac{1}{7}$, $\frac{4}{7}$ haben zum gemeinschaftlichen Maafs die Einheit $\frac{1}{7}$. Ferner incommensurable Gröfsen, wie $3\sqrt{5}$ und $7\sqrt{5}$, die $\sqrt{5}$ zum gemeinschaftlichen Maafs haben. Dagegen sind irrationale Zahlen wie $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ und $\sqrt{10} = \sqrt{5}\cdot\sqrt{2}$ nicht commensurabel, weil deren Factoren 3 und $\sqrt{5}$ kein gemeinschaftliches Maafs haben. Ist das Maafs zweier c. Gröfsen nicht die Einheit, so wird es auch gemeinschaftlicher Theiler genannt.

In der Potenz commensurabel heifst bei Euklid commensurabel im Quadrat, als $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$ die incommensurabel, aber in den Quadraten (2, 5) commensurabel sind.

Commutation oder **Commutationswinkel** s. d. Erklärung in dem Art.: Breite, astronomische. Die C. ist = dem Unterschied zwischen der heliocentrischen Länge der Erde und der des Planeten.

Compafs ist ein Winkelmefsinstrument, welches sich darauf gründet, dafs eine frei spielende Magnetnadel immer nach dem magnetischen Pol, einem bestimmten Punkt der Erde gerichtet ist, so dafs die Richtungen der Magnetnadel an Orten, von verschiedener geographischer Länge zu deren Pol sich verhalten wie die Meridiane zum Nordpol, in dessen Nähe der magnetische Pol liegt.

Die Anwendung des C. zu Vermessungen ist in dem Art. Boussole, wie nämlich der C. der Feldmesser und der Bergleute heifst, angegeben. Seine wichtigste Anwendung findet bekanntlich der C. in der Seeschifffahrt, denn bei genauer Kenntnifs der Abweichung der Magnetnadel (s. d.) von dem geographischen Meridian in jedem Ort der Länge und Breite, welche möglichst genau ermittelt worden, kann nach bestimmter Richtung gesteuert werden, daher dieser C. auch Schiffscompafs, Steuercompafs heifst.

Die Einrichtung des Schiffscompasses ist von der Boussole nur darin verschieden, dafs er der Schwankungen des Schiffs wegen frei aufgehängt, und dafs die freie Spielung der Nadel durch einschliefsende Flächen gesichert wird. Ferner ist der Rand nicht nur in 360 Grade getheilt, sondern die Nadel ist auch mit der Windrose belegt, einer Scheibe, die in 32 Hauptwindrichtungen oder Striche eingetheilt ist.

Der Azimuthalcompafs der Schiffer (s. d.) hat keine Windrose, und wird bei jedem beabsichtigten Gebrauch wie die Boussole auf ein Stativ gesetzt. Die eben gedachten speciellen Einrichtungen gehören in die Technik.

Compensation. Hierunter begreift man die C. oder Aufhebung von Fehlern, die bei dem Pendel durch Verlängerung und Verkürzung der Pendelstange und bei der Unruhe durch Aenderung der Spiralfederlänge mit der Vermehrung und Verminderung der Luftwärme entstehen, und wodurch die Uhr einen unregelmäfsigen also unrichtigen Gang hat. Vgl. Chronometer, von dem dieser Art. die Fortsetzung ist.

In dem Art. Ausdehnung, pag. 194 u. 195 hat man bei einer Temperaturänderung von 0° bis 100° C. die Ausdehnung des Messings durchschnittlich 0,0019; die des Stahls durchschnittlich 0,0012. Die Längenänderungen sind zwischen 0° und 100° von Grad zu Grad ziemlich constant; verbindet man daher Stahlstäbe mit Messingstäben in dem Längen-Verhältnifs 19 : 12, wie Fig. 303 angiebt, so wird der Fehler, der aus den Aenderungen der Lufttemperatur entspringt, compensirt.

An dem Aufhängepunkt *a* ist der horizontale Steg *bb* befestigt, zu beiden Seiten gehen die beiden Stahlstäbe *bc* senkrecht herab, an den Stegen *cd* die Messingstäbe *de* in die Höhe, von deren oberen Steg *ee* die Stahlstäbe *fg* wieder herab, von deren unteren Stegen *gh* die Messingstäbe *hk* wieder hinauf, und endlich von deren Steg *kk* der Eisenstab *lm* mit der Linse *m* wieder herab.

Bei Temperatur-Aenderungen der Luft verlängern sich die herabgehenden Stäbe *bc*, *fg*, *lm* nach unten, die hinaufgehen-

Fig. 304.



den Stäbe *de* und *hk* nach oben, und deren Verkürzungen geschehen nach den entgegengesetzten Richtungen. Die summarische Länge des Pendels, welche zur Aenderung kommt, ist mithin:

$$bc - de + fg - hk + lm$$

Die Aenderung, welche ein Eisenstab von der Länge l zwischen 0° und 100° Temperatur-Unterschied erleidet ist $0{,}0012 \times l$; bei 1° Temperaturänderung $= 0{,}000012 \times l$ und bei t° Temperatur-Aenderung $= 0{,}000012 \times t \cdot l$. Bei einem Messingstab sind diese Aenderungen $0{,}0019 \times l$; $0{,}000019 \times l$ und $0{,}000019 \times t \cdot l$.

Soll also für eine Temperaturänderung t eine vollständige C. eintreten, so mufs sein:

$$0{,}000012 \times t \cdot (bc + fg + lm) = 0{,}000019 \times t \cdot (de + hk)$$

oder reducirt:

$$12 \cdot (bc + fg + lm) = 19 \cdot (de + hk)$$

Setzt man nun die Entfernung
des Stegs bb von $ee = x$
„ „ ee „ $kk = y$
„ „ gg „ $cc = u$
des Linsenmittels m von $cc = s$
die Länge $bc = l$

so ist
$$de = l - x$$
$$fg = l - x - u$$
$$hk = l - x - y - u$$
$$lm = l - x - y + s$$

Nun soll also sein:

$$12(3l - 2x - u - y + s) = 19(2l - 2x - y - u)$$

woraus

$$14x + 7u + 7y + 12s = 2l$$

Setzt man die Zwischenräume $x = y = u$, so hat man

$$28x + 12s = 2l$$

oder

$$14x + 6s = l$$

Für ein Secundenpendel in Berlin ist *am* ziemlich genau 3′ 2″ preufs. Nimmt man $s = 3$ Zoll, die Höhe des Aufhängepunkts a über dem Steg $bb = 3$ Zoll, so ist $l = 3'\,2'' - 6'' = 2'\,8'' = 32''$

$$14 \cdot x + 18'' = 32''$$

woraus $x = 1$ Zoll, welcher von der Oberkante des oberen bis zur Oberkante des unteren Stegs zu nehmen ist.

Aus dieser Berechnung ist zu ersehen, dafs weniger als 3 niedergehende und 2 aufsteigende Stäbe nicht genommen werden können, wenn vollkommene C. eintreten soll, weil die Zwischenräume x, y, u sonst gar nicht stattfinden könnten.

Nimmt man einen Stahl, dessen Ausdehnungscoefficient $= 0{,}0013$ ist (pag. 195 giebt Berthoud 0,001375) so würde auch bei der Fig. 303 gezeichneten Construction keine vollkommene C. möglich sein, denn man erhält aus der Bedingungsgleichung:

$$13(3l - 2x - u - y + s) = 19(2l - 2x - y - u)$$

entwickelt

$$l + 12x + 6y + 6u + 13s = 0$$

welches unmöglich ist.

Für diesen Fall hätte man also 4 niedergehende und 3 aufsteigende Stäbe, erstere von Stahl, letztere von Messing zu construiren.

Die wie hier gezeichnet construirten Pendel heifsen der Gestalt wegen Rostpendel.

Fig. 305.



Will man einfachere Pendelstangen construiren, so mufs man ein Metall statt des Messings nehmen, welches eine stärkere Ausdehnung hat. Aufser dem Blei, welches seiner Weichheit wegen nicht anzuwenden ist, hat unter allen Metallen das Zink den gröfsten Ausdehnungs-Coefficient, den man nach pag. 196 im Mittel $= 0{,}0030$ nehmen kann.

Das einfachste Compensationspendel ist wohl Fig. 304: *ab* und *ef* sind eiserne Stäbe, *cd* ist ein Zinkstab. Bezeichnet man die Länge *af* mit l, *cd* mit h, so hat man die Bedingungsgleichung für vollständige C:

$$12(l + h) = 30h$$

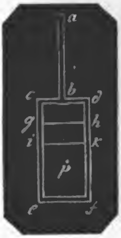
woraus

$$h = \frac{2}{3} l$$

Für das Secundenpendel $l = 38$ Zoll hat man $h = 25\frac{1}{3}$ Zoll.

2. Eine zweite C. geschieht mittelst Quecksilber nach Fig. 305: a ist der Aufhängepunkt des Pendels, an der eisernen

Fig. 306.



Stange *ab* ist der eiserne Rahmen *cdef* befestigt und in diesem befindet sich ein Glas *efgh*, welches bis *ik* mit Quecksilber gefüllt ist. Nahe der Mitte *p* der Quecksilberhöhe liegt d. Schwingungspunkt des Pendels und die Pendellänge ist $ap = l$.

Die Ausdehnung des Eisens geschieht von oben nach unten, die des Quecksilbers von unten nach oben, indem es in dem Gefäfs aufsteigt. Der Ausdehnungs-Coefficient des Eisens ist im Mittel 0,00117; der des Quecksilbers 0,018; mithin hat man für vollkommene C.

$$117 \cdot l = 1800 \frac{fk}{2}$$

woraus

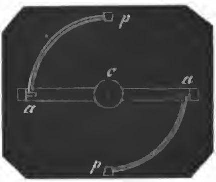
$$fk = \frac{117}{900} l = 0{,}13 \cdot l$$

Beim Secundenpendel ist $l = 38$ Zoll, folglich die Höhe *fk* des Quecksilbers 4,94 beinahe 5 Zoll, die Länge von *a* bis *ef* $= 40\frac{1}{2}$ Zoll.

Andere Compensationsweisen bei Pendeln, durch Biegung von Federn, durch Hebelwerk werden hier übergangen.

3. Die C. bei Taschenchronometern geschieht ebenfalls auf verschiedene Weise; das Princip dabei ist ähnlich dem beim Pendel. Die Kraft der Spirale *g* Fig. 298, welche die Unruhe in abwechselnde Hin- und Herbewegung versetzt, mufs mit dem Trägheitsmoment des Schwungringes *f* in

Fig. 307.

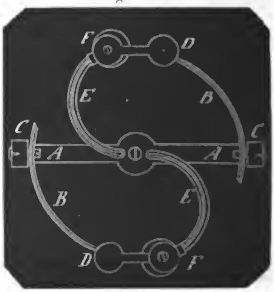


einem ganz bestimmten Verhältnifs sein; bleibt dies constant, so bleiben auch die Schwingungen gleichzeitig. Bei Verlängerung und Verkürzung der Spirale *g* durch Wärme-Einflufs wird die Kraft geringer und gröfser. Im ersten Fall ist also das Trägheitsmoment des Schwungringes *f* zu vermindern, im zweiten Fall zu vermehren, und dies geschieht nach Fig. 306, dafs unabhängig von der Spirale *g* Fig. 298 auf der Oberfläche oder einem Stege der Unruhe 2 Metallfedern in *a*, *a* befestigt werden, die bei Vermehrung der Wärme nach dem Mittelpunkt *c* hin sich krümmen, die an deren Endpunkten befindlichen Gewichte *p*, *p* also dem Mittelpunkt *c* näher führen, und somit das Trägheitsmoment vermindern, während bei verminderter Wärme die Federn vom Mittelpunkt *c* sich entfernen, und das Trägheitsmoment vermehren.

Die Federn sind nämlich aus Platten gewalzt, die aus 2 verschiedenen Metallen z. B. aus Stahl- und Messing- oder aus Platin- und Goldplatten zusammengelöthet sind, und während des Walzens bis zur äufsersten Schwäche immer aus 2 verschiedenen Metallblättchen bestehen bleiben. Nun werden Streifen in der erforderlichen Länge *ap* in der Art gekrümmt, dafs das Metall der gröfseren Ausdehnungsfähigkeit, also Messing oder Gold die convexe Seite, das Metall der geringeren Ausdehnung, also Stahl oder Platin, aber die concave Seite bildet.

Bei vermehrter Luftwärme dehnt sich also die convexe Seite der Feder mehr aus als die concave, und das convex liegende Metall veranlafst damit gewaltsam die gröfsere Verkrümmung der Feder, während bei verminderter Luftwärme das convex liegende Metall sich stärker zusammenzieht als das concav befindliche, und die Verflachung der Feder hervorbringt. Eine zweite Compensationsweise geschieht wie beim Pendel mit Quecksilber und nach demselben Princip der Verminderung oder Vermehrung des Trägheitsmoments wie bei der erst gedachten C. nach Fig. 307. *A* ist der Steg; *E*, *E* sind 2 Capillaritätsröhren, in welchen das Quecksilber bei vermehrter Luftwärme nach dem Mittel-

Fig. 308.



punkt der Unruhe hin sich ausdehnt, und deren Trägheitsmoment vermindert, wogegen es bei verminderter Luftwärme sich zusammenzieht, von dem Mittelpunkt sich entfernt und das Moment vermehrt.

Man kann diese C. mit der ersteren verbinden, dann sind *B*, *B* Compensationsstreifen aus 2 Metallen wie Fig. 306, *D*, *D* Gewichte, um die primitive C., die hauptsächlichste zu bewirken; *F*, *F* Verbindungen zwischen *B* und *E*, und *C* Stellschrauben für die Federn *B*.

Complement ist Ergänzung, nämlich eines Theils zu einem Ganzen. Eine Gröfse, der man ein C. beilegt, wird also als ein Theil eines Ganzen betrachtet, von dem das C. der ergänzende zweite Theil ist. So z. B. versteht man unter C. eines ächten Bruchs dessen Ergänzung zur Einheit ($\frac{3}{7}$ ist das C. von $\frac{4}{7}$). Der Art.: Arithmetisches C. eines Logarithmus giebt über dieses C. genauere Auskunft.

C. eines Winkels ist dessen Ergänzung zu einem Rechten, das C. eines Kreisbogens dessen Ergänzung zum Quadranten, so dafs deren C. positiv und negativ sein können: Bogen oder $\angle 30°$ hat das C. $= 60°$; Bogen oder $\angle 100°$ hat das C. $= -10°$. Polhöhe und Aequatorhöhe sind gegenseitig Complemente. Die Ergänzung eines Winkels zu $180° = 2$ Rechten und eines Bogens zum Halbkreise heifst Suplement.

Complex s. v. w. Aggregat, eine aus mehreren Gliedern bestehende (in Theilen durch die Vorzeichen + und − verbundene) Zahlengröfse als: $x - y + z$.

Complexion. Die Zusammenstellung mehrerer einfacher Zahlengröfsen (Elemente), ist also s. v. w. Combination, jedoch mit Ausnahme der Unionen.

Concavgläser, Hohlgläser, sind Gläser mit Oberflächen, welche in Form eines Theils einer hohlen Kugeloberfläche ausgeschliffen sind. Sind beide Oberflächen eines Glases hohl, so heifst das Glas concav-concav oder biconcav; eine Anwendung davon s. d. Art.: Brille für die Ferne. Ist eine der beiden Oberflächen eben, die andere hohl, so heist das Glas planconcav. Ist eine Oberfläche erhaben, die andere hohl, so heifst das Glas convex-concav oder concav-convex. Die planconcaven Gläser zerstreuen die Lichtstrahlen, wie die biconcaven es thun; die Wirkung der convexconcaven Gläser s. im Art.: Brennglas No. 5.

Concentrisch heifsen Kreise, die in derselben Ebene liegen, und einerlei Mittelpunkt haben.

Conchoide, Muschellinie, mufs geschrieben: Konchoide, von κογχη, die Muschel.

Concrete Gröfse od. continuirliche Gröfse s. v. w. Raumgröfse, vgl. collective Gröfse.

Concrete Zahl s. v. w. benannte Zahl.

Configurationen sind im Allgemeinen s. v. w. Aspecten (s. d.), im engeren Sinne das jedesmalige Bild, welches irgend eine Stellung eines Planeten mit seinen Trabanten wie z. B. Jupiter mit seinen 4 Monden dem Beschauer gewährt; indem einige der Monde bald in Conjunction, bald in Opposition, andere in Quadraturen, diese verfinstert, jene erhellt erscheinen. Denkt man sich die Bilder vom Jupiter aus gesehen, so hat man jovicentrische, von der Erde aus geocentrische C.

Confocale Kegelschnitte heifsen Kegelschnitte, die einen gemeinschaftlichen Brennpunkt haben. Fig. 188, pag. 296 giebt ein Beispiel von Kreis, Ellipse, Parabel, Hyperbel, die sämmtlich confocal sind.

Congruent ist das, was mit einander übereinstimmt, in der Geometrie, was in Form und Gröfse übereinstimmt. Zwei Raumgröfsen sind congruent ($\cong$), wenn beide vollkommen übereinstimmend sind, so also, dafs eine für die andere genommen werden kann. In der Planimetrie ist daher auch Congruenz gleichbedeutend mit dem Begriff: Deckung. Z. B. Kreise von gleichen Halbmessern decken sich (sind $\cong$), d. h. man kann beide Kreise so auf einander legen, dafs sie mit ihren Umfängen nur einen Umfang bilden.

Die wichtigsten Sätze in der Elementar-Geometrie sind die von der Congruenz der Dreiecke (s. d. folg. Art.). In der Stereometrie kann man Congruenz nur dann mit Deckung bezeichnen, wenn man unter dieser die Möglichkeit versteht, die Flächen und die Körper so in einander zu schieben, dafs bei ersteren und bei letzteren die Begrenzungen in allen Punkten zusammenfallen.

Würfel sind $\cong$ wenn sie gleiche Seiten haben, alle Kugeln von gleichen Halbmessern sind $\cong$, normale Cylinder und Kegel sind $\cong$, wenn sie gleiche Grundkreise und gleiche Höhen haben u. s. w.

Congruenz der Dreiecke. Diese findet natürlich nur statt, wenn jede der 3 Seiten des einen Dreiecks einer der 3 Seiten des anderen gleich ist, und wenn die in beiden Dreiecken gleichliegenden Winkel einzeln einander gleich sind. Wie dies z. B. bei den Dreiecken *ABC* und *DEF* Fig. 153, pag. 263 der Fall ist. Um nun die C. zweier Dreiecke zu erfahren, soll man nicht nöthig haben, alle die genannten 6 Stücke der Dreiecke einzeln mit einander zu vergleichen, und die Geometrie lehrt, dafs man nur die Gleichheit

dreier Stücke in zweien Dreiecken zu kennen nöthig hat, um daraus die Gleichheit der übrigen 3 Stücke und die Congruenz der beiden Dreiecke zu folgern. Wie überhaupt die Elementargeometrie in ihren Lehrsätzen überall die Aufgabe löst, aus der Beschaffenheit und dem Zusammenhang einzelner Raumgröfsen die Beschaffenheit und die Art des Zusammenhangs anderer mit jenen zusammenhangenden Raumgröfsen zu finden.

So viele verschiedene 3 Stücke nun in 2 Dreiecken als gleich gegeben sein können, aus welchen die C. der Dreiecke hervorgeht, so viele Sätze (Lehrsätze) über die C. der Dreiecke giebt es.

Die als gleich zu gebenden 3 Stücke sind nun:

1. drei Seiten,
2. zwei Seiten und ein Winkel,
3. eine Seite und zwei Winkel,
4. drei Winkel.

Diese 4 Bestimmungsfälle sind aber nicht alle geeignet, auf die C. der Dreiecke zu schliefsen; unmittelbar ist es nur der erste Fall. Wenn nämlich in 2 Dreiecken 3 Seiten des einen den 3 Seiten des anderen Dreiecks einzeln gleich sind, so sind die Dreiecke $\cong$.

Der zweite Bestimmungsfall: „Zwei Seiten und ein Winkel" schliefst in Beziehung auf die Lage des gegebenen Winkels 2 Fälle in sich: Entweder der Winkel wird von beiden Seiten eingeschlossen, oder er liegt einer von beiden Seiten gegenüber. Im ersten Fall sind die Dreiecke $\cong$. Wenn nämlich in 2 Dreiecken 2 Seiten des einen zweien Seiten des anderen Dreiecks einzeln einander gleich sind, und die von beiden Seiten eingeschlossenen Winkel in beiden Dreiecken sind einander gleich, so sind die Dreiecke $\cong$.

Der zweite Fall dagegen läfst Dreiecke zu, die nicht $\cong$ sind. Beschreibt man

Fig. 309.



nämlich aus A mit AB den Kreisbogen BD, zieht AD, so hat man in den beiden verschiedenen, also nicht congruenten Dreiecken ABC und ADC

$$AB = AD$$
$$AC = AC$$
$$\angle C = \angle C$$

Dafs in diesem Falle 2 verschiedene Dreiecke möglich sind, liegt offenbar darin, dafs die Seite AB, die dem gegebenen $\angle C$ gegenüber liegt, kleiner ist als die gegebene zweite dem $\angle C$ anliegende Seite AC. Denn wird im $\triangle ABC$ mit den Seiten AB und AC der $\angle B$ gegeben, welcher der gröfseren Seite AC gegenüber liegt, so schneidet der Kreisbogen, der aus A mit AC beschrieben wird, die Seite BC erst in deren Verlängerung BE, und es entsteht das $\triangle ABE$, in welchem zwar $AB = AB$, $AE = AC$, aber $\angle ABE$ das Suplement von $\angle ABC$ ist, so dafs beide Dreiecke ABC und ABE nicht einerlei Winkel zu Bestimmungsstücken haben.

Demnach erleidet dieser zweite Fall eine Einschränkung, und 2 Dreiecke sind $\cong$, wenn 2 Seiten des einen zweien Seiten des anderen Dreiecks einzeln einander gleich sind, und wenn die der gröfseren von beiden gegebenen Seiten gegenüberliegenden Winkel einander gleich sind.

Der dritte Bestimmungsfall: „eine Seite und zwei Winkel" bedarf der Einschränkung, dafs die gleichen Winkel einerlei Lage gegen die gegebene Seite haben müssen; die Dreiecke sind also nur dann $\cong$, entweder wenn beide gegebene Winkel der gegebenen Seite anliegen, oder wenn einer derselben der Seite gegenüber liegt, dafs der anliegende Winkel dem anliegenden und der gegenüberliegende Winkel dem gegenüberliegenden in beiden Dreiecken gleich ist. Denn nimmt man in dem $\triangle ABC$ von B aus den $\angle ABD = \angle ACB = \alpha$, so hat man in den beiden nicht congruenten Dreiecken ABC u. ABD

$$AB = AB$$
$$\angle CAB = \angle DAB$$
$$\angle ACB = \angle ABD$$

In dem $\triangle ABC$ ist α der Seite AB gegenüberliegend in dem $\triangle ABD$ ist α der Seite AB anliegend.

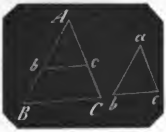
Der vierte Bestimmungsfall: „Drei Winkel gleich" giebt nur ähnliche Dreiecke, wie $\triangle ABC \sim \triangle abc$, in welchen, wenn $\triangle abc$ nach Abc verlegt wird, *bc* ‡ *BC* ist.

Die 3 Bestimmungsstücke, unter wel-

Fig. 310.



Fig. 311.



chen jedesmal congruente Dreiecke hervorgehen, sind demnach:

1. drei Seiten,
2. zwei Seiten und der von diesen eingeschlossene Winkel,
3. zwei Seiten und der der gröfseren von beiden gegenüberliegende Winkel
4. eine Seite und zwei gleichliegende Winkel.

Und man hat also auch 4 Lehrsätze über die C. der Dreiecke.

Die Elementargeometrie gestattet nicht in der systematisch auf einander folgenden Entwickelung und Erkenntnifs ihrer Wahrheiten die Sätze über die C. der Dreiecke in der obigen Ordnung und unmittelbar auf einander folgend. In dem uns bekannten ältesten Lehrbuch der Geometrie, im Euklid, bilden die hier unter No. 2 aufgeführten Bestimmungsstücke den ersten Lehrsatz (Satz 4) und zugleich den ersten Satz über die C. der Dreiecke; in dem Art.: „Axiom" ist derselbe pag. 263 mit Fig. 153 nach Euklid erwiesen.

Nachdem nun Euklid nach Satz 5 und 6 über die Gleichheit der Winkel an der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks in Satz 7 erwiesen hat, dafs wenn über einer geraden Linie **AB** von deren Endpunkten **A**, **B** aus zwei gerade Linien **AC**, **BC** in einem Punkt **C** zusammenlaufen, zwei andere gerade Linien **AD**, **BD** nicht in einem anderen Punkt **D** zusammenlaufen können, wenn $AD = AC$ und zugleich $BD = BC$ ist, giebt Satz 8 als nothwendige Folge von Satz 7 den zweiten Lehrsatz über die C. der Dreiecke mit den hier No. 1 aufgeführten Bestimmungsstücken: 3 Seiten in beiden Dreiecken einzeln gleich.

Man beweist diesen Lehrsatz auch unmittelbar aus Euklid, Satz 5 und 6 wie folgt: Wenn nämlich

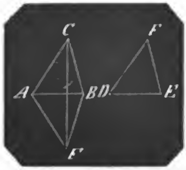
$$AB = DE$$
$$AC = DF$$
$$BC = EF$$

so lege $\triangle$ **FDE** mit der Seite **DE** an die ihr gleiche **AB**, so dafs $AF = AC$, $BF = BC$, ziehe **CF**, dann sind die Dreiecke **CAF** und **CBF** gleichschenklig, daher

$$\angle ACF = \angle AFC$$
$$\underline{\angle BCF = \angle BFC}$$
daraus $\angle ACB = \angle AFB$

in den Dreiecken **ACB** und **AFB** sind nun zwei Seiten, und die von ihnen eingeschlossenen Winkel gleich, die Dreiecke also, nach Euklid Satz 4, $\cong$.

Fig. 312.



Erst nach einer Reihe von 11 Lehrsätzen nebst 6 Aufgaben kommt in Satz 26 der dritte Satz über die C. der Dreiecke unter den hier No. 4 aufgeführten Bedingungen: „Eine Seite und zwei Winkel gleich," der in 2 Theile getheilt ist, 1) wenn die Seite beiden Winkeln und 2) wenn die Seite nur einem Winkel anliegt. Die Beweise sind folgende:

1. In beiden Dreiecken **CAB**, **FDE** sind gegeben

$$AB = DE$$
$$\angle CAB = \angle FDE$$
$$\angle CBA = \angle FED.$$

Nimmt man nun an **AC** nicht $= DF$, so mufs **AC** entweder gröfser oder kleiner sein als **DF**; ist $AC > DF$, so ist irgend

Fig. 313.



eine Linie **AG**, die $<$ als **AC** ist, $= DF$, zieht man dann **GB**, so ist in den beiden Dreiecken **GAB**, **FDE**

$$AB = DE$$
$$AG = DF$$
$$\underline{\angle GAB = \angle FDE}$$

folgt $\triangle GAB \cong \triangle FDE$ nach Satz 4

hieraus $\angle GBA = \angle FED$

Vorausgesetzt ist aber

$$\angle CBA = \angle FED$$

folglich $\angle GBA = \angle CBA$
welches unmöglich ist.

Bei der Annahme, dafs $AC < DF$, würde eine Linie

$$AH\ (> AC) = DF \text{ sein;}$$

dann erhält man durch gleiche Schlüsse

$$\angle ABH = \angle ABC$$

welches wiederum unmöglich ist, daher ist

$$AC = DF$$

und nach Satz 4

$$\triangle CAB \cong \triangle FDE$$

2. In den Dreiecken CAB und FDE sind gegeben:

$$AC = DF$$
$$\angle CAB = \angle FDE$$
$$\angle CBA = \angle FED$$

Nimmt man an, AB sei nicht gleich DE, so sei $AJ (< AB) = DE$, ziehe CJ, so ist nach Satz 4:

$$\triangle CAJ \cong \triangle FDE$$

also $\angle CJA = \angle FED$

also auch $\angle CJA = \angle CBA$

welches unmöglich ist, da Satz 16 beweist, dafs ein Aufsenwinkel gröfser ist, als der innere ihm gegenüber liegende Winkel.

Setzt man $AB < DE$, so würde

$$AJ'(> AB) = DE$$

sein und $\angle CBA$ der Aufsenwinkel von von $CJ'A$ werden. Es kann mithin nur $AB = DE$ sein, und dann ist nach Satz 4: $\triangle CAB \cong \triangle FDE$.

Der erste Theil des Lehrsatzes beruht auf keinem späteren Lehrsatze als auf Satz 4, und hätte daher Satz 5 sein können, wenn Euklid nicht vorgezogen hätte, beide Theile zu einem Satz zu vereinigen, wie es auch die späteren Lehrbücher thun. Dafs der Satz nicht unmittelbar dem 16. Satz folgt, auf den allein der Beweis sich beruft, liegt wohl darin, dafs die dem Satz 16 folgenden Sätze dem Satz über die Aufsenwinkel sich näher anschliessen.

Den 4. Satz: „Dreiecke sind $\cong$, wenn in ihnen zwei Seiten und der der gröfseren von beiden gegenüberliegende Winkel einzeln gleich sind“ hat Euklid nicht aufgestellt.

Der Beweis wird geführt, nachdem die

Fig. 314.



Sätze vorangegangen sind: 1. In jedem $\triangle$ steht der gröfseren Seite der gröfsere Winkel gegenüber (Euklid, Satz 18) und 2. In einem $\triangle$ ist der Aufsenwinkel gröfser als jeder der beiden ihm gegenüberliegenden inneren Winkel (Euklid, Satz 16) nämlich:

In den beiden Dreiecken ACB und DFE sei

$$AC = DF$$
$$AB = DE > (AC = DF)$$
$$\angle ACB = \angle DFE$$

Lege $\triangle DFE$ auf $\triangle ACB$, so dafs D auf A, F auf C fällt, so fällt FE in die Richtung CB. Ist nun $CB > FE$, so fällt E innerhalb CB, etwa in G; ziehe AG, dann ist:

$$\triangle ACG \cong \triangle DFE \text{ nach Satz 4}$$

daher $AG = DE$

aber auch $AB = DE$

daher $AG = AB$

folglich $\angle AGB = \angle ABG$ Satz 5.

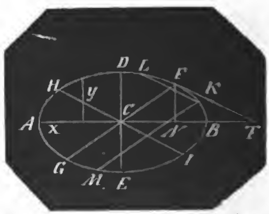
Nun ist $\angle ACB > \angle ABC$ nach Satz 18, folglich auch $\angle ACB > \angle AGB$ welches nach Satz 16 unmöglich ist.

Auf gleichen Widerspruch kommt man bei der Annahme, dafs $CB < FE$, wo dann E in die Verlängerung von CB, etwa in H fällt.

Conjugirt (verbunden) oder **coordinirt** (zugeordnet) heifsen in der Geometrie Punkte und Linien, welche zu einer gewissen gegenseitigen Abhängigkeit mit einander verbunden sind oder in gewisser Beziehung zu einander gehören und einander zugeordnet werden (s. die folg. Art.)

Conjugirte Axe. 1. Bei der Ellipse heifst die kleine Axe oder Nebenaxe (DE Fig. 314) zugleich die c. A. (zur grofsen Axe oder Hauptaxe AB). Diese c. A. ist die mittlere geometrische Proportionale

Fig. 315.



zwischen der grofsen Axe und dem Parameter; man kann aber eben so gut erklären: der Parameter ist diejenige Linie, welche die dritte geometrische Proportio-

nale zwischen der kleinen Axe und der grofsen Axe ist. Die erste Erklärung ist angemessen, wenn die rechtwinklige Coordinatengleichung durch die grofse Axe (a) und den Parameter (p) gegeben ist; die zweite, wenn sie durch die grofse Axe (a) und die kleine Axe (c) gegeben ist. Man hat nämlich für die Ellipse

$$y^2 = p\left(x - \frac{x^2}{a}\right)$$

und

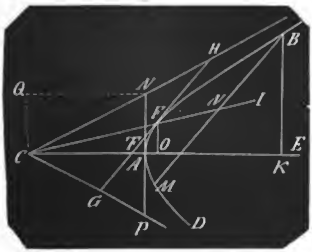
$$y^2 = \frac{c^2}{a^2}\,(ax - x^2)$$

woraus zu ersehen, dafs $c^2 = ap$

und $$p = \frac{c^2}{a}$$

2. Bei der Hyperbel nennt man eben so die Nebenaxe oder Zwerchaxe zugleich c. A. in Beziehung auf die Hauptaxe (vgl. conjugirte Hyperbel), und sie ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen

Fig. 316.



der Hauptaxe und dem Parameter, wie man auch den Parameter als die dritte Proportionale zwischen der Hauptaxe und der c. A. feststellen kann. Es sei BAD das Stück einer Hyperbel, A der Scheitel, CE durch A die Axe der Hyperbel, nämlich die auf dem Curvenelement A im Scheitel normal befindliche Linie.

Bezeichnet man mit A' den Scheitel der zweiten Hyperbel, welche mit der Hyperbel BAD in einerlei Ebene durch den über die Spitze hinaus verlängerten Kegel gebildet wird, so sei C die Mitte zwischen A' und A, also der Mittelpunkt beider Hyperbeln; $A'A = 2CA$ die Hauptaxe (a). Es seien ferner CH und CP die beiden Asymptoten der Hyperbel, NP durch A auf CA normal, so ist NP die Zwerchaxe oder die c. A. (c). Bezeichnet man nun wieder den Parameter mit p, so hat man für rechtwinklige Coordinaten (wie $AK = x$ und $BK = y$)

$$y^2 = p\left(x + \frac{x^2}{a}\right)$$

und

$$y^2 = \frac{c^2}{a^2}\,(ax + x^2)$$

woraus wie bei der Ellipse

$$c^2 = ap$$

und $$p = \frac{c^2}{a}$$

Conjugirte Durchmesser. Unter Durchmesser einer Curve versteht man jede gerade Linie, die als Abscisse genommen zu beiden Seiten in gerader Linie gleiche mit einander parallele Ordinaten zuläfst. Es ist mithin jede Axe zugleich Durchmesser wie AB, Fig. 314, in der Ellipse, und AE, Fig. 315, in der Hyperbel, wo die gleichen Ordinaten rechtwinklig sind, und auch bei der Parabel und dem Kreise findet dies statt. Beim Kreise ist jeder beliebige Durchmesser zugleich Axe, und die gleichen Ordinaten sind rechtwinklig auf derselben, dagegen hat die Parabel keinen anderen Durchmesser als die Axe aufzuweisen, wohl aber die Ellipse und die Hyperbel, bei welchen jede durch den Mittelpunkt gezogene gerade Linie ein Durchmesser ist, wie FG durch C, Fig. 314, CJ durch C Fig. 315.

Aufser den Axen bei der Ellipse und der Hyperbel gehören zu allen übrigen Durchmessern schiefwinklige Ordinaten.

2. Um bei der Ellipse, Fig. 314, für einen beliebigen Durchmesser HJ den Winkel zu finden, unter welchem die Ordinaten zu beiden Seiten gleich grofs sind, construire die mit HJ parallele Tangente FT, ziehe durch den Berührungspunkt F den Durchmesser FG durch C, so ist $\angle FCB$ der gesuchte Coordinatenwinkel; alle mit FG parallele Chorden oder Doppelordinaten wie KM werden von dem Durchmesser HJ halbirt. Desgleichen halbirt der Durchmesser FG alle Chorden, die mit dem Durchmesser HJ ∦ sind, wie z. B. $OK = OL$, und HJ, FG sind conjugirte Durchmesser.

3. Die Construction einer Tangente ∦ einem gegebenen Durchmesser geschieht aber einfach aus folgender Betrachtung: In dem Art.: „Berührende gerade Linie, Beispiel 2, Ellipse“ pag. 341 mit Fig. 210 hat man rechts, Z. 13 v. u.

$$tg(\angle BTD) = \frac{y}{s} = \frac{c^2}{a^2} \cdot \frac{a-x}{y}$$

wo a und c die halben Axen bezeichnen.

Fällt man Fig. 314 das Loth FN auf AB, so ist hier zu setzen $\angle FTC = \alpha$ für $\angle BTD$, und es ist ferner

$$FN = y;\; TN = s$$

$DC = c$; $BC = a$; $CN = a - x$

Nun ist aber auch $\angle FCN = \beta$ gesetzt:

$$\cot \beta = \frac{CN}{FN} = \frac{a-x}{y}$$

Da nun

$$tg\, \alpha = \frac{c^2}{a^2} \frac{a-x}{y}$$

so ist

$$tg\, \alpha = \frac{c^2}{a^2} \cot \beta$$

oder $c^2 \cot \beta = a^2\, tg\, \alpha$

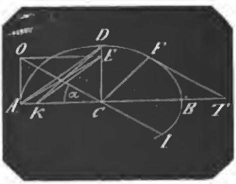
Da nun $\angle \alpha$ in $\angle HCA$ gegeben ist, so läfst sich $\angle FCB = \beta$ folgendermafsen construiren.

Ist Fig. 316, wie in Fig. 314, $AC = a$, $CD = c$, HJ der gegebene Durchmesser, also $\angle HCA = \alpha$, so errichte das Loth AO bis in die Verlängerung von CH, ziehe DA, $OE \mp AC$, $EK \mp DA$, ziehe DK und $CF \mp DK$ so ist $\angle FCB = \beta$, F der Berührungspunkt der zu zeichnenden Tangente und $FT \mp HJ$ die Tangente selbst. Denn es ist, wenn man noch AE zieht:

$\square ACEO = AC \times AO = a \cdot a\, tg\, \alpha = a^2\, tg\, \alpha$

folglich $\triangle EAO = \frac{1}{2} a^2\, tg\, \alpha$

Fig. 317.



Da nun $KE \mp AD$

so ist $\triangle DKC = \triangle EAC = \frac{1}{2} a^2 \cdot tg\, \alpha$

Es ist aber auch

$\triangle DKC = \frac{1}{2} DC \cdot KC = \frac{1}{2} c \cdot KC$

folglich ist $a^2 \cdot tg\, \alpha = c \cdot KC$

Nach der Formel ist aber

$a^2 \cdot tg\, \alpha = c^2 \cdot \cot \beta$

folglich ist $KC = c \cdot \cot \beta$

und hieraus $\angle DKC = \beta$

folglich, da $FC \mp DK$

$\angle FCB = \beta$

4. Ist in der Hyperbel, Fig. 315, CJ durch F ein beliebiger Durchmesser und man zeichnet die Tangente HG in F, so werden alle mit HG parallele Chorden oder Doppelordinaten wie BM durch CJ halbirt, es ist also $BN = MN$. Sind CH und CP die beiden Asymptoten der Hyperbel, so heifsen CF und HG die conjugirten Durchmesser, wie (s. den vor. Art.) CA und NP die conjugirten Axen.

Die Construction der Tangente an einem gegebenen Punkt der Hyperbel ist in dem Art.: „Berührende gerade Linie" pag. 342 mit Fig. 212 und 213 gezeigt. Bezeichnet man in Fig. 315 den $\angle FTO$, den die Tangente mit der Axe bildet mit α so ist nach pag. 342

$$tg\, FTO = tg\, \alpha = \frac{p}{2a} \cdot \frac{a+x}{y}$$

wo p den Parameter und $2a$ die Hauptaxe bedeutet. Dieser Bezeichnung nach ist Fig. 315 der Halbmesser $CA = a$ und setzt man demgemäfs $AN = c$ so hat man, da nach No. 2

$$NP^2 = 2AC \cdot p$$
$$4c^2 = 2a \cdot p$$

woraus $p = \frac{2c^2}{a}$

Diesen Werth in den Ausdruck für $tg\, \alpha$ gesetzt, giebt

$$tg\, \alpha = \frac{c^2}{a^2} \cdot \frac{a+x}{y}$$

Nun ist Fig. 315 für den Punkt F:

$$CO = a + x$$
$$FO = y$$

und bezeichnet man den $\angle FCO$, den der Durchmesser durch F mit der Axe CE bildet, mit β, so ist

$$CO\; tg\, \beta = FO$$

oder

$$(a + x)\, tg\, \beta = y$$

woraus

$$\frac{a+x}{y} = \cot \beta$$

mithin ist auch hier wie ad 3 bei der Ellipse

$$tg\, \alpha = \frac{c^2}{a^2}\, tg\, \beta$$

und man kann bei der Hyperbel die Tangente wie bei der Ellipse in Beziehung auf einerlei Formel construiren.

Conjugirte Hyperbeln sind diejenigen Hyperbeln, welche in einerlei Ebene liegen und dieselben conjugirten Axen haben, so aber, dafs die Hauptaxe der einen die Nebenaxe der anderen Hyperbel ist. Errichtet man, Fig. 315, das Loth CQ auf der Hauptaxe CE, zieht $NQ \mp CE$, so ist Q der Scheitel der Hyperbel, welche der Hyperbel BAD conjugirt ist.

Hieraus ist zugleich ersichtlich, weshalb bei der Hyperbel die Hauptaxe nicht grofse Axe, und die Nebenaxe nicht kleine Axe genannt werden kann, weil es nämlich Hyperbeln giebt, bei welchen die Nebenaxe gröfser ist, als die Hauptaxe.

2. Die in dem Art.: „conjugirte Axe" No. 2 aufgeführten rechtwinkligen Coordinatengleichungen für die Hyperbel sind

$$y^2 = p\left(x + \frac{x^2}{a}\right)$$

wo $p = \frac{c^2}{a}$ ist

und $y^2 = \frac{c^2}{a^2}(ax + x^2)$

In diesen beiden Gleichungen hat man nur a mit c zu vertauschen, um die Gleichungen für die c. H. zu erhalten. Diese sind also:

$$y_1^2 = p_1\left(x + \frac{x^2}{c}\right)$$

wo $p_1 = \frac{a^2}{c}$ ist

und $y_1^2 = \frac{a^2}{c^2}(cx + x^2)$

In den vorstehenden Gleichungen sind a und c die ganzen Axen.

3. Bezeichnet man die ganze Hauptaxe (wie es häufig geschieht) mit $2a$, die Nebenaxe mit $2c$, so hat man

$$y^2 = \frac{c^2}{a^2}(2ax + x^2)$$

Nimmt man die Abscissen nicht vom Scheitel aus, sondern als Anfangspunkt derselben den gemeinschaftlichen Mittelpunkt C, Fig. 314, bezeichnet diese mit u so ist $u = a + x$

also $x = u - a$

Diesen Werth in die Coordinatengleichung gesetzt, giebt

$$y^2 = \frac{c^2}{a^2}[2a(u - a) + (u - a)^2]$$

woraus

$$y^2 = \frac{c^2}{a^2}(u^2 - a^2)$$

c und a mit einander vertauscht, giebt die Gleichung für die c. H.

$$y_1^2 = \frac{a^2}{c^2}(u^2 - c^2)$$

Die Asymptoten beider c. H. schneiden sich in dem gemeinschaftlichen Mittelpunkt C. In dem Art.: „Asymptote," pag. 159, Beispiel 3 ist die Gleichung für die Hyperbel in allgemeiner Form aufgestellt:

$$y^2 = ax + bx^2$$

und $tg\,\alpha$, nämlich die Tangente des Winkels, den die Asymptote mit der Hauptaxe bildet ($\angle NCA$ Fig. 314), ist $= \sqrt{b}$ gefunden worden.

Verwandelt man die obige Gleichung in No. 3

$$y^2 = \frac{c^2}{a^2}(2ax + x^2)$$

in die Form der Gleichung $y^2 = ax + bx^2$, so hat man

$$y^2 = \frac{2c^2}{a}x + \frac{c^2}{a^2}x^2$$

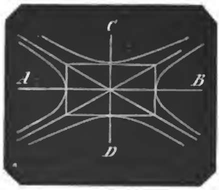
und es ist jenes $b = \frac{c^2}{a^2}$ und $\sqrt{b} = \frac{c}{a}$ mithin $tg\,\alpha = \frac{c}{a}$, wie Fig. 314 bildlich darstellt.

Vertauscht man nun c und a, so wird die Tangente des Winkels, den die Asymptote mit der conjugirten Axe c bildet:

$$tg\,\alpha_1 = \frac{a}{c}$$

Da nun α und α_1 ($\angle NCA$ u. $\angle NCQ$ Fig. 314) Complements-Winkel sind, so haben beide c. H. dieselben Asymptoten. Von den 4 Hyperbeln A, B, C, D Fig. 316

Fig. 318.



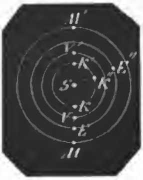
sind A und B, so wie C und D Ergänzungs-Hyperbeln oder entgegengesetzte Hyperbeln; je 2 derselben gehören zu einerlei Kegel, und jedes Paar derselben ist mit dem anderen Paar conjugirt.

Conjunction, Zusammenkunft (Kalenderzeichen ☌) eines Gestirns mit der Sonne ist dessen Stand gegen die Sonne in Beziehung auf den der Erde, alle 3 Weltkörper in einerlei Ebene gedacht, und von der Erde aus betrachtet in der Art, daſs das Gestirn mit der Sonne nach derselben Richtung steht; das Gestirn hat also mit der Sonne einerlei Länge, und wenn beide mit der Erde in wirklich einerlei Ebene sich befinden, auch einerlei Abweichung (s. Aspecten).

Der Gegensatz von C. ist Opposition, Gegenschein (Kalenderzeichen ☍) eines Gestirns mit der Sonne, wenn nämlich beide Weltkörper von der Erde aus gesehen, nach entgegengesetzten Richtungen stehen; beider Länge ist dann um 180° verschieden. Liegen beide Weltkörper mit der Erde in wirklich einerlei Ebene, so haben beide gleiche aber entgegensetzte Abweichungen.

In Fig. 317 bedeutet S die Sonne, E die Erde, K den Merkur, V die Venus, M den Mars; die Kreise stellen deren Bahnen vor. Merkur und Venus sind die einzigen unteren Planeten (deren Bahnen von der

Fig. 319.



der Erde eingeschlossen werden), und man ersieht, dafs diese keine Opposition sondern nur C. haben können. Stehen Merkur und Venus in *K* und *V*, also zwischen Sonne und Erde, der Erde am nächsten, so heifst deren C. untere Conjunction, stehen sie in *K'* und *V'*, so dafs zwischen ihnen und der Erde die Sonne steht, sind sie der Erde am fernsten, so heifst deren C. obere Conjunction.

Mars, der nächste der oberen Planeten (von deren Bahnen die Erdbahn eingeschlossen wird), hat wie alle oberen Planeten C. und Opposition, in *M'* nämlich C., in *M* Opposition.

Die Beobachtungen der C. und Oppositionen der Gestirne giebt unmittelbar Auskunft über deren Umlaufszeiten um die Sonne. Merkur z. B. kommt alle 116 Tage mit der Sonne in untere C.; gesetzt in diesen 116 Tagen wäre die Erde von *E* nach *E''* gekommen, so hat Merkur in derselben Zeit den ganzen Umlauf um die Sonne und dazu noch den Bogen *Kk''* beschrieben. Setzt man die Umlaufszeit der Erde 365 Tage, so hat die Erde in 116 Tagen $\frac{116}{365}\,360^\circ = 114\frac{1}{5}{}^\circ$ zurückgelegt; Merkur aber $360^\circ + 114\frac{1}{5}{}^\circ = 474\frac{1}{5}{}^\circ$; die Umlaufszeit des Merkur ist also

$$\frac{360^\circ}{474\frac{1}{5}{}^\circ} \times 116 \text{ Tagen} = 88 \text{ Tage.}$$

Steht der Mond in C., so ist Neumond, steht er in Opposition, so ist Vollmond.

Die Mitte des Bogens zwischen C. und Opposition (90° oder 270° von der Erde entfernt) heifst Quadratur (s. Aspecten) und zwar die, in welche das Gestirn aus der C. tritt, die erste Quadratur, und die, in welche das Gestirn von der Opposition her kommt, die zweite Quadratur.

Conservationsbrillen werden als solche in Brillen mit Plangläsern von Händlern angepriesen, angeblich indem sie durch Brechung der Lichtstrahlen dem Auge nützlich seien; sie gewähren aber höchstens Schutz vor dem Staub. Anders ist es mit dunkelfarbigen Gläsern, welche Aerzte leidenden Augen empfehlen, damit das Licht milder und weniger reizbar ins Auge trete.

Constans, Constante, eine unveränderliche, eine beständige Gröfse, spielt in der Integralrechnung eine wichtige Rolle, und wird in der Regel mit *C*, auch mit *C'*, *K*, *K'* u. s. w. bezeichnet, wenn mehrere verschiedene Constanten in derselben Rechnung vorkommen, wie in dem Art.: „Bahn der Weltkörper" pag. 289.

Die beiden Functionen ax und $ax + b$ haben dasselbe Differenzial a, mithin ist $\int a = ax$ und auch $= ax + b$. Beide Integrale sind nur um eine beständige Gröfse (b), um eine C. verschieden, und der erste Satz in der Integralrechnung ist der Lehrsatz, dafs zu einem Differenzial unzählig viele Integrale gehören, dafs diese alle aber nur um ein constantes Glied verschieden sein können, oder wie der Lehrsatz auch wohl ausgedrückt wird: dafs 2 oder mehrere Functionen, welche dasselbe Differenzial haben, nur um eine constante Gröfse von einander verschieden sind.

Man hat demnach

$$\int (f'x) = fx + C$$

wo C auch = Null sein kann.

Die Bestimmung der C. geschieht in jedem besonderen Fall besonders und dadurch, dafs man der Urveränderlichen einen bestimmten Werth giebt, für welchen man aus ganz einfacher Betrachtung den zugehörigen Werth des Integrals entnehmen kann, aus welchem wieder die C. entwickelt wird. Beispiele hierfür sind unter Anderm in dem Art.: Ausflufs des Wassers, pag. 218 bis 226; Ausflufs der Luft, pag. 236 und 237. So ist pag. 218, No 5 gefunden die Wassermenge M_r aus einer Oeffnung von der Höhe x als das Integral:

$$M_x = \tfrac{2}{3}\sqrt{g}\; Bx\sqrt{x} + C$$

Nun zeigt Fig. 124, dafs wenn man die Höhe $x = h$ setzt, keine Oeffnung mehr stattfindet, also kein Wasser mehr ausfliefst d. h. $M_h = 0$ ist. Da nun das Integral M_x für jeden Werth von x, also auch für den $= h$ richtig bleiben mufs, so hat man

$$M_h = 0 = \tfrac{2}{3}\sqrt{g}\cdot B\cdot h\sqrt{h} + C$$

und entwickelt

$$C = -\tfrac{2}{3}\sqrt{g}\; B\, h\sqrt{h}$$

woher nun vollständig für jedes beliebige x

$$M_x = \tfrac{2}{3}\sqrt{g}\; B\cdot x\sqrt{x} - \tfrac{2}{3}\sqrt{g}\; B\, h\sqrt{h} = \tfrac{2}{3}\sqrt{g}\cdot B[x\sqrt{x} = h\sqrt{h}]$$

Hätte man statt von der Horizontalen *AB*, von der *DE* herab die Höhe x bezeichnet, so würde man nach No. 3, pag. 217, die Wassermenge M_x gefunden haben als Integral

$$M_x = \tfrac{2}{3}\sqrt{g}\cdot B\cdot(h+x)\sqrt{h+x} + C$$

Für die Höhe $x = 0$ verschwindet nun die Oeffnung *DELM* in die Linie *DE*, und es fliefst kein Wasser mehr aus. Setzt man daher in das Integral $x = 0$, so entsteht

$$M_0 = 0 = \tfrac{2}{3}\sqrt{g}\, B(h+0)\sqrt{h+0} + C$$

woraus

$$C = -\tfrac{2}{3}\sqrt{g}\; B\, h\sqrt{h}$$

und es ist nun vollständig für jedes beliebige x

$$M_x = \tfrac{2}{3}\sqrt{g}\; B\left[(h+x)\sqrt{h+x} - h\sqrt{h}\right]$$

Um nun die Wassermenge $M^o{}_H$ zu finden, wenn die Oeffnung von *DE* bis *FG* herabreicht, hat man jetzt nicht H, sondern $H - h$ für x zu setzen, und man erhält

$$M^o{}_H = \tfrac{2}{3}\sqrt{g}\, B\left[(h+H-h)\sqrt{h+H-h} - h\sqrt{h}\right]$$
$$= \tfrac{2}{3}\sqrt{g}\, B\left[H\sqrt{H} - h\sqrt{h}\right]$$

wie pag. 218 als hypothesische Wassermenge ermittelt ist.

Für den Jünger der Wissenschaft möchten vielleicht die Constantenbestimmungen von C und k in dem Art.: Bahn der Weltkörper, pag. 289 bis 294 einiges Interesse haben. In dem Art.: Bewegung, ungleichförmig veränderliche, pag. 356, Formel 3 ist ein einfaches, in dem Art: Bewegung in einem widerstehenden Mittel, pag. 363, Formel 8, ein zusammengesetzteres Integral, bei welchen beiden die $C = 0$ wird.

Constellationen s. Aspecten und Astrologie.

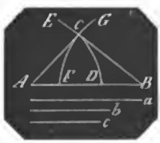
Construction in der Mathematik gehört allein der Geometrie an; sie ist die Ausführung einer Aufgabe der Geometrie durch Zeichnung. Die Elementargeometrie hat in den älteren und auch in mehreren neueren Lehrbüchern die Aufgaben als Sätze, die nur durch Construction zu lösen sind, inmitten ihrer Lehrsätze. Euklid fängt sein System mit 3 Aufgaben an: 1) Auf einer gegebenen begrenzten geraden Linie einen gleichseitigen Triangel zu errichten. 2) An einen gegebenen Punkt eine der gegebenen gleiche gerade Linie zu legen, und 3) Es sind 2 ungleiche gerade Linien gegeben, man soll von der gröfseren eine der kleineren gleiche Linie wegnehmen. Erst der 4te Satz ist der erste Lehrsatz, der 9., 10., 11. und 12. Satz sind wieder Aufgaben.

Constructionen sind aber zum Verständnifs der geometrischen Lehren durchaus nicht erforderlich, denn die Figuren sind nur Mittel, um der Phantasie möglichst zu Hülfe zu kommen; dafs sie richtig construirt werden, ist kein für die Wissenschaft nothwendiges Erfordernifs, es genügen Zeichnungen aus freier Hand nach dem Augenmaafs. Der Elementar-Geometrie, als reiner Wissenschaft, ist es entsprechender, wenn erst nach aufgestelltem vollständigen Lehrgebäude in Lehrsätzen die Constructionen als Anwendungen mit Berufung auf die einzelnen Lehrsätze, aus deren Wahrheiten sie hervorgehen, gelehrt werden.

Constructionen aus der Elementar-Geometrie:

1) Aus 3 gegebenen geraden Linien *a*, *b*, *c*, von denen je zwei gröfser sind, als die jedesmalige dritte, ein △ zu zeichnen, das diese Linien zu Seiten hat. Zeichne eine gerade Linie *AB* = einer der gegebenen, z. B. der *a*, beschreibe aus *A* mit einer der beiden anderen z. B. der *b* den Kreisbogen *DE*, und aus *B* mit der dritten *c* den Kreisbogen *FG*, verbinde den Durchschnittspunkt *C* beider Bogen mit den Punkten *A* und *B* durch gerade Linien, so ist △ *ABC* das Verlangte.

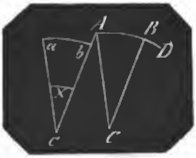
Fig. 320.



2) An einer geraden Linie *AC* von einem gegebenen Punkt *C* derselben aus einen gegebenen ∠ x abzutragen.

Zeichne aus dem Scheitelpunkt *c* des gegebenen ∠ x zwischen den Schenkeln mit beliebigem Halbmesser einen Bogen *ab*, zeichne aus *C* mit demselben Halbmesser einen Bogen *AD*, nimm das Stück *AB* desselben = dem Bogen *ab*, verbinde die Punkte *B* und *C* durch eine gerade Linie, so ist ∠ *ACB* = ∠ x.

Fig. 321.



3) Aus 2 gegebenen geraden Linien *a*, *b* und einem gegebenen ∠ *x* ein △ zu zeichnen, das diese Linien zu Seiten hat, die den gegebenen ∠ einschliefsen.

Zeichne eine gerade Linie *AB* = einer der beiden gegebenen, z. B. der *a*, trage an einen deren Endpunkte z. B. an *A* den ∠ *x*, mache dessen zweiten Schenkel *AC* = der anderen gegebenen Linie *b*, verbinde die Punkte *B* und *C* durch eine gerade Linie, so ist △ *ABC* das Verlangte.

4) Aus einer gegebenen geraden Linie *a* und zweien Winkeln *x* und *y*, die zusammengenommen kleiner als 2 Rechte sind, ein △ zu zeichnen, das diese Linie zur Seite hat, und der die beiden Winkel anliegen.

Zeichne eine gerade Linie *AB* = der gegebenen *a*, trage an derselben in dem Endpunkt *A* den einen, in dem Endpunkt *B* den anderen der gegebenen Winkel, verlängere beide Schenkel bis zu ihrem Durchschnittspunkt *C*, so entsteht das verlangte △ *ABC*.

5) Durch einen gegebenen Punkt *C* mit einer gegebenen geraden Linie *AB* eine Parallele zu zeichnen.

Fig. 322.



Zeichne durch *C* eine beliebig gelegene gerade Linie *DF* nach der Linie *AB*, trage an *DC* in *C* den ∠ *DCE* = ∠ *DFB*, so ist *CE* ∦ *AB*.

6) Aus einer gegebenen geraden Linie *a* und zweien gegebenen Winkeln *x* und *y*, die zusammengenommen kleiner als 2 Rechte sind, ein Dreieck zu zeichnen, das die Linie zur Seite hat, und der der eine ∠ z. B. *x* anliegt, der andere *y* ihr gegenüber liegt.

Zeichne eine gerade Linie *AB* = der gegebenen *a*, trage an derselben in einem deren Endpunkte z. B. *A* den ∠ *EAB* = *x*, und an *EA* in einem beliebigen Punkt *D* den ∠ *FDA* = *y*. Trifft der Punkt *F* mit

Fig. 323.



B nicht zusammen, so zeichne aus *B* mit *DF* eine Parallele *BC* bis in die Richtung *AE*, so ist △ *ABC* das Verlangte.

7) Es sind zwei gerade Linien *a*, *b* und ein ∠ *x* gegeben, ein △ zu zeichnen, welches die beiden Linien zu Seiten hat, deren einer der ∠ *x* gegenüber liegt.

I. Zeichne die gerade Linie *AB* = der gegebenen kleineren Linie *a*, trage an derselben in einem deren Endpunkte z. B. *A* den ∠ *DAB* = ∠ *x*, zeichne mit der gegebenen grösseren

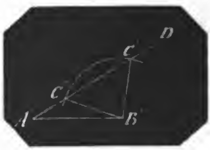
Fig. 324.



Linie *b* als Halbmesser einen Kreisbogen durch *AD*, den Durchschnittspunkt *C* in *AD* verbinde mit *B* durch eine gerade Linie, so ist △ *ABC* das verlangte.

II. Zeichnet man *A'B'* = der grösseren Linie *b*, den ∠ *D'A'B'* = *x*, und schneidet die *A'D'* durch einen mit der kleineren Linie *a* als Halbmesser beschriebenen Bogen, so entstehen 2 Durchschnittspunkte *C'* und *C''* in *A'D'* und 2 Dreiecke *A'C'B'* und

Fig. 325.

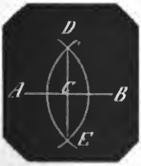


A'C''B', welche beide der Aufgabe genügen (vergl. Congruenz der Dreiecke mit Fig. 314).

8) Eine gerade Linie *AB* zu halbiren.

Beschreibe aus den beiden Endpunkten *A* und *B* mit einerlei Halbmesser 2 zu beiden Seiten der Linie in *D* und *E* sich

Fig. 326.

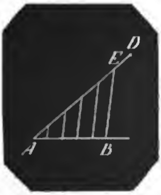


schneidende Bogen, verbinde *D* und *E* durch eine gerade Linie, so ist deren Durchschnittspunkt *C* mit *AB* die Mitte von *AB*.

9) Eine gerade Linie *AB* in eine beliebige Anzahl, z. B. in 5 gleiche Theile zu theilen.

Ziehe aus einem der Endpunkte z. B. aus *A* eine beliebige gerade Linie *AD*, trage auf derselben von *A* aus 5 beliebige gleiche Theile ab, verbinde den letzten Theilpunkt *E* mit dem zweiten Endpunkt *B* der zu theilenden Linie *AB*, und aus

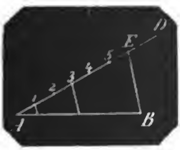
Fig. 327.



den übrigen Theilpunkten ziehe Parallelen mit *BE*, so schneiden diese auf *AB* gleich grofse Theile ab.

10) Eine gerade Linie in einem beliebigen Verhältnifs z. B. wie 1 : 2 : 3 zu theilen.

Fig. 328.

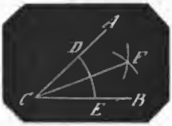


Auf der Linie *AB* trage von *A* aus so viele gleiche Theile ab, als die Summe der gegebenen Verhältnifszahlen beträgt, hier also 1 + 2 + 3 = 6 Theile. Verbinde den letzten Theilpunkt *E* mit *B*, ziehe aus den der Aufgabe entsprechenden Zwischenpunkten, hier dem ersten und dem dritten Parallelen mit *BE*, so theilen diese die Linie *AB* in die verlangten Theile.

11) Einen Winkel *ACB* zu halbiren.

Zeichne aus dem Scheitelpunkt *C* einen beliebigen Kreisbogen, der die beiden Schenkel in *D*, *E* schneidet. Mit demselben oder einem anderen Halbmesser zeichne aus *D* und *E* zwei in *F* sich

Fig. 329.



schneidende Bogen, verbinde *C* und *F* durch eine gerade Linie *CF*, so ist ∠ *ACF* = ∠ *BCF*.

12) Auf einer geraden Linie *AB* in dem Punkt *C* derselben ein Loth zu errichten.

I. Trage von *C* aus auf *AB* zu beiden Seiten beliebige gleiche Stücke *CD* und *CE* ab, beschreibe aus *D* und *E* mit

Fig. 330.



einerlei Halbmesser 2 Bogen, die sich in *F* schneiden, verbinde *F* mit *C* durch eine gerade Linie, so ist *CF* lothrecht auf *AB*.

II. Soll das Loth an dem Endpunkt *A* einer geraden Linie errichtet werden,

Fig. 331.



so beschreibe von A aus auf AB ein beliebiges gleichseitiges $\triangle AED$, verlängere die Seite DE, mache die Verlängerung $EF = DE$, so ist die gerade Linie AF lothrecht auf AB.

13) Von einem Punkt C auf eine gerade Linie AB ein Loth zu fällen.

I. Zeichne aus C einen beliebigen Bogen, der die AB in zwei Punkten D und E schneidet; aus den Punkten D und E zeichne wieder mit einerlei Halbmesser 2 sich in F schneidende Bogen, so ist die gerade Linie CG nach

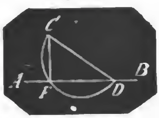
Fig. 332.



der Richtung CF lothrecht auf AB. Hiermit und zugleich mit No. 8 ist die Aufgabe gelöst; einen Kreisbogen zu halbiren.

II. Verbinde C mit irgend einem Punkt D der Linie AB, beschreibe über CD

Fig. 333.



den Halbkreis, verbinde dessen Durchschnittspunkt F mit C, so ist die gerade Linie CF das Loth auf AB.

14) In der unbegrenzten geraden Linie XY den Punkt durch Construction zu finden, der von den Punkten A, B, die mit X, Y in einerlei Ebene liegen, gleich weit entfernt ist.

Fig. 334.



Ziehe AB, errichte in der Mitte D von AB das Loth DE bis XY, so ist E der verlangte Punkt, nämlich $AE = BE$.

15) In der unbegrenzten geraden Linie XY den Punkt zu finden, in dem die von den mit XY in einerlei Ebene liegenden Punkten A gezogenen geraden Linien mit XY gleiche Winkel bilden.

Fälle von einem der Punkte z. B. A das Loth AD mit Verlängerung $DE = AD$, ziehe BE, so ist deren Durchschnittspunkt F mit XY der verlangte; wenn man nämlich AF zieht, so ist $\angle AFX = \angle BFY$.

Fig. 335.



Hiermit ist zugleich auch durch Constr. der Punkt gefunden, von dem aus die Summe der Wege nach A und B am kürzesten ist. Denn nimmt man irgend einen anderen Punkt G in XY, so ist

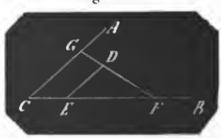
$$\begin{aligned} AG + GB &= EG + GB > EB \\ EB &= EF + FB = AF + FB \end{aligned}$$

folgt $$AG + GB > AF + FB$$

16) Durch den zwischen den Schenkeln eines hohlen $\angle ACB$ gegebenen Punkt D nach beiden Schenkeln eine gerade Linie zu ziehen, deren beide Theile von D aus wie 2 gegebene Zahlen m, n sich verhalten.

Zeichne durch D mit einem der beiden Schenkel z. B. AC eine Parallele DE; nimm auf dem Schenkel CB die Linie EF, so dafs $CE : EF = m : n$, ziehe durch

Fig. 336.



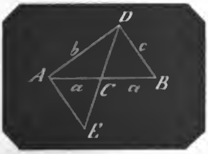
D die Linie FG, so ist diese die verlangte, und zwar ist $GD : DF = m : n$.

17) Es sind drei gerade Linien a, b, c gegeben, man soll dieselben mit ihren

Endpunkten so an einander legen, dafs ihre anderen Endpunkte unter gleichen Abständen in eine gerade Linie fallen.

Zeichne eine gerade Linie AB, welche der doppelten kleinsten gegebenen Linie a, also $= 2a$ ist, $AC = BC = a$. Beschreibe über AB mit den anderen beiden gegebenen Linien $AD = b$ und $BD = c$ ein $\triangle$,

Fig. 337.



ziehe DC, verlängere DC bis $CE = DC$, ziehe AE, so ist $AE = c$ und AD, AC, AE die verlangte Construction.

18) I. An einem in der Peripherie eines Kreises belegenen Punkt B eine Tangente zu zeichnen s. B. 1, pag. 339 mit Fig. 205.

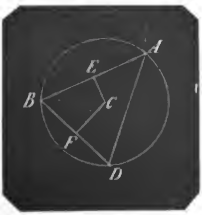
II. Von einem aufserhalb eines Kreises belegenen Punkt an den Kreis eine Tangente zu ziehen, s. pag. 339 mit Fig. 206.

19) An zweien gegebenen Kreisen eine gemeinschaftliche Tangente zu zeichnen, s. pag. 340 mit Fig 208.

20) Um ein $\triangle ABD$ einen Kreis zu zeichnen.

Halbire 2 beliebige Seiten, z. B. AB und BD in E und F, errichte auf den

Fig. 338.



Seiten Normalen, so ist deren Durchschnittspunkt C der Mittelpunkt des verlangten Kreises.

Hiermit ist zugleich die Construction gegeben: In einem vorhandenen Kreise den Mittelpunkt zu finden. Man nimmt nämlich in der Peripherie 3 beliebige Punkte A, B, D, verbindet je 2 derselben zu Sehnen AB und BD, und errichtet auf ihnen in deren Mitten Normalen bis zu ihrem Durchschnittspunkt C.

21) In ein $\triangle ABD$ einen Kreis zu beschreiben.

Halbire 2 beliebige $\angle$ des $\triangle$, z. B. A und B, der Durchschnittspunkt C der beiden Halbirungslinien ist der Mittelpunkt des verlangten Kreises, die aus demselben

Fig. 339.

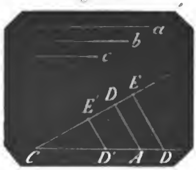


auf die Seiten gefällten Lothe CE, CF, CG sind einander gleich und Halbmesser.

22) Zu den 3 gegebenen geraden Linien a, b, c die 4te geometrische Proportionale zu zeichnen.

I. Zeichne einen beliebigen $\angle$, nimm vom Scheitelpunkt C aus auf dem einen Schenkel $CA = a$, auf dem anderen $CB = b$, ziehe AB, setze auf dem ersten Schenkel an A das Stück $AD = c$,

Fig. 340.



ziehe $DE = AB$, so ist BE die verlangte Linie, nämlich

$$CA : CB = AD : BE$$

oder

$$a : b = c : x$$

II. Man kann auch $CD' = c$ nehmen, $D'E' \# AB$ zeichnen; dann ist CE' die verlangte Linie.

III. Nimm auf einer geraden Linie die beiden mittleren Glieder $AB = b$, $BD = c$ neben einander, zeichne durch den Punkt B eine beliebig gelegene gerade Linie, nimm von B ab auf derselben $BE =$ dem ersten Gliede a, beschreibe um die 3 Punkte A, D, E einen Kreis, so ist die Verlängerung BF von EB

Fig. 341.

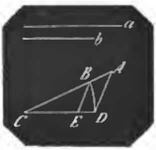


bis zur Peripherie die verlangte Linie, nämlich $AB \times BD = BE \times BF$
oder $b \times c = a \times x$
woher $a : b = c : x$

23) Zu den gegebenen beiden Linien a, b die dritte geometrische Proportionale zu zeichnen.

I. Zeichne einen beliebigen $\angle ACD$, nimm vom Scheitelpunkt C aus auf einem Schenkel CA = dem äufseren Gliede a, und auf beiden Schenkeln

Fig. 342.



$CB = CD$ = dem Mittelgliede b, ziehe AD und $BE \parallel AD$, so ist CE die 3te Proportionale.
Es ist nämlich $CA : CB = CD : CE$
oder $a : b = b : CE$

II. Zeichne die gerade Linie AB = dem mittleren Gliede b, errichte in B auf AB ein Loth, schneide dieses aus A

Fig. 343.



mit dem äufseren Gliede a in C, ziehe AC und fälle von B das Loth BD aus AC, so ist AD die dritte Proportionale.
Es ist nämlich $AC : AB = AB : AD$
oder $a : b = b : AD$

III. Ist das Mittelglied die gröfsere Linie a, so kann man auch über $AB = a$ den Halbkreis beschreiben, von a aus das kleinere äufsere Glied b als Sehne AD eintragen, diese verlängern und in B auf AB ein Loth BC bis in die Richtung AD errichten, und es ist AC die dritte Proportionale
Denn es ist $AD : AB = AB : AC$
oder $b : a = a : AC$

IV. Ist das Mittelglied wieder die kleinere Linie b, so kann man auch über AB = dem äufseren Gliede a den Halbkreis beschreiben, von A aus das Mittelglied b als Sehne AD eintragen und das Loth DE auf AB fällen, so ist AE die dritte Proportionale
Denn es ist $AB : AD = AD : AE$
oder $a : b = b : AE$

V. Nimm (Fig. 341) in der geraden Linie $AB = BD$ = dem Mittelgliede b, zeichne nach beliebiger Richtung BE = dem äufseren Gliede a, beschreibe um die 3 Punkte A, D, E den Kreis, so ist die Verlängerung BF von EB bis zur Peripherie die 3te Proportionale,
denn es ist $BE : AB = BD : BF$
oder $a : b = b : BF$

24) Zu den gegebenen beiden Linien a, b die mittlere geometrische Proportionale zu zeichnen.

I. Setze (Fig. 343) beide Linien zu einer geraden Linie $AE = a + BE = b$ zusammen, beschreibe über AB den Halbkreis, errichte in E die lothrechte Ordinate ED, so ist diese die verlangte Linie. Es ist nämlich
$AE : ED = ED : BE$
oder $a : ED = ED : b$

II. Beschreibe über der gröfseren $AB = a$ der beiden Glieder den Halbkreis, trage von einem Endpunkt, z. B. von A ab, die zweite Linie $b = AE$ auf derselben, errichte in E die lothrechte Ordinate ED, ziehe AD, so ist diese die verlangte Linie.
Es ist nämlich
$AB : AD = AD : AE$
oder $a : AD = AD : b$

III. Nimm AB (Fig. 344) = der grösseren a, BD auf der AB = der kleineren b, halbire die Differenz AD beider gegebenen Linien in E, beschreibe über AD und EB Halbkreise, verbinde B mit dem Durchschnittspunkt F beider Peripherien durch eine gerade Linie BF, so ist diese die verlangte mittlere Proportionale, nämlich BF die Tangente an den Kreis AFD

Fig. 344.

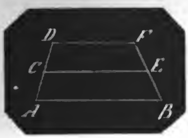


also $BF^2 = AB \times BD$
oder $AB : BF = BF : BD$
oder $a : BF = BF : b$

25) Zu 2 gegebenen geraden Linien *a*, *b* die mittlere arithmetische Proportionale zu zeichnen.

Nimm eine gerade Linie AB = der einen gegebenen, z. B. der *a*, ziehe von einem

Fig. 345.



Endpunkt derselben, z. *B. A*, eine beliebige gerade Linie AD, nimm beliebig $AC = CD$, ziehe aus *C* und *D* Parallelen mit AB, nimm DF = der anderen gegebenen *b*, ziehe BF, so ist CE die verlangte Linie.

Es ist nämlich

$$AB - CE = CE - DF$$
oder $$a - CE = CE - b$$
oder $$2CE = a + b$$

26) Es sind 2 wenig mit einander convergirende Linien AB und CD gegeben, zwischen beiden eine gerade Linie (XY) zu zeichnen, welche beide gegebenen, alle drei Linien gehörig verlängert, in einerlei Durchschnittspunkt und unter gleichen Winkeln trifft.

Fig. 346.

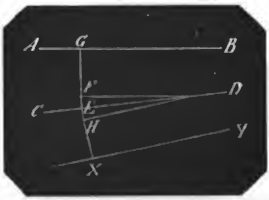


Aus einem beliebigen Punkt *E* einer der gegebenen, z. B. AB, ziehe eine Parallele EG mit der anderen CD, nimm von *E* aus ein Stück EF auf $AB = EG$, ziehe durch *F* und *G* eine gerade Linie FH bis an die Linie CD, halbire FH in *J*, ziehe durch *J* eine Normale XY auf FH, so ist diese die verlangte Linie. Es ist nämlich, wenn man den Durchschnittspunkt beider Linien AB und CD mit *Z* bezeichnet ZFH ein gleichschenkliges △ und XY eine Normale in der Mitte auf dessen Grundlinie, welche also die Spitze des △ unter gleichen Winkeln mit den Schenkeln trifft.

27) Zwischen den Linien AB und CD aufserhalb derselben eine gerade Linie XY zu zeichnen, so dafs die 3 Linien, gehörig verlängert, unter gleichen Winkeln in einem Punkt zusammentreffen.

Soll CD die mittlere Linie sein, so ziehe von irgend einem Punkt *D* in CD $DF \mathrel{+\!\!\!\!=} AB$, nimm in CD ein Stück $DE = DF$, ziehe EF verlängert bis *G*, zeichne an DE $\triangle DEH \cong \triangle DEF$, verlängere EH bis *X*, so dafs $EX = EG$, ziehe $XY \mathrel{+\!\!\!\!=} HD$,

Fig. 347.



so ist XY die verlangte Linie. Es ist nämlich, wenn man GX gezogen denkt, und den Durchschnittspunkt zwischen AB und XY mit *Z* bezeichnet, ZGX ein gleichschenkliges △ und ED eine Normale in der Mitte auf der Grundlinie GX.

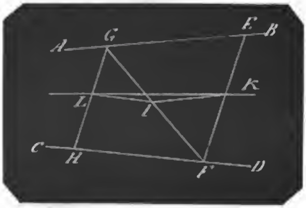
28) Durch einen gegebenen Punkt *K* eine gerade Linie zu zeichnen, welche mit 2 wenig convergirenden Linien AB und CD bei gehöriger Verlängerung in einerlei Punkt zusammentrifft.

I. Wenn der Punkt *K* innerhalb beider gegebenen Linien liegt.

Zeichne durch *K* eine beliebige Linie EF bis an die Linien AB und CD und in beliebiger Entfernung eine Linie $GH \mathrel{+\!\!\!\!=} EF$, verbinde zwei Endpunkte der beiden Parallelen, z. B. *F* und *G*, zeichne aus *K* die $KJ \mathrel{+\!\!\!\!=}$ der Seite EG des $\triangle FEG$ und durch *J* die $JL \mathrel{+\!\!\!\!=}$ der Seite FH des $\triangle GFH$, verbinde *L* mit *K*, so ist KL die verlangte Linie.

Es ist nämlich

Fig. 348.



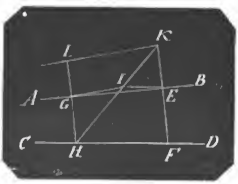
$EK : KF = GJ : JF = GL : LH.$

Bezeichnet man nämlich den Durchschnittspunkt zwischen AB und CD mit Z, so ist in dem $\triangle\, EFZ$ EF Grundlinie, $GH \parallel EF$, beide proportional getheilt, folglich trifft die Verbindungslinie der Theilpunkte verlängert die Spitze Z des $\triangle\, EFZ$.

II. Wenn der Punkt K aufserhalb beider gegebenen Linien liegt.

Ziehe beliebig KF, welche die AB in E schneidet, und aus dem beliebigen Punkt H zu KF eine Parallele

Fig. 349.



HG mit Verlängerung, ziehe $EJ \parallel FH$, verbinde G mit J, ziehe $KL \parallel GJ$, so ist KL die verlangte Linie.

Es ist nämlich

$KE : EF = KJ : JH = LG : GH.$

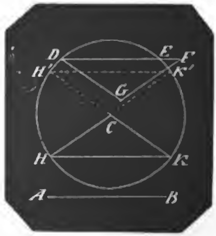
29) In einem gegebenen Kreise eine Sehne von gegebener Länge einzutragen, die einen gegebenen Punkt schneidet oder nach demselben hin gerichtet ist (s. Chorde No. 2 mit Fig. 286).

30) Durch einen in der Ebene eines Kreises gegebenen Punkt eine gerade Linie zu verzeichnen, welche in dem Kreise eine Sehne bildet, die einem gegebenen Peripheriewinkel zugehört (s. Chorde No. 5 mit Fig. 286).

31) In den gegebenen Kreis vom Mittelpunkt C eine gerade Linie AB, die kleiner als der Durchmesser ist, als Sehne einzutragen, die mit einer gegebenen Sehne $DE \parallel$ läuft.

Zeichne von einem Endpunkt D der Sehne aus in derselben die Länge DF = der gegebenen AB, zeichne über DF

Fig. 350.



das gleichschenklige $\triangle\, DGF$, wo die Schenkel $DG = FG =$ dem Halbmesser sind, ziehe aus dem Mittelpunkt C parallele Halbmesser CH, CK oder CH' und CK' mit DG und FG, so ist HK oder $H'K'$ die verlangte Sehne.

32) Zwei gerade Linien von gegebenen Längen a, b sollen in einen gegebenen Kreis von gröfserem Durchmesser als die gröfsere von a und b unter einem gegebenen $\angle$ als Sehnen eingetragen werden.

Zeichne von einem beliebigen Punkt A der Peripherie aus die Sehne AB = einer der gegebenen Linien, z.B. a, zeichne

Fig. 351.



in B den $\angle\, DBA$ = dem gegebenen $\angle$, mache $BD = b$, zeichne über BD mit dem Halbmesser als Schenkel das gleichschenklige $\triangle\, BDE$, ziehe aus dem Mittelpunkt C die Parallelen CF, CG mit DE, BE, ziehe FG, so ist diese die verlangte Sehne.

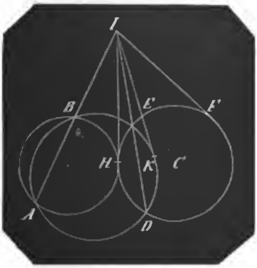
Oder trage an einer anderen Stelle HJ $= b$ als Sehne ein, fälle die Lothe CK auf HJ und CL mit etwa nöthiger Ver-

längerung auf BD, nimm in dem letzten Loth $CM = CK$, ziehe durch M die Parallele FG mit BD.

33) Es ist ein Kreis DEF mit dem Mittelpunkt C gegeben, und eine gerade Linie AB in derselben Ebene mit dem Kreise, man soll einen Kreis construiren, der den gegebenen Kreis berührt und die Linie AB als Sehne enthält.

Nimm in der Peripherie des Kreises einen beliebigen Punkt D, zeichne durch die Punkte A, B, D einen Kreis, ziehe

Fig. 352.



DE durch den Durchschnittspunkt E beider Kreise, verlängere DE und AB bis zu ihrem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt J, zeichne die Tangente JH an den Kreis FED, so ist der Kreis durch A, B, H der verlangte, und JH die gemeinschaftliche Tangente beider Kreise.

Denn es ist, da JH die Tangente an dem Kreise DEF,

$$JH^2 = JE \times JD$$

Da aber AJ und DJ zugleich zu demselben Kreise $ABED$ gehören, so ist auch $JE \times JD = JB \times JA =$ dem Quadrat einer Tangente JK an dem Kreis $ABED$.

Nun ist aber $JE \times JD$

also auch $JB \times JA = JH^2$

folglich ist JH eine Tangente in H in dem Kreise durch die Punkte A, B, H.

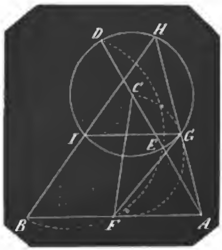
Zeichnet man die zweite Tangente JF an den Kreis DEF, so genügt auch ein Kreis durch die Punkte A, B, F der Aufgabe, und der Kreis ABF tangirt den gegebenen Kreis DEF innerhalb.

Ist AB so gelegen, dafs das auf deren Mitte errichtete Loth den Mittelpunkt C des gegebenen Kreises trifft, dann sind die Durchschnittspunkte dieses Loths mit der Peripherie des gegebenen Kreises die Punkte, welche wie H und F mit A, B die Peripherien der verlangten Kreise bestimmen. Jede Linie, wie DE durch einen willkührlich angenommenen Punkt liegt dann $\parallel$ mit AB.

34) Es ist ein Kreis DGJ mit dem Mittelpunkt C, und in dessen Ebene eine gerade Linie AB gegeben, man soll den Punkt (H) in der Peripherie des Kreises finden, von dem aus die geraden Linien HA und HB in der Peripherie einen Bogen GJ abschneiden, dessen Sehne GJ der gegebenen Linie AB $\parallel$ läuft.

Ziehe von einem Endpunkt z. B. A der Linie AB durch den Mittelpunkt C die Linie AD, welche die Peripherie in dem zweiten Punkt E schneidet, lege durch die drei Punkte DEB einen Kreis; aus

Fig. 353.



dessen Durchschnittspunkt F mit AB zeichne die nach A hin gelegene Tangente FG an den Kreis, indem über CF der Halbkreis CGF den Punkt G ergiebt, ziehe durch G die Linie AH, so ist H der verlangte Punkt, und wenn man BH und die Sehne GJ zieht, so ist $GJ \parallel AB$.

Denn da die vier Punkte D, H, E, G in einerlei Kreisumfang liegen, so ist

$$AG \times AH = AE \times AD$$

und da die 4 Punkte D, E, F, B sich ebenfalls in einerlei Kreisumfang befinden, so ist auch

$$\underline{AE \times AD = AF \times AB}$$

daher $AG \times AH = AF \times AB$

oder $AG : AF = AB : AH$

folglich $\triangle AGF \sim \triangle ABH$

daher $\angle AFG = \angle AHB$

da nun $\angle AHB = \angle FGJ$

auch $\angle AFG = \angle FGJ$

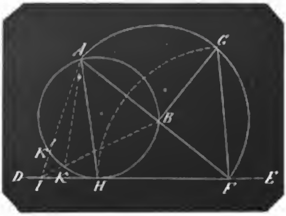
und $GJ \parallel AB$

35) Es sind 2 Punkte A, B und eine in derselben Ebene liegende gerade Linie DE gegeben, einen Kreis zu zeichnen, der durch die Punkte A, B trifft und DE tangirt.

Ziehe AB, und verlängere diese bis

zum Durchschnittspunkt F mit DE, zeichne über AF den Halbkreis, errichte in B die rechtwinklige Ordinate BG, mache FH

Fig. 354.



in $CD = FG$, so ist der durch die Punkte A, B, H gelegte Kreis der verlangte.

Denn es ist

$$AF \times BF = FG^2 = FH^2$$

folglich FH Tangente und AB Sehne in demselben Kreise, der also durch A, B und H gehen mufs.

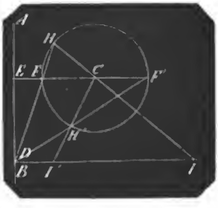
Hiermit ist zugleich durch Construction in DE der Punkt (H) gefunden, in welchem die beiden Linien von A und B den gröfsten Winkel einschliefsen. Denn zieht man nach irgend einem anderen Punkt z. B. J die Linien AJ und BJ, so hat man, wenn man noch von A nach dem Durchschnittspunkt K des anderen Schenkels mit der Peripherie oder von B nach K' eine Linie zieht:

$$\angle AKB = \angle AHB$$
$$\angle AKB > \angle AJB$$
folglich $$\angle AHB > \angle AJB$$

36) Es ist eine gerade Linie AB und ein Kreis $FHF'H'$ gegeben, einen Kreis zu zeichnen, der den gegebenen Kreis und die gerade Linie in dem gegebenen Punkt D berührt.

Es existiren 2 solcher Kreise. Wenn man nämlich die Normale $F'E$ durch den

Fig. 355.



Mittelpunkt C des Kreises auf AB fällt, und durch beide Durchschnittspunkte F, F' dieses Loths mit der Peripherie die geraden Linien HD und $F'D$ zieht, den Mittelpunkt C mit den Durchschnittspunkten H, H' dieser Linien verbindet, und sie bis an die in D auf AB errichtete Normale DJ verlängert, so entstehen 2 Punkte J, J'.

Der Kreis aus dem Mittelpunkt J berührt den gegebenen Kreis in H, der aus J' berührt ihn in H'.

Denn da $EF' \parallel DJ$
so ist $\triangle CH'F' \sim \triangle J'H'D$
folglich $J'H' = J'D$
ebenso $\triangle CHF \sim \triangle JHD$
folglich $JH = JD$

37) Einen Kreis zu construiren, der den einen Schenkel AC eines gegebenen Winkels ACB tangirt, und den anderen Schenkel BC in dem gegebenen Punkt D so

Fig. 356.



trifft, dafs die Tangente an D mit BC einen gegebenen $\angle CDG = \alpha$ bildet.

Nimm $GF = GD$, errichte in D auf DG und in F auf AC Lothe, der Durch-

Fig. 357.



schnittspunkt E beider ist der Mittelpunkt des verlangten Kreises.

38) Es ist ein $\angle ACB$ und innerhalb desselben ein Punkt D gegeben, einen Kreis zu zeichnen, der die Schenkel des $\angle$ und den Punkt Dberührt. Halbire $\angle ACB$ durch CE, ziehe durch D die Linien CF errichte in einen beliebigen Punkt G des an D

näheren Schenkels eine Normale **GH** bis in die Halbirungslinie, beschreibe aus **H** mit **HG** den Bogen *FGJ*, ziehe *HF*, *HJ*, aus *D* die Parallelen *DE* mit *HJ* und *DK* mit *HF* bis in die Halbirungslinie, so sind *E* und *K* Mittelpunkte zweier Kreise, von welchen jeder der verlangte ist.

Fig. 358.



Denn fällt man die Normale *KL* auf *AC*

so ist $\triangle CGH \sim \triangle CLK$

und $\triangle CFH \sim \triangle CDK$

daher $CH : CK = HG : KL$

und $CH : CK = HF : KD$

da nun $HG = HF$

so ist auch $KL = KD$

für den Punkt *E* gilt derselbe Beweis.

Hiermit ist zugleich die Constr. enthalten: Einen Kreis zu zeichnen, der die Schenkel eines Winkels und zugleich einen zwischen ihnen liegenden Kreis berührt. Denn denkt man sich *D* als den Mittelpunkt eines Kreises vom Halbmesser *r*, so würden aus *E* mit dem Halbmesser $ED - r$ der Kreis und 2 Schenkel eines ∠ berührt werden, die in der Entfernung $= r$ mit den Schenkeln der ∠ *ACB* innerhalb ∦ sind, und mit dem Halbmesser $ED + r$ der Kreis und 2 Schenkel, die von *AC* und *BC* um *r* aufserhalb entfernt sind. Dasselbe findet aus *K* mit $KD \pm r$ statt.

Die Constr. geschieht also offenbar, indem man mit den Schenkeln des gegebenen ∠ innerhalb und aufserhalb in der Entfernung *r* parallele ∠ zeichnet und für jeden der beiden die Mittelpunkte der Kreise findet, die den Mittelpunkt des gegebenen Kreises zugleich mit den Schenkeln berühren; man erhält sodann 4 Kreise, zwei, welche den gegebenen Kreis aufserhalb und zwei, welche ihn innerhalb und zugleich die Schenkel des gegebenen Winkels berühren.

39) In einen Kreis ein △ zu beschreiben, welches einem gegebenen △ *GHJ* gleichwinklig sei (Euklid IV, 2.)

Zeichne an einen beliebigen Punkt *A* der Peripherie die Tangente *DE*, nimm ∠ *DAB* = dem einen z. B. *J* und ∠ *EAF*

Fig. 359.



einem zweiten z. B. *H* der ∠ des gegebenen Dreiecks, ziehe *BF*, so ist △ *ABF* das verlangte: $\angle A = \angle G$, $\angle B = \angle H$, $\angle F = \angle J$.

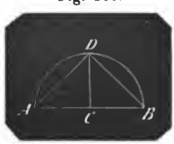
40) Um einen Kreis ein △ zu beschreiben, welches einem gegebenen △ *GHJ* gleichwinklig sei (Euklid IV, 3).

Verlängere eine Seite *HJ* nach *K* und *L*, ziehe einen beliebigen Halbmesser *CA*, nimm ∠ *ACB* = einem der Aufsenwinkel, z. B. *J*, ∠ *ACD* dem andern *H*, ziehe an *A*, *B*, *D* Tangenten bis zu ihren gegenseitigen Durchschnittspunkten, so ist △ *EFM* das verlangte: $\angle E = \angle H$, $\angle F = J$, $\angle M = \angle G$.

41) Ueber einer geraden Linie *AB* ein gleichschenkliges und rechtwinkliges △ zu zeichnen.

Halbire *AB* in *C*, beschreibe über *AB*

Fig. 360.



den Halbkreis, errichte in *C* den lothrechten Halbmesser *CD*, ziehe *AD* und *BD*, so ist △ *ABD* das verlangte.

42) Ueber einer geraden Linie *AB* ein gleichschenkliges △ mit einem gegebenen ∠ *α* an der Spitze zu zeichnen.

Zeichne an einem der Endpunkte von AB, z. B. an A eine beliebige gerade Linie AE, an einen beliebigen Punkt D derselben trage den $\angle ADF = \alpha$, ziehe $BE \parallel DF$,

Fig. 361.

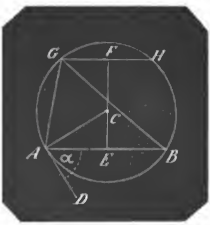


beschreibe einen durch die Punkte A, B und E gehenden Kreis, errichte in der Mitte G von AB das Loth GH bis in die Peripherie, ziehe AH, BH, so ist $\angle AHB = \alpha$, $AH = BH$ und $\triangle ABH$ das verlangte.

43) Aus der gegebenen Grundlinie a, der Höhe h und dem $\angle \alpha$ an der Spitze das Dreieck zu zeichnen.

Zeichne die Linie $AB = a$, $\angle BAD = \alpha$, halbire AB in E, errichte das Loth EF

Fig. 362.



$= h$ auf AB, zeichne $\angle DAC = R$, beschreibe aus C in EF mit $AC = BC$ einen Kreis, ziehe durch F die Sehne $GH \parallel AB$, so ist $\triangle GAB$ wie $\triangle HAB$ das verlangte.

44) Zur Verzeichnung eines Dreiecks sind gegeben eine Seite und die Höhen auf die beiden anderen Seiten.

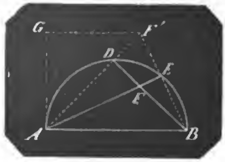
Zeichne über der gegebenen Seite AB den Halbkreis, trage von A aus die eine, und von B aus die andere Höhe als Sehnen AD und BE in den Halbkreis, ziehe AE und BD, so giebt deren Durchschnittspunkt F das verlangte $\triangle ABF$.

Sind AE und BD die Höhen, so überkreuzen sie sich, und der in den Verlängerungen von AD und BE liegende Punkt F' ergiebt das verlangte $\triangle ABF'$.

45) Zur Verzeichnung eines $\triangle$ ist gegeben eine Seite, die Höhe H auf derselben und eine der beiden anderen Höhen H'.

Zeichne über der gegebenen Seite AB einen Halbkreis, errichte in einem Endpunkt A auf AB das Loth $AG = H$, ziehe

Fig. 363.

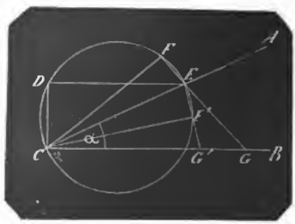


aus G eine Parallele mit AB, trage von A aus die zweite Höhe H' als Sehne AE ein, ziehe durch E die Linie BE, bis sie die Parallele in F' trifft, ziehe AF', so ist $\triangle ABF'$ das verlangte.

46) Zur Verzeichnung eines $\triangle$ ist gegeben ein $\angle \alpha$, die Höhe H auf die gegenüberliegende Seite und die Höhe H' auf eine der dem $\angle$ anliegenden Seiten.

Zeichne $\angle ACB =$ dem gegebenen $\angle \alpha$, errichte in C die Normale $CD = H'$, ziehe $DE \parallel BC$ bis in den Schenkel CA, beschreibe über CE den Halbkreis CFE, welcher auch den Punkt D berührt, trage

Fig. 364.



von C aus die Höhe H als Sehne CF ein, ziehe durch E die Linie FG, so ist $\triangle CEG$ das verlangte.

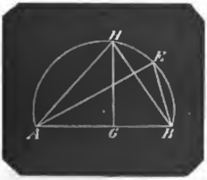
Zeichnet man den zweiten Halbkreis CFE, trägt H als Sehne CF' ein, zieht durch F' die Linie EG', so erhält man ein zweites $\triangle CEG'$ als das verlangte.

47) Zur Verzeichnung eines Dreiecks

sind gegeben die beiden Abschnitte, in welche eine Seite durch eine Höhe auf derselben getheilt wird, und der Winkel an der Spitze.

Lege beide Abschnitte **AG, GB** in einer geraden Linie zusammen, construire wie

Fig. 365.

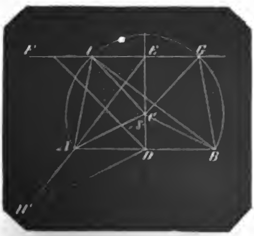


No. 42 mit Fig. 361 $\angle AEB =$ dem gegebenen $\angle$, beschreibe um A, B, E den Kreis, errichte das Loth GH, ziehe AH und BH, so ist $\triangle AHB$ das verlangte.

48) Zur Verzeichnung eines $\triangle$ sind gegeben die Grundlinie a, die Höhe h und die Differenz δ der der Grundlinie anliegenden Winkel.

Zeichne $AB = a$, errichte in der Mitte D auf derselben ein Loth $DE = h$, ziehe durch E die $FG \parallel AB$, mache $\angle EDF = \delta$,

Fig. 366.



ziehe EA mit Verlängerung, und schneide diese aus D mit DF in H, ziehe HD, $AC \parallel$ damit, und beschreibe aus C mit $CA = CB$ einen Kreis, der die FG in G und J schneidet, ziehe JA und JB oder GA und GB, so ist $\triangle AJB$ oder $\triangle AGB$ das verlangte.

Denn es ist

$$\angle JBG = \angle ABG - \angle ABJ$$
$$= \angle BAJ - \angle ABJ$$
$$\angle JBG = \tfrac{1}{2}\angle JCG - \angle JCE$$

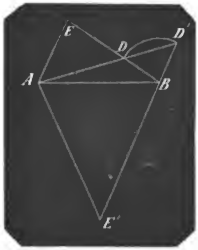
daher $\angle BAJ - \angle ABJ = \angle JCE$

Nun ist $JC = AC$
$FD = DH$
da nun $DH \parallel AC$
so ist auch $FD \parallel JC$
und $\angle JCE = \angle FDE = \delta$
daher $\angle BAJ - \angle ABJ = \delta$

49) Zur Verzeichnung eines Dreiecks ist gegeben eine Seite a, die Differenz δ der beiden anliegenden $\angle$ und die Differenz d der beiden anderen Seiten.

Zeichne $AB = a$, an einem Endpunkt, z. B. A, den $\angle DAB = \frac{1}{2}\delta$, schneide aus B die Linie AD mit dem Halbmesser d

Fig. 367.



in D, ziehe BD mit Verlängerung, nimm $\angle DAE = \angle ADE$, so ist $\triangle ABE$ das verlangte.

Denn da $AE = DE$
so ist $BE - AE = BD = d$

ferner ist $\angle EAB = \angle EAD + \dfrac{\delta}{2}$

$$\angle EBA = \angle EDA - \angle BAD = \angle EAD - \frac{\delta}{2}$$

folglich $\angle BAE - \angle ABE = \delta$

Man erhält noch ein zweites $\triangle AD'E'$, wenn man AD durch d aus B in dem zweiten Punkt D' schneidet, das Dreieck $AD'E'$ durch $D'B$ mit Verlängerung und $AE' = BE'$ bildet. Denn es ist auch hier $D'E' - AE' = BD' = d$

$$\angle D'AE' = \angle BAE' + \frac{\delta}{2}$$

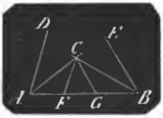
$$\angle AD'E' = \angle ABE' - \frac{\delta}{2} = \angle BAE' - \frac{\delta}{2}$$

Die gröſseren und die kleineren $\angle$ in beiden Dreiecken sind um $\frac{1}{2}\delta$ unterschieden. Tangirt der Bogen aus B mit d die Linie AD, oder trifft sie nicht, so ist die Constr. unmöglich.

50) Zur Verzeichnung eines $\triangle$ ist gegeben die Summe s der 3 Seiten und 2 Winkel.

Zeichne die Linie $AB = s$, an deren

Fig. 368.

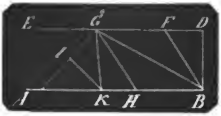


Endpunkten die $\angle DAB$, EBA = den gegebenen, halbire diese durch AC und BC, von dem Durchschnittspunkt C beider ziehe die CF ‡ AD, CG ‡ BE, so ist $\triangle CFG$ das verlangte.

51) Zur Verzeichnung eines $\triangle$ ist gegeben die Summe s der 3 Seiten, ein $\angle$ und eine diesem $\angle$ gegenüberstehende Höhe h.

Zeichne die Linie $AB = s$, errichte in einem Endpunkt z. B. B das Loth $BD = h$, ziehe DE ‡ AB, zeichne $\angle ABF$ = dem gegebenen, halbire diesen durch BG, ziehe GH ‡ BF, ziehe AG, errichte in der

Fig. 369.

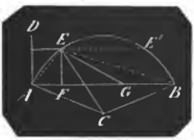


Mitte auf AG die Normale JK bis in AB, so ist $\triangle GHK$ das verlangte.

52) Zur Verzeichnung eines $\triangle$ ist gegeben die Summe s der drei Seiten, ein Winkel und die durch die Spitze dieses Winkels gerichtete Höhe.

Es sei $AB = s$, zeichne $\angle CAB = \angle CBA$ = dem halben gegebenen Winkel, beschreibe aus C durch A und B den Kreisbogen, errichte in einem Punkt A auf

Fig. 370.



AB das Loth $AD = h$, ziehe DE oder DE' ‡ AB, so sind E, E' die Punkte zur Wahl der Spitze des $\triangle$; wählt man E, so ziehe CE, zeichne $\angle CEF = \angle CEG$ = dem halben gegebenen $\angle$, so ist $\triangle EFG$ das verlangte.

Denn da $\qquad CA = CE$

so ist $\qquad \angle CAE = \angle CEA$

und da $\qquad \angle CAF = \angle CEF$

so ist $\qquad \angle EAF = \angle AEF$

woraus $\qquad EF = AF$

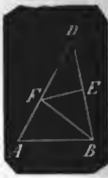
ebenso findet man $EG = BG$

folglich ist $EF + EG + FG = AB$

53) Zur Verzeichnung eines $\triangle$ ist gegeben die Summe s zweier Seiten, die dritte a und ein dieser anliegender Winkel.

Zeichne $AB = a$, $\angle DAB$ = dem ihr anliegenden $\angle$, $AD = s$, ziehe BD, halbire BD in E, errichte das Loth EF auf BD, ziehe BF, so ist $\triangle ABF$ das verlangte.

Fig. 371.



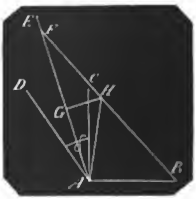
54) Zur Verzeichnung eines $\triangle$ ist gegeben die Summe s zweier Seiten, die dritte a und der dieser Seite gegenüberliegende Winkel.

Zeichne $\angle ADB$ = dem halben gegebenen $\angle$, nimm $AD = s$, schneide aus A mit $AB = a$ den zweiten Schenkel DB in B, halbire BD in E, errichte die Normale EF, ziehe BF, so ist $\triangle ABF$ das verlangte.

55) Zur Verzeichnung eines $\triangle$ ist gegeben die Summe s zweier Seiten, die dritte a und die Differenz δ der beiden dieser Seite anliegenden Winkel.

Zeichne $AB = a$, errichte in A auf AB ein Loth AC, zeichne $CAD = \delta$, halbire

Fig. 372.



$\angle CAD$ durch AE, schneide AE in F aus B mit $BF = s$, ziehe BF, errichte in der Mitte von AF auf dieser eine Normale GH bis in die Richtung BF, ziehe AH, so ist $\triangle ABH$ das verlangte.

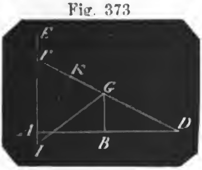
Denn $AH = FH$, folglich $AH + BH = BF = s$

Ferner ist	$\angle HAB + \angle HAF = R + \frac{1}{2} \angle CAD$
daher	$2 \angle HAB + 2 \angle HAF = 2R + \angle CAD$
Es ist aber	$2 \angle HAF = \angle AHB$
daher	$2 \angle HAB + \angle AHB = 2R + \angle CAD$
Nun ist	$\angle HAB + \angle AHB + \angle ABH = 2R$
folglich	$\angle HAB - \angle ABH = \angle CAD = \delta$

56. Zur Verzeichnung eines $\triangle$ ist gegeben die Summe s zweier Seiten und die Höhen H, H' auf beide Seiten.

Nimm in einer graden Linie $AB =$ der einen Höhe H und $BD =$ der anderen H', errichte in einem der Endpunkte z. B. A das Loth AE, schneide dieses aus D

Fig. 373

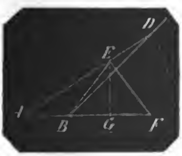


mit der gegebenen Summe s in F, ziehe DF, errichte in B auf AD das Loth BG bis in DF, mache von F nach A hin $FJ = DG$, ziehe JG so ist $\triangle FGJ$ das verlangte.

Denn $FJ + FG$ ist $=$ der gegebenen Summe s, $AB = H$ die Höhe auf FJ, und wenn man die Normale JK auf DF fällt, so ist $\triangle FJK \cong \triangle GDB$, also $JK = BD =$ der Höhe H' auf die Seite FG.

57. Zur Verzeichnung eines $\triangle$ sind gegeben die Summe s zweier Seiten, der von beiden eingeschlossene $\angle \alpha$ und die Differenz d der beiden Abschnitte, welche die Höhe auf der dritten Seite bildet.

Fig. 374.



Zeichne $AB = d$, verlängere AB nach F, zeichne $\angle DBF =$ dem halben Nebenwinkel von $\alpha = 90° - \alpha$, schneide BD aus A mit s in D, ziehe AB, zeichne $\angle DBE = \angle BDE$, beschreibe aus E mit EB einen Bogen BF, ziehe EF so ist $\triangle EAF$ das verlangte.

Denn 1. da $EF = EB = ED$ so ist $AE + EF = AD = s$

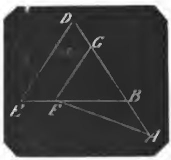
2. Fällt man das Loth EG auf AF, so ist $AG = BG + AB = BG + d$ und $FG = BG$ daher $AG - FG = AB = d$

3. $\angle DEF$ (als Centriwinkel) $= 2 \times \angle DBF$ (Peripheriewinkel) oder $\angle DEF = 2\left(90° + \frac{\alpha}{2}\right) = 180° - \alpha$ folglich ist $\angle AEF = \alpha$.

58. Zur Verzeichnung eines $\triangle$ ist gegeben die Differenz d zweier Seiten, die dritte a und der dieser Seite gegenüberliegende Winkel.

Nimm $AB = d$, verlängere AB um ein beliebiges BD, zeichne $\angle BDE =$ dem gegebenen $\angle$, nimm $DE = DB$, ziehe BE,

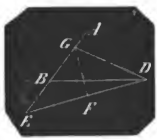
Fig. 375.



schneide BE aus A mit der gegebenen dritten Seite $AF = a$ in F, ziehe AF und $FG \# DE$ bis in die Richtung AD, so ist $\triangle AFG$ das verlangte.

59. Zur Verzeichnung eines $\triangle$ ist gegegeben die Differenz d zweier Seiten, der der größeren von beiden gegenüberliegende $\angle$ und die dritte Seite a.

Fig. 376.

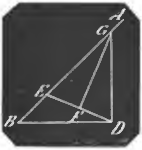


Nimm $BD = a$, zeichne $\angle DBA =$ dem gegebenen $\angle$, verlängere AB durch B um $BE = d$, ziehe DE, errichte in der Mitte auf DE eine Normale FG bis in die Richtung BA, ziehe GD, so ist $\triangle BDG$ das verlangte.

60. Zur Verzeichnung eines $\triangle$ ist gegeben die Differenz d zweier Seiten, der der kleineren von beiden gegenüberliegende $\angle$ und die dritte Seite a.

Zeichne $\angle ABD =$ dem gegebenen, nimm $BD = a$, $BE = d$, ziehe DE, errichte in

Fig. 377.

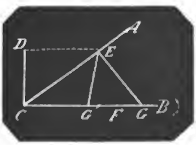


der Mitte auf DE die Normale FG bis in die Richtung von AB, ziehe DG, so ist $\triangle BDG$ das verlangte.

61. Zur Verzeichnung eines $\triangle$ ist gegeben ein Winkel, die Differenz der ihn einschliefsenden Seiten und die Höhe h auf einer dieser Seiten.

Zeichne $\angle ACB =$ dem gegebenen, errichte in dem Scheitelpunkt C auf einem

Fig. 378.

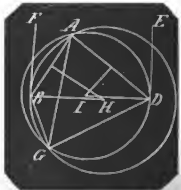


der Schenkel z. B. CB das Loth $CD = h$, ziehe $DE \ddagger CB$ bis in den zweiten Schenkel, nimm den ersten Schenkel $CF = CE$. Soll nun die Höhe auf der gröfseren der beiden einschliefsenden Seiten sein, so nimm FG nach B hin = der gegebenen Differenz, so ist $\triangle ECG$ das verlangte. Soll die Höhe auf der kleineren Seite stehen so nimm $FG' =$ der Differenz nach C hin und es ist $\triangle ECG'$ das verlangte.

62. Zur Verzeichnung eines Vierecks sind gegeben 2 Seiten AB, AD und der von ihnen eingeschlossene $\angle BAD$, ferner die beiden $\angle$, welche durch die Diagonale aus A mit den beiden anderen Seiten des Vierecks gebildet werden.

Zeichne $\angle ADE =$ dem einen, $\angle ABF =$ dem anderen der gegebenen $\angle$ an der Diagonale, errichte in B auf BF in der Mitte auf AB Lothe, aus deren Durchschnittspunkt H zeichne den Kreis durch A und B, so ist BF eine Tangente; eben

Fig. 379.

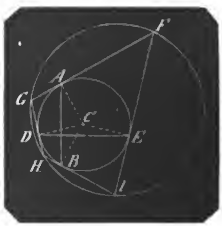


so errichte in D auf DE und in der Mitte auf AD Lothe, aus deren Durchschnittspunkt J zeichne den Kreis durch A, D, so ist DE eine Tangente. Nach dem Durchschnittspunkt G beider Kreise ziehe die Linie AG, so ist AG die Diagonale und $ABGD$ das verlangte Viereck; denn $\angle AGB$ ist $= \angle ABF$ und $\angle AGD$ ist $= \angle ADE$.

63. Um einen gegebenen Kreis ein Viereck zu zeichnen, um welches wieder ein Kreis sich beschreiben läfst.

I. Zeichne in dem Kreis beliebig 2 rechtwinklig sich schneidende Sehnen AB und DE, zeichne an den vier Endpunkten Tangenten, so bilden diese mit ihren Durchschnittspunkten das verlangte Viereck $FGHJ$.

Fig. 380.



Denn wenn C der Mittelpunkt des Kreises ist, so hat man

$$\angle CEJ = \angle CBJ = R$$

folglich $\angle BCE + \angle BJE = 2R$

eben so $\angle DCA + AGD = 2R$

da nun *AB* und *DE* normal sind, so ist (s. Chorde No. 7)

$$\angle ACD + \angle BCE = 2R$$

folglich $\angle BJE + \angle AGD = 2R$

eben so $\angle GHJ + \angle GFJ = 2R$

mithin liegen die 4 Punkte *F*, *G*, *H*, *J* in einem Kreise.

Errichtet man daher auf zweien Seiten des Vierecks in deren Mitten Normalen, so erhält man in deren Durchschnittspunkt den Mittelpunkt zu dem um das Viereck punktirt gezeichneten Kreis.

II. Zeichne in dem gegebenen Kreise ein beliebiges Viereck, fälle vom Mittelpunkt *C* des Kreises Normalen auf die

Fig. 381.

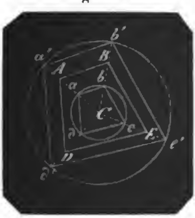


Seiten, verlängere diese bis zur Peripherie und zeichne an diese Halbmesser Tangenten, so bilden diese mit ihren Durchschnitts-Punkten das verlangte Viereck.

64. In einem gegebenen Kreise ein Viereck zu beschreiben, in dem wieder ein Kreis zu beschreiben ist.

Zeichne um einen beliebigen Kreis das Viereck No. 63. Gesetzt es sei dies das Viereck *ABDE*, so liegt dies also in und

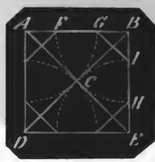
Fig. 382.



um einen Kreis, construire nun den Mittelpunkt *C*, so dafs $CA = CB = CD = CE$; beschreibe um *C* mit dem gegebenen Halbmesser den Kreis; fällt dieser innerhalb des Vierecks, so erhält man aus der Verbindung der Durchschnittspunkte der Radien mit der Peripherie das verlangte Viereck *abde*; fällt er ausserhalb des Vierecks, so verlängere die Radien bis zur Peripherie und man erhält das verlangte Viereck *a' b' d' e'*.

65. Ein Quadrat zu einem regulären Achteck abzustumpfen. Zeichne in dem Quadrat *ABDE* beide Diagonalen und

Fig. 383.



beschreibe aus jeder Ecke mit der halben Diagonale Quadranten, so schneiden diese die Seiten in Punkten, die mit einander durch gerade Linien verbunden das reguläre Achteck geben.

Denn aus $AC = BC = BF = BH$

und $AC^2 + BC^2 = AB^2$

folgt $BF^2 + BH^2 = AB^2$

woraus $FH = AB$

Nun ist $FH : BF = GJ : BG$

oder $AB : BF = GJ : BG$

oder $FG + 2BG : FG + BG = GJ : BG$

woraus $BG : FG + BG = GJ - BG : BG$

oder $BG^2 = (FG + BG)(GJ - BG)$

noch ist $BG^2 = GJ^2 - BJ^2 = GJ^2 - BG^2$

$= (GJ + BG)(GJ - BG)$

hieraus

$$(FG + BG)(GJ - BG) = (GJ + BG)(GJ - BG)$$

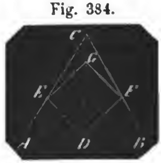
oder $FG + BG = GJ + BG$

woraus $FG = GJ$

dasselbe gilt von allen übrigen abgestumpften Seiten.

66. In ein gleichseitiges $\triangle$ *CAB* ein Quadrat zu zeichnen, welches mit 3 Ecken die 3 Seiten und eine derselben in der Mitte berührt.

Fig. 384.



Fälle aus einer Ecke z. B. *C* des △ die Höhe *CD*, halbire beide rechte Winkel *CDA* und *CDB* durch *DE* und *DF* und vollende das Quadrat *DEFG*.

67. In ein gleichseitiges △ *CAB* ein Quadrat zu zeichnen, welches mit einer Seite in eine Seite des △ z. B. in *AB* fällt und mit den gegenüberliegen Ecken die beiden anderen Seiten des △ berührt.

Fig. 385.

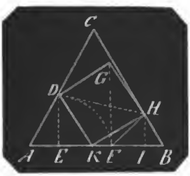


Fälle die Höhe *CD*, nimm beliebig *DI*, errichte in *I* ein Loth $IK = 2DI$ auf *AB*, ziehe *KD* so ist der Durchschnittspunkt *H* derselben mit *CB* die eine Ecke des Quadrats, ziehe also *HG* ∦ *AB*, fälle die Lothe *GF* und *HE*, so ist *EFGH* das verlangte Quadrat.

Denn da $DE : EH = DI : IK = 1 : 2$
so ist $2DE = EF = GH = EH = FG$.

68. Von einem beliebigen in einer Seite *AC* des gleichseitigen △ *ABC* liegenden Punkt *D* in das △ ein Quadrat zu zeichnen, welches mit noch zweien Ecken die beiden anderen Seiten des △ berührt.

Fig. 386.



Fälle das Loth *DE*, beschreibe aus *E* den Bogen *DF*, errichte das Loth *FG* auf *AB*, halbire den *R*∠ *GFB* durch *FH* so ist *DH* die Diagonale des verlangten Quadrats; demnach fälle das Loth *HI*, nimm $EK = HI$, ziehe *DK*, *KH* und ∦ mit denselben *HG* und *DG*, so ist *DGHK* das verlangte Quadrat.

Denn es ist $DE = EF$
$HI = FI$

daher $DE + HI = EF + FI = EK + KI$

Da nun $HI = EK$
so ist $DE = KI$
folglich $\triangle DEK \cong \triangle FIH$
folglich $DK = HK$
ferner $\angle DKE = \angle KHI$
aber $\angle KHI + \angle HKI = R$
folglich $\angle DKE + \angle HKI = R$
folglich $\angle DKH = R$.

69. In ein Quadrat *ABCD* ein gleichseitiges △ zu zeichnen, welches mit einer Ecke eine Ecke *C* des Quadrats und mit den anderen beiden Ecken die ihr gegenüberliegenden Seiten berührt.

Fig. 387.



Zeichne über einer der Ecke *C* gegenüberliegenden Seiten z. B. *AB* das gleichseitige △ *AEB*, ziehe aus *C* durch *E* die Linie *CF*, nimm $CG = CF$, ziehe *FG*, so ist △ *CFG* das verlangte.

Denn da $\angle\alpha = \frac{2}{3}R$
so ist $\angle\beta = \frac{1}{3}R$
also $\angle\gamma + \delta + \eta = \frac{5}{3}R$
da nun $AE = AB = AC$
so ist $\eta = \gamma + \delta = \frac{5}{6}R$
also $\varepsilon = \frac{1}{6}R$
Nun ist $CA = CD$
$CG = CF$
$\angle CAG = \angle CDF$

folglich $\triangle CAG \cong \triangle CDF$
und hiermit $\angle\gamma = \angle\varepsilon = \frac{1}{6}R$
daher $\angle\gamma = \frac{2}{3}R$
hiermit $\angle\vartheta + \angle\lambda = \frac{4}{3}R$
also $\angle\vartheta = \angle\lambda = \frac{2}{3}R$

70. In einem Halbkreis ein Quadrat zu zeichnen, dessen eine Seite mit dem Durchmesser zusammenfällt.

Nimm vom Mittelpunkt *C* auf dem Halbmesser eine beliebige Länge *CD*, errichte in *D* ein Loth auf dem Durchmesser, nimm dasselbe $DE = 2CD$, ziehe *CE*, so ist der Durchschnittspunkt *F* in der Peripherie eine Ecke des Quadrats, ziehe daher *FG* ∦ *AB*, fälle die Lothe *FI*, *GH*, so ist *FGHI* das verlangte Quadrat.

Fig. 388.



71. Dasselbe Quadrat im Halbkreise in ein Rectangel im Halbkreise zu verwandeln.

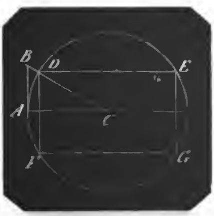
Halbire eine lothrechte Seite in *M*, ziehe durch den Theilpunkt *M* die Parallele *KL* mit dem Durchmesser, fälle die Lothe *KN*, *LO* so ist Rechteck *KLON* das verlangte. Nämlich die beiden Quadrate *FM*, *GM* sind nach *KH*, *IL* verlegt worden.

Mit dieser Constrnction ist zugleich die Aufgabe gelöst, in den Halbkreis 6 gleiche Quadrate oder in den Kreis 12 gleiche Quadrate zu beschreiben.

72. In einen Kreis ein Rectangel zu beschreiben, dessen anliegende Seiten wie $n : m$ sich verhalten.

Theile den Halbmesser *AC* in n gleiche Theile, errichte in *A* die Tangente, nimm

Fig. 389.

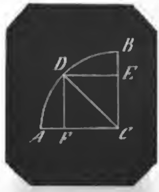


in derselben $AB = m$ der gleichen Theile ziehe *BC*, aus dem Durchschnittspunkt *D* in der Peripherie ziehe $DE \ddagger AC$, fälle die Lothe *DF*, *EG*, ziehe *FG*, so ist *DEFG* das verlangte Rectangel.

73. In einen Quadrant ein Quadrat zu zeichnen, welches mit einer Ecke in dem Mittelpunkt und mit beiden anliegenden Seiten in den Halbmessern liegt.

Halbire den Quadrant durch den Halbmesser *CD*, ziehe $DE \ddagger AC$, $DF \ddagger BC$, so ist *CEDF* das verlangte Quadrat.

Fig. 390.

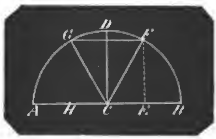


74. In einen Halbkreis ein gleichseitiges △ zu zeichnen, dessen eine Ecke in dem Mittelpunkt liegt.

Halbire den Halbmesser *BC* in *E*, errichte die Ordinate *EF*, ziehe $FG \ddagger AB$, *CF* und *CG*, so ist △ *CFG* das verlangte.

Aus dieser Construction entspringt unmittelbar die des regulären Sechsecks im Kreise: Man halbirt 2 in einem Durch-

Fig. 391.



messer liegende Halbmesser in *E* und *H* und zieht durch diese Punkte normal auf *AB* die Sehnen, welche aufser *A* und *B* die übrigen 4 Punkte bestimmen.

75. In einem Quadrant ein gleichseitiges △ zu zeichnen, dessen eine Ecke den Bogen halbirt.

Nimm vom Mittelpunkt *C* aus zwei beliebig gleiche Stücke *CD*, *CE* auf beiden

Fig. 392.

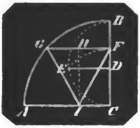


Halbmessern, zeichne über *DE* das gleichseitige △ *GDE*, ziehe von *F*, dem Halbirungspunkt des Quadrant Parallelen *FH*, *FI* mit *GD* und *GE*, verbinde *HI*, so ist △ *FHI* das verlangte △.

76. In einen Quadrant ein gleichseitiges △ zu zeichnen, dessen eine Seite mit einem Halbmesser ∦ läuft.

Theile den anderen Halbmesser BC in 7 gleiche Theile, beschreibe über BC den Halbkreis, errichte in dem 3ten Theilpunkt D vom Mittelpunkt C aus auf BC

Fig. 393.



die rechtwinklige Ordinate DE, zeichne aus C den Bogen EF, so ist FG ∦ AC die eine Seite des verlangten Dreiecks; halbire nun FG in H, errichte das Loth HI bis in AC, ziehe GI, FI, so ist $\triangle FGI$ das verlangte △

Denn es ist

$$CF^2 = CE^2 = CD \cdot BC = \tfrac{3}{7}BC \cdot BC = \tfrac{3}{7}BC^2$$

$$FG^2 = BF(BC + CF)$$
$$= (BC - CF)(BC + CF) = BC^2 - CF^2$$
$$= BC^2 - \tfrac{3}{7}BC^2 = \tfrac{4}{7}BC^2$$

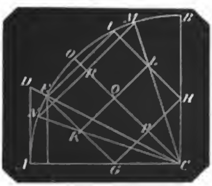
Nun ist $GI^2 = FI^2 = FH^2 + HI^2$

$$= \left(\frac{FG}{2}\right)^2 + CF^2 = \tfrac{1}{7}BC^2 + \tfrac{3}{7}BC^2 = \tfrac{4}{7}BC^2$$

folglich $FG = GI = FI$.

77. In einen Quadrant ein Quadrat zu zeichnen, welches mit 2 Ecken die Halbmesser und mit den beiden anderen den Bogen berührt.

Fig. 394.



Errichte in A eine Tangente $AD = \tfrac{1}{2}AC$, ziehe CD, fälle aus dem Durchschnittspunkt E in der Peripherie das Loth EF, nimm $FG = EF$, ziehe EG, nimm $CH = CG$, ziehe GH, ziehe EI ∦ GH, HI ∦ EG, so ist $EGHI$ das verlangte Quadrat.

Denn da $AD = \tfrac{1}{2}AC$

so ist auch $EF = \tfrac{1}{2}FC = FG = GC$

und da $HC = GC = FG = EF$

so ist $GH = EG$

HI ∦ EG auch $= EG$

und EI ∦ und $= GH$

Setzt man 4 Quadranten zu einem Kreise zusammen, so hat man die Aufgabe gelöst: in einen Kreis 5 gleiche Quadrate zu zeichnen, von dem mittleren 5ten ist GH die eine Seite, HC und GC sind dessen halbe Diagonalen.

78. Das Quadrat im Quadrant in ein gleichschenkliges △ im Quadrant zu verwandeln.

Halbire beide Seiten EG, HI in K, L, ziehe KL, aus C durch K, L die Halbmesser CN, CM, ziehe NM, so ist $\triangle CMN$ das verlangte.

Denn halbirt man den Quadrant durch CO so ist

da $CP = HP = HL$

auch $LQ = \tfrac{1}{2}CQ$

ebenso $MR = \tfrac{1}{2}CR$

Nun ist $CM^2 (= r^2) = MR^2 + CR^2 = \tfrac{5}{4}CR^2$

mithin $CR^2 = \tfrac{4}{5}r^2$

aber $\triangle CMN = MR \cdot CR = \tfrac{1}{2}CR^2 = \tfrac{2}{5}r^2$

Nun ist $CE^2 (= r^2) = EF^2 + CF^2$
$= EF^2 + (2EF)^2 = 5EF^2$

mithin $EF^2 = \tfrac{1}{5}r^2$

Da nun $EG^2 = EF^2 + FG^2 = 2EF^2$

so ist EG^2 d. h. □ $EGHI = \tfrac{2}{5}r^2$

und □ $EGHI = \triangle CMN$.

79. In einen Quadrant ABC den berührenden Kreis zu zeichnen.

Ziehe die Sehne AB, halbire den Quadrant in G, zeichne aus B den Bogen CH, aus A den Bogen HK, endlich aus C den Bogen KD, so ist D der Mittelpunkt

Fig. 395.



des verlangten Kreises. Fällt man nämlich die Lothe DE, DF auf AC, BC, so ist $DE = DF = DG$.

Denn es ist in Folge der Construction:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 = 2AC^2$$

und $AB^2 = BH^2 + AH^2 + 2BH \times AH$
$= AC^2 + AK^2 + 2AC \times AK$

hieraus $2AC^2 = AC^2 + AK^2 + 2AC \times AK$

oder $AC^2 = AK^2 + 2AC \times AK$

oder $AC^2 - 2AC \times AK + AK^2 = 2AK^2$

oder $(AC - AK)^2 = CK^2 = CD^2 = 2AK^2$

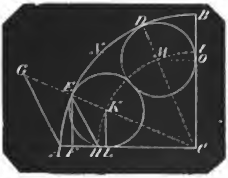
Nun ist auch $CD^2 = DF^2 + DE^2 = 2DE^2$

folglich $AK = DE = DF$
zugleich auch
$$AK = AC - CK = CG - CD = DG$$
folglich $DE = DF = DG$

80. In einen Quadrant 2 gleiche einander berührende Kreise zu zeichnen.

Theile den Quadrant in 4 gleiche Theile, ziehe durch die beiden äufseren Theilpunkte D, E die Halbmesser CD, CE, fälle das Loth EF auf AC, verlängere CE, so dafs $EG = EF$, ziehe AG und

Fig. 396.



$EH \parallel AG$, zeichne durch H den Quadrant $HKMI$, so sind K, M die Mittelpunkte der verlangten Kreise.

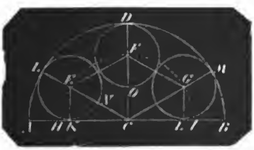
Denn es ist $CE : CH = EG : HA$
$$CE : CK = EF : KL$$
Nun ist $CH = CK$ und $EG = EF$
folglich $AH = EK = KL$

Der Kreis aus K berührt also den Bogen in E und den Halbmesser in L, der Kreis aus M desgleichen berührt den Bogen in D, den Halbmesser in O, beide Kreise berühren einander in dem mittleren Halbmesser CN.

81. In einem Halbkreise 3 gleiche einander berührende Kreise zu zeichnen.

Zeichne mit $\frac{2}{3}$ des Halbmessers $AC = CH$ den Halbkreis $HEFGI$, so liegen in diesem die Mittelpunkte der verlangten Kreise

Fig. 397.



und zwar der mittelste F in dem lothrechten Halbmesser CD und die zur Seite E und G in Entfernung $EF = GF = CF$.

Denn fällt man die Lothe EK, GL, zeichnet die Centralen $EF = FG$ so mufs sein

$$AH = EL = DF = GM = IB = EK = GL$$
$$= \tfrac{1}{2}EF = \tfrac{1}{2}FG$$

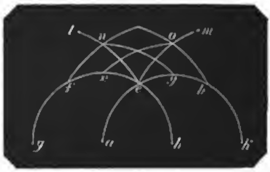
Es sind also offenbar EF und FG die ganzen, EK und GL die halben Seiten des regulären Sechsecks im Kreise vom Halbmesser CH.

Also $CE = EF = 2EL$
$$CL = CE + EL = 3EL$$
folglich $EL = \frac{1}{3}CL$ und $CE = \frac{2}{3}CL$.

Da $CF = 2OF$, so ist $OF = CO = CN$, mithin wird aus C mit CN noch ein tangirender Halbkreis beschrieben, und es ist mit der vorstehenden Construction auch die Aufgabe gelöst, in einen Kreis 7 gleiche einander berührende Kreise zu zeichnen.

82. Durch Kreisbogen die Punkte x und y zu finden, welche mit den Punkten a und b ein Quadrat bilden.

Fig. 398



Beschreibe aus a und b mit ab Kreisbogen. Aus deren Durchschnittspunkt e trage die Längen ab auf beiden Bogen noch zweimal ab, $ef = fg = eh = hk = ab$; zeichne aus g den Bogen el, aus k den Bogen em, schneide diese aus b mit bf in n und aus a mit ah in o, zeichne nun aus a mit an den Bogen ny und aus b mit bo den Bogen ox, so sind x und y die verlangten Punkte.

Denn es ist zuerst $gabk$ eine gerade Linie.

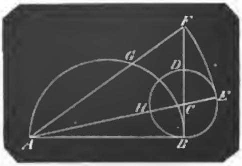
Ferner $ge = gn = bf = bn$
folglich $\angle nag = \angle nab = R$
Nun ist $bf^2 = bg^2 - fg^2 = 4ab^2 - ab^2 = 3ab^2$
folglich auch $gn^2 = bn^2 = 3ab^2$
hieraus $an^2 = bn^2 - ab^2 = 2ab^2$
da nun $ay = an$
so ist auch $ay^2 = 2ab^2$
nun ist $by = ab$
folglich $ay^2 = ab^2 + by^2$
mithin $\angle aby = R$

Eben so folgt $\angle bax = R$
also $abxy$ ist ein Quadrat.

83. Auf dem Durchmesser AB eines Halbkreises an dessen einem Endpunkt B ist ein Loth errichtet; man soll in demselben den Punkt finden, dafs von diesem aus nach dem anderen Endpunkt

A des Durchmessers eine gerade Linie gezogen, der aufserhalb des Kreises liegende Theil derselben einer gegebenen geraden Linie *a* gleich werde.

Fig. 399



Nimm auf dem Loth $BD = a$, beschreibe um BD den Kreis, ziehe aus A durch dessen Mittelpunkt C die gerade Linie AE, zeichne aus A mit AE den Bogen EF bis in die Richtung des Loths, so ist F der verlangte Punkt und in AF das Stück $FG = BD = a$.

Denn es ist $AB^2 = AE \times AE$

$BF^2 = AF \times FG$

daher $AF^2 = AB^2 + BF^2$

$= AE \times AH + AF \times FG$

hieraus $AF^2 - AF \times FG = AE \times AH$

oder $AF(AF - FG) = AE \times AH$

$AF \times AG = AE \times AH$

oder da $AF = AE$

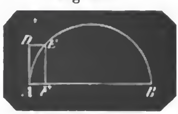
$AG = AH$

also auch $AF - AG = AE - AH$

oder $FG = HE = BD = a$.

84. Eine gegebene gerade Linie AB so zu theilen, dafs das Rechteck zwischen den beiden Theilen einem gegebenen Quadrat gleich werde.

Fig. 400.

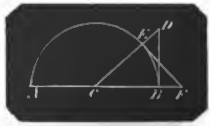


Zeichne über AB den Halbkreis, errichte in einem Punkt, z. B. A auf AB das Loth AD = der Seite des gegebenen Quadrats, ziehe DE bis zur Peripherie $\ddagger AB$, fälle das Loth EF auf AB, so ist F der verlangte Theilpunkt, nämlich $AF \times BF = AD^2$.

85. Eine gegebene Linie AB um ein Stück zu verlängern, dafs das Rechteck zwischen der ganzen verlängerten Linie und dem Verlängerungsstück einem gegebenen Quadrat gleich werde.

Zeichne über AB den Halbkreis, errichte in einem Endpunkt z. B. B das Loth BD = der Seite des gegebenen Quadrats, ziehe aus dem Mittelpunkt C die gerade Linie

Fig. 401.



CD, errichte in deren Durchschnittspunkt E mit der Peripherie auf CD die Normale EF bis in die Richtung von AB, so ist BF die verlangte Verlängerung, nämlich $AF \times BF = BD^2$

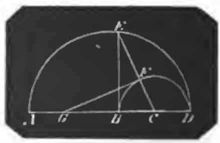
Denn $\triangle DCB \cong \triangle FCE$

daher $BD = EF$

und $AF \times BF = EF^2 = BD^2$

86. Eine gegebene gerade Linie AB in zwei Theile zu theilen, so dafs das Quadrat des einen Theils = wird dem Rectangel zwischen dem anderen Theil und einer zweiten gegebenen geraden Linie BD.

Fig. 402.



Setze beide gerade Linien zu einer AD zusammen, beschreibe über AD und über BD Halbkreise, errichte in B die lothrechte Ordinate BE, ziehe aus der Mitte C von BD die gerade Linie CE, in deren Durchschnittspunkt F mit der Peripherie, errichte auf CE die Normale FG bis in die Richtung AB, so ist G der Theilpunkt, nämlich

$$AG \times BD = BG^2$$

Denn es ist

$$BE^2 = AB \times BD$$
$$FG^2 = GB \times GD$$

Nun ist $\triangle BEC \cong \triangle FGC$

daher $BE = FG$

folglich $AB \times BD = GB \times GD$

oder $(AG + BG) \times BD = GB \times (GB + BD)$

also $AG \times BD = GB^2$

87. Eine gerade Linie AB so zu schneiden, dafs das unter der Ganzen und einem der beiden Abschnitte enthaltene Rectangel dem Quadrat des übrigen Abschnitts gleich sei (Euklid II, 11).

Halbire AB in C, errichte in A auf AB das Loth $AD = AC$, verlängere DA bis E, so dafs $DE = DB$, nimm $AF = AE$, so ist F der verlangte Theilpunkt und zwar

$$AB \times BF = \square AF$$

Fig. 403.



Denn es ist

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 = AB^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2$$

auch $BD^2 = (AD + AE)^2 = \left(\frac{AB}{2} + AE\right)^2$

$$= \left(\frac{AB}{2}\right)^2 + AE^2 + AB \times AE$$

folglich $AB^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2$

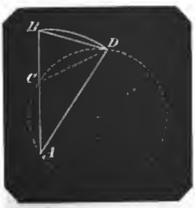
$$= \left(\frac{AB}{2}\right)^2 + AE^2 + AB \cdot AE$$

oder $AB^2 = AB \cdot AE = AE^2$

oder $AB(AB - AE) = AE^2$

oder $AB \times BF = AF^2$

Fig. 404.



88. Ein gleichschenkliges $\triangle$ zu zeichnen, in welchem jeder der Winkel an der Grundlinie das Doppelte des Winkels an der Spitze ist. Schneide eine beliebige gerade Linie AB in C, so dafs $AB \times BC = AC^2$ (No 87), zeichne aus A mit AB einen Kreisbogen, nimm BD als Sehne $= AC$, ziehe AD, so ist $\triangle ABD$ das verlangte und $\angle ABD = \angle ADB = 2 \angle BAD$.

Denn zieht man CD, beschreibt um die Punkte A, C, D einen Kreis, so ist da $AC^2 = BD^2 = AB \times BC$ BD die Tangente des Kreises ACD in D

folglich $\angle BDC = \angle CAD$

hierzu $\angle ADC = \angle ADC$

$$\angle ADB = \angle CAD + \angle ADC = \angle BCD$$

also auch $\angle ABD = \angle BCD$

daraus $BD = CD$

also auch $AC = CD$

daraus $\angle CAD = CDA$

und $\angle ADB = \angle ABD = 2 \angle BAD$.

88. In und um einen Kreis das reguläre Sechseck zu zeichnen. Trage den Halbmesser in der Peripherie 6 Mal herum. Für den ersten Fall verbinde die Theilpunkte durch Sehnen, für den zweiten Fall ziehe an denselben Tangenten bis zu ihren gegenseitigen Durchschnittspunkten.

89. In und um einen Kreis das reguläre Dreieck zu zeichnen. Von den Theilpunkten des Sechsecks verbinde für den ersten Fall den ersten mit dem dritten, diesen mit dem fünften, diesen mit dem ersten durch Sehnen; für den zweiten Fall ziehe an den genannten Theilpunkten Tangenten bis zu ihren Durchschnittspunkten.

90. In und um einen Kreis das reguläre Zwölfeck zu zeichnen. Halbire jeden der 6 Bogen, die dem regulären Sechseck angehören und verfahre mit den 12 Theilpunkten wie beim Sechseck.

91. In und um einen Kreis das reguläre Viereck zu zeichnen. Zeichne zwei normal auf einander befindliche Durchmesser und verfahre mit den 4 Theilpunkten in der Peripherie wie beim Sechseck.

92. In und um einen Kreis das reguläre Achteck zu zeichnen. Halbire die Quadranten des Kreises und verfahre mit den 8 Theilpunkten wie vorher.

93. In einen Kreis ein reguläres Fünfeck zu zeichnen. (Euklid IV, 11.)

Fig. 405.



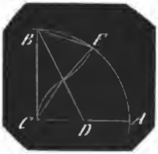
Zeichne ein gleichschenkliges $\triangle$ wie No. 88, trage in den gegebenen Kreis nach No. 39 das diesem ähnliche $\triangle ABD$, in

dem also $\angle ABD = \angle ADB = 2 \angle BAD$, halbire die beiden $\angle ABD$ und ADB durch BE und EF, verbinde die Punkte A, F, B, D, E, A, so entsteht das verlangte reguläre Fünfeck. Denn da die Peripheriewinkel der Bogen BD, BF, AF, AE, DE einander gleich sind, so sind auch diese Bogen selbst und deren Sehnen einander gleich.

94. In einen Kreis ein reguläres Zehneck zu zeichnen.

Nach der Construction des Euklid No. 93 hat man nur noch die Bogen des regu-

Fig. 406.



lären Fünfecks zu halbiren um das reguläre Zehneck zu erhalten. Allein man wendet die Euklidische Construction einfacher sogleich auf das Zehneck an, indem man den $\angle BAD$, Fig. 405, als Centriwinkel statt als Peripheriewinkel construirt:

Man construirt nämlich einen Quadrant ACB, halbirt einen Halbmesser in D, zieht BD, zeichnet aus D den Bogen CE, aus B den Bogen EF, so ist Sehne BF die Seite des regulären Zehnecks.

Denn es ist hier $BD^2 = BC^2 + CD^2$

oder $(BE + CD)^2 = BC^2 + \left(\frac{BC}{2}\right)^2$

oder $\left(BE + \frac{BC}{2}\right)^2 = BC^2 + \left(\frac{BC}{2}\right)^2$

oder da $BF = BE$

$$BF^2 + BC \cdot BF = BC^2$$

oder $BF^2 = BC \times (BC - BF)$

wie in Fig. 403 (zu No 87), wo

$$AF^2 = AB(AB - AF)$$

folglich wenn man CF zieht, nach No. 88

$$\angle CBF = \angle BFC = \tfrac{1}{2} \angle BCF$$

95. Um einen Kreis ein reguläres Fünfeck zu zeichnen ist im Euklid der folgende Satz 12. Man construirt die 5 Punkte in der Peripherie für das reguläre Fünfeck im Kreise und zieht an denselben 5 Tangenten. Eben so verfährt man für das reguläre Zehneck um den Kreis.

96. Ueber einer geraden Linie AB als Seite das reguläre Fünfeck zu beschreiben.

Errichte in beiden Endpunkten A, B Lothe, wie $AG = AB$, halbire AB in H, zeichne aus H den Bogen GI bis in die Verlängerung von BA. Beschreibe nun aus A und B mit AB und mit BI Bogen, welche sich in D und F schneiden

Fig. 407.



und 2 Punkte für die Ecken des Fünfecks sind. Die 5te Ecke E erhält man durch Bogen aus D und F mit AB.

Diese Construction gründet sich auf die Eigenschaft des Fünfecks, dafs 2 Diagonalen, wie AF, BD, sich so schneiden, dafs jeder gröfsere Abschnitt CD und CF = der Seite AB und zugleich die mittlere geometrische Proportionale zwischen der ganzen Diagonale und dem kleineren Abschnitt BC und AC wird, dafs also

$$BD : DC = DC : BC$$

oder $BD : AB = AB : BC$

Nun ist construirt:

$$HI^2 = HG^2 = AG^2 + AH^2 = AB^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2$$

hieraus $HI^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = AB^2$

oder $\left(HI + \frac{AB}{2}\right)\left(HI - \frac{AB}{2}\right) = AB^2$

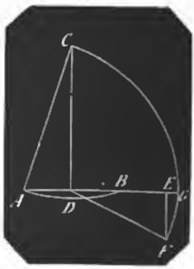
oder $BI \times AI = AB^2$

Da nun $BI = AB + AI$

so ist AI = dem kleineren Abschnitt der Diagonale und BI = der ganzen Diagonale.

97. Auf einer geraden Linie AB als Seite das reguläre Zehneck zu construiren.

Fig. 408.



Halbire AB in D, verlängere AB, nimm $BE = \frac{1}{2} AB = DB$, errichte in E auf AE das Loth $EF = BE$, zeichne aus D den Bogen FG, errichte in D ein Loth auf AB und schneide dieses aus A mit AG in C, so ist C der Mittelpunkt des Kreises, in welchem AB die Seite des regulären Zehnecks ist.

Denn wie in Fig. 403 zu No. 87 ist hier

$$(DF - EF)^2 = (DE - BG)\,DE$$

oder $BG^2 = DE^2 - DE \times BG$
oder $(DE + BG) \times BG = DE^2$
oder $AG \times BG = AB^2$
oder $AG\,(AG - AB) = AB^2$
oder $AC\,(AC - AB) = AB^2$
mithin AB die Seite des Zehnecks im Kreise vom Halbmesser AC.

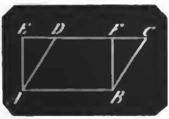
98. In einen Kreis ein reguläres Funfzehneck zu beschreiben.

Beschreibe an einem beliebigen Punkt der Peripherie die Seite des regulären Dreiecks und an demselben Punkt nach derselben Richtung die Seite des regulären Fünfecks, der Bogen zwischen beiden Seiten $\frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{5}{15} - \frac{3}{15} = \frac{2}{15}$ der Peripherie halbirt, giebt $\frac{1}{15}$ der Peripherie und die Sehne desselben die Seite des regulären Funfzehnecks.

99. Ein # $ABCD$ in ein Rechteck zu verwandeln.

Verlängere eine Seite z. B. CD des # da wo die Verlängerung mit der anliegenden Seite einen spitzen ∠ bildet, fälle von den Ecken der gegenüber liegenden

Fig. 409.



Seite A und B Lothe AE, BF auf die verlängerte, so ist $ABEF$ das verlangte Rechteck.

100) Ein # CB in ein anderes # mit denselben Winkeln und einer gegebenen Seite a zu verwandeln.

Fig. 410.

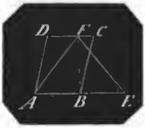


Verlängere eine Seite DB bis E, so daſs $BE = a$, vollende das # $ABEF$, ziehe die Diagonale FB bis in die Richtung von CD, ziehe GH ∦ DE, vollende die # DI und BH, so ist # BH das verlangte.

101) Ein # $ABCD$ in ein △ zu verwandeln.

Verlängere eine Seite z. B. AB um eine gleiche Länge $BE = AB$, ziehe von E nach D, so ist △ AED das verlangte.

Fig. 411.

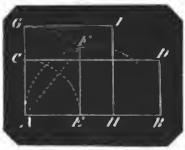


Errichtet man in B das Loth BF, zieht AF und EF, so erhält man ein verlangtes gleichschenkliges △ AFE. Eben so kann man ein # in ein △ mit gegebenem Winkel, und ein △ in ein # verwandeln.

102) Ein Rechteck CB in ein Quadrat zu verwandeln.

Beschreibe über einer der beiden längeren Seiten z. B. AB den Halbkreis, aus

Fig. 412.



A den Quadrant CE, errichte in E die lothrechte Ordinate EF, zeichne aus A mit AF den Quadrant GFH, vollende das Quadrat $AGIH$, so ist dieses das verlangte. Hiernach ist mit Hülfe von No. 99 jedes #, und mit Hülfe von No. 101 jedes △ in ein Quadrat zu verwandeln.

103. Ein △ ABC in ein anderes △ mit gegebener Grundlinie a zu verwandeln.

Nimm auf einer Seite z. B. AB die Länge $AD = a$, ziehe CD und aus B die

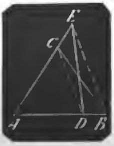
Fig. 413.



Linie $BE \parallel CD$, ziehe DE, so ist ADE das verlangte $\triangle$.

Denn es ist $\triangle CDB = \triangle CDE$
hierzu $\triangle ACD = \triangle ACD$
giebt $\triangle ACD \pm \triangle CDB = \triangle ACD \pm \triangle CDE$
oder $\triangle ABC = \triangle ADE$

Fig. 414.



104) Ein $\triangle ABC$ in ein anderes mit gegebener Höhe h zu verwandeln.

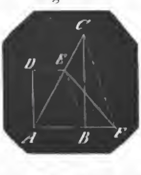
Trage auf einer Seite z. B. AB des $\triangle$ die Höhe $AD = h$ auf, ziehe aus D eine

Fig. 415.



Parallele DE mit AB bis zu einer Seite z. B. AC oder in deren Richtung, ziehe EB und aus C die Parallele CF damit bis in die Richtung von AB, ziehe EF, so ist $\triangle EAF$ das verlangte. Beweis wie No. 103.

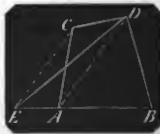
Fig. 416.



105) Ein Viereck $ABCD$ in ein Dreieck zu verwandeln.

Zeichne eine beliebige Diagonale z. B. AD, aus einer der anderen beiden Ecken, z. B. C die Parallele CE damit bis in die Richtung der gegenüber liegenden Seite AB, ziehe DE, so ist $\triangle DEB$ das verlangte. Beweis wie No. 103.

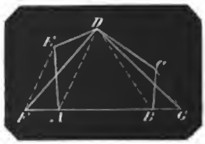
Fig. 417.



106) Ein Fünfeck $ABCDE$ in ein Dreieck zu verwandeln.

Ziehe von einer Ecke z. B. D die beiden Diagonalen DA, DB. Verlängere AB zu beiden Seiten, ziehe von den benachbarten Ecken C, E Parallelen CG, EF mit der nächsten Diagonale bis in die Richtung von AB, ziehe die Linien DF

Fig. 418.



und DG, so ist $\triangle DFG$ das verlangte. Es ist hiermit jede beliebige geradlinig vielseitige Figur in ein $\triangle$ und nach No. 101 in ein Quadrat zu verwandeln.

107) Eine gegebene vielseitige Figur in ein Dreieck zu verwandeln, dessen Grundlinie in eine deren Seiten und dessen Spitze in einen gegebenen Punkt fällt, der in einer Seite oder innerhalb oder aufserhalb der Figur liegen mag.

Verwandle die Figur nach No. 106 in ein Dreieck, dessen Spitze in einer Ecke der Figur liegt, dieses dann nach No. 104 in ein $\triangle$ von derjenigen Höhe, die den Abstand der gegebenen Spitze von der Grundlinie FG angiebt, und von diesem verlege dann die Spitze an den gegebenen Ort wie No. 101 D nach F oder C.

108) Ein $\triangle ABD$ in ein gleichseitiges Dreieck zu verwandeln.

Beschreibe über AB das gleichseitige $\triangle EAB$. Ist die Höhe EL desselben gröfser als die Höhe des gegebenen $\triangle$, beschreibe über EL den Halbkreis, errichte auf EL durch D die rechtwinklige Ordinate GF, beschreibe aus L mit FL den Bogen FH bis in EL, zeichne durch H die Linien $HI \parallel AE$ und $HK \parallel BE$, so ist $\triangle HIK$ das verlangte.

Ist die Höhe HL kleiner als die des gegebenen Dreiecks, so verlängere dieselbe, fälle

Fig. 419.



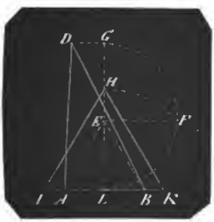
von D das Loth DG auf EL, beschreibe über GL den Halbkreis, errichte in E auf EL die rechtwinklige Ordinate, zeichne aus L mit FL den Bogen FH, ziehe $HI \parallel AE$, $HK \parallel BE$, so ist $\triangle HIK$ das verlangte. Denn es ist in beiden Fällen

$$\triangle ABD : \triangle ABE = GL : EL$$
$$\triangle ABE : \triangle HIK = EL^2 : HL^2$$

hieraus $\triangle ABD : \triangle HIK = GL \cdot EL : HL^2$ oder FL^2

mithin $\triangle ABD = \triangle HIK$

Fig. 420.



109) Ein gegebenes $\triangle ABD$ in ein einem zweiten gegebenen $\triangle x$ ähnliches Dreieck zu verwandeln.

Lege (wie in Fig. 419 u. 420 das gleichseitige $\triangle AEB$) über eine Seite AB das Dreieck x, und zeichne durch Parallelen mit dessen über AB befindlichen Seiten das ihm ähnliche $\triangle AEB$, dessen Grundlinie AB ist, fälle aus E die Höhe EL, und construire weiter wie No. 108, so erhält man $\triangle HIK \cong \triangle ABD$ und $\sim \triangle x$.

110) Jedes beliebige Vieleck in ein $\triangle$ zu verwandeln, das einem gegebenen $\triangle x$ $\sim$ ist.

Verwandle das Vieleck nach No. 106 in ein $\triangle$, und verfahre dann nach No. 109.

111) Ein gegebenes Vieleck in ein Vieleck zu verwandeln, welches einem anderen gegebenen Vieleck N ähnlich ist.

Verwandle das gegebene Vieleck in ein Quadrat, dessen Seite sei a, verwandle ebenso das Vieleck N in ein Quadrat, dessen Seite sei b; nun nimm eine beliebige Seite c des Vielecks N, so findet man die derselben homologe Seite x, wenn man zu den Längen b, a, c die vierte geometr. Proportionale construirt (No. 22).

Denn bezeichnet man den Inhalt des zu verwandelnden Vielecks mit F, so hat man

$$F : N = a^2 : b^2$$

Soll nun das Vieleck von der Seite $x = F$ werden, so hat man ebenfalls

$$N : F = c^2 : x^2$$

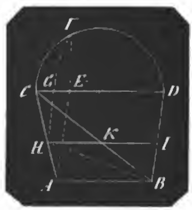
hieraus $a^2 \times c^2 = b^2 \times x^2$

oder $a \times c = b \times x$

oder $b : a = c : x$

112) Ein $\triangle ABC$ in ein Trapez zu verwandeln, welches zu einer der parallelen Grundlinien eine der Dreiecksseiten AB hat, und von deren anliegenden Winkeln

Fig. 421.



der eine der $\angle ABC$ des $\triangle$, der andere aber gleich einem gegebenen $\angle x$ ist.

Zeichne $\angle ABD = x$, ziehe $CD \parallel AB$, zeichne über CD den Halbkreis, $AE \parallel BD$, errichte in E die lothrechte Ordinate EF, zeichne aus D mit DF den Bogen FG, ziehe $GH \parallel AE$, $HI \parallel AB$, so ist Trapez $ABHI$ das verlangte.

Es ist zu zeigen, dafs

$$\triangle BKI = \triangle CKH$$

oder dafs $\triangle BHI = \triangle HBC$

Nun ist

$$\triangle BHI : \triangle HAB = HI : AB$$
$$\triangle CHB : \triangle HAB = CH : AH$$
$$= CG : GE$$
$$= CD - DG : DG - DE$$

Da nun

$$CD : DG = DG : DE$$

so ist

$$CD - DG : DG - DE = DG : DE$$
$$= HI : AB$$

oder $\triangle CHB : \triangle HAB = HI : AB$

folglich $\triangle BHI = \triangle CHB$

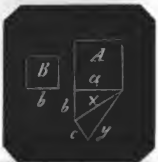
113) Ein Trapez in ein anderes Trapez zu

verwandeln, welches mit ihm eine parallele Grundlinie und einen daran liegenden ∠ gemeinschaftlich hat, dessen zweiter anliegender ∠ aber einem gegebenen ∠ x gleich ist.

Verwandle das Trapez in ein Dreieck mit der beizubehalten Grundlinie und dem beizubehaltenden ∠, und dieses nach No. 112 in das verlangte Trapez.

114) Zwei oder mehrere gegebene Quadrate A, B, C..., deren Seiten a, b, c..., also ebenfalls gegeben sind in ein einziges Quadrat zu verwandeln.

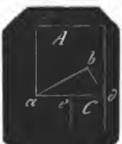
Fig. 422.



Verlängere eine Seite des einen Quadrats A um die Seite b des zweiten Quadrats, ziehe die Hypothenuse x, so ist das Quadrat über $x = A + B$; setzt man an x unter einem R ∠ die Seite c des dritten Quadrats, so erhält man in der Hypothenuse y die Seite des Quadrats $= A + B + C$ u. s. w.

115) Ein Quadrat zu zeichnen, welches gleich dem Quadrat A weniger dem Quadrat B.

Fig. 423.



Beschreibe über einer Seite des Quadrats A einen Halbkreis, trage die Seite des Quadrats B als Sehne ab ein, so ist die andre Sehne bd die Seite des verlangten Quadrats; zeichnet man also aus d mit db den Bogen, so ist das über de beschriebene Quadrat C das verlangte $A - B$.

116) Ein Quadrat zu zeichnen, welches $n$mal einem gegebenan Quadrat $A =$ ist.

Die Seite ab des gegebenen Quadrats verlängere bis d, so dafs $ad = n \cdot ab$, be-

Fig. 424.



schreibe über ad den Halbkreis, verlängere bg bis zur Peripherie in f, zeichne aus a den Bogen fe, so ist ae die Seite des verlangten Quadrats eh.

Denn

$$A : \square eh = ab^2 : ae^2 = ab^2 : af^2 = ab^2 : ab \cdot ad = ab : ad = 1 : n$$

117) Ein Quadrat zu zeichnen, welches $\frac{1}{n}$ eines gegebenen Quadrats $B =$ ist.

Es sei ad die Seite des gegebenen Quadrats, so beschreibe über ad den Halbkreis, nimm $ab = \frac{1}{n}\,ad$, errichte die rechtwinklige Ordinate bf, beschreibe aus a den Bogen fe, so ist ae die Seite des verlangten Quadrats. Denn es ist

$$\square ad : \square ae = ad^2 : ae^2 = ad^2 : af^2 = ad^2 : ab \cdot ad = ad : ab = n : 1.$$

118) Ein Quadrat zu zeichnen, welches $\frac{m}{n}$ eines gegebenen Quadrats $A =$ ist.

Ist $m > n$, so sei ab die Seite des gegebenen Quadrats, theile ab in n gleiche Theile, verlängere ab bis d, so dafs $ad = m$ solchen Theilen ist, die übrigen Constructionen wie No. 117; dann ist ae die Seite des verlangten Quadrats. Denn

$$\square ab : \square ae = ab^2 : ae^2 = ab^2 : af^2 = ab^2 : ad \cdot ab = ab : ad = n : m$$

woraus $\square ae = \frac{m}{n} \square ab$

Ist $m < n$; ad die Seite des gegebenen Quadrats, so theile ad in n gleiche Theile, nimm $ab = m$ derselben, construire wie vorher, so ist ae die Seite des verlangten Quadrats. Denn

$$\square ad : \square ae = ad^2 : ae^2 = ad : ab = n : m$$

woraus $\square ae = \frac{m}{n} \square ad$

119) Aehnliche Figuren und Kreise werden summirt, subtrahirt, vervielfacht und getheilt, wenn man mit ähnlich liegenden Seiten oder Diagonalen und mit Halbmessern oder Durchmessern so operirt, wie in den vorigen 5 Constructionen No. 114 bis No. 118 mit den Quadratseiten.

120) Ein Quadrat zu zeichnen, welches 313 □Fufs enthält

Da 313 eine Primzahl ist, so dividire

mit 10, und man erhält $313 = 31{,}3 \times 10$. Nimm nun $ad = 31{,}3$ Fuſs, $ab = 10$ Fuſs, construire wie vorher, so hat man ae als die Seite des verlangten Quadrats Denn es ist

$$ae^2 = ab \times ad = 10' \times 3{,}13' = 313 \square \text{Fuſs}.$$

121) Von einem $\triangle ABD$ ein $\triangle$ abzuschneiden, welches sich zu dem ganzen $\triangle$ verhält wie zwei gegebene Zahlen m, n.

Fig. 425.

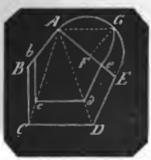


Beschreibe über einer Seite z. B. DB den Halbkreis, theile DB in n gleiche Theile, errichte in dem $m$ten Theilpunkt von D ab, in E die rechtwinklige Ordinate EF, beschreibe aus D mit DF den Bogen FG, ziehe $GH \parallel AB$, so ist $\triangle DGH : \triangle DAB = m : n$. Denn es ist

$$\triangle DGH : DAB = DG^2 : DB^2 = DF^2 : DB^2 = DE \cdot DB : DB^2 = DE : DB = m : n$$

122) Auf dieselbe Weise theilt man auch andere gradlinige Figuren. Z. B. Von dem Fünfeck $ABCDE$ ein ähnliches abzuschneiden, welches die Hälfte des Ganzen beträgt.

Fig. 426.



Zeichne über einer Seite z. B. AE den Halbkreis, halbire AE in F, errichte die rechtwinklige Ordinate FG auf AE, beschreibe aus A mit AG den Bogen Ae, ziehe aus A die Diagonalen AD, AC, $ed \parallel ED$, $dc \parallel DC$, $cb \parallel CB$, so ist das Fünfeck $Abcde$ das verlangte.

123) Ein $\triangle$ zu zeichnen, welches dem gegebenen $\triangle ABD \sim$ ist und ein beliebig Vielfaches, z. B. das $\frac{n}{m}$ fache desselben beträgt.

Theile eine beliebige Seite z. B. AD

Fig. 427.

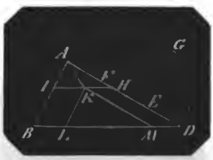


in m gleiche Theile, verlängere sie und trage noch $(n - m)$ derselben Theile hinzu, so daſs die Länge AE n gleiche Theile enthält, beschreibe über AE den Halbkreis, errichte in D auf AE die rechtwinklige Ordinate DG, zeichne aus A den Bogen GF, ziehe $FH \parallel BD$ bis in die Richtung von AB, so ist $\triangle AFH$ das verlangte.

124) Ein Dreieck, Viereck, Vieleck kann in eine beliebige Anzahl (n) gleicher Theile getheilt werden, so daſs die homologen Seiten mit einander $\parallel$ laufen, wenn man nach No. 121 und 122 verfährt, indem die Seite, über welcher man den Halbkreis zeichnet, in n gleiche Theile theilt, in den Theilpunkten rechtwinklige Ordinaten errichtet und für die Parallelen aus der gemeinschaftlichen Spitze (A Fig. 426) die Bogen beschreibt.

125) Innerhalb eines $\triangle$ den Punkt zu bestimmen, von dem aus 3 gerade Linien, eine nach einer Ecke, die beiden anderen $\parallel$ den der Ecke anliegenden Seiten das $\triangle$ in drei gleiche Theile theilen.

Fig. 428.



Theile eine Seite z. B. AD in 3 gleiche Theile DE, EF, FA, beschreibe über AD den Halbkreis, errichte in einem Theilpunkt E die rechtwinklige Ordinate EG, zeichne aus D den Bogen GH, ziehe $HI \parallel BD$, halbire HI in K, ziehe AK, $KL \parallel AB$ und $KM \parallel AD$, so sind die Trapeze $ABLK$, $ADMK$ und das $\triangle LKM$ die 3 gleichen Theile.

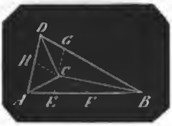
Denn es ist

$$MK^2 = DH^2 = DG^2 = DE \times AD = \tfrac{1}{3} AL^2$$

daher $\triangle LKM = \frac{1}{3}\triangle ABD$
und Trapez
$ABLK = \text{Trap. } ADMK = \frac{1}{3}\triangle ABD$

126) Es ist ein Dreieck ABD gegeben, man soll den innerhalb desselben liegenden Punkt C durch Construction finden, von welchem aus nach den 3 Ecken gerade Linien gezogen das $\triangle$ in 3 Dreiecke getheilt wird, die sich wie gegebene Zahlen $a : b : c$ z. B. $4 : 5 : 7$ verhalten.

Fig. 429.



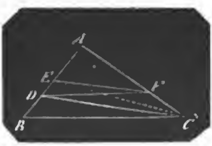
Theile eine Seite des Dreiecks in dem Verhältnifs der gegebenen Zahlen, ziehe aus den Theilpunkten mit den ihnen zunächst liegenden Seiten Parallelen, so giebt deren Durchschnittspunkt den verlangten Punkt.

Ist nämlich
$$AE : EF : FB = a : b : c = 4 : 5 : 7$$
$EG \parallel AD$, $FH \parallel BD$, und man zieht von deren Durchschnittspunkt C die Linien CA, CB, CD so ist auch
$$\triangle ACD : \triangle ACB : \triangle BCD = a : b : c = 4 : 5 : 7$$

Es erhellt dies sogleich, wenn man DE und DF zieht, denn man hat $\triangle ADE = ACD$ u. s. w.
Ferner $\triangle ADE : \triangle EDF : \triangle FDB = a : b : c = 4 : 5 : 7$

127) Ein $\triangle ABC$ von einem in einer Seite z. B. AB belegenen Punkt D aus in 2 gleiche Theile zu theilen.

Fig. 430.



Ziehe DC nach der gegenüberliegenden Ecke, halbire AB in E, ziehe $EF \parallel DC$ und DF, so ist $\triangle ADF = \text{Viereck } BCDF = \frac{1}{2}\triangle ABC$.

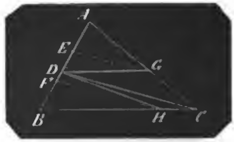
Denn zieht man EC so ist

	$\triangle EFC = \triangle EFD$
hierzu	$\triangle EFA = \triangle EFA$
giebt	$\triangle AEC = \triangle ADF$

Da nun $\triangle AEC = \frac{1}{2}\triangle ABC$
so ist $\triangle ADF = \frac{1}{2}\triangle ABC$, folglich Viereck $BCDF$ ebenfalls $= \frac{1}{2}\triangle ABC$.

128) Das $\triangle ABC$ von demselben Punkt D aus in 3 gleiche Theile zu theilen.

Fig. 431.

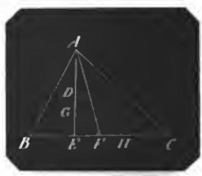


Ziehe DC, theile AB in 3 gleiche Theile, ziehe aus den Theilpunkten E, F Parallelen EG, FH mit DC, ziehe DG, DH so ist $\triangle ADG = \triangle BDH = \text{Fünfeck } EGCHD = \frac{1}{3}\triangle ABC$. Beweis wie No. 127.

129) Jedes $\triangle ABC$ ist von demselben Punkt D aus in eine beliebige Anzahl n gleicher Theile zu theilen. Man zieht DC, theilt AB in n gleiche Theile, zieht aus sämmtlichen Theilpunkten Parallelen mit DC und von D aus nach den in AC und BC erhaltenen Durchschnittspunkten gerade Linien.

130) Ein $\triangle ABC$ von einem innerhalb desselben beliebig gelegenen Punkt D in zwei gleiche Theile zu theilen.

Fig. 432.

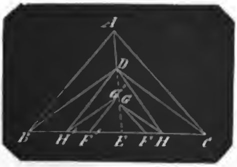


Ziehe durch eine beliebige Ecke z. B. A durch D die gerade Linie AE bis zur gegenüberliegenden Seite BC, halbire BC in F, ziehe $FG \parallel AC$ bis in AE, ziehe DC und aus G die $GH \parallel DC$, ziehe DH, so ist Viereck $ACHD = \text{Figur } ADHBA = \frac{1}{2}\triangle ABC$.

Denn wenn man noch CG zieht, so ist
$$\tfrac{1}{2}\triangle ABC = \triangle AFC = \triangle ACG = \triangle ACD + \triangle DCG = \triangle ACD + \triangle DCH = \text{Viereck } ACDH$$

131) Ein $\triangle ABC$ von dem Punkt D innerhalb in 3 gleiche Theile zu theilen.
Ziehe von A durch D die AE, ferne.

Fig. 433.

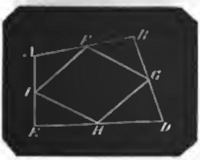


DB und *DC*, theile *BC* durch *F* und *F'* in 3 gleiche Theile, ziehe (wie Fig. 429) FG ⫲ AC, $F'G'$ ⫲ AB, aus *G* die Linie GH ⫲ DC, aus *G'* die $G'H'$ ⫲ DB, ziehe *DH* und *DH'*, so ist Viereck $ADHC$ = Viereck $ADH'B = \triangle DHH' = \frac{1}{3} \triangle ABC$.

132) Jedes $\triangle ABC$ läfst sich von einem innerhalb beliebig gelegenen Punkt *D* aus in eine beliebige Anzahl (n) gleiche Theile theilen, wenn man wiederholend construirt wie No. 131.

133) Ein Parallelogramm gleich der Hälfte eines gegebenen Vierecks *ABDE* zu zeichnen.

Fig. 434.



Halbire die 4 Seiten in *F*, *G*, *H*, *I*, verbinde die Halbirungspunkte, so erhält man das verlangte $\#$.

Denn denkt man sich die Diagonalen, so hat man

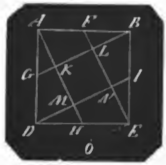
1) aus $BF : FA = BG : GD$
FG ⫲ AD
aus $EI : IA = EH : HD$
HI ⫲ AD
also FG ⫲ HI
ebenso FI ⫲ GH

2) $\triangle DGH = \frac{1}{4} \triangle DBE$
$\triangle AFI = \frac{1}{4} \triangle ABE$

hieraus
$\triangle DGH + \triangle AFI = \frac{1}{4}$ Viereck *ABDE*
ebenso
$\triangle BFG + \triangle EHI = \frac{1}{4}$ Viereck *ABDE*
$\# FGHI = \frac{1}{2}$ Viereck *ABDE*

134) Ein Quadrat durch 4 gerade Linien so zu zerschneiden, dafs die Stücke geeignet zusammengesetzt, 5 gleiche Quadrate geben.

Fig. 435.



Halbire die 4 Seiten und ziehe von den Ecken nach den Halbirungspunkten, so dafs je 2 und 2 mit einander ⫲ werden, so ist die mittlere Figur ein Quadrat und jedes der kleinen Dreiecke wie *EIN* setzt sich mit dem nebenliegenden Trapez wie ***EHO*** **mit *EHMN* zu einem Quadrat *EOMN* zusammen.**

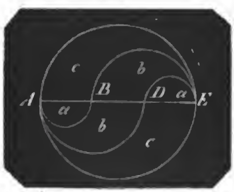
Denn	$\triangle ABG \cong \triangle DAH$
daher	$\angle ABG = \angle DAH$
und	$\angle AGB = \angle DHA$
hieraus	$\triangle AGK \sim \triangle AHD$
folglich	$\angle AKG = \angle ADH = R$
so sind auch	$\angle L, M, N$ rechte $\angle$.
Aus	$\triangle AGK \sim \triangle ADM$
und	$AG = \frac{1}{2} AD$
folgt	$AK = \frac{1}{2} AM = KM = KL = LN = MN$

so dafs *KLMN* ein Quadrat ist.

Dafs bei Verlängerung von *MH* bis *O*, wo die Normale *EO* aus *E* trifft, $\triangle EIN \cong \triangle EHO$ folgt leicht und eben so dafs *NO* ein dem mittleren gleiches Quadrat ist.

135) Einen Kreis in eine beliebige Anzahl gleicher Theile der Art zu theilen, dafs der Umfang jedes Theils dem Umfang des Kreises gleich ist.

Fig. 436.



Soll der Kreis in *n* gleiche Theile getheilt werden, so theile einen Durchmesser *AE* in *n* gleiche Theile, hier beispielsweise in 3 Theile $AB = BD = DE$. Beschreibe über *AB*, *AD* oberhalb, über *ED*, *EB* unterhalb Halbkreise, so entstehen 6 Flächenräume, von denen je 2 und 2 einander ≅ sind; *a* mit *a*, *b* mit *b*,

c mit c. Die drei gleichen Theile sind in den beiden äufseren $(a + c)$ in dem mittleren $2b$. Dafs diese einander gleich sind, erhellt aus dem Folgenden.

Bezeichnet man den Inhalt des Kreises mit $2I$, den des Halbkreises also mit I, so ist jeder Halbkreis über AB und DE $= a = (\frac{1}{3})^2 I = \frac{1}{9} I$; jeder Halbkreis über AD und $EB = a + b = (\frac{2}{3})^2 I = \frac{4}{9} I$; also $c = (\frac{9}{9} - \frac{4}{9}) I = \frac{5}{9} I$ und $b = (\frac{4}{9} - \frac{1}{9}) I = \frac{3}{9} I$. Mithin sind die Theile $a + c = (\frac{1}{9} + \frac{5}{9}) I = \frac{6}{9} I$ und der mittlere Theil $2 \cdot b = 2 \cdot \frac{3}{9} I = \frac{6}{9} I$; die 3 Flächenräume also einander gleich.

Die Umfänge der Halbkreise verhalten sich aber wie deren Durchmesser, der ganze Halbkreis, also der um $c = P$ gesetzt, ist der Halbkreis um $a = \frac{1}{3} P$; der um $b = \frac{2}{3} P$.

Der Raum $a + c$ hat also den Umfang $P + \frac{1}{3} P + \frac{2}{3} P = 2P$; der mittlere Raum $2b$ hat den Umfang $2 \times \frac{1}{3} P + 2 \times \frac{2}{3} P = 2P$ = dem Umfang des ganzen Kreises.

Theilt man den Kreis allgemein in n Theile, so ist der erste Theil $\frac{1}{n^2} I$; der zweite $= \frac{4-1}{n^2} I = \frac{3}{n^2} I$; der 3te $= \frac{9-4}{n^2} I$ $\frac{5}{n^2} I$; der letzte $= \frac{n^2 - (n-1)^2}{n} I = \frac{2n-1}{n^2} I$

Von diesen setzt sich der obere erste mit dem unteren letzten, der obere zweite mit dem unteren vorletzten u. s. w. zusammen; die n Theile sind also

$$\left(\frac{1}{n^2} + \frac{2n-1}{n^2}\right) I = \frac{2}{n} I; \left(\frac{3}{n^2} + \frac{2n-3}{n^2}\right) I$$
$$= \frac{2}{n} I \text{ u. s. w.}$$

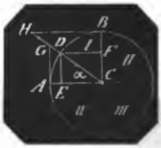
und man ersieht, dafs die Construction allgemein gültig ist, da auch die Umfänge sich als gleich grofs und gleich dem Kreisumfang sich ergeben.

Constructionen, trigonometrische. In den Fig. 437 bis 440 sind die Kreise mit gleichem Halbmesser AC beschrieben, in 4 Quadranten getheilt, die wie Fig. 437 mit I. dem ersten bis IV. dem 4ten Quadrant bezeichnet sind. Es ist also $\angle ACB = 90°$. Der $\angle ACD = \alpha$ wird von dem festen Schenkel AC aus construirt; der bewegliche Schenkel CD liegt Fig. 437 im ersten, Fig. 438 im zweiten, Fig. 439 im dritten und Fig. 440 im vierten Quadrant. Der Complementswinkel zu α ist in Fig. 437 $= + \angle BCD$ in Fig 438, 439 und 440 $= - \angle BCD$.

Alle Linien wie DE, AG u. s. w. stehen mit dem Halbmesser AC in geradem Verhältnifs, so dafs mit dem $n$fachen von AC auch DE, AG u. s. w. $n$fach so grofs werden. Für den Fall, dafs $AC = 1$ ist, heifst DE der Sinus (sin) von α, DF der Cosinus (cos) von α, AG die Tangente (tg) von α, BH die Cotangente (cot) von α, CG die Secante (sec) von α, CH die Cosecante ($cosec$) von α, und die Linien DE, DF u. s. w. mit der Linie AC verglichen, geben bildlich Verhältnifszahlen zu der Zahl 1. Setzt man $AC = r$ so ist offenbar $DE = r \cdot sin\ \alpha$; $DF = r \cdot cos\ \alpha$ u. s. w. d. h. sie sind wirkliche Längen, die mit der Länge r in gewissen Verhältnissen stehen, und diese zunächst sollen hier für die vier Figuren, welche sämmtliche Fälle enthalten, construirt werden.

I. Fälle von dem Endpunkt D des beweglichen Schenkels CD ein Loth DE auf den festen Schenkel AC, so ist $DE = r \cdot sin\ \alpha$.

Fig. 437.



II. Fälle von dem Endpunkt D des beweglichen Schenkels CD auf den festen Schenkel BC des Complements-Winkels BCD ein Loth DF, so ist $DF = r \cdot cos\ \alpha$.

Für DF kann auch die ihr gleiche Linie CE gesetzt werden.

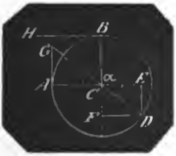
Fig. 438.



III. Errichte auf dem festen Schenkel AC in dessen Endpunkt A ein Loth AG bis in die Richtung des beweglichen Schenkels CD, so ist $AG = r \cdot tg\ \alpha$.

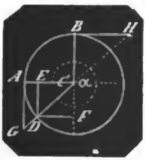
IV. Errichte auf dem festen Schenkel BC den Complementswinkel BCD in dessen Endpunkt B ein Loth BH bis in die Richtung des beweglichen Schenkels CD. so ist $BH = r \cdot cot\ \alpha$.

Fig. 439.



V. Die Länge *CG* des beweglichen Schenkels *CD* zwischen dem Scheitelpunkt *C* des Winkels *α* und dem Endpunkt *G* der Tangente von *α* ist $r \cdot \sec \alpha$

Fig. 440.



VI. Die Länge *CH* des beweglichen Schenkels *CD* zwischen dem Scheitelpunkt *C* des Winkels *α* nnd dem Endpunkt *H* der Cotangente von *α* ist $r \cdot \operatorname{cosec} \alpha$

2) Die Figuren sind absichtlich so gezeichnet, dafs die Linien *AC* und *CD* einerlei Neigung haben, also denselben spitzen Winkel (*α*) mit einander bilden, so dafs wenn die Winkel in den 4 Quadranten mit α_1; α_2; α_3; α_4 bezeichnet werden:

$$\alpha_2 = 180° - \alpha_1$$
$$\alpha_3 = 180° + \alpha_1$$
$$\alpha_4 = 360° - \alpha_1$$

Sämmtliche gleichnamige trigonometrische Linien sind einander gleich, und da nun zu jedesmal vier verschiedenen Winkeln dieselben trigonometrischen Linien gehören, so hat man auf deren Lage zu achten, und diese mit positiv und negativ zu bezeichnen. Man setzt fest, dafs sämmtliche trigonometrische Linien für alle Winkel im 1sten Quadrant positiv sind.

Die Lage des Sinus (*DE*) kann nur entweder über dem Schenkel *AC* oder unter demselben sich befinden, folglich ist $\sin \alpha$ in Fig. 437 und 438 positiv, in Fig. 439 und 440 negativ.

Die Lage des Cosinus (*DF*) kann nur entweder links von *BC* oder rechts von *BC* sein, folglich ist $\cos \alpha$ in Fig. 437 und 440 positiv, in Fig. 438 u. 439 negativ.

Die Lage der Tangente (*AG*) kann nur entweder über dem Schenkel *AC* oder unter demselben sein, folglich ist $tg\, \alpha$ in Fig. 437 u. 439 positiv, in Fig. 438 u. 440 negativ.

Die Lage der Cotangente (*BH*) kann nur entweder links von *BC* oder rechts von *BC* sein, folglich ist $\cot \alpha$ in Fig. 437 u. 439 positiv, in Fig. 438 u. 440 negativ.

Die Secante (*CG*) kann nur entweder der Schenkel des Winkels *α* oder dessen Verlängerung sein, folglich ist $\sec \alpha$ in Fig. 437 u. 440 positiv, in Fig. 438 und 439 negativ.

Die Cosecante (*CH*) kann nur entweder der Schenkel des Winkels *α* oder dessen Verlängerung sein, folglich ist $\operatorname{cosec} \alpha$ in Fig. 437 und 438 positiv, in Fig. 439 und 440 negativ.

Man hat also

	Quadranten.			
	I	II	III	IV
sinus	+	+	−	−
cosinus	+	−	−	+
tangente . . .	+	−	+	−
cotangente . . .	+	−	+	−
secante	+	−	−	+
cosecante . . .	+	+	−	−

3. Aus dem Vorstehenden ist klar, dafs man nur nöthig hat, fernere trigonometrische C. für Winkel des ersten Quadranten (für spitze Winkel) zu zeigen.

Eben so können C. für Winkel von $90° - \alpha$; $90° + \alpha$; $270° - \alpha$; $270° + \alpha$ übergangen werden, *α* gehöre gleichviel welchem Quadranten an. Denn

sin, *tg*, *sec* von $(90° - \alpha)$ sind *cos*, *cot*, *cosec* von *α*

cos, *cot*, *cosec* von $(90° - \alpha)$ sind *sin*, *tg*, *sec* von *α*

sin, *tg*, *sec* von $(90° + \alpha)$ sind + *cos*, − *cot*, − *cosec* von *α*

cos, *cot*, *cosec* von $(90° + \alpha)$ sind − *sin*, − *tg*, + *sec* von *α*

sin, *tg*, *sec* von $(270° - \alpha)$ sind − *cos*, + *cot*, − *cosec* von *α*

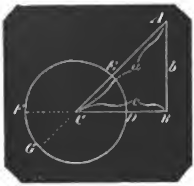
cos, *cot*, *cosec* von $(270° - \alpha)$ sind − *sin*, + *tg*, − *sec* von *α*

sin, *tg*, *sec* von $(270° + \alpha)$ sind $-$ *cos*, $-$ *cot*, $+$ *cosec* von α

cos, *cot*, *cosec* von $(270° + \alpha)$ sind $+ \sin \alpha$ $- tg\, \alpha$, $- \sec$ von α

4) Soll man die zu trigonometrischen Linien gehörenden Arcus auftragen, so hat man für diese, da sie als abstracte Zahlen erscheinen, immer in der Form $\pm \frac{a}{b}$ wenn a und b Linien sind.

Fig. 441.



I. $Arc\left(\sin = \pm \frac{b}{a}\right)$ zu finden.

Zeichne den rechten $\angle ABC$, nimm einen Schenkel AB = dem Zähler b, schneide von A aus den anderen Schenkel mit dem Nenner $AC = a$ in C, ziehe AC, beschreibe aus C mit dem Halbmesser $CD = 1$ einen Kreis so ist

Bogen DE und Bogen EF
$$= Arc\left(\sin = + \frac{b}{a}\right)$$
Bogen $EDGF$ und Bogen $DGFE$
$$= Arc\left(\sin = - \frac{b}{a}\right)$$

II. $Arc\left(\cos = \pm \frac{c}{a}\right)$ zu finden.

Zeichne den rechten $\angle ABC$, nimm einen Schenkel BC = dem Zähler c und schneide von C aus den andren Schenkel mit dem Nenner $= CA = a$ in A, ziehe CA, beschreibe aus C mit dem Halbmesser $CD = 1$ einen Kreis, so ist

Bogen DE und Bogen $DGFE$
$$= Arc\left(\cos = + \frac{c}{a}\right)$$
Bogen EF und Bogen $EDGF$
$$= Arc\left(\cos = - \frac{c}{a}\right)$$

III. $Arc\left(tg = \pm \frac{b}{c}\right)$ zu finden.

Zeichne den rechten $\angle ABC$, nimm einen Schenkel $AB = b$, den anderen $BC = c$, ziehe CA; in C, dem Endpunkt des Nenners, beschreibe den Kreis vom Halbmesser $= 1$, so ist

Bogen DE und Bogen $EDGF$
$$Arc = \left(tg = + \frac{b}{c}\right)$$
Bogen EF und Bogen $DGFE$
$$= Arc\left(tg = - \frac{b}{c}\right)$$

IV. $Arc\left(\cot = \pm \frac{c}{b}\right)$ zu finden.

Man verfahre wie ad III, nur daſs man den Kreis aus dem Endpunkt des Zählers c beschreibt; dann ist

Bogen DE und Bogen $EDGF$
$$= Arc\left(\cot = + \frac{c}{b}\right)$$
Bogen EF und Bogen $DGFE$
$$= Arc\left(\cot = - \frac{c}{b}\right)$$

V. $Arc\left(\sec = \pm \frac{a}{c}\right)$ zu finden.

Zeichne den rechten $\angle ABC$, nimm einen Schenkel BC = dem Nenner c und schneide aus C mit dem Zähler $= a$ den anderen Schenkel in A, ziehe AC, beschreibe aus dem Durchschnittspunkt C von Zähler und Nenner den Kreis mit dem Halbmesser $= 1$ so ist

Bogen DE und Bogen $DGFE$
$$= Arc\left(\sec = + \frac{a}{c}\right)$$
Bogen EF und Bogen $EDGF$
$$= Arc\left(\sec = - \frac{a}{c}\right)$$

VI. $Arc\left(cosec = \pm \frac{a}{b}\right)$ zu finden.

Zeichne den rechten $\angle ABC$, nimm einen Schenkel AB = dem Nenner b und schneide aus A mit dem Zähler $= a$ den anderen Schenkel in C, aus diesem Punkt C beschreibe den Kreis mit dem Halbmesser $= 1$, ziehe AC so ist

Bogen DE und Bogen EF
$$= Arc\left(cosec = + \frac{a}{b}\right)$$
Bogen $EDGF$ und Bogen $DGFE$
$$= Arc\left(cosec = - \frac{a}{b}\right)$$

5) Die Linien $r \sin^2\alpha$, $r \cos^2 \alpha$, $r\, tg^2 \alpha$, $r \cot^2 \alpha$, $r \sec^2 \alpha$, $r\, cosec^2 \alpha$ zu zeichnen.

I. Nimm Fig. 442 den einen Schenkel von α, z. B. $AC = r$, fälle das Loth AB von A auf den zweiten Schenkel CB, aus B wieder das Loth BD auf den ersten Schenkel CA, so ist $AD = r \sin^2 \alpha$

Denn es ist
$$AD = AB \cdot \sin ABD = AB . \sin \alpha$$
Da nun $AB = AC . \sin \alpha = r . \sin \alpha$
so ist $AD = r . \sin \alpha \cdot \sin \alpha = r . \sin^2 \alpha$

II. Verfahre wie ad 1 so ist

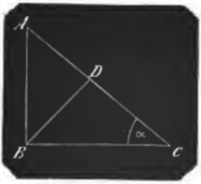
$$CD = r \cdot \cos^2\alpha$$

denn $CD = BC \cdot \cos\alpha$

$BC = AC \cdot \cos\alpha = r \cdot \cos\alpha$

folglich $CD = r \cdot \cos\alpha \cdot \cos\alpha = r \cdot \cos^2\alpha$

Fig. 442.



III. Trage auf einen Schenkel von α z. B. auf CA das Stück $CD = r$, fälle in D auf CA das Loth DB bis in die Richtung des anderen Schenkels CB, errichte in B auf diesem zweiten Schenkel CB das Loth BA bis in die Richtung des ersten Schenkels CA, so ist $AD = r\, tg^2\alpha$

Denn es ist

$AD = BD \cdot tg\ ABD = BD \cdot tg\ \alpha$

ferner $BD = DC \cdot tg\ \alpha = r \cdot tg\ \alpha$

daher $AD = r \cdot tg\ \alpha \cdot tg\ \alpha = r \cdot tg^2\alpha$

IV. Verfahre wie ad 3, so ist

$$AC = r \cdot sec^2\alpha$$

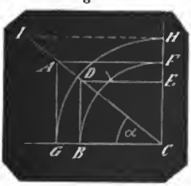
denn es ist $AC = BC \cdot sec\ \alpha$

$BC = CD \cdot sec\ \alpha = r \cdot sec\ \alpha$

daher $AC = r \cdot sec\ \alpha \cdot sec\ \alpha = r\ sec^2\alpha$

V. Errichte Fig. 443 im Scheitelpunkt C von α auf einem Schenkel z. B. CB ein Loth CF, nimm auf demselben $CE = r$, ziehe $ED \ddagger CB$ bis in die Richtung CA des zweiten Schenkels, fälle das Loth DB auf den ersten Schenkel CB, zeichne aus C den Quadrant BF, ziehe aus F bis in die Richtung CA die Linie $FA \ddagger CB$ so ist $AF = r\ cot^2\alpha$

Fig. 443.



Denn es ist $AF = CF \cdot cot\ CAF$

$= CF\ cot\ \alpha = CB \cdot cot\ \alpha = DE \cdot cot\ \alpha$

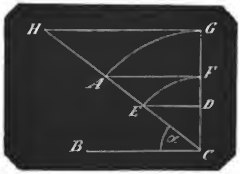
da nun $DE = CE \cdot cot\ CDE = CE \cdot cot\ \alpha$

$= r\ cot\ \alpha$

so ist $AF = r \cdot cot\ \alpha \cdot cot\ \alpha = r \cdot cot^2\alpha$

VI. Errichte Fig. 444 in C auf einem Schenkel CB von α ein Loth CF, nimm auf demselben das Stück $CD = r$, ziehe aus D bis in die Richtung CA des zweiten Schenkels von α $DE \ddagger CB$, zeichne aus C den Bogen EF, ziehe $FA \ddagger CB$, so ist $CA = r\ cosec^2\alpha$

Fig. 444.



Denn es ist

$CA = CF \cdot cosec\ CAF = CF \cdot cosec\ \alpha$

$= CE \cdot cosec\ \alpha$

aber $CE = CD\ cosec\ CED = CD \cdot cosec\ \alpha$

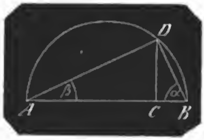
$= r \cdot cosec\ \alpha$

folglich $CA = r \cdot cosec\ \alpha \cdot cosec\ \alpha = r \cdot cosec^2\alpha$

6) Die Bogen: $Arc\left(sin^2 = \frac{a}{b}\right)$; $Arc\left(cos^2 = \frac{a}{b}\right)$; $Arc\left(tg^2 = \frac{a}{b}\right)$; $Arc\left(cot^2 = \frac{a}{b}\right)$ $Arc\left(sec^2 = \frac{a}{b}\right)$; $Arc\left(cosec^2 = \frac{a}{b}\right)$ zu zeichnen. (Vergl. No. 4.)

I. Für $Arc\left(sin^2 = \frac{a}{b}\right)$ zeichne Fig. 445 über $AB =$ dem gröfseren Nenner b den Halbkreis, nimm von einem Endpunkt A aus auf dem Durchmesser den kleineren Zähler $AC = a$, errichte in C das Loth CD bis in die Peripherie, ziehe von D nach dem anderen Endpunkt B des Durchmessers DB, so ist der aus B mit dem Halbmesser $= 1$ zu beschreibende Bogen zu dem $\angle ABD = (\alpha) = arc\left(sin^2 = \frac{a}{b}\right)$

Fig. 445.



Denn es ist, wenn man AD zieht,

$a = AC = AD \cdot sin\ ADC = AD \cdot sin\ \alpha$

und $AD = AB \cdot sin\ \alpha = b \cdot sin\ \alpha$

daher $a = b.\sin\alpha\cdot\sin\alpha = b.\sin^2\alpha$

woraus $\sin^2\alpha = \frac{a}{b}$

II. Für $Arc\left(\cos^2 = \frac{a}{b}\right)$ construire wie ad 1, so ist der Bogen zu dem $\angle BAD = \beta = arc\left(\cos^2 = \frac{a}{b}\right)$

Denn es ist

$$a = AC = AD\cdot\cos\beta$$

aber $AD = AB.\cos\beta = b.\cos\beta$

daher $a = b.\cos\beta\cdot\cos\beta = b.\cos^2\beta$

und $\cos^2\beta = \frac{a}{b}$

III. Für $Arc\left(tg^2 = \frac{a}{b}\right)$ setze eine grade Linie AB aus $AC = a$ und $BC = b$ zusammen, beschreibe über AB den Halbkreis, errichte in C die Ordinate CD und zeichne die über $BC =$ dem Nenner b liegende Sehne BD, so ist der Bogen zu dem

$\angle DBA = \alpha = arc\left(tg^2 = \frac{a}{b}\right)$

Denn es ist, wenn man noch AD zieht,

$$a = AC = CD\cdot tg\,ADC = CD.tg\,\alpha$$

und $CD = BC.tg\,\alpha = b.tg\,\alpha$

daher $a = b.tg\,\alpha\cdot tg\,\alpha = b\cdot tg^2\alpha$

woraus $tg^2\alpha = \frac{a}{b}$

IV. Für $Arc\left(cot^2 = \frac{a}{b}\right)$ construire wie ad 3, ziehe die über $AC =$ dem Zähler a liegende Sehne AD, so ist der Bogen zu dem $\angle DAB = \beta = arc\left(cot^2 = \frac{a}{b}\right)$

Denn es ist, wenn man noch BD zieht,

$$a = AC = DC.cot\,\beta$$

$DC = BC.cot\,CDB = b\ cot\,CDB = b.\cos\beta$

woraus $a = b\cdot cot\,\beta\cdot cot\,\beta = b.cot^2\beta$

nnd $cot^2\beta = \frac{a}{b}$

V. Für $Arc\left(sec^2 = \frac{a}{b}\right)$ nimm $AB =$ dem gröfseren Zähler a, trage auf demselben ein Stück $AC =$ dem kleineren Nenner b ab, errichte in C die Ordinate CD, ziehe die über dem Nenner b liegende Sehne AD, so ist der Bogen zu $\angle BAD = \beta = arc\left(sec^2 = \frac{a}{b}\right)$

Denn es ist

$$a = AB = AD.sec\,\beta$$

$$AD = AC.sec\,\beta = b\ sec\,\beta$$

daher $a = b.sec\,\beta.sec\,\beta = b.sec^2\beta$

woraus $sec^2\beta = \frac{a}{b}$

VI. Für $Arc\left(cosec^2 = \frac{a}{b}\right)$ construire wie ad 5, ziehe die Sehne BD, so ist der Bogen zu $\angle ABD = \alpha = arc\left(cosec^2 = \frac{a}{b}\right)$

Denn es ist

$$a = AB = AD.cosec\,\alpha$$

$AD = AC\cdot cosec\,ADC = AC.cosec\,\alpha$
$= b.cosec\,\alpha$

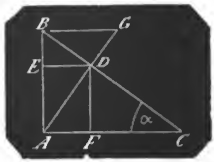
woraus $a = b\ cosec\,\alpha\cdot cosec\,\alpha = b.cosec^2\alpha$

also $cosec^2\alpha = \frac{a}{b}$

7) Die Linien $r\sin^3\alpha$, $r\cos^3\alpha$, $r\,tg^3\alpha$, $r\,cot^3\alpha$, $r\,sec^3\alpha$, $r\,cosec^3\alpha$ zu zeichnen.

I. Für $r\sin^3\alpha$ zeichne $\angle ACB = \alpha$, nimm den einen Schenkel $BC = r$, fälle das Loth BA auf den anderen Schenkel, von A das Loth AD auf den ersten Schenkel und endlich das Loth DE auf das Loth AB, so ist $BE = r\sin^3\alpha$

Fig. 446.



Denn es ist

$DE \mathrel{\#} AC$, daher $\angle BDE = \alpha$

also $BE = BD.\sin\alpha$

aber auch $\angle BAD = \alpha$

daher $BD = AB.\sin\alpha$

folglich $BE = AB\cdot\sin\alpha\cdot\sin\alpha = AB.\sin^2\alpha$

Nun ist $AB = BC.\sin\alpha = r\cdot\sin\alpha$

also $BE = r.\sin\alpha\,.\sin^2\alpha = r.\sin^3\alpha$

II. Für $r\cdot\cos^3\alpha$ construire wie ad 1, nur fälle (statt DE) das Loth DF auf den zweiten Schenkel AC, so ist $CF = r\cdot\cos^3\alpha$

Denn es ist

$$AC = BC.\cos\alpha = r\cdot\cos\alpha$$

$CD = AC\cdot\cos\alpha = r\cdot\cos\alpha\cdot\cos\alpha$
$= r\cos^2\alpha$

endlich $CF = CD\cos\alpha = r\cdot\cos^2\alpha\cdot\cos\alpha$
$= r\cos^3\alpha$

III. Für $r\,tg^3\alpha$ zeichne $\angle ACD = \alpha$, nimm den einen Schenkel $CD = r$, errichte in D auf demselben das Loth DA bis in die Richtung des anderen Schenkels CA, in A auf demselben Schenkel CA das Loth AB bis in die Richtung des ersten Schenkels CD, in B ein Loth BG auf dem Loth AB, verlängere AD bis in die Richtung dieses Loths, so ist

$$DG = r\cdot tg^3\alpha$$

Denn es ist

$$AD = CD.tg\,\alpha = r.tg\,\alpha$$

$$BD = AD\ tg\,BAD = AD\ tg\,\alpha$$

folgt $BD = r.tg\,\alpha\cdot tg\,\alpha = r\ tg^2\alpha$

ferner $DG = BD\ tg\ GBD = BD\ tg\ \alpha$
also $DG = r\ tg^2\alpha \cdot tg\ \alpha = r\ tg^3\alpha$

IV. Für $r\ cot^3\alpha$ hat man (Fig 443) $AF = r \cdot cot^2\alpha$. Fälle nun das Loth AG, zeichne den Quadrant GH, ziehe $HJ \nparallel CB$ bis in die Richtung von CA, so ist

$$HJ = r\ cot^3\alpha$$

Denn es ist

$$HJ = CH\ cot\ \alpha = CG \cdot cot\ \alpha = AF\ cot\ \alpha$$
$$= r\ cot^2\alpha \cdot cot\ \alpha = r\ cot^3\alpha$$

V. Für $r\ sec^3\alpha$ nimm (Fig. 446) das Stück CF eines Schenkels von $\alpha = r$, errichte in F auf diesen Schenkel das Loth FD bis in die Richtung des anderen Schenkels CB; errichte in D auf demselben Schenkel das Loth DA bis in die Richtung des ersten Schenkels CF und errichte in A auf diesem Schenkel das Loth AB bis in die Richtung des 2ten Schenkels, so ist

$$BC = r\ sec^3\alpha$$

Denn es ist

$$BC = AC \cdot sec\ \alpha$$
$$AC = DC \cdot sec\ \alpha$$

folglich $BC = DC . sec\ \alpha \cdot sec\ \alpha = DC \cdot sec^2\alpha$
$DC = CF . sec\ \alpha$
daher $BC = CF . sec\ \alpha \cdot sec^2\alpha$
$= CF . sec^3\alpha = r . sec^3\alpha$

VI. Für $r\ cosec^3\alpha$ hat man (Fig. 444) $CA = r\ cosec^2\alpha$, zeichnet man nun aus C den Bogen AG bis in die Richtung von CF, zieht $GH \nparallel BC$ bis in die Richtung von CA, so ist $CH = r . cosec^3\alpha$

Denn es ist

$$CH = CG\ cosec\ \alpha = CA\ cosec\ \alpha$$
$$= r\ cosec^2\alpha . cosec\ \alpha = r\ cosec^3\alpha$$

8) Die Linien $r\ sin\ \alpha \cdot sin\ \beta$
$r\ sin\ \alpha \cdot cos\ \beta$
$r\ sin\ \alpha \cdot tg\ \beta$
$r . sin\ \alpha \cdot cot\ \beta$
$r\ sin\ \alpha \cdot sec\ \beta$
$r\ sin\ \alpha . cosec\ \beta$

zu zeichnen.

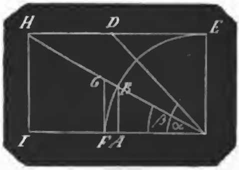
I. Für $r\ sin\ \alpha . sin\ \beta$ zeichne an der Linie AC als gemeinschaftlichem Schenkel $\angle ACB = \beta$ und $\angle ACD = \alpha$ nach einerlei Richtung, errichte im Scheitel C auf AC ein Loth CE, nimm den zweiten Schenkel CD des $\angle \alpha = r$, fälle das Loth DE auf CE, zeichne aus C den Bogen EB bis in die Richtung des zweiten Schenkels CB von β und fälle das Loth BA auf den Schenkel AC so ist

$$AB = r . sin\ \alpha . sin\ \beta$$

Denn denkt man sich von D ein Loth auf AC
so ist dies $= CD . sin\ \alpha = r \cdot sin\ \alpha = CE$
daher auch $BC = r . sin\ \alpha$
aber $AB = BC . sin\ \beta$
folglich $AB = r \cdot sin\ \alpha . sin\ \beta$

Hiermit ist zugleich die Linie $r . \dfrac{sin\ \alpha}{cosec\ \beta}$ construirt.

Fig. 447.



II. Für $r\ sin\ \alpha . cos\ \beta$ construire wie ad 1, so ist $AC = r . sin\ \alpha . cos\ \beta$.

Denn es ist $BC = CE = r \cdot sin\ \alpha$
folglich $AC = BC \cdot cos\ \beta = r . sin\ \alpha . cos\ \beta$

Hiermit ist zugleich die Linie $r . \dfrac{sin\ \alpha}{sec\ \beta}$ construirt.

III. Für $r . sin\ \alpha . tg\ \beta$ construire wie ad 1 und 2, aber zeichne statt des Bogens EB den Quadrant EBF, errichte nun das Loth FG bis in die Richtung CB des zweiten Schenkels von β, so ist

$$FG = r . sin\ \alpha . tg\ \beta$$

Denn CE, also auch CF ist $= r\ sin\ \alpha$
folglich $FG = CF \cdot tg\ \beta = r . sin\ \alpha . tg\ \beta$

Hiermit ist zugleich die Linie $r . \dfrac{sin\ \alpha}{cot\ \beta}$ construirt.

IV. Für $r \cdot sin\ \alpha\ cot\ \beta$ nimm wieder $CD = r$ und ziehe aus D die Linie $DH \nparallel AC$ bis in die Richtung des zweiten Schenkels CB von β; fälle das Loth HJ auf den gemeinschaftlichen Schenkel CA so ist $JC = r \cdot sin\ \alpha \cdot cot\ \beta$

Denn es ist $HJ = CD\ sin\ \alpha = r \cdot sin\ \alpha$
folglich $JC = HJ . cot\ \beta = r \cdot sin\ \alpha . cot\ \beta$

Hiermit ist zugleich die Linie $r . \dfrac{sin\ \alpha}{tg\ \beta}$ construirt.

V. Für $r\ sin\ \alpha . sec\ \beta$ construire wie ad 3, so ist $CG = r . sin\ \alpha . sec\ \beta$

Denn es ist

$$CF = CE = CD . sin\ \alpha = r . sin\ \alpha$$

und $CG = CF\ sec\ \beta = r . sin\ \alpha \cdot sec\ \beta$

Hiermit ist zugleich die Linie $r \cdot \dfrac{sin\ \alpha}{cos\ \beta}$ construirt.

VI. Für $r . sin\ \alpha . cosec\ \beta$ construire wie ad 4, so ist $CH = r \cdot sin\ \alpha . cosec\ \beta$

Denn es ist

$HJ = r . sin\ \alpha$ und $CH = HJ . cosec\ \beta$
folglich ist $CH = r \cdot sin\ \alpha \cdot cosec\ \beta$

Hiermit ist zugleich die Linie $r \cdot \dfrac{sin\ \alpha}{sin\ \beta}$ construirt.

9) Die Linien $r \cdot cos\ \alpha \cdot cos\ \beta$
$r \cdot cos\ \alpha \cdot tg\ \beta$
$r \cdot cos\ \alpha\ cot\ \beta$

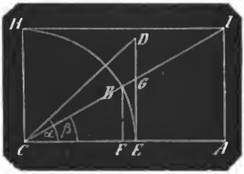
$r \cdot \cos\alpha . \sec\beta$
$r \cdot \cos\alpha \cdot \operatorname{cosec}\beta$

zu zeichnen.

I. Für $r \cdot \cos\alpha . \cos\beta$ zeichne $\angle ACD = \alpha$, $ACB = \beta$, nimm den zweiten Schenkel CD von $\alpha = r$, fälle das Loth DE auf den gemeinschaftlichen Schenkel AC, zeichne aus C den Bogen EB bis in die Richtung CB des zweiten Schenkels von β, fälle das Loth BF auf den gemeinschaftlichen Schenkel AC, so ist

$$CF = r \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta$$

Fig. 448.



Denn es ist $CE = CD . \cos\alpha = r \cdot \cos\alpha$
daher $BC = CE = r . \cos\alpha$
Da nun $CF = BC . \cos\beta$
so ist auch $CF = r \cdot \cos\alpha . \cos\beta$

Hiermit ist zugleich die Linie $r \cdot \frac{\cos\alpha}{\sec\beta}$ construirt.

II. Für $r \cdot \cos\alpha . tg\,\beta$ zeichne die beiden $\angle\,\alpha$ und β, nimm $CD = r$, fälle auf den gemeinschaftlichen Schenkel AC das Loth DE, so ist das zwischen beiden Schenkeln von β liegende Stück desselben $= r . \cos\alpha . tg\,\beta$

Denn es ist $CE = CD . \cos\alpha = r . \cos\alpha$
also $EG = CE . tg\,\beta = r \cdot \cos\alpha \cdot tg\,\beta$

Hiermit ist zugleich die Linie $r \cdot \frac{\cos\alpha}{\cot\beta}$ construirt.

III. Für $r \cdot \cos\alpha . \cot\beta$ construire wie ad 2, errichte im Scheitel C auf dem gemeinschaftlichen Schenkel AC das Loth CH, zeichne aus C den Quadrant EBH, ziehe aus H die Parallele HJ mit AC bis in die Richtung des zweiten Schenkels CB von β, fälle aus J das Loth JA auf AC, so ist $AC = r . \cos\alpha . \cot\beta$

Denn es ist
$$CH = CE = CD . \cos\alpha = r . \cos\alpha$$
Nun ist $AC = HJ = CH . \cot\beta$
woraus $AC = r . \cos\alpha \cdot \cot\beta$

Hiermit ist zugleich die Linie $r \cdot \frac{\cos\alpha}{tg\,\beta}$ construirt.

IV. Für $r \cdot \cos\alpha . \sec\beta$ construire wie ad 2, so ist der durch das Loth DE auf dem zweiten Schenkel von β abgeschnittene Theil $CG = r \cos\alpha . \sec\beta$

Denn es ist $CE = CD \cos\alpha = r . \cos\alpha$ und $CG = CE . \sec\beta = r . \cos\alpha \cdot \sec\beta$

Hiermit ist zugleich die Linie $r \cdot \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$ construirt.

V. Für $r . \cos\alpha \cdot \operatorname{cosec}\beta$ construire wie ad 3, so ist das von der Parallele HJ auf dem zweiten Schenkel von β abgeschnittene Stück $CJ = r . \cos\alpha \cdot \operatorname{cosec}\beta$

Denn es ist
$$CJ = CH . \operatorname{cosec} HJC = CH . \operatorname{cosec}\beta$$
$$CH = CE = CD . \cos\alpha = r . \cos\alpha$$
folglich $CJ = r . \cos\alpha \cdot \operatorname{cosec}\beta$

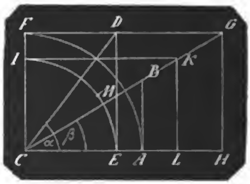
Hiermit ist zugleich die Linie $r \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\beta}$ construirt.

10) Die Linien $r . tg\,\alpha \cdot tg\,\beta$
$r . tg\,\alpha \cdot \cot\beta$
$r . tg\,\alpha \cdot \sec\beta$
$r . tg\,\alpha \cdot \operatorname{cosec}\beta$

zu zeichnen.

I. Für $r \cdot tg\,\alpha \cdot tg\,\beta$ zeichne $\angle ACD = \alpha$, $\angle ACB = \beta$, nimm auf dem gemeinschaftlichen Schenkel AC das Stück $CE = r$, errichte in E auf AC das Loth ED bis in die Richtung des zweiten Schenkels

Fig. 449.



von α, errichte in C auf AC das Loth CF, ziehe DF bis in die Richtung von CF die mit AC parallele DF, zeichne aus C den Quadrant FA, errichte in A auf AC ein Loth AB bis in die Richtung des zweiten Schenkels von β, so ist

$$AB = r \cdot tg\,\alpha \cdot tg\,\beta$$

Denn es ist $AB = AC . tg\,\beta$
$$AC = CF = DE = CE\ tg\,\alpha = r\ tg\,\alpha$$
folglich $AB = r \cdot tg\,\alpha \cdot tg\,\beta$

Hiermit ist zugleich die Linie $r \cdot \frac{tg\,\alpha}{\cot\beta}$ construirt.

II. Für $r . tg\,\alpha \cdot \cot\beta$ nimm wieder $CE = r$, errichte auf AC das Loth ED bis in den 2ten Schenkel von α, ziehe $DG \mp AC$ bis in die Richtung des zweiten Schenkels von β, fälle das Loth GH auf AC, so ist $CH = r \cdot \cos\alpha . \cot\beta$

Denn es ist $CH = GH \cdot \cot\beta$
$GH = DE = CE . \operatorname{tg}\alpha = r . \operatorname{tg}\alpha$
folglich $CH = r \cdot \operatorname{tg}\alpha . \cot\beta$

Hiermit ist zugleich die Linie $r \cdot \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}$ construirt.

III. Für $r \cdot \operatorname{tg}\alpha . \sec\beta$ construire wie ad 1, so ist das von dem Loth AB auf dem zweiten Schenkel von β abgeschnittene Stück $CB = r . \operatorname{tg}\alpha \cdot \sec\beta$.
Denn es ist $BC = AC \cdot \sec\beta$
$AC = CF = DE = CE . \operatorname{tg}\alpha = r . \operatorname{tg}\alpha$
folglich $BC = r . \operatorname{tg}\alpha \cdot \sec\beta$

Hiermit ist zugleich die Linie $r \cdot \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos\beta}$ construirt.

IV. Für $r \cdot \operatorname{tg}\alpha \operatorname{cosec}\beta$ construire wie ad 2, so ist das von der Parallelen DG auf dem zweiten Schenkel von β abgeschnittene Stück $CG = r . \operatorname{tg}\alpha \operatorname{cosec}\beta$.
Denn es ist $CG = GH \cdot \operatorname{cosec}\beta$
$GH = DE = CE \operatorname{tg}\alpha = r . \operatorname{tg}\alpha$
folglich $CG = r \operatorname{tg}\alpha \operatorname{cosec}\beta$

Hiermit ist zugleich die Linie $r \cdot \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sin\beta}$ construirt.

11) Die Linien $r . \cot\alpha \cdot \cot\beta$
$r \cot\alpha \cdot \sec\beta$
$r \cot\alpha \cdot \operatorname{cosec}\beta$
zu zeichnen.

I. Für $r . \cot\alpha \cdot \cot\beta$ errichte im Scheitel C auf dem gemeinschaftlichen Schenkel AC ein Loth CF, nimm $CF = r$, ziehe $FD \mathrel{\#} AC$ bis in die Richtung des zweiten Schenkels von α, fälle das Loth DE auf AC, zeichne aus C den Quadrant EJ, ziehe $JK \mathrel{\#} AC$ bis in die Richtung des zweiten Schenkels von β, fälle das Loth KL auf AC, so ist das von AC dadurch abgeschnittene Stück $CL = r \cdot \cot\alpha . \cot\beta$
Denn es ist
$CL = KL . \cot\beta = CJ . \cot\beta = CE . \cot\beta$
aber $CE = DE \cdot \cot\alpha = CF \cot\alpha = r \cot\alpha$
folglich $CL = r \cdot \cot\alpha \cdot \cot\beta$

Hiermit ist zugleich die Linie $r \cdot \frac{\cot\alpha}{\operatorname{tg}\beta}$ construirt.

II. Für $r = \cot\alpha \cdot \sec\beta$ nimm wieder $CF = r$, ziehe $FD \mathrel{\#} AC$ bis in die Richtung des zweiten Schenkels von α, fälle das Loth DE auf AC, so ist das dadurch von dem zweiten Schenkel BC von β abgeschnittene Stück $CM = r . \cot\alpha \cdot \sec\beta$
Denn es ist $CM = CE \cdot \sec\beta$
$CE = DE \cot\alpha = CF . \cot\alpha = r . \cot\alpha$
folglich $CM = r \cot\alpha \cdot \sec\beta$

Hiermit ist zugleich die Linie $r \cdot \frac{\cot\alpha}{\cos\beta}$ construirt.

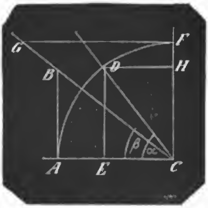
III. Für $r . \cot\alpha \cdot \operatorname{cosec}\beta$ construire wie ad 1, so ist das von JK auf dem zweiten Schenkel BC von β abgeschnittene Stück $CK = r \cdot \cot\alpha . \operatorname{cosec}\beta$
Denn es ist $CK = KL . \operatorname{cosec}\beta$
$KL = CJ = CE = DE . \cot\alpha = CF . \cot\alpha$
$= r . \cot\alpha$
folglich $CK = r . \cot\alpha \cdot \operatorname{cosec}\beta$.

Hiermit ist zugleich die Linie $r \cdot \frac{\cot\alpha}{\sin\beta}$ construirt

12) Die Linien $r . \sec\alpha \cdot \sec\beta$
$r \cdot \sec\alpha \cdot \operatorname{cosec}\beta$
$r \cdot \operatorname{cosec}\alpha \cdot \operatorname{cosec}\beta$
zu zeichnen.

I. Für $r . \sec\alpha \cdot \sec\beta$ zeichne $\angle ACD = \alpha$, $\angle ACB = \beta$, nimm auf dem gemeinschaftlichen Schenkel AC ein Stück $CE = r$, errichte in E auf AC ein Loth ED

Fig. 450.



bis in die Richtung des zweiten Schenkels von α, zeichne aus C den Bogen DA, errichte in A auf AC das Loth AB bis in die Richtung des zweiten Schenkels von β, so ist das von demselben abgeschnittene Stück CB dieses Schenkels $= r \cdot \sec\alpha \cdot \sec\beta$
Denn es ist $CB = CA . \sec\beta$
$CA = CD = CE . \sec\alpha = r . \sec\alpha$
folglich $CB = r . \sec\alpha \cdot \sec\beta$

Hiermit ist zugleich die Linie $r \cdot \frac{\sec\alpha}{\cos\beta}$ construirt.

II. Für $r \cdot \sec\alpha \cdot \operatorname{cosec}\beta$ nimm wieder $CE = r$, errichte das Loth ED bis in die Richtung des zweiten Schenkels von α, errichte ferner im Scheitel C auf demselben Schenkel AC ein Loth CF, zeichne aus C den Bogen DF und ziehe aus F die mit AC parallele Linie FG bis in die Richtung des zweiten Schenkels von β, so ist das dadurch auf dem Schenkel abgeschnittene Stück $CG = r \sec a . \operatorname{cosec}\beta$.
Denn es ist
$CG = CF \operatorname{cosec} CGF = CF \operatorname{cosec}\beta$
$CF = CD = CE \sec\alpha = r . \sec\alpha$
folglich $CG = r \cdot \sec\alpha . \operatorname{cosec}\beta$.

Hiermit ist zugleich die Linie $r \cdot \frac{sec\ \alpha}{sin\ \beta}$ construirt.

III. Für $r \cdot cosec\ \alpha \cdot cosec\ \beta$ errichte im Scheitel C auf dem gemeinschaftlichen Schenkel AC ein Loth CF, nimm auf demselben vom Scheitel C aus ein Stück $CH = r$, ziehe aus H eine mit AC parallele HD bis in die Richtung des zweiten Schenkels von α, zeichne aus C den Bogen DF, ziehe aus F eine mit AC parallele FG bis in die Richtung des zweiten Schenkels von β, so ist das von demselben abgeschnittene Stück $CG = r \cdot cosec\ \alpha \cdot cosec\ \beta$

Denn es ist

$$CG = CF \cdot cosec\ CGF = CF \cdot cosec\ \beta$$
$$CF = CD = DE \cdot cosec\ \alpha = CH \cdot cosec\ \alpha = r \cdot cosec\ \alpha$$

folglich $CG = r \cdot cosec\ \alpha \cdot cosec\ \beta$

Hiermit ist zugleich die Linie $r \cdot \frac{cosec\ \alpha}{sin\ \beta}$ construirt.

13) In D und F werden die Bogen construirt, wenn deren trigonometrische Functionen durch den Quotient zweier Linien gegeben werden. Aus G und L entspringen Aufgaben für die Constructionen von Bogen, deren trigonometrische Functionen durch trigonom. Functionen zweier bekannten Winkel gegeben sind. Als zu zeichnen:

$$arc\left(sin = sin\ \alpha \cdot sin\ \beta = \frac{sin\ \alpha}{cosec\ \beta} = \frac{1}{cosec\ \alpha \cdot cosec\ \beta}\right)$$
$$arc\ (cos = sin\ \alpha \cdot sin\ \beta = \text{u. s. w.})$$
$$arc\ (tg\ = sin\ \alpha \cdot sin\ \beta = \text{u. s. w.})$$

u. s. w. bis

$$arc\left(cosec = cosec\ \alpha \cdot cosec\ \beta = \frac{cosec\ \alpha}{sin\ \beta} = \frac{1}{sin\ \alpha \cdot sin\ \beta}\right)$$

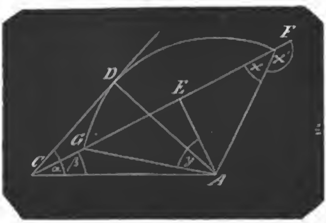
Im Ganzen $6 \times 21 = 126$ Aufgaben.

Von diesen sollen hier beispielsweise einige gelöst werden.

I. Zu zeichnen $arc\left(sin = \frac{sin\ \beta}{sin\ \alpha}\right)$

Die Auflösung ist möglich wenn $\beta < \alpha$, weil sin immer ein ächter Bruch ist. Zeichne $\angle ACB = \beta$, $\angle ACD = \alpha$, nimm den gemeinschaftlichen Schenkel AC beider $\angle$ = dem Radius = 1, fälle das Loth AD auf den zweiten Schenkel von α, zeichne aus A den Bogen DB bis in die Richtung des zweiten Schenkels von β,

Fig. 451.



ziehe AB, so sind die $\angle ABC$ (x) und ABF (x') die $\angle$ der verlangten Bogen.

Denn es ist AD, also auch $AB = AC \cdot sin\ \alpha = sin\ \alpha$

Ferner ist das von A auf den zweiten Schenkel von β zu denkende Loth

AE sowohl $= AC \cdot sin\ \beta = sin\ \beta$ als auch
$= AB \cdot sin\ x = sin\ \alpha \cdot sin\ x = sin\ \alpha \cdot sin\ x'$
daher ist

$$sin\ \beta = sin\ \alpha \cdot sin\ x = sin\ \alpha \cdot sin\ x'$$

folglich $sin\ x$ und $sin\ x' = \frac{sin\ \beta}{sin\ \alpha}$

II. Zu zeichnen $arc\left(cos = \frac{sin\ \beta}{sin\ \alpha}\right)$

Auch hier mufs wie in I, $\beta < \alpha$ sein. Nimm α, β und AC wie in I, fälle die Lothe AD, AE, beschreibe aus A den Bogen DG, ziehe GA, so sind die $\angle GAE = y$ und dessen Ergänzung zu 4 Rechten die Centriwinkel der verlangten Bogen.

Denn es ist

$$AD = AC \cdot sin\ \alpha = sin\ \alpha$$

also auch $AG = sin\ \alpha$
ferner $AE = AC \cdot sin\ \beta = sin\ \beta$
und zugleich

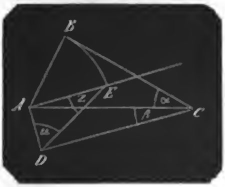
$$AE = AG \cdot cos\ y = sin\ \alpha \cdot cos\ y$$

folglich $cos\ y = \frac{sin\ \beta}{sin\ \alpha}$

III. Zu zeichnen $arc\left(tg = \frac{sin\ \beta}{sin\ \alpha}\right)$

Nimm die gerade Linie AC = dem Radius = 1, zeichne an C den $\angle ACB = \alpha$, und von AC aus nach der anderen Richtung den $\angle ACB = \beta$, zeichne die Sinusse $AB = sin\ \alpha$ und $AD = sin\ \beta$, aus A die Linie AE ⫲ dem zweiten Schenkel des Winkels β im Zähler, aus A den Bogen BE, ziehe DE, so ist $\angle AED = z$ der Centriwinkel des verlangten Bogens.

Fig. 452.



Denn es ist $AE = AB = \sin\,\alpha$

$AE \cdot tg\; z = AD = \sin\,\beta$

folglich $tg\; z = \dfrac{\sin\,\beta}{\sin\,\alpha}$

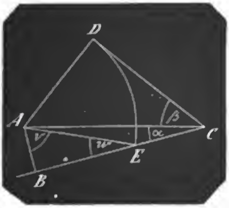
IV. Zu zeichnen $arc\left(\cot = \dfrac{\sin\,\beta}{\sin\,\alpha}\right)$

Bei derselben Construction (Fig. 452) ist $\angle\, ADE = u$ der verlangte Centriwinkel.

V. Zu zeichnen $arc\left(\sec = \dfrac{\sin\,\beta}{\sin\,\alpha}\right)$

Nimm $CA = 1$, zeichne an C von CA ab zu beiden Seiten die $\angle\, ACB = \alpha$ und $ACD = \beta$, fälle die Sinus $AB = \sin\,\alpha$ und $AD = \sin\,\beta$, zeichne aus A den Bogen DE bis in die Richtung von CB, ziehe AE so ist $\angle\, BAE = v$ der verlangte Centriwinkel.

Fig. 453.



Denn es ist

$AB \cdot \sec\; v = AE = AD = \sin\,\beta$

$AB = \sin\,\alpha$

folglich $\sec\; v = \dfrac{\sin\,\beta}{\sin\,\alpha}$

Wenn $AD < AB$ so schneidet der Bogen DE innerhalb AB und die Aufgabe ist unmöglich, denn $\sec\, v$ ist immer > 1.

VI. Zu zeichnen $arc\left(cosec = \dfrac{\sin\,\beta}{\sin\,\alpha}\right)$

Bei derselben Construction (Fig. 453) ist $\angle\, AEB = w$ der verlangte Centriwinkel.

14) Die Construction folgender Bogen führt zu interessanten und für die ganze Trigonometrie höchst wichtigen Gesetzen, nämlich die Construction von

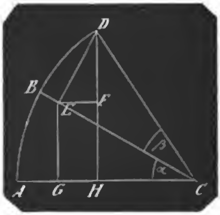
I. $arc(\sin = \sin\,\alpha \cdot \cos\,\beta + \cos\,\alpha \cdot \sin\,\beta)$

II. $arc(\cos = \cos\,\alpha \cdot \cos\,\beta - \sin\,\alpha \cdot \sin\,\beta)$

Man findet für alle möglichen Werthe von α und β, dafs der verlangte Bogen für beide Aufgaben derselbe ist, und zwar $= arc\;(\alpha + \beta)$, wie nachgewiesen werden soll.

I. Wenn die Schenkel von β beide im ersten Quadrant liegen.

Fig. 454.



Zeichne $\angle\, ACB = \alpha$ und $\angle\, BCD = \beta$, beschreibe mit $AC = 1$ den Bogen ABD, so ist dieser Bogen, also $arc\;(\alpha + \beta)$ der verlangte.

Denn fällt man die Lothe DE auf BC, EG und DH auf AC, EF auf DH, so ist erstens: $\angle\, EDF = \alpha$

$FH = EG = CE\; \sin\,\alpha = \cos\,\beta \cdot \sin\,\alpha$

$DF = DE \cdot \cos\; EDF = \sin\,\beta \cdot \cos\,\alpha$

$DH = \sin\,(\alpha + \beta) = FH + DF$

oder I. $\sin(\alpha + \beta) = \sin\,\alpha \cdot \cos\,\beta + \cos\,\alpha \cdot \sin\,\beta$

Zweitens ist:

$CG = CE \cdot \cos\;\alpha = \cos\,\beta \cdot \cos\,\alpha$

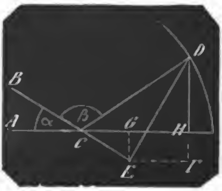
$GH = EF = DE \cdot \sin\; EDF = \sin\,\beta \cdot \sin\,\alpha$

$CH = \cos\,(\alpha + \beta) = CG - GH$

oder II. $\cos\,(\alpha + \beta) = \cos\,\beta - \sin\,\alpha \cdot \sin\,\beta$

II. Wenn der eine Schenkel von β im ersten, der andere im zweiten Quadrant liegt.

Fig. 455.



Es ist wieder der Bogen zu dem Centriwinkel $(\alpha + \beta)$ der verlangte. Denn bei derselben Construction wie in Fig. 454, wobei die Lothe DE, EG und EF auf die Verlängerungen von BC, AC und DH fallen, hat man:

Erstens $\angle EDF = \angle DEG = \angle ECG = \alpha$

$FH = EG = CE \cdot \sin ECG = CE \cdot \sin \alpha$

$CE = \cos DCE = \cos(180^\circ - \beta)$
$= -\cos \beta$

folglich $FH = -\sin \alpha \cdot \cos \beta$

Noch ist $DF = DF \cdot \cos EDF = DE \cdot \cos \alpha$

$DE = \sin DCE = \sin(180^\circ - \beta) = \sin \beta$

folglich $DF = \sin \beta \cdot \cos \alpha$

Nun ist $\sin(\alpha + \beta) = DH = -FH + DF$

folglich

I. $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$

Zweitens ist

$CG = CE \cdot \cos ECG = -\cos \beta \cdot \cos \alpha$

und $GH = EF = DE . \sin EDF = \sin \beta \cdot \sin \alpha$

und $CH = -\cos(\alpha + \beta) = CG + GH$

oder $-\cos(\alpha + \beta)$
$= -\cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$

oder II. $\cos(\alpha + \beta)$
$= \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$

III. Wenn der eine Schenkel von β im ersten, der andere im dritten Quadrant liegt.

Der Bogen zu dem Centriwinkel $= (\alpha + \beta)$ ist der verlangte. Denn bei derselben Construction wie in Fig. 455 hat man

Erstens: $DH = \sin DCH$
$= \sin(\alpha + \beta - 180^\circ) = -\sin(\alpha + \beta)$

oder $\sin(\alpha + \beta) = -DH = -(DF + FH)$

Nun ist $FH = EG = CE \cdot \sin ECG$
$= \cos DCE \cdot \sin ECG$

oder $FH = \cos(\beta - 180^\circ) \sin \alpha$
$= -\cos \beta . \sin \alpha$

ferner ist $DF = DE \cdot \cos EDF$
$= \sin(\beta - 180^\circ) \cdot \cos EDF = -\sin \beta . \cos EDF$

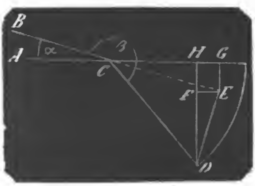
aber $\angle EDF = \angle ECG = \alpha$

also $DF = -\sin \beta \cdot \cos \alpha$

folglich

$FH + DF = -\cos \beta \cdot \sin \alpha - \sin \beta \cdot \cos \alpha$

Fig. 456.



oder I. $\sin(\alpha + \beta) = -(FH + DF)$
$= \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$

Zweitens ist $CH = \cos DCH$
$= \cos(\alpha + \beta - 180^\circ) = -\cos(\alpha + \beta)$

oder $\cos(\alpha + \beta) = -CH = -(CG - GH)$

aber $CG = CE \cdot \cos ECG$
$= \cos(\beta - 180^\circ) \cos \alpha = -\cos \beta \cdot \cos \alpha$

ferner ist $GH = EF = DE . \sin EDF$
$= \sin(\beta - 180^\circ) . \sin \alpha = -\sin \beta \cdot \sin \alpha$

folglich

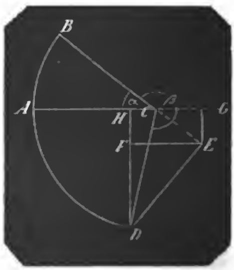
$CG - GH = -\cos \beta \cdot \cos \alpha + \sin \beta \cdot \sin \alpha$

und II. $\cos(\alpha + \beta) = -(CG - GH$
$= \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$

IV. Wenn ein Schenkel von β im ersten, der andere im vierten Quadrant liegt, $arc(\alpha + \beta)$ ist der verlangte Bogen.

Denn construirt man wie in Fig. 456, so hat man

Fig. 457.



Erstens $DH = \sin DCH$
$= \sin[360^\circ - (\alpha + \beta)] = -\sin(\alpha + \beta)$

Nun ist $DH = DF + FH$

ferner ist $FH = EG = CE \cdot \sin ECG$
$= \cos(\beta - 180^\circ) \cdot \sin \alpha = -\cos \beta \cdot \sin \alpha$

und $DF = DE \cdot \cos EDF$
$= \sin(\beta - 180^\circ) \cdot \cos EDG = -\sin \beta \cdot \cos EDF$
$= -\sin \beta \cdot \cos ECG = -\sin \beta \cdot \cos \alpha$

folglich I. $-DH = \sin(\alpha + \beta)$
$= \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$

Zweitens ist $CH = -CG + HG$

aber $CG = CE \cdot \cos ECG$
$= \cos(\beta - 180^\circ) \cdot \cos \beta \cdot \cos \alpha$

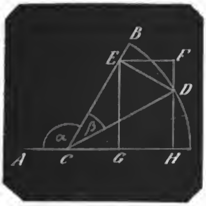
und $HG = EF = DE \cdot \sin EDF$
$= \sin(\beta - 180^\circ) \cdot \sin \alpha = -\sin \beta \cdot \sin \alpha$

folglich

II. $CH = \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$

V. Wenn beide Schenkel von β im zweiten Quadrant liegen. Construirt man wie in Fig. 454, so ist wieder $arc(\alpha + \beta)$ der verlangte Bogen; denn man hat

Fig. 458.



Erstens $DH = FH - DF$

aber $FH = EG = CE . \sin ECG$

$= CE \cdot \sin (180^\circ - \alpha) = \cos \beta \cdot \sin (180^\circ - \alpha)$

$= \cos \beta . \sin \alpha$

und $DF = DE . \cos EDF = \sin \beta \cdot \cos EDF$

$= \sin \beta \cdot \cos ECG = \sin \beta \cdot \cos (180^\circ - \alpha)$

$= - \sin \beta \cdot \cos \alpha$

folglich

I. $DH = \sin (\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$

Zweitens ist $CH = \cos DCH$

$= \cos [180^\circ - (\alpha + \beta)] = - \cos (\alpha + \beta)$

und zugleich $CH = CG + GH$

aber $CG = CE \cdot \cos ECG$

$= \cos \beta \cdot \cos (180^\circ - \alpha) = - \cos \alpha . \cos \beta$

und $GH = EF = DE \cdot \sin EDF$

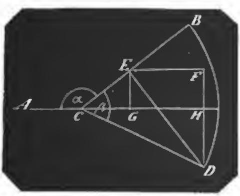
$= \sin \beta \cdot \sin (180^\circ - \alpha) = \sin \beta \cdot \sin \alpha$

folglich

II. $- CH = \cos (\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$

VI. Wenn ein Schenkel von β im zweiten, der andere im dritten Quadrant liegt. $arc (\alpha + \beta)$ ist der verlangte Bogen; denn construirt man wie in Fig. 458, so hat man

Fig. 459.



Erstens $DH = \sin DCH = \sin (\alpha + \beta - 180^\circ)$

$= - \sin (\alpha + \beta)$

zugleich $DH = DF - FH = - FH + DF$

aber $FH = EG = CE \sin ECG$

$= \cos \beta \cdot \sin (180^\circ - \alpha) = \cos \beta \cdot \sin \alpha$

und $DF = DE \cdot \cos EDF = \sin \beta \cdot \cos EDF$

$= \sin \beta \cdot \cos ECG = \sin \beta \cdot \cos (180^\circ - \alpha)$

$= - \sin \beta \cdot \cos \alpha$

also $DH = - \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta$

folglich

I. $- DH = \sin (\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$

Zweitens ist $CH = \cos DCH$

$= \cos (\alpha + \beta - 180^\circ) = - \cos (\alpha + \beta)$

zugleich $CH = CG + GH$

aber $CG = CE \cos ECG$

$= \cos \beta \cdot \cos (180^\circ - \alpha) = - \cos \beta \cdot \cos \alpha$

und $GH = EF = DE . \sin EDF$

$= \sin \beta \cdot \sin (180^\circ - \alpha) = \sin \beta \cdot \sin \alpha$

daher $CH = \sin \alpha \cdot \sin \beta - \cos \alpha \cdot \cos \beta$

folglich II. $- CH = \cos (\alpha + \beta)$

$= \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$

VII. Wenn ein Schenkel von β im zweiten und der andere im vierten Quadrant liegt. $arc (\alpha + \beta)$ ist der verlangte Bogen, denn construirt man wie Fig. 459, so hat man

Erstens $DH = \sin DCH = [360^\circ - (\alpha + \beta)]$

$= - \sin (\alpha + \beta)$

zugleich ist $DH = DF + FH$

aber $FH = EG = CE . \sin GCE$

$= \cos (180^\circ - \beta) \cdot \sin (180^\circ - \alpha)$

$= - \cos \beta \cdot \sin \alpha$

und $DF = DE . \cos EDF$

$= \sin (180^\circ - \beta) \cdot \cos GCE$

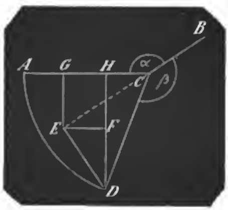
$= \sin \beta \cdot \cos (180^\circ - \alpha) = - \sin \beta \cdot \cos \alpha$

also $DH = - (\sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta)$

folglich I. $- DH = \sin (\alpha + \beta)$

$= \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$

Fig. 460.



Zweitens ist $CH = \cos ACD$

$= \cos [360^\circ - (\alpha + \beta)] = \cos (\alpha + \beta)$

zugleich ist $CH = CG - GH$

aber $CG = CE . \cos ECG$

$= \cos (180^\circ - \beta) \cdot \cos (180^\circ - \alpha)$

$= (- \cos \beta) (- \cos \alpha) = \cos \alpha \cdot \cos \beta$

und $GH = EF = DE . \sin EDF$

$= \sin (180^\circ - \beta) \sin (180^\circ - \alpha)$

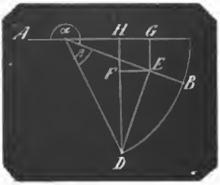
$= \sin \beta \cdot \sin \alpha$

folglich II. $CH = \cos (\alpha + \beta)$

$= \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$

VIII. Wenn beide Schenkel von β im dritten Quadrant liegen. $arc\,(\alpha + \beta)$ ist der verlangte Bogen; denn construirt man wie in Fig. 460, so hat man

Fig. 461.



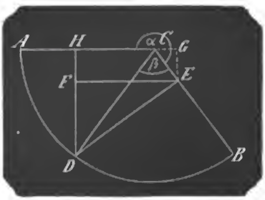
Erstens $DH = \sin DCH = \sin(\alpha + \beta - 180^\circ)$
$= - \sin(\alpha + \beta)$
zugleich ist $DH = DF + FH$
aber $FH = EG = CE \cdot \sin ECG$
$= CE \cdot \sin(\alpha - 180^\circ) = - CE \cdot \sin \alpha$
$= - \cos \beta \cdot \sin \alpha$
und $DF = DE.\cos EDF = DE \cdot \cos ECG$
$= DE \cdot \cos(\alpha - 180^\circ) = - DE \cdot \cos \alpha$
$= - \sin \beta \cdot \cos \alpha$

folglich I. $- DH = \sin(\alpha + \beta)$
$= \sin \alpha . \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$
Zweitens ist $CH = \cos DCH$
$= \cos(\alpha + \beta - 180^\circ) = - \cos(\alpha + \beta)$
zugleich ist $CH = CG - GH$
aber $CG = CE \cdot \cos ECG$
$= \cos \beta \cdot \cos(\alpha - 180^\circ) = - \cos \alpha \cdot \cos \beta$
und $GH = EF = DE \cdot \sin EDF$
$= \sin \beta \cdot \sin(\alpha - 180^\circ) = - \sin \alpha \cdot \sin \beta$

also $CH = - \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$
folglich II. $- CH = \cos(\alpha + \beta)$
$= \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$

IX. Wenn ein Schenkel von β im dritten, der andere im vierten Quadrant liegt, $arc\,(\alpha + \beta)$ ist der verlangte Bogen, denn construirt man wie in Fig. 461, so hat man

Fig. 462.



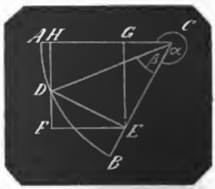
Erstens $DH = \sin ACD = \sin[360^\circ - (\alpha + \beta)]$
$= - \sin(\alpha + \beta)$
zugleich ist $DH = DF + FH$
aber $FH = EG = CE \sin ECG$
$= \cos \beta \cdot \sin(\alpha - 180^\circ) = - \cos \beta \cdot \sin \alpha$
und $DF = DE \cdot \cos EDF = DE \cdot \cos ECG$
$= DE \cdot \cos(\alpha - 180^\circ) = - DE \cdot \cos \alpha$
$= - \sin \beta \cdot \cos \alpha$

folgt I. $- DH = \sin(\alpha + \beta)$
$= \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$
Zweitens ist $CH = \cos ACD$
$= \cos[360^\circ - (\alpha + \beta)] = \cos(\alpha + \beta)$
zugleich ist $CH = - CG + GH$
aber $CG = CE . \cos ECG = CE . \cos(\alpha - 180^\circ)$
$= CE \cdot \cos \alpha = - \cos \beta \cdot \cos \alpha$
und $GH = EF = DE . \sin EDF$
$= DE \cdot \sin(\alpha - 180^\circ) = - DE \cdot \sin \alpha$
$= - \sin \beta \cdot \sin \alpha$

folglich II. $CH = \cos(\alpha + \beta)$
$= \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$

X. Wenn beide Schenkel von β im vierten Quadrant liegen. $arc\,(\alpha + \beta)$ ist der verlangte Bogen; denn construirt man wie in Fig. 462, so hat man

Fig. 463.



Erstens $DH = \sin ACD$
$= \sin[360^\circ - (\alpha + \beta)] = - \sin(\alpha + \beta)$
zugleich ist $DH = FH - DF$
aber $FH = EG = CE \sin ECG$
$= CE \cdot \sin(360^\circ - \alpha) = - CE . \sin \alpha$
$= - \sin \alpha \cdot \cos \beta$
und $DF = DE . \cos EDF = DE . \cos ECG$
$= DE . \cos(360^\circ - \alpha) = DE . \cos \alpha$
$= \sin \beta . \cos \alpha$

folglich I. $- DH = \sin(\alpha + \beta)$
$= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha . \sin \beta$
Zweitens ist $CH = \cos ACD$
$= \cos[360^\circ - (\alpha + \beta)] = \cos(\alpha + \beta)$
zugleich ist $CH = CG + GH$
aber $CG = CE . \cos ECG = CE . \cos(360^\circ - \alpha)$
$= CE \cos \alpha = \cos \beta . \cos \alpha$
und $GH = EF = DE . \sin EDF$
$= \sin \beta . \sin(360^\circ - \alpha) = - \sin \beta \cdot \sin \alpha$

folglich II. $CH = \cos(\alpha + \beta)$
$= \cos \alpha . \cos \beta - \sin \alpha . \sin \beta$

Mit den vorstehenden 10 Constructionen ist mithin die Allgemeingültigkeit der beiden Sätze

I. $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha.\cos\beta + \cos\alpha.\sin\beta$

II. $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha.\cos\beta - \sin\alpha.\sin\beta$

nachgewiesen.

15. Die Construction folgender Bogen sind für die Trigonometrie von eben solcher Wichtigkeit, wie die in No. 14.

III. $arc\,(\sin = \sin\alpha.\cos\beta - \cos\alpha.\sin\beta)$

IV. $arc\,(\cos = \cos\alpha\ \cos\beta + \sin\alpha.\sin\beta)$

zu zeichnen. Man findet für alle möglichen Werthe von α und β, dafs der verlangte Bogen für beide Aufgaben derselbe ist und zwar $= arc\,(\alpha-\beta)$ wie nachgewiesen werden soll.

I. Wenn die Schenkel von β beide im ersten Quadrant liegen.

Zeichne $\angle ACD = \alpha$, $\angle BCD = \beta$ und mit dem Halbmesser $AC = 1$ aus C den Bogen AB, so ist dieser Bogen, also $arc\,(\alpha-\beta)$ der verlangte.

Denn fällt man die Lothe BF auf CD, FG und BH auf AC, BJ auf FG und FE auf die verlängerte HB, so hat man

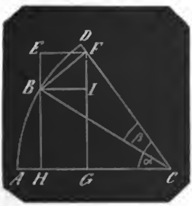
Erstens $BH = EH - BE$

aber $EH = FG = CF.\sin\alpha = \cos\beta.\sin\alpha$

und $BE = BF\cdot\cos\ EBF = \sin\beta.\cos\ EBF$
$= \sin\beta\cdot\cos\alpha$

folglich III. $EH - BE = BH = \sin(\alpha-\beta)$
$= \sin\alpha.\cos\beta - \cos\alpha.\sin\beta$

Fig. 464.



Zweitens ist $CH = CG + GH$

aber $CG = CF\ \cos\alpha = \cos\beta\cdot\cos\alpha$

und $GH = BJ = BF\cdot\sin\ BFJ = BF.\sin\alpha$
$= \sin\beta\cdot\sin\alpha$

folglich IV. $CH = \cos(\alpha-\beta)$
$= \cos\alpha.\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta$

II. Wenn ein Schenkel von β im ersten, der andere im zweiten Quadrant liegt, ist $arc\,(\alpha-\beta)$ der verlangte Bogen. Denn bei der Construction wie in Fig. 464 hat man

Erstens $BH = BE + EH$

aber $EH = FG = CF.\sin\ FCG$
$= \cos\beta.\sin(180^\circ-\alpha) = \cos\beta.\sin\alpha$

ferner $BE = BF.\cos\ EBF = \sin\beta.\cos\ EBF$

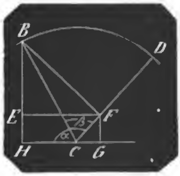
Da nun $\angle EBF = \angle FCG = 180^\circ - \alpha$

so ist $\cos\ EBF = \cos(180^\circ-\alpha) = -\cos\alpha$

daher ist $BE = -\sin\beta.\cos\alpha$

folglich I. $BH = \sin(\alpha-\beta)$
$= \sin\alpha.\cos\beta - \cos\alpha.\sin\beta$

Fig. 465.



Zweitens ist $CH = CG + GH$

aber $CG = CF.\cos\ FCG$
$= \cos\beta\cdot\cos(180^\circ-\alpha) = -\cos\beta.\cos\alpha$

und $GH = EF = BF.\sin\ EBF$
$= \sin\beta\cdot\sin(180^\circ-\alpha) = \sin\beta\cdot\sin\alpha$

folglich II. $CH = \cos(\alpha-\beta)$
$= \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta$

VI. Wenn der eine Schenkel von β im ersten, der andere im dritten Quadrant liegt. $arc\,(\alpha-\beta)$ ist wieder der verlangte, denn man hat bei der Construction wie Fig. 465

Erstens $BH = EH + BE$

aber $EH = FG = CF.\sin\ FCG$
$= \cos(180^\circ-\beta)\cdot\sin(\alpha-180^\circ)$
$= (-\cos\beta)\ (-\sin\alpha) = \cos\beta.\sin\alpha$

ferner $BE = BF\ \cos\ EBF$
$= \sin(180^\circ-\beta)\cdot\cos\ EBF = \sin\beta.\cos\ EBF$

da nun $\angle EBF = \angle FCG = \alpha - 180^\circ$

so ist $BE = \sin\beta\cdot\cos(\alpha-180^\circ)$
$= -\sin\beta.\cos\alpha$

folglich III. $BH = \sin(\alpha-\beta)$
$= \sin\alpha.\cos\beta - \cos\alpha.\sin\beta$

Fig. 466.



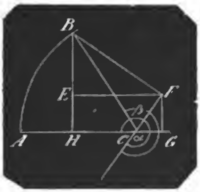
Zweitens ist $CH = CG - GH$
aber $CG = CF . \cos FCG$
$= \cos (180^\circ - \beta) . \cos (\alpha - 180^\circ)$
$= (-\cos \beta)(-\cos \alpha) = \cos \alpha . \cos \beta$
und $GH = EF = BF \sin EBF$
$= \sin (180^\circ - \beta) . \sin (\alpha - 180^\circ)$
$= \sin \beta (-\sin \alpha) = -\sin \alpha . \sin \beta$

folglich IV. $CH = \cos (\alpha - \beta)$
$= \cos \alpha . \cos \beta + \sin \alpha . \sin \beta$

IV. Wenn der eine Schenkel von β im ersten, der andere im vierten Quadrant liegt. $arc\,(\alpha - \beta)$ ist wieder der verlangte Bogen; denn bei der Construction wie Fig. 466 hat man
Erstens $BH = EH + BE$
aber $EH = FG = CF . \sin FCG = CF . \sin ACD$
$= \cos (\beta - 180^\circ) . \sin (360^\circ - \alpha)$
$= (-\cos \beta)(-\sin \alpha) = \sin \alpha . \cos \beta$
und $BE = BF . \cos EBF$
$= \sin (\beta - 180^\circ) . \cos EBF$
$= -\sin \beta . \cos EBF = -\sin \beta . \cos FCG$
$= -\sin \beta . \cos (360^\circ - \alpha) = -\cos \alpha . \sin \beta$

folglich III. $BH = \sin (\alpha - \beta)$
$= \sin \alpha . \cos \beta - oos\ \alpha . \sin \beta$

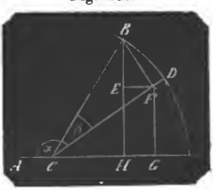
Fig. 467.



Zweitens ist $CH = -CG + GH$
aber $CG = CF . \cos FCG$
$= \cos (\beta - 180^\circ) . \cos (360^\circ - \alpha)$
$= (-\cos \beta) \cos \alpha = -\cos \alpha . \cos \beta$
und $GH = EF = BF \sin EBF$
$= \sin (\beta - 180^\circ) . \sin (360^\circ - \alpha)$
$= (-\sin \beta)(-\sin \alpha) = \sin \alpha . \sin \beta$

folglich IV. $CH = \cos (\alpha - \beta)$
$= \cos \alpha . \cos \beta + \sin \alpha . \sin \beta$

Fig. 468.



V. Wenn beide Schenkel von β im zweiten Quadrant liegen. $arc\,(\alpha - \beta)$ ist der verlangte Bogen; denn construirt man wie Fig. 467, so hat man
Erstens $BH = BE + EH$
aber $EH = FG = CF . \sin FCG$
$= \cos \beta . \sin (180^\circ - \alpha) = \cos \beta . \sin \alpha$
und $BE = BF . \cos EBF = BF . \cos FCG$
$= \sin \beta . \cos (180^\circ - \alpha) = -\sin \beta . \cos \alpha$

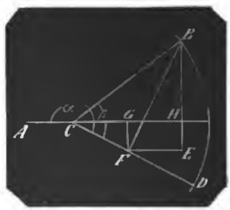
folglich III. $BH = \sin (\alpha - \beta)$
$= \sin \alpha . \cos \beta - \cos \alpha . \sin \beta$
Zweitens ist $CH = \cos BCH = -\cos BCA$
$= -\cos (\alpha - \beta)$
und zugleich $CH = CG - GH$
aber $CG = CF \cos FCG$
$= \cos \beta . \cos (180^\circ - \alpha) = -\cos \beta . \cos \alpha$
und $GH = EF = BF \sin EBF$
$= \sin \beta \sin (180^\circ - \alpha) = \sin \beta \sin \alpha$

daher $CH = -\cos (\alpha - \beta)$
$= -\cos \alpha . \cos \beta - \sin \alpha . \sin \beta$
folglich IV. $\cos (\alpha - \beta)$
$= \cos \alpha . \cos \beta + \sin \alpha . \sin \beta$

VI. Wenn ein Schenkel von β im zweiten, der andere im dritten Quadrant liegt. $arc\,(\alpha - \beta)$ ist der verlangte Bogen; denn construirt man wie Fig. 468, so hat man
Erstens $BH = \sin BCH = \sin BCA$
$= \sin (\alpha - \beta) = -EH + BE$
aber $EH = FG = CF \sin FCG$
$= CF . \sin (\alpha - 180^\circ) = \cos \beta (-\sin \alpha)$
$= -\sin \alpha . \cos \beta$
und $BE = BF . \cos EBF = BF . \cos FCG$
$= \sin \beta \cos (\alpha - 180^\circ) = -\sin \beta . \cos \alpha$

folglich III. $BH = \sin (\alpha - \beta)$
$= \sin \alpha . \cos \beta - \cos \alpha . \sin \beta$

Fig. 469.

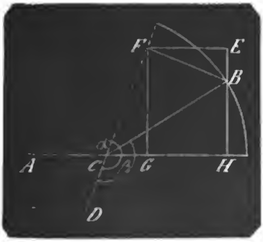


Zweitens ist $CH = \cos BCH$
$= \cos [180^\circ - (\alpha - \beta)] = -\cos (\alpha - \beta)$
zugleich ist $CH = CG + GH$
aber $CG = CF \cos FCG$
$= \cos \beta \cos (\alpha - 180^\circ) = \cos \beta (-\cos \alpha)$
$= -\cos \alpha . \cos \beta$
und $GH = EF = BF \sin EBF$
$= \sin \beta . \sin (\alpha - 180^\circ) = -\sin \alpha . \sin \beta$

folglich IV. $-CH = \cos (\alpha - \beta)$
$= \cos \alpha . \cos \beta + \sin \alpha . \sin \beta$

VII. Wenn ein Schenkel von β im zweiten, und der andere im vierten Quadrant liegt. $arc\,(\alpha - \beta)$ ist der verlangte Bogen; denn construirt man wie Fig. 469, so hat man

Fig. 470.



Erstens $BH = \sin\, BCH = \sin\, BCA$
$= \sin\,(\alpha - \beta)$
zugleich ist $BH = HE - BE$
aber $HE = FG = CF \cdot \sin\, FCG = CF.\sin\, ACD$
$= \cos\,(180^\circ - \beta) . \sin\,(360^\circ - \alpha)$
$= (-\cos\,\beta)\,(-\sin\,\alpha) = \sin\,\alpha . \cos\,\beta$
und $BE = BF \cdot \cos\, EBF = BF . \cos\, FCG$
$= \sin(180^\circ - \beta)\ \cos(360^\circ - \alpha) = \sin\beta . \cos\,\alpha$

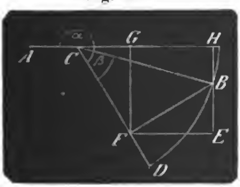
folglich III. $BH = \sin\,(\alpha - \beta)$
$= \sin\,\alpha . \cos\,\beta - \cos\,\alpha . \sin\,\beta$

Zweitens ist $CH = \cos\, BCH = -\cos\, BCA$
$= -\cos\,(\alpha - \beta)$
zugleich ist $CH = CG + GH$
aber $CG = CF.\cos\, FCG$
$= \cos\,(180^\circ - \beta) . \cos\,(360^\circ - \alpha)$
$= (-\cos\,\beta) . \cos\,\alpha = -\cos\,\alpha \cdot \cos\,\beta$
und $GH = EF = BF.\sin\, EBF = BF.\sin\, FCG$
$= \sin\,(180^\circ - \beta) . \sin\,(360^\circ - \alpha)$
$= \sin\,\beta\,(-\sin\,\alpha) = -\sin\,\alpha\ \sin\,\beta$

folglich IV. $-CH = \cos\,(\alpha - \beta)$
$= \cos\,\alpha . \cos\,\beta + \sin\,\alpha . \sin\,\beta$

VIII. Wenn beide Schenkel von β im dritten Quadrant liegen. $arc\,(\alpha - \beta)$ ist der verlangte Bogen; denn construirt man wie Fig. 470, so erhält man

Fig. 471.



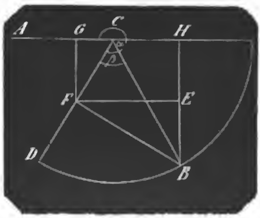
Erstens $BH = \sin\, BCH$
$= \sin\,(\alpha - \beta - 180^\circ) = -\sin\,(\alpha - \beta)$
zugleich ist $BH = EH - EB$
aber $EH = FG = CF.\sin\, FCG$
$= \cos\,\beta . \sin\,(\alpha - 180^\circ) = \cos\,\beta\,(-\sin\,\alpha)$
$= -\sin\,\alpha . \cos\,\beta$
und $BE = BF\cos\, EBF = BF.\cos\, FCG$
$= BF . \cos\,(\alpha - 180^\circ) = -BF . \cos\,\alpha$
$= -\cos\,\alpha . \sin\,\beta$

folglich III. $BH = -\sin\,(\alpha - \beta)$
$= -\sin\,\alpha.\cos\,\beta + \cos\,\alpha . \sin\,\beta$
und $\sin\,(\alpha - \beta) = \sin\,\alpha.\cos\,\beta - \cos\,\alpha.\sin\,\beta$
Zweitens ist $CH = \cos\, BCH$
$= \cos\,(\alpha - \beta - 180^\circ) = -\cos\,(\alpha - \beta)$
zugleich ist $CH = CG + GH$
aber $CG = CF\cos\,(\alpha - 180^\circ)$
$= \cos\,\beta\,(-\cos\,\alpha) = -\cos\,\alpha\ \cos\,\beta$
und $GH = EF = BF\ \sin\, EBF$
$= \sin\,\beta . \sin\,(\alpha - 180^\circ) = -\sin\,\beta\ \sin\,\alpha$

also $CH = -(\cos\,\alpha\ \cos\,\beta + \sin\,\alpha . \sin\,\beta)$
folglich IV. $-CH = \cos\,(\alpha - \beta)$
$= \cos\,\alpha.\cos\,\beta + \sin\,\alpha.\sin\,\beta$

IX. Wenn ein Schenkel von β im dritten, der andere im vierten Quadrant liegt. $arc\,(\alpha - \beta)$ ist der verlangte Bogen; denn construirt man wie Fig. 471, so erhält man

Fig. 472.



Erstens $BH = \sin(\alpha - \beta - 180^\circ) = -\sin(\alpha - \beta)$
zugleich ist $BH = BE + EH$
aber $EH = FG = CF.\sin\, FCG$
$= CF\sin\,(360^\circ - \alpha) = -CF . \sin\,\alpha$
$= -\cos\,\beta . \sin\,\alpha$
und $BE = BF . \cos\, EBF = BF.\cos\, FCG$
$= BF . \cos\,(360^\circ - \alpha) = BF . \cos\,\alpha$
$= \sin\,\beta . \cos\,\alpha$

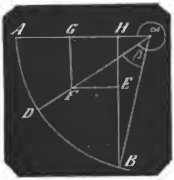
daher III $-BH = \sin\,(\alpha - \beta)$
$= \sin\,\alpha.\cos\,\beta - \cos\,\alpha . \sin\,\beta$
Zweitens ist $CH = \cos\, BCH$
$= \cos\,(\alpha - \beta - 180^\circ) = -\cos\,(\alpha - \beta)$
zugleich $CH = -CG + GH$
aber $CG = CF\ \cos\, FCG = CF.\cos\,(360^\circ - \alpha)$
$= CF . \cos\,\alpha = \cos\,\beta . \cos\,\alpha$
und $GH = EF = BF\ \sin\, EBF$
$= BF.\sin\, FCG = BF.\sin\,(360^\circ - \alpha)$
$= BF . (-\sin\,\alpha) = -\sin\,\beta . \sin\,\alpha$

daher $CH = -\cos\,\alpha . \cos\,\beta - \sin\,\alpha . \sin\,\beta$

folglich IV. $\cos(\alpha-\beta)$
$= \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$

X. Wenn beide Schenkel im vierten Quadrant liegen. $arc(\alpha-\beta)$ ist der verlangte Bogen; denn construirt man wie Fig. 472, so hat man

Fig. 473.



Erstens $BH = \sin ACB$
$= \sin[360^\circ - (\alpha-\beta)] = -\sin(\alpha-\beta)$
zugleich ist $BH = BE + EH$
aber $EH = FG = CF.\sin FCG$
$= CF\sin(360^\circ - \alpha) = CF.(-\sin\alpha)$
$= -\cos\beta.\sin\alpha$
und $BE = BF.\cos EBF = BF\cos FCG$
$= BF.\cos(360^\circ - \alpha) = BF.\cos\alpha$
$= \sin\beta.\cos\alpha$

folglich III. $-BH = \sin(\alpha-\beta)$
$= \sin\alpha.\cos\beta - \cos\alpha.\sin\beta$

Zweitens ist $CH = \cos ACB$
$= \cos[360^\circ - (\alpha-\beta)] = \cos(\alpha-\beta)$
zugleich ist $CH = CG - GH$
aber $CG = CF\cos ACD = CF.\cos(360^\circ - \alpha)$
$= CF.\cos\alpha = \cos\beta.\cos\alpha$
und $GH = EF = BF.\sin EBF = BF.\sin FCG$
$= BF.\sin(360^\circ - \alpha) = -BF\sin\alpha$
$= -\sin\beta.\sin\alpha$

folglich IV. $CH = \cos(\alpha-\beta)$
$= \cos\alpha.\cos\beta + \sin\alpha.\sin\beta$

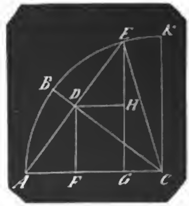
Mit den vorstehenden 10 Constructionen ist mithin die Allgemeingültigkeit der beiden Sätze:
III. $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha.\cos\beta - \cos\alpha.\sin\beta$
IV. $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha.\cos\beta + \sin\alpha.\sin\beta$
nachgewiesen.

Die folgenden Constructionen sollen wie in No. 14 u. 15 als synthetische Beweise der sonst analytisch entwickelten trigonometrischen Hauptformeln gelten; dieselben sind mit laufenden römischen Zahlen bezeichnet.

16. $arc(\sin = 2\sin\alpha.\cos\alpha)$ zu zeichnen.
Man erhält den Bogen (2α); denn es sei $\angle ACB = \angle BCE = \alpha$, also $\angle ACE = 2\alpha$, so zeichne aus C mit dem Halbmesser $AC = 1$ den Kreisbogen ABE, ziehe die Sehne AE, welche CB normal in D schneidet, und fälle die Lothe DF und EG,

so ist $\triangle ADF \sim \triangle DCF \sim \triangle AEG$
daher $\angle ADF = \angle DCF = \angle AEF = \alpha$
und $DF : EG = AD : AE = 1 : 2$
folglich $EG (= \sin 2\alpha) = 2DF$
aber
$DF = AD.\cos ADF = AD.\cos\alpha = \sin\alpha.\cos\alpha$
folglich $EG = \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ V.

Fig. 474.



17. $arc(\cos = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$ zu zeichnen.
Man erhält den Bogen (2α); denn fällt man Fig. 474 noch das Loth DH auf EG
so ist $\triangle DAF \cong \triangle EDH$
daher $AF = DH = FG$
und somit $CG = CF - FG = CF - AF$
Es ist aber $CF = CD.\cos\alpha$
$= \cos\alpha.\cos\alpha = \cos^2\alpha$
und $AF = AD.\sin ADF = AD.\sin\alpha$
$= \sin\alpha.\sin\alpha = \sin^2\alpha$
folglich $CG = \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ VI.

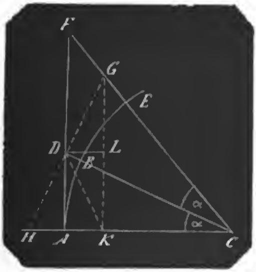
18. $arc(\cos = 1 - 2\sin^2\alpha)$ zu zeichnen.
Man erhält den Bogen (2α), denn es ist
$CF = AC - AF$
also $CF - AF = AC - 2AF$
da nun $CF - AF = CF - FG = CG$
so ist $CG = AC - 2AF$
oder nach 18, $\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2\alpha$ VII.

19. $arc(\cos = 2\cos^2\alpha - 1)$ zu zeichnen.
Man erhält den Bogen (2α), denn es ist
$AF = AC - CF$
daher
$CF - AF = CF - (AC - CF) = 2CF - AC$
also nach No. 17: $CG = 2CF - AC$
oder $\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$ VIII.

20. $arc\left(tg = \frac{2\,tg\,\alpha}{1 - tg^2\alpha}\right)$ zu zeichnen.

Man erhält den Bogen (2α); denn zeichnet man $\angle ECB = \angle ACB = \alpha$, beschreibt aus C mit dem Halbmesser $AC = 1$ den Bogen ABE, errichtet in A auf AC das Loth AF bis in die Richtung CE, verlängert CB bis D in AF, errichtet in D auf CD das Loth GH bis in die Richtungen CE und CA, macht $AK = AH$, zieht GK und DK,

Fig. 475.



so ist $\triangle DKA \cong \triangle DHA$
also $DK = DH$
da nun $\triangle CDG \cong \triangle CDH$
also auch $DG = DH$
so ist auch $DK = DG$
folglich $\angle DKG = \angle DGK$ (1)

Nun ist $\triangle ADH \sim \triangle ACD$
daher $\angle ADH = \angle ACD = \alpha$
also auch $FDG = \alpha$ (2)
und $\angle ADK = \alpha$
daher $\angle GDK = 180^\circ - 2\alpha$
folglich $\angle DKG + \angle DGK = 2\alpha$
und $\angle DKG = \angle DGK = \alpha$ (aus 1)

folglich $KG \nparallel AF$ (aus 2)

Fällt man nun das Loth DL auf GK
so ist $LG = LK = AD$
daher $GK = 2AD$
Nun ist $CK : KG = CA : AF$

In dieser Proportion ist:

$$CK = AC - AK = AC - AH$$
$$= AL - AD \cdot tg\ ADH$$
$$= AC - tg\ \alpha \cdot tg\ \alpha = 1 - tg^2\alpha$$
$$KG = 2AD = 2\ tg\ \alpha$$
$$AC = 1$$
$$AF = tg\ (2\alpha)$$

daher hat man

$$1 - tg^2\alpha : 2\ tg\ \alpha = 1 : tg\ (2\alpha)$$

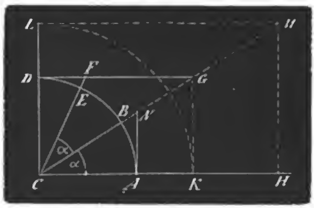
oder $$tg\ (2\alpha) = \frac{2\ tg\ \alpha}{1 - tg^2\alpha} \qquad \text{IX.}$$

Anmerk. Für $\alpha > 45^\circ$ fällt 2α in den zweiten Quadrant, und wird negativ, aber es wird auch $tg\ \alpha > 1$, also um so mehr $tg^2\alpha > 1$, und der Ausdruck für $tg\ (2\alpha)$ gleichfalls negativ. In der Zeichnung fallen dann E und K rechts von C, F fällt unterhalb in die Verlängerung von EC, CK wird $= AK - AC$, und für $+ tg\ (2\alpha)$ entsteht $\frac{2\ tg\ \alpha}{tg^2\alpha - 1}$ Auch für alle übrigen Quadranten, in welche α^2 und 2α liegen, wird nach obiger Vorschrift construirt, und man erhält die Allgemeingültigkeit der Formel IX. wie in No. 14 und 15 für die Formeln I. bis IV., und wie sie bei den noch einfacheren Formeln V. bis VIII. No. 16 bis 19 noch leichter sich ergeben.

21. $arc\left(cot = \frac{cot^2\alpha - 1}{2\ cot\ \alpha}\right)$ zu zeichnen.

Man erhält den Bogen (2α), denn zeichnet man $\angle ECB = \angle ACB = \alpha$, beschreibt aus C mit dem Halbmesser $AC = 1$ den Bogen ABE, vollendet den Quadrant ACD, errichtet das Loth DG auf CD bis in die Richtung CB, verlängert CE bis F in DG, fällt das Loth GK auf die verlängerte CA, zeichnet aus C mit CK den Quadrant KL, zieht die mit DG parallele LM bis in die verlängerte CM, und fällt das Loth MH auf die verlängerte CK, so hat man

Fig. 476.



$$\angle \alpha = \angle GCK = \angle FCG = \angle FGC$$

daher $FG = FC$
Da nun $\angle CDF = R$, also $\angle CFG$ stumpf ist

$$CG^2 = FG^2 + FC^2 + 2FG \cdot DF$$
$$= 2FG^2 + 2FG \cdot DF$$

oder $DG^2 + CD^2 = 2FG(FG + DF)$
$= 2FG \cdot DG$ (1)
$= 2(DG - DF)DG = 2DG^2 - 2DF \cdot DG$
daher $CD^2 = DG^2 - 2DF.DG$
oder $DG^2 - CD^2 = 2DF \cdot DG$ (2)

Es ist aber
$CD : DG = CL : LM$
und da $CL = CK = DG$
auch $CD : DG = DG : LM$
oder $DG^2 = CD \cdot LM$

Diesen Werth in Gl. 2 gesetzt
giebt $CD \cdot LM - CD^2 = 2DF \cdot DG$
oder $CD(LM - CD) = 2DF \cdot DG$
oder $2DG : LM - CD = CD : DF$ (3)

In dieser Proportion ist aber

$$DG = cot\ \alpha$$
$$LM = CL \cdot cot\ \alpha = CK \cdot cot\ \alpha$$
$$= DG \cdot cot\ \alpha = cot\ \alpha \cdot cot\ \alpha = cot^2\alpha$$
$$CD = AC = 1$$
$$DF = cot\ (2\alpha)$$

Diese Werthe in 3 substituirt, giebt die Proportion

$$2 \cot \alpha : \cot^2\alpha - 1 = 1 : \cot (2\alpha)$$

oder $$\cot (2\alpha) = \frac{\cot^2\alpha - 1}{2 \cot \alpha} \qquad \text{X.}$$

Anmerk. Für $\alpha > 45°$ fällt 2α in den zweiten Quadrant und $\cot (2\alpha)$ wird negativ, aber es wird auch $\cot \alpha < 1$, also um so mehr $\cot^2\alpha < 1$ und der Ausdruck für $+ \cot (2\alpha)$ wird dann $\frac{1 - \cot^2\alpha}{2 \cot \alpha}$ denn in der Zeichnung würde dann F links von CD, und der Punkt M innerhalb CG fallen. Vgl. Anmerk. zu No. 20.

22. $arc\left(\cot = \frac{\cot \alpha - tg\, \alpha}{2}\right)$ zu zeichnen.

Man erhält den Bogen (2α), denn zeichnet man $\angle ECB = \angle ACB = \alpha$, beschreibt aus C mit dem Halbmesser $AC = 1$ den Bogen ABE, vollendet den Quadrant ACD, errichtet das Loth DG auf CD bis in die verlängerte CB, und das Loth AN auf AC bis in CG, verlängert CE bis F in DG, und fällt das Loth GK auf die verlängerte CA, so hat man wieder wie No. 21, Gl. 2:

$$DG^2 - CD^2 = 2DF \cdot DG \qquad (1)$$

Nun ist $CA : AN = CK : KG$

oder $CD : AN = DG : CD$

woraus $$CD^2 = AN \cdot DG \qquad (2)$$

Diesen Werth in Gl. 1 substituirt, giebt

$$DG^2 - AN \cdot DG = 2DF \cdot DG$$

oder $DG (DG - AN) = 2DF \cdot DG$

oder $DG - AN = 2DF$

also $$DF = \frac{DG - AN}{2} \qquad (3)$$

Nun ist $DF = \cot (2\alpha)$

$DG = \cot \alpha$

$AN = tg\, \alpha$

Diese Werthe in 3 substituirt, giebt

$$\cot (2\alpha) = \frac{\cot \alpha - tg\, \alpha}{2} \qquad \text{XI.}$$

Vgl. Anmerk. zu No. 20 u. 21.

23. $arc\left(cosec = \frac{\cot \alpha + tg\, \alpha}{2}\right)$ zu zeichnen.

Man erhält den Bogen (2α), denn in Fig. 476 hat man aus No. 21, Gl. 1

$$DG^2 + CD^2 = 2FG(FG + DF)$$
$$= 2FG^2 + 2FG.DF$$
$$= 2CF^2 + 2CF.DF$$

Ferner ist nach No. 22, Gl. 2:

$$CD^2 = AN \cdot DG$$

daher $DG^2 + AN.DG = 2CF^2 + 2CF.DF$

oder $DG (DG + AN) = 2CF (CF + DF)$
$= 2CF (FG + DF)$
$= 2CF.DG$

hieraus $$CF = \frac{DG + AN}{2}$$

Nun ist $CF = cosec (2\alpha)$

$DG = \cot \alpha$

$AN = tg\, \alpha$

Diese Werthe in den letzten Ausdruck substituirt, giebt

$$cosec (\alpha) = \frac{\cot \alpha + tg\, \alpha}{2} \qquad \text{XII.}$$

Vergl. Anmerk. zu No. 20 u. 21.

24. $arc\left(\sin = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}\right)$ zu zeichnen.

Man erhält den Bogen $\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ denn in Fig. 474 ist nach der in No. 16 angegebenen Construction:

$$AE^2 = 2AC \cdot AG = 2AC(AC - CG)$$

oder $4AD^2 = 2AC^2 - 2AC \cdot CG$

oder $$AD^2 = \frac{AC^2 - AC \cdot CG}{2}$$

folglich $$AD = \sqrt{\frac{AC^2 - AC \cdot CG}{2}}$$

Ist nun $\angle ACB = \angle BCE = \frac{\alpha}{2}$ also $\angle ACE = \alpha$, $AC = 1$, so ist

$AD = \sin \frac{\alpha}{2}$

$AC = 1$

$CG = \cos \alpha$

Diese Werthe in die letzte Formel gesetzt, giebt

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \qquad \text{XIII.}$$

Anmerk. Da für jeden Werth von α, $\cos \alpha < 1$ ist, so bleibt $\sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$ immer positiv. Es kann $\sin \frac{\alpha}{2}$ auch niemals negativ werden, weil $\frac{\alpha}{2}$ nur den Werth von 0° bis 180° haben kann, indem α nur zwischen 0° und 360° liegt.

25. $arc\left(\cos = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}\right)$ zu zeichnen.

Man erhält den Bogen $\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, denn in Fig. 474 ist

$$CD^2 = CE^2 - DE^2 = AC^2 - \tfrac{1}{4}AE^2$$
$$= AC^2 - \frac{2AC \cdot AG}{4} = \frac{AC}{2}\,[2AC - AG]$$
$$= \frac{AC}{2}\,[2AC - (AC - CG)]$$
$$= \frac{AC}{2}\,(AC + CG)$$

oder $CD = \sqrt{\frac{AC(AC+CG)}{2}}$

Ist nun $AC = 1$; $\angle ACB = \angle BCE = \frac{\alpha}{2}$

also $CD = \cos\frac{\alpha}{2}$

und $CG = \cos\,\alpha$

so hat man, diese Werthe in den letzten Ausdruck substituirt:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \qquad \text{XIV.}$$

Anmerk. Da $\cos\frac{\alpha}{2}$ im 2ten Quadrat negativ, $\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$ aber für jeden Werth von α positiv bleibt, so gilt für α von 0° bis 180° die Formel: $+\sqrt{}$, für α von 180° bis 360° die Formel $-\sqrt{}$. Dies geht auch aus der Zeichnung hervor: *CB* und *DF* verbleiben im ersten Quadrant, wenn *CE* im ersten oder zweiten Quadrant liegt, also wenn α zwischen 0° und 180° beträgt. Für α von 180° bis 360° fällt *CE* in den dritten oder vierten Quadrant und *CB* und *DF* fallen in den zweiten Quadrant, *CF* also wird negativ $= -\cos\frac{\alpha}{2}$ daher hat man

A. Für $\alpha = 0°$ bis 180°

$$\cos\frac{\alpha}{2} = +\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

B. Für $\alpha = 180°$ bis 360°

$$\cos\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

26. $\text{arc}\left(\sin = \pm\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{2}}\right)$ zu zeichnen.

Man erhält den Bogen $\frac{90°-\alpha}{2} = \text{arc}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$ denn zeichnet man Fig. 474 den Quadrant *ACK* mit dem Halbmesser $AC = 1$, macht $\angle ECK = \alpha$, halbirt den Bogen *AE* in *B*, zieht *CB*, so ist

$$\angle ACE = 90° - \alpha$$

und

$$\angle ACB = \angle BCE = \frac{90°-\alpha}{2}$$

Zeichnet man nun die Sehne *AE*, und fällt die Lothe *EG*, *DF* auf *AC*, so hat man

$$AF : AG = AD : AE = 1 : 2$$

also $2AF = AG$

oder

$$2AD \cdot \sin ADF = AC - CG \qquad (1)$$

Nun ist $\angle ADF = \angle ACB = \frac{90°-\alpha}{2}$

$$AD = \sin ACB = \sin\frac{90°-\alpha}{2}$$

$$CG = \cos ECG = \sin ECK = \sin\alpha$$

Diese Werthe in Gl. 1 substituirt, giebt

$$2\cdot\sin\frac{90°-\alpha}{2}\cdot\sin\frac{90°-\alpha}{2} = 1 - \sin\alpha$$

woraus $\sin\frac{90°-\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{2}}$ XV.

Anmerk. Hier gilt das positive Vorzeichen der Wurzel nur, wenn α zwischen 0° und 90° fällt; für alle anderen Werthe von α ist das negative Vorzeichen zu nehmen. Denn es ist für jeden Werth von α, $\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{2}}$ eine positive Gröfse, mithin entsprechen die Vorzeichen der Wurzelgröfse dem jedesmaligen positiven oder negativen Werthe von

$$\sin\frac{90°-\alpha}{2} = \sin\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)$$

Für $\frac{\alpha}{2}$ von 45° bis 180°, also für α von 90° bis 360° fällt $\sin\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)$ in die beiden letzten Quadranten, ist negativ, und mithin mufs hierfür auch $\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{2}}$ negativ sein.

Dies geht auch aus der Zeichnung hervor; denn bei der Construction von $\angle(90°-\alpha)$ ist *AC*, wie immer, der feste Schenkel, und der bewegliche geht durch den ersten Quadrant durch *B*, *E*, *K* u. s. w. der constante Minuend ist $90° = \angle ACK$ und folglich mufs der veränderliche Subtrahend α, von *CK* ab, nach *AC* hin abgetragen werden, damit *AC* als Schenkel verbleibe.

Für $\alpha = 90°$ fällt also *CE* mit *CB* in *CA*, $\frac{90°-\alpha}{2}$ ist $= 0$, für α von 90° bis 270° bis 360° fällt *CE* mit *CB* in den vierten Quadrant, für $\alpha = 270°$ bis 360° fällt *CE* in den zweiten, und *CD* in den dritten Quadrant. Für α von 90° bis 360° ist also der Lage nach

$$\sin\frac{90°-\alpha}{2} \text{ negativ.}$$

Daher hat man

A. Für $\alpha = 0°$ bis 90°

$$\sin\frac{90°-\alpha}{2} = +\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{2}}$$

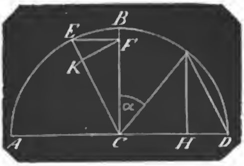
B. Für $\alpha = 90°$ bis 360°

$$\sin\frac{90°-\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{2}}$$

27. $arc\left(\cos = \pm\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{2}}\right)$ zu zeichnen.

Man erhält den Bogen $\frac{90+\alpha}{2} = \left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)$, denn zeichnet man Fig. 477 mit dem Halbmesser = 1 den Halbkreis *ABD*, errichtet den lothrechten Halbmesser *CB*, trägt an denselben in dem zweiten Quadrant den $\angle BCG = \alpha$, halbirt $\angle ACG\ (= 90° + \alpha)$ in *E*, so ist $\angle ACE = \frac{90° + \alpha}{2}$; fällt man nun die Lothe *GH* auf *CD*, *EF* auf *BC* und *FK* auf *CE*, zieht noch die Sehne *DG*, so ist

Fig. 477.



$$\angle ACB = \tfrac{1}{2} \text{ gestreckter } \angle ACD$$

hiervon $\angle ACE = \frac{1}{2}\angle ACG$

bleibt $\angle BCE = \frac{1}{2}\angle DCG$ (1)

Nun ist

$$\angle DCG + \angle CDG + \angle CGD = 180°$$

oder $\angle CDG + 2\angle CDG = 180°$

oder $2\angle BCE + 2\angle DCG = 180°$

also $\angle BCE + \angle CDG = 90°$

Es ist aber auch

$$\angle BCE + \angle CEF = 90°$$

folglich $\angle CEF = \angle CDG$

mithin $\triangle EFK \sim \triangle DGH$

und $EF : EK = DG : DH$

Aus Gl. 1 folgt aber

$$EF = \tfrac{1}{2}DG$$

daher ist auch $EK = \frac{1}{2}DH$

oder $EK = \frac{CD - CH}{2}$

Nun ist $EK = EF \cdot \cos FEK$

$$= CE \cos FEK \cdot \cos FEK$$

$$= \cos^2 FEK = \cos^2 ACE = \cos^2 \frac{90+\alpha}{2}$$

$CD = 1$

$CH = \cos GCH = \cos 90° - \alpha = \sin\alpha$

daher ist

$$\cos^2 \frac{90°+\alpha}{2} = \frac{1-\sin\alpha}{2}$$

folglich

$$\cos\frac{90°+\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{2}} \qquad \text{XVI.}$$

Anmerk. Für $\alpha = 0$ bis $90°$ fällt $\frac{90°+\alpha}{2}$ in den ersten Quadrant; für $\alpha = 90°$ bis $270°$ fällt $\frac{90°+\alpha}{2}$ in den zweiten Quadrant, nämlich *CE* rechts von *CB*; für $\alpha = 270°$ bis $360°$ fällt $\frac{90°+\alpha}{2} = 45° + \frac{\alpha}{2}$ in den dritten Quadrant, nämlich *CE* unterhalb *CD*; in beiden letzten Fällen ist $\cos\frac{90°+\alpha}{2}$ negativ, daher hat man:

A. Für $\alpha = 0$ bis $90°$

$$\cos\frac{90°+\alpha}{2} = +\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{2}}$$

B. Für $\alpha = 90°$ bis $360°$

$$\cos\frac{90°+\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{2}}$$

28. $arc\left(\sin = \pm\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{2}}\right)$ zu zeichnen.

Man erhält den Bogen $\frac{90°+\alpha}{2} = \left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)$ denn construirt man Fig. 477, so hat man nach No. 27

$$EK = \tfrac{1}{2}DH$$

also ist

$$CE - EK = CD - \tfrac{1}{2}DH = \tfrac{1}{2}AD - \tfrac{1}{2}DH$$

$$= \tfrac{1}{2}(AD - DH)$$

oder $CK = \frac{1}{2}AH$

oder $CK = \frac{AC + CH}{2}$

Nun ist $CK = CF \cdot \sin CFK$

$$= CF \cdot \sin FEK = \sin FEK \cdot \sin FEK$$

$$= \sin^2 ACE = \sin^2 \frac{90°+\alpha}{2}$$

$AC = 1$

$CH = \sin\alpha$

daher $\sin^2\frac{90°+\alpha}{2} = \frac{1+\sin\alpha}{2}$

folglich

$$\sin\frac{90°+\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{2}} \qquad \text{XVII.}$$

Anmerk. Für $\alpha = 90°$ fällt *CE* in *CB*, $\sin\frac{90°+\alpha}{2}$ ist = 1. Für $\alpha = 180°$ fällt *CE* unter 45° in den zweiten Quadrant, für $\alpha = 270°$ fällt *CE* in *CD*; für $\alpha = 360$ wird $\frac{90°+\alpha}{2} = 45° + 180° = 225°$, *CE* fällt

also unter 45° in den dritten Quadrant. Daher hat man

A. Für α von 0 bis 270°

$$\sin\frac{90^\circ+\alpha}{2} = +\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{2}}$$

B. Für α von 270° bis 360°

$$\sin\frac{90^\circ+\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{2}}$$

29. $arc\left(\cos = \pm\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{2}}\right)$ zu zeichnen.

Man erhält den Bogen

$$\frac{90^\circ-\alpha}{2} = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$$

denn nimmt man (Fig. 474); $\angle ECK = \alpha$, so ist $\angle ACB = \angle BCE = \frac{90^\circ-\alpha}{2}$

Nun ist nach No. 26:

$$2AF = AG$$

Da nun $CF = AC - AF$ so ist auch

$$2CF = 2AC - 2AF = 2AC - AG$$
$$= AC + (AC - AG) = AC + CG$$

oder $CF = \frac{AC+CG}{2}$

Nun ist $CF = CD \cdot \cos DCF = \cos^2 DCF = \cos^2\frac{90^\circ-\alpha}{2}$

$$CD = 1$$

und $CG = \cos ACE = \cos(90^\circ-\alpha) = \sin\alpha$

folglich $\cos^2\frac{90^\circ-\alpha}{2} = \frac{1+\sin\alpha}{2}$

und $\cos\frac{90^\circ-\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{2}}$ XVIII.

Anmerk. Hier gilt die Anmerk. No. 26, dafs α für $\frac{90^\circ-\alpha}{2}$ von DK aus abzutragen ist. Für $\alpha = 90°$ fällt CE in CA, $\cos\frac{90^\circ-\alpha}{2}$ wird $= +1$; für α zwischen 90° und 180° fällt CE mit CB in den vierten Quadrant und $\cos\frac{90^\circ-\alpha}{2}$ bleibt +; für $\alpha = 180°$ fällt CE in die Verlängerung von KC, CB unter 45° in den vierten Quadrant und $\cos\frac{90^\circ-\alpha}{2} = \cos(-45^\circ)$ bleibt +. Bei $\alpha = 270°$ fällt CE in die Verlängerung von AC, CB in die Verlängerung von KC, $\cos\frac{90^\circ-\alpha}{2} = \cos(-90^\circ) = 0$. Für α von 270° bis 360° fällt CB in den dritten Quadrant, $\cos\frac{90^\circ-\alpha}{2}$ wird negativ. Daher hat man

A. Für $\alpha = 0$ bis 270°

$$\cos\frac{90^\circ-\alpha}{2} = +\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{2}}$$

B. Für $\alpha = 270°$ bis 360°

$$\cos\frac{90^\circ-\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{2}}$$

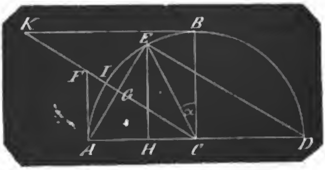
30. $arc\left(tg = \pm\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}\right)$ zu zeichnen.

Man erhält den Bogen

$$\frac{90^\circ-\alpha}{2} = \left(\frac{\pi}{4} = \frac{\alpha}{2}\right)$$

Denn zeichnet man Fig. 478 mit dem Halbmesser $AC = DC = 1$ den Halbkreis

Fig. 478.



ABD, errichtet den lothrechten Halbmesser CB, trägt an denselben in den ersten Quadrant $\angle BCE = \alpha$, halbirt $\angle ACE$ durch CJ, so ist $\angle ACJ = \frac{90^\circ-\alpha}{2}$. Errichtet man nun das Loth AF auf AC bis in die verlängerte CJ, fällt das Loth EH auf AC, und zieht die Sehnen AE und DE

so ist $\angle AED = R$

aber auch $\angle AGC = R$

daher $DE \# CG$

daher wieder $\angle ADE = ACF$

hieraus $\triangle AED \sim \triangle FAC$

mithin $DE : AE = AC : AF$

also auch $DE^2 : AE^2 = AC^2 : AF^2$

da nun $DE^2 : AE^2 = DH : AH$

so ist auch $DH : AH = AC^2 : AF^2$

oder $CD + CH : AC - CH = AC^2 : AF^2$

woraus $AF^2 = AC^2\frac{AC-CH}{CD-CH}$

oder $AF = AC\sqrt{\frac{AC-CH}{CD+CH}}$

Nun ist $AF = tg\, ACJ = tg\frac{90^\circ-\alpha}{2}$

$$AC = CD = 1$$

und $CH = \sin ECB = \sin\alpha$

daher hat man

$$tg\,\frac{90^\circ-\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}\quad \text{XIX.}$$

Anmerk. Für jeden Werth von α ist $(1-\sin\alpha)$ und $(1+\sin\alpha)$ positiv, also die Wurzelgröfse ist immer positiv. Das Vorzeichen derselben entspricht also immer dem Vorzeichen von $tg\,\frac{90^\circ-\alpha}{2}$

Für α von 0 bis 90° ist $tg\,\frac{90^\circ-\alpha}{2}$ von + 45° bis ± 0,
also im 1ten Quadrant und +.

Für α von 90° bis 180° ist $tg\,\frac{90^\circ-\alpha}{2}$ von ± 0 bis − 45°
also im 4ten Quadrant und −.

Für α von 180° bis 270° ist $tg\,\frac{90^\circ-\alpha}{2}$ von − 45° bis − 90°
also im 4ten Quadrant und −.

Für α von 270° bis 360° ist $tg\,\frac{90^\circ-\alpha}{2}$ von − 90° bis − 135°
also im 3ten Quadrant und +.

Man hat daher für α von incl. 0 bis 90° und von 270° bis 360°

$$tg\,\frac{90^\circ-\alpha}{2}=tg\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=+\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}$$

Für α von incl. 90° bis incl. 270°

$$tg\,\frac{90^\circ-\alpha}{2}=tg\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=-\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}$$

31. $arc\left(\cot=\pm\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}\right)$ zu zeichnen.

Man erhält den Bogen $\frac{90^\circ+\alpha}{2}=\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}$ denn bei der Construction ad 30 mit Fig. 478 ist

$$\angle ECJ=\frac{90^\circ-\alpha}{2}$$

hierzu $\angle BCE=\alpha$

giebt $\angle ECJ+\angle BCE=\angle BCJ$

$$=\frac{90^\circ-\alpha}{2}+\frac{2\alpha}{2}=\frac{90^\circ+\alpha}{2}$$

Nun ist

$$AF=\cot BCJ=\cot\frac{90^\circ+\alpha}{2}$$

und nach No. 30

$$AF=AC\cdot\sqrt{\frac{AC-CH}{CD+CH}}=\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}$$

also $$\cot\frac{90^\circ+\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}\quad \text{XX.}$$

Anmerk. Wie ad 30 gezeigt, kann das Vorzeichen der Wurzel nur dem der *cot* entsprechen.

Für α von 0° bis 90° ist $\cot\frac{90^\circ+\alpha}{2}$ von 45° bis 90°
also im 1ten Quadrant und +.

Für α von 90° bis 180° ist $\cot\frac{90^\circ+\alpha}{2}$ von 90° bis 135°
also im 2ten Quadrant und −.

Für α von 180° bis 270° ist $\cot\frac{90^\circ+\alpha}{2}$ von 135° bis 180°
also im 2ten Quadrant und −.

Für α von 270° bis 360° ist $\cot\frac{90^\circ+\alpha}{2}$ von 180° bis 225°
also im 3ten Quadrant und +.

Man hat daher:
für α von incl. 0 bis 90°, und von incl. 270° bis 360°

$$\cot\frac{90^\circ+\alpha}{2}=+\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}$$

für α von incl. 90° bis incl. 270°

$$\cot\frac{90^\circ+\alpha}{2}=-\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}$$

32. $arc\left(\cot=\pm\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}\right)$ zu zeichnen.

Man erhält den Bogen $\frac{90^\circ-\alpha}{2}=\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}$

Denn construirt man wie No. 30 und 31, Fig. 478 und zeichnet noch die Normale BK auf BC bis in die Richtung CJ, so ist, da, wie ad 30 gezeigt

$$\triangle AED \sim \triangle FAC$$

ebenso $\triangle AED \sim \triangle CBK$

folglich $AE : DE = AC : BK$

oder $AE^2 : DE^2 = BC^2 : BK^2$

und da $AE^2 : DE^2 = AH : DH$

also $AH : DH = BC^2 : BK^2$

oder $AC - CH : CD + CH = BC^2 : BK^2$

woraus $BK = BC\cdot\sqrt{\frac{CD+CH}{AC-CH}}$

Nun ist $BK=\cot ACJ=\cot\frac{90^\circ-\alpha}{2}$

$BC = CD = AC = 1$

und $CH=\sin\alpha$

folglich $$\cot\frac{90^\circ-\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}\quad \text{XXI.}$$

Anmerk. Da $\cot\frac{90^\circ-\alpha}{2}$ mit $tg\,\frac{90^\circ-\alpha}{2}$ immer gleiche Vorzeichen hat, so ist nach No. 30:

für α von 0 bis 90° und von 270° bis 360°

$$\cot\frac{90^\circ-\alpha}{2}=+\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}$$

für α von 90° bis 270°

$$cot \frac{90 - \alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1 + sin\,\alpha}{1 - sin\,\alpha}}$$

33. $arc\left(tg = \pm\sqrt{\frac{1 + sin\,\alpha}{1 - sin\,\alpha}}\right)$

zu zeichnen.

Man erhält den Bogen $\frac{90 + \alpha}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}$ denn es ist Fig. 478:

$$\angle BCJ = \angle ACB - \angle ACJ$$

d. h. $\angle BCJ = 90^\circ - \frac{90^\circ - \alpha}{2} = \frac{90^\circ + \alpha}{2}$

Nun ist $BK = tg\, BCJ = tg\, \frac{90 + \alpha}{2}$

und nach No. 32

$$BK = BC \cdot \sqrt{\frac{CD + CH}{AC - CH}} = \sqrt{\frac{1 + sin\,\alpha}{1 - sin\,\alpha}}$$

daher $tg\, \frac{90^\circ + \alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + sin\,\alpha}{1 - sin\,\alpha}}$ XVII

Anmerk. Da $tg\, \frac{90^\circ + \alpha}{2}$ mit $cot\, \frac{90^\circ + \alpha}{2}$ immer gleiche Vorzeichen hat, so ist nach No. 31

für α von 0 bis 90° und von 270° bis 360°

$$tg\, \frac{90 + \alpha}{2} = +\sqrt{\frac{1 + sin\,\alpha}{1 - sin\,\alpha}}$$

für α von 90° bis 270°

$$tg\, \frac{90 + \alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1 + sin\,\alpha}{1 - sin\,\alpha}}$$

34. $arc\left(tg = \frac{1 - sin\,\alpha}{cos\,\alpha}\right)$

Man erhält den Bogen $\frac{90^\circ - \alpha}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$ denn bei der Construction und Bezeichnung Fig. 478 stehen die Seiten des $\triangle CAF$ und des $\triangle EHA$ gegenseitig normal auf einander, folglich ist

$$\triangle CAF \sim \triangle EHA$$

also $AF : AC = AH : EH$

oder $AF : AC = AC - CH : EH$

woraus $AF = AC \cdot \frac{AC - CH}{EH}$

Nun ist $AF = tg\, ACJ = tg\, \frac{90^\circ - \alpha}{2}$

$AC = 1$

$CH = cos\, ACE = sin\, BCE = sin\,\alpha$

$EH = sin\, ACE = cos\, BCE = cos\,\alpha$

daher $tg\, \frac{90^\circ - \alpha}{2} = \frac{1 - sin\,\alpha}{cos\,\alpha}$ XXIII.

Anmerk. Der Zähler $1 - sin\,\alpha$ ist immer positiv, der Nenner $cos\,\alpha$ ist für α von 0 bis 90° und von 270° bis 360° positiv, und für α von 90° bis 270° negativ, was auch (s. No. 30) mit den Vorzeichen von $tg\, \frac{90^\circ - \alpha}{2}$ übereinstimmt.

35. $arc\left(cos = \frac{1 - sin\,\alpha}{cos\,\alpha}\right)$

zu zeichnen.

Man erhält den Bogen $\frac{90^\circ + \alpha}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}$ denn bei der Construction Fig. 478 hat man

$$\angle ACJ = \frac{90^\circ - \alpha}{2}$$

$$\angle ACB = 90^\circ$$

daher $\angle ACB - \angle ACJ$

$$= \frac{2 \cdot 90^\circ - (90^\circ - \alpha)}{2} = \frac{90^\circ + \alpha}{2}$$

oder $\angle BCJ = \frac{90^\circ + \alpha}{2}$

Nun ist $AF = cot\, BCJ = cot\, \frac{90^\circ + \alpha}{2}$

nach No. 34 ist aber $AF = \frac{1 - sin\,\alpha}{cos\,\alpha}$

folglich $cot\, \frac{90^\circ + \alpha}{2} = \frac{1 - sin\,\alpha}{cos\,\alpha}$ XXIV.

Anmerk. Hier gilt dieselbe Anmerk. No 34, und No. 31 zeigt die Uebereinstimmung der Vorzeichen für $cot\, \frac{90^\circ + \alpha}{2}$ mit $\frac{1 - sin\,\alpha}{cos\,\alpha}$

36. $arc\left(tg = \frac{1 + sin\,\alpha}{cos\,\alpha}\right)$

zu zeichnen.

Man erhält den Bogen $\frac{90^\circ + \alpha}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}$ denn bei der Construction Fig. 478 ist schon No. 30 gezeigt, dafs

$$\triangle AED \sim \triangle FAC$$

also auch $\triangle AED \sim \triangle CBK$

da nun auch $\triangle AED \sim \triangle EHD$

so ist $\triangle EHD \sim CBK$

mithin $EH : DH = BC : BK$

oder $EH : CD + CH = BC : BK$

woraus $BK = BC \frac{CD + CH}{EH}$

Nun ist $BK = tg\, BCJ = tg\, \frac{90^\circ + \alpha}{2}$

ferner $BC = CD = 1$

$CH = sin\, BCE = sin\,\alpha$

und $EH = cos\, BCE = cos\,\alpha$

daher ist $tg\, \frac{90^\circ + \alpha}{2} = \frac{1 + sin\,\alpha}{cos\,\alpha}$ XXV.

Hier gilt die Anmerk. No 35, und da $\frac{90^\circ + \alpha}{2}$ mit $cot\, \frac{90^\circ + \alpha}{2}$ immer einerlei Vorzeichen hat, so stimmen für alle Werthe von α auch $tg\, \frac{90^\circ + \alpha}{2}$ mit $\frac{1 + sin\,\alpha}{cos\,\alpha}$ in den Vorzeichen überein.

37. $arc\left(cot = \frac{1 + sin\ \alpha}{cos\ \alpha}\right)$ zu zeichnen.

Man erhält den Bogen $\frac{90^\circ - \alpha}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$ denn es ist Fig. 478

$$BK = cot\ ACJ = cot\ \frac{90^\circ - \alpha}{2}$$

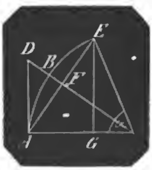
Nach No. 36 ist aber $BK = \frac{1 + sin\ \alpha}{cos\ \alpha}$

folglich ist $cot\ \frac{90^\circ - \alpha}{2} = \frac{1 + sin\ \alpha}{cos\ \alpha}$ XXVI.

38. $arc\left(tg = \frac{1 - cos\ \alpha}{sin\ \alpha}\right)$ zu zeichnen.

Man erhält den Bogen $\frac{1}{2}\alpha$
Denn es sei Fig. 479 $\angle ACE = \alpha$, so zeichne aus C mit dem Halbmesser = 1 den Bogen AE, halbire denselben in B, ziehe CB, errichte das Loth AD auf AC bis in die verlängerte CB, ziehe die Sehne AE, und fälle das Loth EG auf AC, so ist

Fig. 479.



$$\angle DAC = R = \angle AGE$$
$$\angle EAG + \angle AEG = R = \angle EAG + \angle ACD$$

daher $\angle ACD = \angle GEA$

folglich $\triangle ACD \sim \angle GEA$

hieraus $AC : AD = EG : AG$

oder $AC : AD = EG : AC - CG$

woraus $AD = AC \cdot \frac{AC - CG}{EG}$

Nun ist $AD = tg\ \frac{\alpha}{2}$

$AC = 1$

$CG = cos\ \alpha$

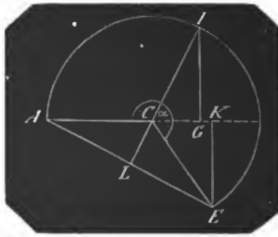
$EG = sin\ \alpha$

daher $AD = tg\ \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - cos\ \alpha}{sin\ \alpha}$ XXVII.

39. $arc\left(tg = \frac{sin\ \alpha}{1 + cos\ \alpha}\right)$ zu zeichnen.

Man erhält den Bogen $\frac{1}{2}\alpha$
Denn zeichnet man Fig. 480 aus C mit dem Halbmesser = 1 den Halbkreis AED, nimmt $\angle ACE = \alpha$, halbirt denselben durch CB, errichtet in A auf AC das Loth AF bis in die Richtung CB, fällt das Loth EG auf AC, und zieht die Sehne ED, so ist

Fig. 480.



Peripherie$\angle EDA = \frac{1}{2}$ Centri$\angle ECA = \angle FCA$

daher $DE \parallel CF$

da nun zugleich $EG \parallel AF$

so ist $\triangle DEG \sim \triangle CFA$

folglich $DG : EG = AC : AF$

oder $CD + CG : EG = AC : AF$

woraus $AF = AC \cdot \frac{EG}{CD + CG}$

Nun ist $AF = tg\ \frac{\alpha}{2}$

$EG = sin\ \alpha$

$CG = cos\ \alpha$

und $AC = CD = 1$

daher $AF = tg\ \frac{\alpha}{2} = \frac{sin\ \alpha}{1 + cos\ \alpha}$ XXVIII.

40 $arc\left(tg = \pm\sqrt{\frac{1 - cos\ \alpha}{1 + cos\ \alpha}}\right)$ zu zeichnen.

Man erhält den Bogen $\frac{1}{2}\alpha$
Denn zieht man Fig. 480 noch die Sehne AE, so hat man

$$DE \parallel CF$$
$$\angle AED = R = \angle FAC$$

daher $\triangle AED \sim \triangle FAC$

mithin $DE : AE = AC : AF$

also auch $DE^2 : AE^2 = AC^2 : AF^2$

Nun ist auch

$$DE^2 : AE^2 = DG : AG$$

daher $DG : AG = AC^2 : AF^2$

oder $DC + CG : AC - CG = AC^2 : AF^2$

woraus $AF = AC \cdot \sqrt{\frac{AC - CG}{DC + CG}}$

Nun ist $AF = tg\ ACB = tg\frac{\alpha}{2}$

$$AC = DC = 1$$

und $CG = \cos\alpha$

folglich $tg\,\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$ XXIX.

Anmerk. Die Wurzel ist für jeden Werth von α immer positiv, die Vorzeichen derselben richten sich also nach denen von $tg\,\frac{\alpha}{2}$ Im ersten und dritten Quadrant ist die tg positiv, im zweiten und vierten negativ. Im dritten und vierten Quadrant kann $tg\,\frac{\alpha}{2}$ nicht vorkommen, demnach ist

für α von 0 bis 180°

$$tg\,\frac{\alpha}{2} = +\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

für α von 180° bis 360°

$$tg\,\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

41. $arc\,(\sin + \cos = \pm\sqrt{1+\sin\alpha})$ zu zeichnen.

Man erhält den Bogen $= \frac{1}{2}\alpha$

Denn ist Fig. 481 $\angle ADE = \alpha$, so halbire denselben durch CJ, zeichne aus C mit dem Halbmesser $= 1$ den Bogen AJE, zeichne die Sehne AE, fälle die Lothe JG und EK auf AC, so hat man

Fig. 481.



$$\triangle ACE = \tfrac{1}{2}AE \times CL = \tfrac{1}{2}AC \times EK$$

daher ist $AE \times CL = AC \times EK$

oder $2AL \times CL = AC \times EK$

oder $2JG \times CG = AC \times EK$

ferner ist $JG^2 + CG^2 = CJ^2 = AC^2$

addirt

$$JG^2 + CG^2 + 2JG \times CG = AC^2 + AC \times EK$$

also $(JG + CG)^2 = AC^2 + AC \cdot CK$

daher $JG + CG = \sqrt{AC^2 + AC \cdot EK}$

$$= \sqrt{AC\,(AC + EK)}$$

Nun ist $JG = \sin\frac{\alpha}{2}$

$$CG = \cos\frac{\alpha}{2}$$

$$AC = 1$$

$$EK = \sin\alpha$$

folglich

$$\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{1+\sin\alpha} \quad \text{XXX.}$$

Für die Untersuchung über das jedesmal richtige Vorzeichen hat man Folgendes zu erwägen:

Für $\alpha = 0$ hat man $\sin\frac{\alpha}{2} = \sin 0 = 0$

und $\cos\frac{\alpha}{2} = \cos 0 = +1$

mithin auch

$$\sqrt{+\sin\alpha} = \sqrt{1+\sin 0} = \sqrt{1+0} = +\sqrt{1}$$

Für alle übrigen Werthe von α im ersten Quadrant bis incl. 90° ist

$$\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}$$

positiv, folglich auch $\sqrt{1+\sin\alpha}$ positiv, und

$$\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2} = +\sqrt{1+\sin\alpha}$$

Für $\alpha = 90°$ ist $\frac{\alpha}{2} = 45°$

$$\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2} = +\sqrt{1+\sin 90°}$$

$$= +\sqrt{1+1} = +\sqrt{2}$$

Liegt α im zweiten Quadrant, so liegt $\frac{\alpha}{2}$ im ersten, also auch in diesem Fall ist $\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2} = +\sqrt{1+\sin\alpha}$

Für $\alpha = 180°$ ist $\frac{\alpha}{2} = 90°$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sin 90° = +1;$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \cos 90° = 0$$

$$\sqrt{1+\sin\alpha} = \sqrt{1+\sin 180°} = \sqrt{1+0} = +\sqrt{1}$$

Liegt α im dritten Quadrant, so liegt $\frac{\alpha}{2}$ im zweiten, und zwar innerhalb 90° und 135°. Wenngleich nun hier $\cos\frac{\alpha}{2}$ negativ ist, so ist doch innerhalb der Grenzen $\sin\frac{\alpha}{2} > \cos\frac{\alpha}{2}$

mithin $\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}$

eine positive Grösse, mithin

$$\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2} = +\sqrt{1+\sin\alpha}$$

Wenn α in den vierten Quadrant tritt, entsteht die Scheide für die Vorzeichen $\pm$ der Wurzel. Denn für $\alpha = 270°$ ist $\frac{\alpha}{2} = 135°$, mithin $\cos\frac{\alpha}{2} = -\sin\frac{\alpha}{2}$ und

$\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2} = 0$; aber auch

$$\sqrt{1 + \sin 270^\circ} = \sqrt{1 + (-1)} = 0$$

und in diesem Fall

$$\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2} = \pm 0$$

Wird $\alpha > 270^\circ$, tritt also α in den vierten Quadrant, so fällt $\frac{\alpha}{2}$ zwischen 135° und 180°, es wird $\cos\frac{\alpha}{2} > \sin\frac{\alpha}{2}$ und $\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}$ wird negativ, mithin ist für α zwischen 270° und 360° nur

$$\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{1 + \sin\alpha}$$

Für $\alpha = 360^\circ$, also für $\frac{\alpha}{2} = 180^\circ$ gilt ebenfalls nur das negative Vorzeichen, denn es ist

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sin 180^\circ = 0$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \cos 180^\circ = -1$$

folglich

$\sqrt{1 + \sin\alpha} = \sqrt{1 + \sin 360^\circ} = \sqrt{1 + 0} = \sqrt{1}$

negativ, d. h. für $\alpha = 360^\circ$ ist

$$\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{1}$$

daher hat man

für α von incl. 0 bis incl. 270°

$$\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2} = +\sqrt{1 + \sin\alpha}$$

für α von incl. 270° bis incl. 360°

$$\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{1 + \sin\alpha}$$

42. $arc\left(\cos - \sin = \pm\sqrt{1 - \sin\alpha}\right)$ zu zeichnen.

Man erhält den Bogen $\frac{1}{2}\alpha$

Denn bei derselben Construction, Fig. 481, hat man wie No. 41:

$$2JG \times CG = AC \times EK$$
$$JG^2 + CG^2 = CJ^2 = AC^2$$

subtrahirt

$JG^2 + CG^2 - 2JG \times CG = AC^2 - AC \times EK$

oder $(CG - JG)^2 = AC(AC - EK)$

woraus $CG - JG = \sqrt{AC(AC - EK)}$

folglich nach No. 41:

$$\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{1 - \sin\alpha} \quad \text{XXXI.}$$

Anmerk. $\sqrt{1 - \sin\alpha}$ ist für jeden Werth von α eine positive Gröfse. Die Vorzeichen derselben richten sich also nach denen von

$$\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}$$

Für $\alpha = 0$ entsteht

$$\cos 0 - \sin 0 = \sqrt{1 - \sin 0}$$

d. i. $+1 - 0 = \sqrt{1 - 0}$

also $+1 = +\sqrt{1}$

Für $\alpha = 90^\circ$ entsteht

$$\cos 45^\circ - \sin 45^\circ = \sqrt{1 - \sin 90^\circ}$$

d. i. $+\frac{1}{2}\sqrt{2} - (+\frac{1}{2}\sqrt{2}) = \sqrt{1 - (+1)}$

also $\pm 0 = \pm\sqrt{0}$

Für α zwischen 0 und 90° ist $\frac{\alpha}{2} < 45^\circ$

also $\cos\frac{\alpha}{2} > \sin\frac{\alpha}{2}$

folglich $\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}$ positiv

und $= +\sqrt{1 - \sin\alpha}$

Für $\alpha = 180^\circ$ entsteht

$$\cos 90^\circ - \sin 90^\circ = \sqrt{1 - \sin 180^\circ}$$

d. i. $0 - (+1) = \sqrt{1 - 0}$

also $-1 = -\sqrt{1}$

Für α zwischen 90° und 180° fällt $\frac{\alpha}{2}$ zwischen 45° und 90°, also $\cos\frac{\alpha}{2} < \sin\frac{\alpha}{2}$ folglich $\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}$ negativ und $= -\sqrt{1 - \sin\alpha}$

Für $\alpha = 270^\circ$ entsteht

$$\cos 135^\circ - \sin 135^\circ = \sqrt{1 - \sin 270^\circ}$$

d. i. $-\frac{1}{2}\sqrt{2} - (+\frac{1}{2}\sqrt{2}) = \sqrt{1 - (-1)}$

$-\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2} = -\sqrt{2}$

Für α zwischen 180° und 270° fällt $\frac{\alpha}{2}$ zwischen 90° und 135°; $\cos\frac{\alpha}{2}$ ist negativ, $\sin\frac{\alpha}{2}$ positiv, also $\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}$ eine negative Gröfse und $= -\sqrt{1 - \sin\alpha}$

Für α zwischen 270° und 360° bleibt $\frac{\alpha}{2}$ im zweiten Quadrant, also wie so eben $-\sqrt{1 - \sin\alpha}$

Endlich für $\alpha = 360^\circ$ wird $\frac{\alpha}{2} = 180^\circ$ und es entsteht

$$\cos 180^\circ - \sin 180^\circ = \sqrt{1 - \sin 360^\circ}$$

d. i. $-1 - 0 = \sqrt{1 - 0}$

also $-1 = -\sqrt{1}$

Demnach hat man

für α von 0 bis incl. 90°

$$\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2} = +\sqrt{1 - \sin\alpha}$$

für α von incl. 90° bis incl. 360°

$$\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{1 - \sin\alpha}$$

43. $arc\left(\sin - \cos = \pm\sqrt{1 - \sin\alpha}\right)$

Man erhält den Bogen $\frac{1}{2}\alpha$

Denn schreibt man in No. 42 für

$$JG^2 + CG^2 - 2JG \times CG = AC^2 - AC \times EK$$

$$(JG - CK)^2 = AC(AC - EK)$$

also $\quad JG - CK = \sqrt{AC(AC - EK)}$

so hat man

$$\sin\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{1 - \sin\alpha} \qquad \text{XXXII.}$$

Und wenn man die Anmerk. No. 42 in derselben Reihenfolge durchnimmt, so findet man

für α von incl. 0 bis incl. 90°

$$\sin\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{1 - \sin\alpha}$$

für α von incl. 90° bis incl. 360°

$$\sin\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2} = +\sqrt{1 - \sin\alpha}$$

44. $arc\left(\sin = \pm\frac{1}{2}\left[\sqrt{1 + \sin\alpha} \pm \sqrt{1 - \sin\alpha}\right]\right)$ zu zeichnen.

Man erhält für jeden Werth von α den Bogen $\frac{\alpha}{2}$, es sind nur die Vorzeichen in jedem einzelnen Fall zu bestimmen.

A. für α von 0 bis incl. 90° hat man

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\left[\sqrt{1 + \sin\alpha} - \sqrt{1 - \sin\alpha}\right]$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\left[\sqrt{1 + \sin\alpha} + \sqrt{1 - \sin\alpha}\right]$$

Denn man hat Fig. 481

aus 41:

$$CG + JG = \cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{1 + \sin\alpha}$$

aus 42:

$$CG - JG = \cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{1 - \sin\alpha}$$

wo $\frac{\alpha}{2} < 45°$, also $CG > JG$ ist.

Durch Subtraction entsteht

$$2JG = 2\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{1 + \sin\alpha} - \sqrt{1 - \sin\alpha}$$

Durch Addition entsteht

$$2CG = 2\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{1 + \sin\alpha} + \sqrt{1 - \sin\alpha}$$

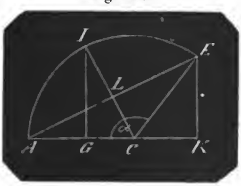
hieraus für α von 0 bis 90°

$$\left.\begin{matrix}\sin\frac{\alpha}{2} \\ \cos\frac{\alpha}{2}\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 + \sin\alpha} \mp \sqrt{1 - \sin\alpha}\right)$$

XXXIII.

B. für α von 90° bis 180° ist

Fig. 482.



$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 + \sin\alpha} + \sqrt{1 - \sin\alpha}\right)$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 + \sin\alpha} - \sqrt{1 - \sin\alpha}\right)$$

denn bei derselben Bezeichnung in Fig. 482 ist:

$$2\triangle ACE = AE \times CL = AC \times EK$$
$$= 2AL \times CL = AC \times EK$$
$$= 2JG \times CG = AC \times EK$$

Nun ist $\quad JG^2 + CG^2 = CJ^2 = AC^2$

daher

$$JG^2 + CG^2 \pm 2JG \times CG = AC^2 \pm AC \times EK$$

oder $\quad (JG \pm CG)^2 = AC(AC \pm EK)$

also $\quad JG + CG = \sqrt{AC(AC + EK)}$

und $\quad JG - CG = \sqrt{AC(AC - EK)}$

Nun ist $\quad JG = \sin\frac{\alpha}{2}$

$$CG = \cos\frac{\alpha}{2}$$
$$AC = 1$$
$$EK = \sin\alpha$$

und da $\angle ACJ = \frac{\alpha}{2} > 45°$, daher $JG > CG$

so hat man

$$\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{1 + \sin\alpha}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{1 - \sin\alpha}$$

Durch Addition, Subtraction und Reduction erhält man

$$\left.\begin{matrix}\sin\frac{\alpha}{2} \\ \cos\frac{\alpha}{2}\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 + \sin\alpha} \pm \sqrt{1 - \sin\alpha}\right)$$

XXXIV.

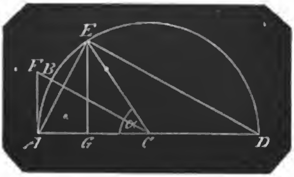
C. für α von 180° bis 270° ist (wie ad B.)

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 + \sin\alpha} + \sqrt{1 - \sin\alpha}\right)$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 + \sin\alpha} - \sqrt{1 - \sin\alpha}\right)$$

Denn bei derselben Bezeichnung in Fig. 483 hat man $\angle ACJ = \angle ECJ = \frac{\alpha}{2}$ die Linie JC verlängert, halbirt also auch den hohlen $\angle ACE$ und $\angle ACL = \angle ECL$ und da $\angle GCL$ der Scheitelwinkel von $\angle ACJ$, so ist auch

Fig. 483.



$$\angle GCL = \angle ACJ = \angle ECJ$$

abgezogen $\angle ECG = \angle ECG$

bleibt $\angle ECL = \angle ACL = \angle JCG$

und $\triangle ECL \cong \triangle ACL \cong \triangle JCG$

woraus $EL = AL = JG$

und $CL = CG$

Hiernach gilt der ganze Beweis von *B* mit Fig. 482 auch für diesen Fall, bis:

$$JG + CG = \sqrt{AC(AC + EK)}$$
$$JG - CG = \sqrt{AC(AC - EK)}$$

Für die Bezeichnung der Linien AC, JG, CG und EK ist zu bedenken, dafs die Gleichungen nur für positive Längen Gültigkeit haben, die sie aber zum Theil nicht mehr sind, wenn sie als trigonometrische Functionen ausgedrückt werden.

$+AC$ als Halbmesser ist und bleibt $+1$,

$+JG$ als Sinus bleibt $+\sin\frac{\alpha}{2}$

$+CG$ als Cosinus wird eine negative Gröfse; damit also die Gleichung Geltung behalte ist zu setzen

$$+CG = -\cos\frac{\alpha}{2}$$

$+EK$ als Sinus wird negativ, für die Gültigkeit der Gleichung ist also zu setzen

$$+EK = -\sin\alpha$$

Daher entstehen die beiden Gleichungen

$$\sin\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{1 - \sin\alpha}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{1 + \sin\alpha}$$

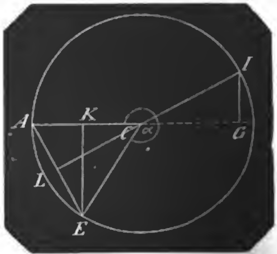
und da $\angle JCG = 180° - \frac{\alpha}{2} > 45°$

so hat man

$$\left.\begin{matrix}\sin\frac{\alpha}{2}\\ \cos\frac{\alpha}{2}\end{matrix}\right\} = \tfrac{1}{2}(\sqrt{1+\sin\alpha} \pm \sqrt{1-\sin\alpha})$$

XXXV.

Fig. 484.



D. für α von 270° bis 360° ist

$$\sin\frac{\alpha}{2} = -\tfrac{1}{2}(\sqrt{1+\sin\alpha} - \sqrt{1-\sin\alpha})$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = -\tfrac{1}{2}(\sqrt{1+\sin\alpha} + \sqrt{1-\sin\alpha})$$

Denn bei derselben Bezeichnung in Fig. 484 hat man $\angle ACJ = \angle ECJ = \frac{\alpha}{2}$ die Linie JC verlängert, halbirt zugleich den hohlen $\angle ACE = 360° - \alpha$, $\angle ACL = \angle ECL = \angle JCG$ und $\triangle ACL \cong \triangle ECL \cong \triangle JCG$.

Also auch hier gilt der Beweis ad B bis zu dem Satz

$$JG^2 + CG^2 \pm 2JG \times CG = AC^2 \pm AC \times EK$$

Da aber $\angle JCG\left(= 180° - \frac{\alpha}{2}\right) < 45°$

so ist $CG > JG$.

Daher fährt man also fort:

mithin $(CG \pm JG)^2 = AC(AC \pm EK)$

$$CG + JG = \sqrt{AC(AC + EK)}$$
$$CG - JG = \sqrt{AC(AC - EK)}$$

Nun ist hier und aus denselben Gründen wie ad C zu setzen

für AC der Werth $+1$

für JG der Werth $+\sin\frac{\alpha}{2}$

für CG der Werth $-\cos\frac{\alpha}{2}$

für EK der Werth $-\sin\alpha$

daher entstehen die beiden Gleichungen:

$$-\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{1 - \sin\alpha}$$

$$-\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{1 + \sin\alpha}$$

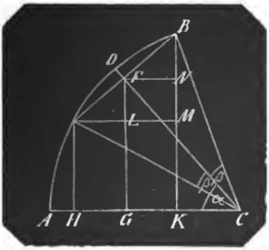
woraus durch Subtraction, Addition und Reduction

$$\left.\begin{matrix} \sin\frac{\alpha}{2} \\ \cos\frac{\alpha}{2} \end{matrix}\right\} = -\tfrac{1}{2}\left[\sqrt{1+\sin\alpha} \mp \sqrt{1-\sin\alpha}\right] \qquad \text{XXXVI.}$$

45. $arc\left(\sin = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2\cos\beta}\right)$ zu zeichnen.

Man erhält den Bogen α

Fig. 485.



Denn es sei (Fig. 485)

$$\angle ACD = \alpha, \; \angle DCB = \beta$$

so nimm $\angle DCE = \angle DCB$, zeichne aus C mit dem Halbmesser $= 1$ den Bogen $AEDB$, ziehe die Sehne BE, welche den Halbmesser CD in F schneidet, fälle die Lothe EH, FG, BK auf BC und das Loth EM auf BK, so hat man

$$FL : BM = EF : EB$$

Da nun $2EF = EB$

so ist auch $2FL = BM$

auch ist $2GL = MK + EH$

daher $2(FL + GL) = BM + MK + EH$

oder $2FG = BK + EH$

oder $FG = \tfrac{1}{2}(BK + EH)$

Nun ist $FG = FC \sin\alpha = \cos\beta\cdot\sin\alpha$

$BK = \sin(\alpha+\beta)$

und $EH = \sin(\alpha-\beta)$

folglich ist $\cos\beta\cdot\sin\alpha = \tfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$

oder $\sin\alpha = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2\cos\beta}$ XXXVII.

46. $arc\left(\cos = \frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{2\sin\beta}\right)$ zu zeichnen.

Man erhält den Bogen α.

Denn fällt man noch die Normale FN auf BK,

so hat man $BN : BM = BF : BE$

und da $2BF = BE$

so ist auch $2BN = BM = BK - EH$

also $BN = \tfrac{1}{2}(BK - EH)$

Nun ist BF normal auf CF, BN normal auf CG, und FN normal auf FG,

daher $\triangle FBN \sim \triangle FCG$

also $\angle FBN = \angle FCG = \alpha$

Aber $BN = BF\cos FBN = \sin\beta\cdot\cos\alpha$

$BK = \sin(\alpha+\beta)$

und

$EH = \sin(\alpha-\beta)$

folglich ist $\sin\beta\cdot\cos\alpha = \tfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$

oder $\cos\alpha = \frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{2\sin\beta}$ XXXVIII.

47. $arc\left(\cos = \frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2\cos\beta}\right)$ zu zeichnen.

Man erhält den Bogen α.

Denn Fig. 485 hat man

$CK + HK = CH$

hierzu $CK = CK$

giebt $2CK + HK = CH + CK$

Nun ist

$$BF : BE = FN : EM = GK : HK$$

aber $BE = 2BG$

daher auch $HK = 2GK$

daher ist

$$2CK + 2GK = 2(CK + GK) = CH + CK$$

oder $2CG = CH + CK$

woraus $CG = \tfrac{1}{2}(CH + CK)$

Nun ist $CG = CF\cos\alpha = \cos\beta\cdot\cos\alpha$

$CH = \cos(\alpha-\beta)$

$CK = \cos(\alpha+\beta)$

folglich $\cos\beta \cdot \cos\alpha = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$

oder $\cos\alpha = \frac{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)}{2\cos\beta}$ XXXIX.

48. $arc\left(\sin = \frac{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)}{2\sin\beta}\right)$ zu zeichnen.

Man erhält den Bogen α.

Denn Fig 485 hat man No. 46 und 47

$2FN = EM = HK = CH - CK$

daher $FN = \frac{1}{2}(CH - CK)$

Nun ist nach No. 46

$\angle FBN = \angle FCG = \alpha$

daher

$FN = BF \sin\alpha = \sin\beta \cdot \sin\alpha$

$CH = \cos(\alpha-\beta)$

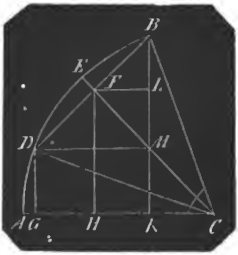
$CK = \cos(\alpha+\beta)$

daher $\sin\beta \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$

oder $\sin\alpha = \frac{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)}{2\sin\beta}$ XL.

49. $arc\left(\sin = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \sin\beta\right)$ zu zeichnen.

Fig. 486.



Man erhält den Bogen α.

Denn zeichnet man (Fig. 486) $\angle ACB = \alpha$, innerhalb desselben an einen Schenkel, z. B. AC den $\angle ACD = \beta$, halbirt $\angle BCD$ durch CE, zeichnet aus C mit dem Halbmesser $= 1$ den Bogen $ADEB$, zieht die Sehne BD, und fällt die Lothe BK, FH und DG auf AC, so hat man

$BK + DG = 2FH$

Nun ist $BK = \sin\alpha$

$DG = \sin\beta$

und $FH = CF \sin FCH = \cos BCE \cdot \sin FCH$

Nun ist $\angle BCE = \frac{1}{2}\angle BCD = \frac{1}{2}(\alpha-\beta)$

und $\angle FCH = \angle DCE + \angle ACD$

$= \frac{1}{2}(\alpha-\beta) + \beta = \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$

daher $FH = \cos\frac{\alpha-\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha+\beta}{2}$

folglich $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

oder $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \sin\beta$ XLI.

50. $arc\left(\sin = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2} + \sin\beta\right)$ zu zeichnen.

Man erhält den Bogen α.

Denn zeichnet man (Fig. 487) $\angle ACB = \alpha$, an den einen Schenkel AC desselben den $\angle ACD' = \beta$ ausserhalb, und an den anderen Schenkel den $\angle BCD = \beta$ innerhalb, halbirt $\angle ACD = (\alpha - \beta)$ durch CE, zeichnet aus C mit dem Halbmesser $= 1$ den Bogen BED', zieht die Sehne BD', aus D' mit AC die Parallele $D'K'$, fällt auf AC und $D'K'$ die Lothe $BK + KK'$, $FH + HH'$ und $D'G$, so hat man

Bogen BD = Bogen AD'

„ DE = „ AE

daher Bogen BE = Bogen $D'E$

und

$BF = D'F$

daher auch

$BD' = 2D'F$

folglich auch

$BK' = 2FH'$

oder

$$BK + KK' = 2FH + 2HH'$$

also

$$BK = 2FH + HH'$$

folglich

$$BK - HH' = 2FH$$

Nun ist

$$FH = CF \cdot \sin ACE = CF \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$= \cos BCE \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$= \cos\left[\beta + \frac{\alpha - \beta}{2}\right] \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

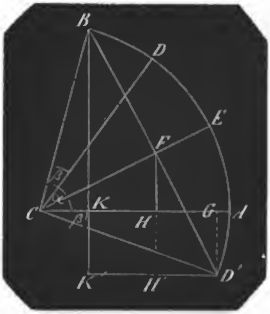
$$= \cos\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$BK = \sin \alpha$$

und

$$HH' = D'G = \sin \beta$$

Fig. 487.



daher
$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$
oder
$$\sin\alpha = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2} + \sin\beta$$
XLII.

51. $arc\left(\cos = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\beta\right)$ zu zeichnen.

Man erhält den Bogen α.

Denn fällt man in Fig. 486 noch die Lothe FL und DM auf BK, so hat man

$$DF = BF$$

also $BD = 2BF$

daher auch $DM = 2FL$

oder $GK = 2HK$

hierzu $2CK = 2CK$

giebt $GK + 2CK = 2HK + 2CK$

oder $CG + CK = 2CH$

Nun ist $CG = \cos\beta$

$CK = \cos\alpha$

und $CH = CF \cdot \cos FCH = \cos BCF \cdot \cos FCH$

$$= \cos\frac{\alpha-\beta}{2} \cdot \cos(FCD + ACD)$$

$$= \cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2} + \beta\right) = \cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

folglich
$$\cos\beta + \cos\alpha = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
oder
$$\cos\alpha = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\beta$$
XLIII.

52. $arc\left(\cos = \cos\beta - 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ zu zeichnen.

Man erhält den Bogen α.

Denn auf Fig. 486 hat man nach No. 51:

$$GK = 2FL$$

also auch $CG - GK = 2FL$

Nun ist $CG = \cos\beta$

$CK = \cos\alpha$

und
$$FL = BF \cdot \sin FBL = BF \cdot \sin FCH = \sin\frac{\alpha-\beta}{2} \sin\frac{\alpha+\beta}{2}$$

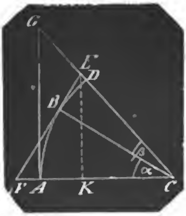
folglich
$$\cos\beta - \cos\alpha = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$
oder
$$\cos\alpha = \cos\beta - 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$
XLIV.

53. $arc\left(tg = \frac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{1 - tg\,\alpha \cdot tg\,\beta}\right)$ zu zeichnen.

Man erhält den Bogen $(\alpha + \beta)$.

Denn setzt man Fig. 488 die $\angle ACB = \alpha$, $BCD = \beta$ zusammen, zeichnet aus C mit dem Halbmesser = 1 den Bogen ABD, errichtet in B auf BC das Loth $BF + BE$ bis in die Richtungen von CA und CD, ferner in A auf AC das Loth AG bis in die Richtung von CD, und fällt das Loth EK auf AC, welches den Halbmesser BC in H schneidet, so ist

Fig. 488.



$\angle EFK + \angle FEK = R = \angle BHE + \angle FEK$
daher $\angle EFK = \angle BHE + \angle CHK$
hierzu $\angle EKF = \angle EBH = \angle CKH = R$

giebt $\triangle EFK \sim \triangle EHB \sim \triangle CHK$
und $\angle BEH = \angle ACB = \alpha$
daher ist

$$EF : EK = CH : CK$$

oder umgestellt

$$EF : CH = EK : CK$$

Es ist aber auch

$$AG : AC = EK : CK$$

daher ist $AG : AC = EF : CH$
oder $AG : AC = BF + BE : BC - BH$

also $AG = AC \cdot \frac{BF + BE}{BC - BH}$

Nun ist $AG = tg(\alpha + \beta)$
$AC = BC = 1$
$BF = tg\,\alpha$
$BE = tg\,\beta$

und
$BH = BE\,tg\,BEH = BE\,tg\,\alpha = tg\,\beta \cdot tg\,\alpha$

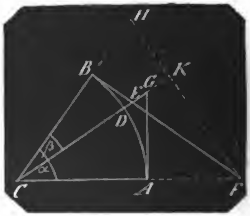
folglich $tg\,(\alpha + \beta) = \frac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{1 - tg\,\alpha \cdot tg\,\beta}$ XLV.

54. $arc\left(tg = \frac{tg\,\alpha - tg\,\beta}{1 + tg\,\alpha \cdot tg\,\beta}\right)$ zu zeichnen.

Man erhält den Bogen $(\alpha - \beta)$.

Es sei (Fig. 489) $\angle ACB = \alpha$, $\angle BCD$ innerhalb α an dem einen Schenkel BC liegend $= \beta$; zeichnet man nun mit dem Halbmesser = 1 den Bogen ADB, errichtet in A auf AC das Loth AG bis in die verlängerte CD, in B auf BC das Loth BF bis in die verlängerte CA, welches die CG in E schneidet, fällt von F auf die verlängerte CG, das Loth $FK + KH$ bis in die verlängerte CB, so hat man

Fig. 489.



$\angle CKF = \angle CAG = R$
und $\angle FCK = \angle ACG$

daher $\triangle FCK \sim \triangle GAC$
mithin I. $CK : FK = AC : AG$

Ferner ist
$\angle EFK + \angle FEK = \angle BFH + \angle BHF = R$
also $\angle FEK = \angle CHK$
hierzu $\angle FKE = \angle CKH = R$

giebt $\triangle FFK \sim \triangle HCK$
mithin $EF : FK = CH : CK$
oder umgestellt
II. $CK : FK = CH : EF$

rücksichtlich I. ist also
$CH : EF = AC : AG$
oder $CB + BH : BF + BE = AC : AG$

woraus $AG = AC\,\frac{BF - BE}{CB + BH}$

Nun ist $AG = tg\,(\alpha - \beta)$
$AC = CB = 1$
$BF = tg\,\alpha$
$BE = tg\,\beta$

und
$BH = BF \cdot tg\,BFH = BF \cdot tg\,BCD = tg\,\alpha \cdot tg\,\beta$

folglich $tg\,(\alpha - \beta) = \frac{tg\,\alpha - tg\,\beta}{1 + tg\,\alpha \cdot tg\,\beta}$ XLVI.

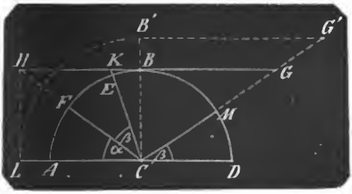
55. $arc\left(cot = \frac{cot\,\alpha \cdot cot\,\beta - 1}{cot\,\alpha + cot\,\beta}\right)$ zu zeichnen.

Man erhält den Bogen $(\alpha + \beta)$

Denn zeichnet man Fig. 490 $\angle ACF + FCE = \alpha + \beta$, beschreibt aus C mit dem

Halbmesser = 1 den Bogen AFE und vollendet den Halbkreis, errichtet den lothrechten Halbmesser CB, macht in dem zweiten Quadrant $\angle DCM = \beta$, errichtet in B auf CB das Loth $BH + BG$ bis in die Richtungen CF und CM, fällt das Loth HL auf die verlängerte CA, zeichnet aus C den Quadrant LB', und zieht die mit BG parallele $B'G'$ bis in die Richtung CG, verlängert CE bis K in HG

Fig. 490.



so hat man

$$\angle KHC = \angle GHC = \alpha$$
$$\angle KCH = \angle CGH = \beta$$

daher $\triangle KCH \sim \triangle CGH$

mithin $HK : HC = HC : HG$

woraus $HK \cdot HG = HC^2 = BH^2 + BC^2$ I.

Nun ist

$$HK \cdot HG = (HB - BK) \cdot HG$$
$$= HB \cdot HG - BK \cdot HG$$
$$= HB(HB + BG) - BK \cdot HG$$
$$= HB^2 + HB \cdot BG - BK \cdot HG$$

oder $HK \cdot HG = HB^2 + B'C \cdot BG - BK \cdot HG$

woraus in Verbindung mit Gl. I.

$$BH^2 + BC^2 = BH^2 + B'C \cdot BG - BK \cdot HG$$

woraus $BC^2 + BK \cdot HG = B'C \cdot BG$ II.

Nun ist $B'C : B'G' = BC : BG$

daher $B'C \cdot BG = B'G' \cdot BC$

folglich aus II:

$$BC^2 + BK \cdot HG = B'G' \cdot BC$$

oder umgestellt

$$BK \cdot HG = B'G' \cdot BC - BC^2$$

oder $BK \cdot HG = BC \cdot (B'G' - BC)$

oder $BK(BG + BH) = BC(B'G' - BC)$

woraus $BK = BC \dfrac{B'G' - BC}{BG + BH}$

Nun ist $BK = cot\,(\alpha + \beta)$

$BC = 1$

$$B'G' = B'C\ cot\ CG'B' = B'C\ cot\ \beta$$
$$= CL\ cot\ \beta$$
$$= BH \cdot cot\ \beta = cot\ \alpha \cdot cot\ \beta$$

$BH = cot\ \alpha$

$BG = cot\ \beta$

folglich

$$cot\,(\alpha + \beta) = \frac{cot\ \alpha \cdot cot\ \beta - 1}{cot\ \beta + cos\ \alpha} \qquad \text{XLVII.}$$

56. $arc\left(cot = \dfrac{cot\ \alpha \cdot cot\ \beta + 1}{cot\ \beta - cot\ \alpha}\right)$ zu zeichnen.

Man erhält den Bogen $(\alpha - \beta)$

Denn zeichnet man Fig. 491 mit dem Halbmesser = 1 aus C den Halbkreis ABD, errichtet den lothrechten Halbmesser CB, zeichnet an dem horizontalen Halbmesser AC des ersten Quadrant den Centriwinkel $ACE = \alpha$, und an dessen zweiten Schenkel innerhalb α den Winkel $ECF = \beta$, und construirt im Uebrigen wie in Fig. 490, so hat man auch hier

$$\triangle HCK \sim \triangle HGC$$

daher $HK : HC = HC : HG$

und $HK \cdot HG = HC^2$

$$= BH^2 + BC^2$$

endlich $HK \cdot HG =$

$$BH^2 + HB \cdot BG - BK \cdot HG$$

daher

$$BH^2 + BC^2 = BH^2 + BH \cdot BG - BK \cdot HG$$

oder

$$BC^2 = BH \cdot BG - BK(BH + BG)$$

oder

$$BC^2 = BH \cdot BG - BH \cdot BK - BG \cdot BK$$

oder

$$BC^2 + BG \cdot BK = BH \cdot (BG - BK)$$

oder

$$BC^2 + BG \cdot CB' = BH(BG - BK)$$

Nun ist

$$CB' : B'G' = BC : BG$$

daher

$$BG \cdot CB' = BC : B'G'$$

folglich

$$BC^2 + BC \cdot B'G' = BH \cdot (BG - BK)$$

oder

$$BC \cdot (BC + B'G') = BH \cdot (BG - BK)$$

woraus $BH = BC \cdot \dfrac{B'G' + BC}{BG - BK}$

Nun ist $BH = cot\,(\alpha - \beta)$

$BC = 1$

$$B'G' = CB' \cdot cot\ \beta = BH \cdot cot\ \beta$$
$$= cot\ \alpha \cdot cot\ \beta$$

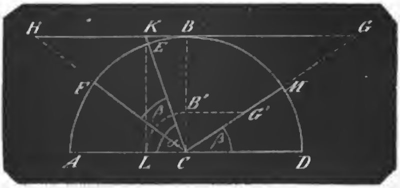
$BG = cot\ \beta$

und $BK = cot\ \alpha$

folglich

$$cot\,(\alpha - \beta) = \frac{cot\ \alpha \cdot cot\ \beta + 1}{cot\ \beta - cot\ \alpha} \qquad \text{XLVIII.}$$

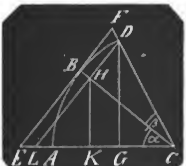
Fig. 491.



57. $arc\,[\sin = \cos\,\alpha \cdot \cos\,\beta\,(tg\,\alpha + tg\,\beta)]$ zu zeichnen.

Man erhält den Bogen $(\alpha + \beta)$ Denn zeichnet man Fig. 492 $\angle ACB + \angle BCD = \alpha + \beta$, aus C mit dem Halbmesser = 1 den Bogen ABD, errichtet in B auf BC das Loth $BE + BF$ bis in die Richtungen CA und CD, zieht $DL \mp FE$, fällt die Lothe DG und HK auf AC

Fig. 492.



so ist $\angle CHL = R = \angle CKH$

daher

$$\angle CHK + \angle LHK = R = \angle CHK + HCK$$

also	$\angle LHK = \angle HCK$
folglich	$LHK \sim \triangle HCK$
mithin	$CK : CH = HK : HL$
aber auch	$DG : DL = HK : HL$
folglich	$CK : CH = DG : DL$
ferner ist	$CH : CB = DL : EF$
folglich	$CK : CB = DG : EF$
oder	$CK : CB = DG : BE + BF$
woraus	$BE + BF = CB \cdot \dfrac{DG}{CK}$

Nun ist $BE = tg\,\alpha$

$BF = tg\,\beta$

$CB = 1$

$DG = \sin\,(\alpha + \beta)$

und $CK = CH \cdot \cos\,\alpha = \cos\,\beta \cdot \cos\,\alpha$

folglich $tg\,\alpha + tg\,\beta = \dfrac{\sin\,(\alpha + \beta)}{\cos\,\alpha \cdot \cos\,\beta}$ XLIX.

oder

$\sin(\alpha + \beta) = \cos\,\alpha \cdot \cos\,\beta\,(tg\,\alpha + tg\,\beta)$

58. $arc[\sin = \cos\,\alpha \cdot \cos\beta\,(tg\alpha - tg\beta)]$ zu zeichnen.

Man erhält den Bogen $(\alpha - \beta)$ Denn zeichnet man Fig. 493 $\angle ACD = \alpha$ und an einem Schenkel CD desselben innerhalb den $\angle DCB = \beta$, beschreibt aus C mit dem Halbmesser = 1 den Bogen ABD, errichtet in D auf CD das Loth DF bis in die Richtung CA, verlängert CB bis E in DF, zieht durch B die mit DF parallele GL, und fällt die Lothe BH und GK auf AC,

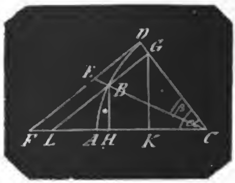
so hat man	$CB : CE = CG : CD$
ebenso	$CB : CE = BL : EF$
daher	$CG : CD = BL : EF$
Nun ist	$\triangle LBH \sim \triangle GCK$
daher	$CK : CG = BH : BL$

hierzu Gl. I. giebt

$$CK : CD = BH : EF$$

oder	$CK : CD = BH : DF - DE$
woraus	$DF - DE = CD \cdot \dfrac{BH}{CK}$

Fig. 493.



Nun ist $DF = tg\,\alpha$

$DE = tg\,\alpha$

$CD = 1$

$BH = \sin\,(\alpha - \beta)$

und $CK = CG \cdot \cos\,\alpha = \cos\,\beta \cdot \cos\,\alpha$

folglich ist $tg\,\alpha - tg\,\beta = \dfrac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos\,\alpha \cdot \cos\,\beta}$

oder

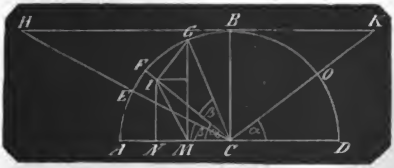
$\sin\,(\alpha - \beta) = \cos\,\alpha \cdot \cos\,\beta\,(tg\,\alpha - tg\,\beta)$ L.

59. $arc\,[\sin = \sin\,\alpha \cdot \sin\,\beta\,(\cot\,\alpha + \cot\,\beta)]$ zu zeichnen.

Man erhält den Bogen $(\alpha + \beta)$

Denn zeichnet man Fig. 494 aus C mit dem Halbmesser = 1 den Halbkreis ABD, errichtet den lothrechten Halbmesser CB, zieht durch B die mit AD parallele HK.

Fig. 494.



macht $\angle ACE$ im ersten Quadrant $= \beta$, $\angle DCO$ im zweiten Quadrant $= \alpha$, verlängert deren Schenkel CE und CO bis H und K in der parallelen HK, zeichnet im ersten Quadrant noch die $\angle ACF = \alpha$ und $FCG = \beta$, fällt das Loth GJ auf CF, die Lothe JN auf GM auf AC, das Loth JL auf GM und zieht JM,

so hat man $\angle CJL = \angle JCN = \alpha$

auch

$\angle CJL + \angle LJG = \angle JGL + \angle LJL = R$

daher $\angle CJL$ oder $\angle JCN = \angle JGL = \alpha$

hierzu $\angle CNJ = \angle GLJ = R$

daher $\triangle CNJ \sim \triangle GLJ$

mithin $CJ : NJ = GJ : LJ$

oder umgestellt $CJ : GJ = NJ : LJ$

oder $CJ : GJ = LM : LJ$

hierzu $\angle CJG = \angle JLM = R$

daher $\triangle CGJ \sim \triangle MJL$

folglich $\angle LMJ = \angle JCG = \beta$

auch war $\angle JGM = \alpha$

Nun ist $\angle BHC = \angle ACH = \beta$

und $\angle BKC = \angle DCK = \alpha$

folglich $\triangle CGJ \sim \triangle HKC$

daher $JL : GM = CB : HK$

oder $JL : GM = BC : BH + BK$

woraus $BH + BK = BC \cdot \dfrac{GM}{JL}$

Nun ist $BH = cot\ \beta$

$BK = cot\ \alpha$

$BC = 1$

$GM = sin\,(\alpha + \beta)$

und $JL = GJ \cdot sin\ JGL = GJ \cdot sin\ \alpha$

$= sin\ \beta \cdot sin\ \alpha$

$$\left.\begin{array}{l} \text{folglich } cot\ \alpha + cot\ \beta = \dfrac{sin\,(\alpha+\beta)}{sin\ \alpha \cdot sin\ \beta} \\ \text{oder} \\ sin\,(\alpha+\beta) = sin\ \alpha \cdot sin\ \beta\,(cot\ \alpha + cot\ \beta) \end{array}\right\} \text{LI.}$$

60. $arc\ [sin = sin\ \alpha \cdot sin\ \beta(cot\ \beta - cot\ \alpha)]$ zu zeichnen.

Man erhält den Bogen $(\alpha - \beta)$

Denn zeichnet man Fig. 495 mit dem Halbmesser = 1 den Quadrant ACB, macht $\angle ACE = \alpha$, $\angle ACD = \beta$, errichtet in B auf BC das Loth BH, verlängert die Schenkel CD und CE bis H und K in BH, fällt die Lothe EF und KL auf AC, die Lothe EG und JF auf CD, und zieht aus F eine Parallele mit CD bis N in die verlängerte EG,

so hat man

$\angle GEM + \angle EMG$
$= \angle FCM + CMF = R$

da nun $\angle EMG = \angle CMF$

so ist $\angle GEM = FCM = \beta$

zugleich ist $\angle ENF = \angle CJF = R$

daher $\triangle ENF \sim \triangle CJF$

woher $EF : NF = NF : JF$

oder umgestellt

$JF : NF = CF : EF$

oder $NG : NF = CF : EF$

hierzu $\angle GNF = \angle CFE$

giebt $\triangle GNF \sim \triangle CFE \sim \triangle CLK$

mithin $\angle NGF = FCE = \alpha$

Fig. 495.



Nun ist $JF \mp EG$

daher $\angle JFM = \angle GEM = \beta$

aber $\angle GFJ = \angle NGF = \alpha$

daher $\angle GFJ - \angle JFM = \alpha - \beta$

oder $\angle GFE = \alpha - \beta$

auch war $\angle GEF = \beta$

Da nun $\angle KCH = \alpha - \beta$

und $\angle KHC = \beta$

so ist $\triangle KHC \sim \triangle GFE$

folglich $HK : KC = EG : GF$

aber auch $KC : KL = GF : NF$

mithin $HK : KL = EG : NF$

oder $BH - BK : KL = EG : NF$

woraus $BH - BK = KL \cdot \dfrac{EG}{NF}$

Nun ist $BH = cot\ \beta$

$$BK = \cot \alpha$$
$$KL = BC = 1$$
$$EG = \sin (\alpha - \beta)$$

und

$$NF = EF \cdot \sin NEF = EF \cdot \sin \beta = \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

folglich $\cot \beta - \cot \alpha = \dfrac{\sin (\alpha - \beta)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}$

oder

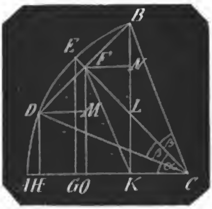
$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \sin \beta (\cot \beta - \cot \alpha)$ } LII.

61. $arc \left(\sin = \dfrac{\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta}{\sin (\alpha + \beta)}\right)$ zu zeichnen.

Man erhält den Bogen $(\alpha + \beta)$

Denn zeichnet man Fig. 496 $\angle ACE = \alpha$, setzt an den Schenkel CE innerhalb und außerhalb des Winkels die $\angle ECB$ und ECD, jeder $= \beta$, so daſs also $\angle ACB = (\alpha + \beta)$ und $\angle ACD = (\alpha - \beta)$. Beschreibt aus C mit dem Halbmesser $= 1$ den Bogen $ADEB$, zieht die Sehne BD, fällt die Lothe DH, EG, FO und BK auf AC, das Loth FN auf BK, und zieht FK

Fig. 496.



so ist $\angle FLB = \angle KLC$

hierzu $\angle BFL = R = \angle CKL$

daher $\triangle FLB \sim \triangle KLC$

mithin $LC : LK = LB : LF$

oder umgestellt

$$LC : LB = LK : LF$$

zugleich $\angle BLC = \angle FLK$

daher $\triangle FLK \sim \triangle BLC$

mithin $\angle FKL = \angle BCL = \beta$

folglich auch $\angle KFO = \beta = \angle BCF$

hierzu $\angle FOK = R = \angle CFB$

daher $\triangle FKO \sim \triangle CBF$

und $FK : FO = CB : CF$

oder $FK : FO = CE : CF$

Nun ist auch

$$EG : FO = CE : CF$$

folglich $EG = FK$

daher auch $EG^2 = FK^2$

oder $EG^2 = FO^2 + FN^2$

hiervon $BF^2 = BF^2$

bleibt $EG^2 - BF^2 = FO^2 + FN^2 - BF^2$

$$= FO^2 - (BF^2 - FN^2)$$
$$= FO^2 - BN^2$$

oder $EG^2 - BF^2 = (FO + BN)(FO - BN)$

Fällt man nun das Loth DM auf FO, so ist $\triangle FDM \cong \triangle BFN$, daher $FM = BN$ folglich ist

$$EG^2 - BF^2 = (FO + BN)(FO - FM)$$

oder $EG^2 - BF^2 = BK \times DH$

Nun ist $EG = \sin \alpha$

$$BF = \sin \beta$$
$$BK = \sin (\alpha + \beta)$$

und $DH = \sin (\alpha - \beta)$

daher hat man

$\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta = \sin (\alpha + \beta) \cdot \sin (\alpha - \beta)$

oder

$\sin (\alpha + \beta) = \dfrac{\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta}{\sin (\alpha - \beta)}$ } LIII.

62. $arc \left(\sin = \dfrac{\cos^2 \beta - \cos^2 \alpha}{\sin (\alpha - \beta)}\right)$ zu zeichnen.

Man erhält den Bogen $(\alpha + \beta)$

Denn es ist No. 61, Fig. 496 bewiesen, daſs $EG^2 - BF^2 = BK \times DH$

Nun ist $EG^2 - BF^2 = CE^2 - CG^2 - BF^2$

$$= CB^2 - BF^2 - CG^2$$
$$= CF^2 - CG^2$$

daher ist auch $CF^2 - CG^2 = BK \cdot DH$

Nun ist $CF = \cos \beta$

$$CG = \cos \alpha$$
$$DK \cdot DH = \sin (\alpha + \beta) \sin (\alpha - \beta)$$

folglich

$\cos^2 \beta - \cos^2 \alpha = \sin (\alpha + \beta) \cdot \sin (\alpha - \beta)$

oder

$\sin (\alpha + \beta) = \dfrac{\cos^2 \beta - \cos^2 \alpha}{\sin (\alpha - \beta)}$ } LIV.

63. $arc \left(\cos = \dfrac{\cos^2 \beta - \sin^2 \alpha}{\cos (\alpha - \beta)}\right)$ zu zeichnen.

Denn es ist in No. 61 mit Fig. 496 bewiesen, daſs

$$EG = FK$$

daher ist auch

$$EG^2 = FK^2 = OF^2 + OK^2$$

dies abgezogen von

$$CF^2 = CF^2$$

bleibt $CF^2 - EG^2 = CF^2 - OF^2 - OK^2$

$$= CO^2 - OK^2$$

oder $CF^2 - EG^2 = (CO - OK)(CO + OK)$

da nun $DF = BF$

so ist auch $DM = FN$

oder $OH = OK$

mithin ist $CO + OK = CO + OH = CH$

und da zugleich

$$CO - OK = CK$$

so hat man $CF^2 - EG^2 = CK \cdot CH$

Nun ist $CF = \cos\beta$

$$EG = \sin\alpha$$

$$CK = \cos(\alpha + \beta)$$

und $CH = \cos(\alpha - \beta)$

daher ist

$$\left.\begin{aligned} &\cos^2\beta - \sin^2\alpha = \cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta) \\ &\text{oder} \\ &\cos(\alpha+\beta) = \frac{\cos^2\beta - \sin^2\alpha}{\cos(\alpha-\beta)} \end{aligned}\right\} \text{LV.}$$

64. $arc\left(\cos = \dfrac{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}{\cos(\alpha-\beta)}\right)$ zu zeichnen.

Man erhält den Bogen $(\alpha + \beta)$

Denn in Fig. 496 hat man

$$EG^2 = CE^2 - CG^2$$

oder $EG^2 = CB^2 - CG^2$

dies abgezogen von

$$CF^2 = CF^2$$

bleibt $CF^2 - EG^2 = CF^2 - (CB^2 - CG^2)$

$$= CG^2 - (CB^2 - CF^2)$$

oder $CF^2 - EG^2 = CG^2 - BF^2$

Nun ist nach No. 59:

$$CF^2 - EG^2 = CK \times CH$$

folglich ist

$$CG^2 - BF^2 = CK \times CH$$

Nun ist $CG = \cos\alpha$

$$BF = \sin\beta$$

und $CK \times CH = \cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)$

folglich ist

$$\left.\begin{aligned} &\cos^2\alpha - \sin^2\beta = \cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta) \\ &\text{oder} \\ &\cos(\alpha+\beta) = \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}{\cos(\alpha-\beta)} \end{aligned}\right\} \text{LVI}$$

65. $arc\left(tg = \dfrac{\sin\alpha + \sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta}\right)$ zu zeichnen.

Man erhält den Bogen $\dfrac{\alpha + \beta}{2}$

Denn zeichnet man Fig. 497 $\angle ACB = \alpha$, an einen Schenkel AC den $\angle ACD = \beta$ innerhalb α, so dafs $\angle BCD = \alpha - \beta$, halbirt $\angle BCD$ durch CG, errichtet in A das Loth AG auf AC, beschreibt mit dem Halbmesser = 1 den Bogen $ADJB$, zieht die Sehne BD, und fällt die Lothe DH, FL und BK auf AC, so ist

$$AG : AC = LF : LC$$

Nun ist $DF = BF$

folglich $LF = \frac{1}{2}(DH + BK)$

ebenso ist $LH = LK$

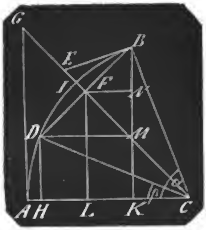
da nun $LC = CK + LK$

und auch $LC = CH - LH$

so ist $2LC = CK + CH$

also $LC = \frac{1}{2}(CK + CH)$

Fig. 497.



Daher verwandelt sich die obige Proportion in

$$AG : AC = \tfrac{1}{2}(DH + BK) : \tfrac{1}{2}(CK + CH)$$

oder $AG : AC = DH + BK : CK + CH$

woraus $\dfrac{AG}{AC} = \dfrac{DH + BK}{CK + CH}$

Nun ist $DH = \sin\beta$, $BK = \sin\alpha$

$CK = \cos\alpha$, $CH = \cos\beta$

$$AG = tg\,ACJ = tg\,(ACD + DCJ)$$

$$= tg\left(\beta + \frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$= tg\,\frac{\alpha + \beta}{2}$$

und $AC = 1$

folglich hat man

$$tg\,\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta} \qquad \text{LVII.}$$

66. $arc\left(tg = \dfrac{\sin\alpha - \sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta}\right)$ zu zeichnen.

Man erhält den Bogen $\dfrac{\alpha - \beta}{2}$

Denn zeichnet man Fig. 497 noch die Tangente BE bis in die Richtung CG, fällt die Normalen FN und DM auf BK so hat man $\angle NFL = R = \angle BFC$

hiervon $\angle NFC = \angle NFC$

bleibt $\angle CFL = \angle BFN$

da nun zugleich

$$\angle BNF = R = \angle CLF$$

so ist $\triangle BNF \sim \triangle CLF$

daher $BF : BN = DF : CL$

oder umgestellt

$$BF : CF = BN : CL$$

Nun ist $\angle BFC = R = \angle EBC$

$$\angle BCF = \angle ECB$$

daher $\triangle BCF \infty \triangle ECB$

hieraus $BF : CF = BE : BC$

daher auch $BE : BC = BN : CL$

Nun ist $BF = \frac{1}{2}BD$

daher auch $BN = \frac{1}{2}BM = \frac{1}{2}(BK - DH)$

und nach No. 65 $CL = \frac{1}{2}(CK + CH)$

---

daher $BE : BC = \frac{1}{2}(BK - DH) : \frac{1}{2}(CK + CH)$

woraus $\dfrac{BE}{BC} = \dfrac{BK - DH}{CK + CH}$

Nun ist $BE = tg\ BCJ = tg\ \dfrac{\alpha - \beta}{2}$

$BK = \sin\ \alpha,\ DH = \sin\ \beta$

$CK = \cos\ \alpha,\ CH = \cos\ \beta$

und $BC = 1$

folglich $tg\ \dfrac{\alpha - \beta}{2} = \dfrac{\sin\ \alpha - \sin\ \beta}{\cos\ \alpha + \cos\ \beta}$ LVIII.

67. $arc\left(tg = \dfrac{\cos\ \beta - \cos\ \alpha}{\sin\ \alpha + \sin\ \beta}\right)$ zu zeichnen.

Man erhält den Bogen $\dfrac{\alpha - \beta}{2}$

Denn in Fig. 497 hat man CF lothrecht mit BD, FL lothrecht mit DM und CL lothrecht mit BM

daher ist $\triangle FCL \sim \triangle BDM$

mithin $CL : FL = BM : DM$

oder umgestellt

$CL : BM = FL : DM$

daher auch

$2CL : BM = 2FL : HK$

oder

$CK + CH : BK - DH = BK + DH : CH - CK$

oder $\dfrac{BK - DH}{CK + CH} = \dfrac{CH - CK}{BK + DH}$

Nun ist No 66 bewiesen, dafs

$\dfrac{BK - DH}{CK + CH} = \dfrac{BE}{BC}$

daher ist auch

$\dfrac{CH - CK}{BK + DH} = \dfrac{BE}{BC}$

Nun ist $CH = \cos\ \beta$, $CK = \cos\ \alpha$

$DH = \sin\ \beta$, $BK = \sin\ \alpha$

$BE = tg\ \dfrac{\alpha - \beta}{2}$ und $BC = 1$

folglich $tg\ \dfrac{\alpha - \beta}{2} = \dfrac{\cos\ \beta - \cos\ \alpha}{\sin\ \alpha + \sin\ \beta}$ LIX.

68. $arc\left(tg = \dfrac{\cos\ \beta - \cos\ \alpha}{\sin\ \alpha - \sin\ \beta}\right)$ zu zeichnen.

Man erhält den Bogen $\dfrac{\alpha + \beta}{2}$

Denn es ist Fig. 497

$BK^2 = BC^2 - CK^2$

und $DH^2 = DC^2 - CH^2$

---

daher $BK^2 - DH^2 = CH^2 - CK^2$

oder

$(BK + DH)(BK - DH) = (CH + CK)(CH - CK)$

woraus

$BK + DH : CH + CK = CH - CK : BK - DH$

oder $\dfrac{BK + DH}{CK + CH} = \dfrac{CH - CK}{BK - DH}$

Nun ist nach No. 65

$\dfrac{BK + DH}{CK + CH} = \dfrac{AG}{AC} = tg\ \dfrac{\alpha + \beta}{2}$

daher ist auch

$\dfrac{CH - CK}{BK - DH} = tg\ \dfrac{\alpha + \beta}{2}$

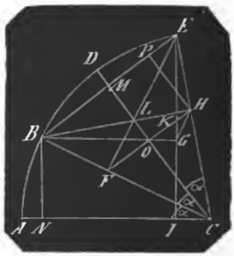
oder $tg\ \dfrac{\alpha + \beta}{2} = \dfrac{\cos\ \beta - \cos\ \alpha}{\sin\ \alpha - \sin\ \beta}$ LX.

69. $arc\ (\sin = 3 \sin\ \alpha - 4 \sin\ ^3\alpha)$ zu zeichnen.

Man erhält den Bogen 3α

Denn zeichnet man Fig. 498 $\angle ACE = 3\alpha$, theilt ihn durch die geraden Linien

Fig. 498.



BC und DC in 3 gleiche Theile, so dafs $\angle ACB = \angle BCD = \angle DCE = \alpha$, beschreibt aus C mit dem Halbmesser $= 1$ den Bogen $ABDE$, fällt die Lothe BN und EJ auf AC, zieht die Sehne BE, fällt die Lothe BH auf CE, BG auf EJ und EF auf BC, verbindet F mit H und G mit H, so ist

$EM = BM$

ferner

$\angle EFB = \angle BHE = R = \angle EMC = \angle BMC$

und

$\angle EBF = \angle BEH = \angle MEC = \angle MBC$

---

daher

$\triangle EBF \cong \triangle BEH \sim \triangle MEC \cong \triangle MBC$

mithin $\angle BEF = \angle EBH = \angle MCB = \alpha$

daher $EL = BL$

folglich liegt der Durchschnitt L von EF und BH in CD

Da nun $EF = BH$

so ist auch $EF - EL = BH - BL$

oder $LF = LH$

zugleich ist $\angle ELB = \angle HLF$
also $\triangle ELB \sim \triangle HLF$
also $BE \parallel FH$
und $\angle EFH = \angle BEF = \alpha$
Nun ist $\angle CEM = 90 - \alpha$
hiervon $\angle CEJ = 90 - 3\alpha$
bleibt $\angle JEM = 2\alpha$
auch war $\angle FEM = \alpha$
daher ist auch
$\angle FEK = \alpha$
aber auch $\angle EFK = \alpha$
mithin $EK = FK$ I.
zugleich ist $\triangle EKF \sim \triangle ELB$
daher $EK : EF = EL : EB$
oder umgestellt
$EK : EL = EF : EB$ II.
Nun ist $\angle ELH = \angle LFH + \angle LHF = 2\alpha$
daher $\angle ELH = \angle BEG$
zugleich ist $\angle EHL = \angle BGE = R$
daher $\triangle EHL \sim \triangle BGE$
woraus $EL : EH = BE : BG$
hierzu II. $EK : EL = EF : BE$
giebt $EK : EH = EF : BG$
oder $EK : EH = BH : BG$
da nun $\angle HEK = R - 3\alpha$
und $\angle GBH = R - (\angle GEB + \angle EBL) = R - 3\alpha$
also $\angle HEK = \angle GBH$
so ist $\triangle HEK \sim \triangle GBH$
woraus $\angle EHK = \angle BGH$
hiervon $\angle EHB = \angle BGK = R$
bleibt $\angle BHK = \angle KGH$
also auch $\angle EFK = \angle KGH$
oder auch $\angle FEG = \angle HGE$
daher $FF \parallel GH$
woher $\angle GHK = \angle EFK$
daher auch $\angle GHK = \angle HGK$
folglich $GK = HK$
hierzu I. $EK = FK$
giebt $EG = FH$

Nun $FH = 2HO$, oder wenn man das Loth HP auf BE fällt, $FH = 2MP = 2(ME - EP)$. Aber $ME = \sin\alpha$, und $EP = HE \cdot \sin EHP = HE \cdot \sin ECD = HE \cdot \sin\alpha = BE \cdot \sin EBH \sin\alpha = BE \cdot \sin\alpha \cdot \sin\alpha = BE \cdot \sin^2\alpha = 2ME \cdot \sin^2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \sin^2\alpha = 2\sin^3\alpha$
daher ist
$FH = 2(\sin\alpha - 2\sin^3\alpha) = 2\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$
also auch $EG = 2\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$
hierzu $GJ = BN = \sin\alpha$
giebt $EJ = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$

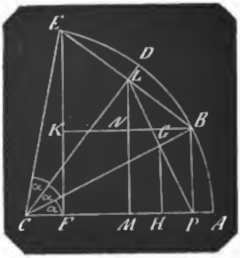
Nun ist $EJ = \sin(3\alpha)$
folglich hat man
$\sin(3\alpha) = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$

70. $arc\ (\cos = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha)$ zu zeichnen.

Man erhält den Bogen 3α.

Denn zeichnet man Fig. 499 $\angle ACE = 3\alpha$, theilt ihn durch die geraden Linien BC und DC in 3 gleiche Theile, so dafs $\angle ACB = \angle BCD = \angle DCE = \alpha$, beschreibt aus C mit dem Halbmesser $= 1$ den Bogen $ABDE$, zieht die Sehne BE, fällt die Lothe BP und EF auf AC, zieht LP so hat man
$\angle LBC = R - \alpha = \angle PBC$
hierzu $BG = BG$
und $BL = BP$
folglich $\triangle BGL \cong \triangle BGP$
mithin $\angle BGL = \angle BGP = R$
und $GL = GP$

Fig. 499.



Fällt man nun die Lothe GH und LM auf AC, und das Loth BK auf EF
so ist $PG : PL = PH : PM$
da nun $PL = 2PH$
so ist auch $PM = 2PH$
Ebenso ist
$BL : BE = BN : BK$
und da $BE = 2BL$
auch $BK = 2BN$
oder $PF = 2PM = 4PH$
daher $3PH = HF$
also $3PH + 3HF = 4HF$
oder $3PF = 4HF = 4CH - 4CF$
oder $3PF + 4CF = 4CH$
oder
$3PF + 3CF + CF = 4CH$
oder $3CP + CF = 4CH$
oder $CF = 4CH - 3CP.$

Nun ist $CF = \cos(3\alpha)$

$$CH = CG \cdot \cos\alpha = CP \cdot \cos\alpha \cdot \cos\alpha = CP \cdot \cos^2\alpha$$
$$= \cos\alpha \cdot \cos^2\alpha$$
$$= \cos^3\alpha$$
$$CP = \cos\alpha$$

daher ist $\cos(3\alpha) = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

Vergl. noch den Art.: Analytische Trigonometrie, pag. 71.

Construction geometrischer Formeln ist in dem Art.: Analytische Geometrie, pag. 68, abgehandelt.

Construction der Gleichungen ist die Auffindung der Wurzeln einer gegebenen Gleichung mit Hülfe geometrischer Constructionen, indem die Elemente der Gleichung als gerade Linien aufgetragen werden. Diese Methode der Auflösung von Gleichungen hat gegenwärtig und überhaupt seit der Zeit, dafs man in der Algebra ein bei weitem einfacheres und übersichtlicheres Mittel dazu gefunden hat, keinen anderen Werth mehr als den geschichtlichen, weshalb auch nur davon folgende kurze Erläuterungen:

Eine Gl. des ersten Grades hat die Form:

$$x \pm a = 0$$

woraus $x = \mp a$

Es ist also bei dieser Gleichung nichts anders zu construiren, als dafs man die Zahl a als gerade Linie aufträgt.

Eine Gleichung vom 2ten Grade hat zwei Wurzeln, vom $n$ten Grade n Wurzeln, und diese Wurzeln ergeben sich als die Ordinaten der Durchschnittspunkte zweier sich schneidenden Linien. Für eine Gleichung des 2ten Grades genügt also eine gerade Linie und ein Kreis, weil hier zwei Durchschnittspunkte entstehen. Für eine Gleichung vom dritten Grade ist schon ein Kreis mit einer anderen Curve erforderlich, weil 3 Durchschnittspunkte verlangt werden, also z. B. Kreis und Parabel, die zugleich vom 4ten Grade genügen, weil beide Curven auch vier Durchschnittspunkte liefern können, wiewohl auch für diese 2 Parabeln, Parabel und Ellipse, Kreis und Ellipse u. s. w. gewählt werden können.

Um die Methode anschaulich zu machen, sei als Beispiel die quadratische Gleichung zu construiren

$$x^2 \pm ax \pm bc = 0$$

in welcher x, a, b, c gerade Linien sind. Aus diesem Grunde kann das bekannte Glied nicht durch nur einen Buchstaben bezeichnet werden, weil es dann Linie, und mit den ersten beiden Gliedern, welche Flächen sind, nicht zu addiren sein würde.

Für diese Gleichung, je nach den Vorzeichen, genügen zwei Constructionen, Fig. 500 und 501, und zwar

Fig. 500.

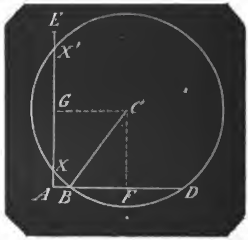


Fig. 500 für die beiden Gleichungen

$$x^2 + ax + bc = 0$$
$$x^2 - ax + bc = 0$$

Fig. 501.

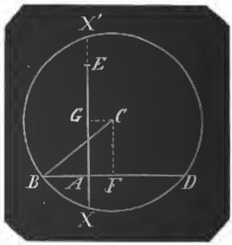


Fig. 501 für die beiden Gleichungen

$$x^2 - ax - bc = 0$$
$$x^2 + ax - bc = 0$$

Man nimmt 2 gerade unter einem beliebigen, hier unter einem rechten Winkel sich schneidende Linien AD und AE, den einen Schenkel, z. B. AE macht man = dem Coefficienten a von x, den anderen AD = dem einen Factor z. B. c des bekannten Gliedes, und nimmt auf demselben Schenkel von A aus AB = dem zweiten Factor b, und zwar in Fig. 500 nach einerlei Richtung mit c, in Fig. 501 nach entgegengesetzter Richtung; in beiden Figuren halbirt man BD in F, und AE in G, und beschreibt mit BC aus C den Kreis, so sind die Ordinaten AX und AX' die Wurzeln der Gleichung.

Denn es ist $AX \times AX' = AB \times AD$

oder $AX \times AX' = bc$

Setzt man nun $AX = x$, so ist Fig. 500

$AX' = AE - EX' = AE - AX = a - x$

in Fig. 501

$AX' = AE + EX' = AE + AX = a + x$

Setzt man $AX' = x$, so ist in Fig. 500

$AX = AE - EX = AE - AX' = a - x$

in Fig. 501

$AX = EX - AE = AX' - AE = x - a$

Man hat also in Fig. 500 die Producte:

$$AX \times AX' = \begin{cases} x(a-x) = bc \\ x(a-x) = bc \end{cases}$$

oder $(-x)$ für x gesetzt

$$(-x)(a+x) = bc$$

in Fig. 501

$$AX \times AX' = \begin{cases} x(a+x) = bc \\ x(a-x) = bc \end{cases}$$

Diese 4 Gleichungen auf 0 reducirt und geordnet geben

Fig. 500: $x^2 - ax + bc = 0$ (1)

$x^2 + ax + bc = 0$ (2)

Fig. 501: $x^2 + ax - bc = 0$ (3)

$x^2 - ax - bc = 0$ (4)

woher mit den beiden Constructionen alle 4 Formen erledigt sind.

Aus dem Art.: Algebraische Gleichungen, pag. 49, ist zu ersehen, dafs Gl. 1 zwei positive, Gl. 2 zwei negative Wurzeln hat, und dafs Gl. 3 und 4 eine positive und eine negative Wurzel haben. Daher sind in Fig. 500 beide Wurzeln AX und AX' entweder beide positiv, oder beide negativ; in Fig. 501 ist für die 3te Gl. die kleinere Wurzel AX positiv, die gröfsere AX' negativ; für die 4te Gl. ist die gröfsere AX' positiv, die kleinere AX negativ, wie aus der Entwickelung der beiden letzten Gleichungen augenscheinlich hervorgeht.

Wenn Fig. 500 $CG = CB$ ist, so berührt der Kreis die Linie AE in G, und es giebt nur eine, d. h. 2 gleiche Wurzeln. Es ist

$$CG = AF = AB + BF = b + \frac{c-b}{2} = \frac{c+b}{2}$$

$$CB = \sqrt{CF^2 + BF^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{c-b}{2}\right)^2}$$

also es giebt 2 gleiche Wurzeln, wenn

$$\frac{c+b}{2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{c-b}{2}\right)^2}$$

oder wenn $\frac{a^2}{4} = bc$

dies giebt auch die Algebra. Denn setzt man $\frac{a^2}{4}$ für bc, so hat man

Gl. 1 u. 2: $x^2 \mp ax + \frac{a^2}{4} = 0$

woraus $x \mp \frac{a}{2} = 0$

Wird $CG > BC$

also $\frac{c+b}{2} > \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{c-b}{2}\right)^2}$

oder $\frac{a^2}{4} < bc$

so entsteht kein Durchschnittspunkt in AE, und beide Wurzeln sind unmöglich, wie auch die Algebra giebt. Denn setzt man

$$x \mp ax + \frac{a^2}{4} + p$$

so erhält man

$$x = \pm \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4} - p}$$

$$= \pm \frac{a}{2} \pm \sqrt{-p}$$

In Fig. 501 ist es weder möglich, dafs der Kreis die Linie AE berührt, noch dafs er dieselbe nicht schneidet. Daher auch für die beiden letzten Gleichungen weder 2 gleiche, noch 2 unmögliche Wurzeln entstehen können. Die Algebra beweist dies gleichfalls, denn beide Gleichungen

$$x \pm ax - bc = 0$$

giebt $x = \mp \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a}{4} + bc}$

so dafs nur für $bc = 0$, also wenn $x^2 \pm ax = 0$ oder $x \pm a = 0$ nicht zwei gleiche, sondern nur eine Wurzel entsteht, unmögliche Wurzeln aber wegen der immer positiven $\sqrt{\ }$ nicht existiren können.

Construction der Werthe einer Gleichung. Setzt man in einer geordneten auf Null reducirten Gleichung für die Unbekannte eine der Wurzeln der Gleichung, so geschieht der Gleichung Genüge, deren Werth ist = Null. Setzt man für die Unbekannte irgend eine andere Zahl, so ist die algebraische Summe der Glieder nicht = Null, sondern eine bestimmte Zahl, welche der jedesmalige Werth der Gleichung genannt wird.

Nimmt man von einem Anfangspunkt A einer geraden Linie eine Reihe von Werthen für die Unbekannte (x) als Abscissen, die positiven nach einer, die negativen nach der entgegengesetzten Richtung, und trägt die jedesmaligen Werthe der Gleichung als Ordinaten auf, so erhält man aus der Verbindung der Endpunkte dieser Ordinaten in einer Curve die graphische Darstellung der Natur dieser Gleichung.

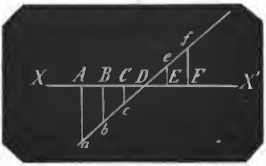
Für jede Gleichung des ersten Grades wird die dieselbe darstellende Curve eine gerade Linie. Z. B. die Gl. $x - 3 = 0$.

Ist Fig. 502 XX' die Abscissenlinie, A der Anfangspunkt der Abscissen, $AB =$

$BC = CD = DE$ u. s. w. $= 1$, so entsteht für $x = 0$ in A die Ordinate $Aa = -3$ als Werth der Gleichung. Für $x = AB = 1$ entsteht die Ord. $Bb = -2$; für $x = AC = -2$ die Ord. $Cc = -1$; für $x = AD = 3$ die Ord. in $D = 0$; für $x = AE = 4$ die Ord. $Ee = +1$ u. s. w.; die zusammengezogene Curve $abcDe\ldots$ ist eine gerade Linie.

Für Gleichungen des zweiten Grades mögen folgende Beispiele genügen; w bedeutet den jedesmaligen Werth der Gl.

Fig. 502.



$$x^2 + 4x - 1 = 0$$

Für	$x = 0$	ist	$W = -1$
	$= +1$	„	$W = +4$
	$= +2$	„	$W = +11$
	$= +3$	„	$W = +20$
u. s. w.			
Für	$x = -1$	„	$W = -3$
	$= -2$	„	$W = -5$
	$= -3$	„	$W = -4$
	$= -4$	„	$W = -1$
	$= -5$	„	$W = +4$
	$= -6$	„	$W = +9$

Man erhält in Fig. 503 die Zeichnung der Gleichung als Curve, wobei zu bemerken, daſs die Höhen mit dem halben Längenmaſsstab aufgetragen sind.

Fig. 503.



Die Durchschnittspunkte der Curve mit XX' geben den Ort der Wurzeln an, sie liegen für x zwischen 0 und 1, nahe an 0, und für x zwischen -4 und -5, näher an -4. Es könnte diese Methode als eine praktische Auflösung von Gleichungen angesehen werden, wenn man nicht bei einiger Uebung noch leichter durch Rechnung dazu gelangte, und nicht nur bei den quadratischen, sondern auch bei Gleichungen von höheren Graden, wie dies schon der Art.: Algebraische Gleichung, pag. 57 bis 60 nachweist.

Um den Charakter der Curven näher einzusehen, sollen noch 2 Gleichungen construirt werden, eine mit 2 gleichen, und eine mit 2 unmöglichen Wurzeln.

1. Die Gl. $x^2 - 2x + 1 = 0$

d. i. $(x - 1)^2 = 0$

Die beiden Wurzeln sind $+1$ und $+1$.

Für $x = +1$; $w = 0$

„	$x = +2$; $w = +1$	$x = 0$; $w = +1$
„	$x = +3$; $w = +4$	$x = -1$; $w = +4$
„	$x = +4$; $w = +9$	$x = -2$; $w = +9$
	u. s. w.	u. s. w.

Aus dieser Darstellung ersieht man die Symmetrie der Curve von der Abscisse $(+1)$ an zu beiden Seiten durch gleich groſse Ordinaten, folglich wie Fig. 504; der Durchschnittspunkt C für die beiden gleichen Wurzeln wird Berührungspunkt mit der Abscissenlinie XX'.

Fig. 504.



2. Die Gl. $x^2 - x + 4 = 0$

Wurzeln $\frac{1}{2}(+1 + \sqrt{-15})$

und $\frac{1}{2}(+1 - \sqrt{-15})$

beide unmöglich.

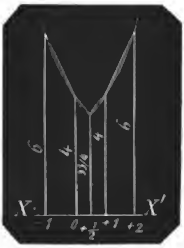
$x = +1$; $w = +4$	$x = 0$; $w = +4$
$x = +2$; $w = +6$	$x = -1$; $w = +6$
$x = +3$; $w = +10$	$x = -2$; $w = +10$
$x = +4$; $w = +16$	$x = -3$; $w = +16$
u. s. w.	u. s. w.

Auch hier sieht man die Symmetrie zweier Aeste der Curve von einem Punkt zwischen den Abscissen = 0 und = + 1. Der Punkt für das Minimum der Ordinate ist für $x = \frac{1}{2}$, wo die Ordinate = $3\frac{3}{4}$ wird; man erhält die Darstellung Fig. 505.

Die Curve hat also keinen Durchschnittspunkt mit der Abscissenlinie XX'.

So viele Wurzeln eine Gleichung hat, so viele Durchschnittspunkte hat die Curve mit der Abscissenlinie mit Ausnahme zweier gleicher Wurzeln, wo ein Berührungspunkt wie Fig. 504, und einer unmöglichen Wurzel, wo nur ein der Abscisse näherer Punkt, wie Fig. 505 entsteht.

Fig. 505.



Zum Schlufs des Art. soll die Curve der Gleichung, Bd. I, pag. 57, Z. 1 rechts construirt werden, nämlich

$$x^5 - 3x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 9x + 27 = 0$$

deren Wurzeln sind dort gefunden.

$$+3;\ +3;\ -3;\ +\sqrt{-1};\ -\sqrt{-1}$$

die Gl. hat also 2 gleiche und 2 unmögliche Wurzeln.

Für $x = \ \ 0$ ist $w = +27$
$x = +1$ „ $w = +32$
$x = +2$ „ $w = +25$
$x = +3$ „ $w = 0$
$x = +4$ „ $w = +119$

Man ersieht, dafs die beiden Ordinaten links und rechts in Entfernung 1 von dem Endpunkt der Abscisse $x = +3$ positiv sind. Dafs dies übrigens in noch so kleinen Entfernungen von derselben Ordinate stattfindet, dafs also der Abscissenpunkt + 3 ein Berührungspunkt für die 2 gleichen Wurzeln + 3 ist, erhellt, wenn man in die Gleichung für x den Werth $(3 \pm n)$ setzt. Man erhält als Werth die Gleichung

für $x = 3 + n$;
$$w = n^2(60 + 46n + 12n^2 + n^3)$$
für $x = 3 - n$;
$$w = n^2(60 - 46n + 12n^2 - n^3)$$

Setzt man nun für n eine noch so kleine positive ächt gebrochene Zahl, so wird jede noch so nahe an $x = 3$ rechts befindliche Ordinate der Abscisse = $3 + n$ positiv; und da man mit n auch $46n + n^3$ gegen die Zahl 60 beliebig klein machen kann, ebenso die beliebig an $x = +3$ links befindliche Ordinate für $x = 3 - n$ ebenfalls positiv; für $n = 1$ wird

$$w = n^2(60 + 46n + 12n^2 + n^3) = +119$$
und $w = n^2(60 - 46n + 12n^2 - n^3) = +\ 25$

wie oben berechnet worden. Die Curve berührt also die Abscissenlinie in dem Punkt, der von dem Nullpunkt + 3 entfernt ist, ein charakteristisches Zeichen, dafs (+ 3) zweimal als Wurzel vorhanden ist.

Für $x = \ \ 0$ war $w = +27$
$x = -1$ ist $w = +64$
$x = -2$ „ $w = +125$
$x = -3$ „ $w = 0$
$x = -4$ „ $w = -833$.

Von $x = 0$ bis $x = (-2)$ steigen die positiven Ordinaten bis + 125, und für $x = (-3)$ wird die Ordinate plötzlich = 0, ein Beweis, dafs zwischen den Abscissen (− 1) und (− 3) die Curve eine Abnormität in der Form erfährt; dafs die folgende Ordinate negativ ist beweist, dafs der Punkt der Abscissenlinie (− 3) vom Nullpunkt entfernt, ein Durchschnittspunkt mit der Curve ist, und dafs somit die $\sqrt{-3}$ nur einmal als Wurzel vorkommt.

Um die Form der Curve von der Abscisse (− 3) ab nach (− 4) hin summarisch festzustellen, soll der Werth der Gleichung für $x = -(3 + n)$ ermittelt worden. Man erhält

für $x = -(3 + n)$;
$$w = -(360n + 336n^2 + 118n^3 + 18n^4 + n^5)$$

So klein und so grofs man also n immer nehmen mag, die Ordinate bleibt negativ, und wächst mit dem Zuwachs von n, so dafs die Curve von $x = -3$ ab und weiter (−) genommen, weder eine Abnormität noch einen Durchschnittspunkt mit der Abscissenlinie XX' erfährt, so dafs also hinter der Abscisse $x = -3$ die Gleichung weder mögliche, noch unmögliche Wurzeln hat. Für $n = 1$, also $x = (-4)$ entsteht $w = -833$.

Aus dem obigen Werth

für $x = (3 + n)$;
$$w = n^2(60 + 46n + 12n^2 + n^3$$

geht dasselbe für die von $x = +3$ ab genommene positive Richtung hervor, so dafs die noch fehlenden Wurzeln zwischen den Abscissen $x = (-1)$ und $x = (-3)$ liegen.

Für die Untersuchung der Curve zwi-

schen $x=(-2)$ und $x=(-3)$ hat man $x=-(3-n)$ gesetzt:

$$w=+360n-336n^2+118n^3-18n^4+n^5$$

für $x=-(2+m)$ gesetzt:

$$w=125+25m-80m^2-56m^3-13m^4-m^5$$

An beiden Formeln hat man also gegenseitige Correctionsrechnungen beim Probiren. Man erhält:

$$\text{für } x=-\left(3-\tfrac{1}{10}\right) \text{ oder } =-\left(2+\tfrac{9}{10}\right) \text{ ist } w= 32{,}75621$$

$$\text{„ } x=-\left(3-\tfrac{2}{10}\right) \text{ oder } =-\left(2+\tfrac{8}{10}\right) \text{ ist } w= 59{,}47552$$

$$\text{„ } x=-\left(3-\tfrac{3}{10}\right) \text{ oder } =-\left(2+\tfrac{7}{10}\right) \text{ ist } w= 80{,}80263$$

$$\text{„ } x=-\left(3-\tfrac{4}{10}\right) \text{ oder } =-\left(2+\tfrac{6}{10}\right) \text{ ist } w= 97{,}34144$$

$$\text{„ } x=-\left(3-\tfrac{5}{10}\right) \text{ oder } =-\left(2+\tfrac{5}{10}\right) \text{ ist } w= 109{,}65625$$

$$\text{„ } x=-\left(3-\tfrac{6}{10}\right) \text{ oder } =-\left(2+\tfrac{4}{10}\right) \text{ ist } w= 118{,}27296$$

$$\text{„ } x=-\left(3-\tfrac{7}{10}\right) \text{ oder } =-\left(2+\tfrac{3}{10}\right) \text{ ist } w= 123{,}68027$$

$$\text{„ } x=-\left(3-\tfrac{8}{10}\right) \text{ oder } =-\left(2+\tfrac{2}{10}\right) \text{ ist } w= 126{,}33088$$

$$\text{„ } x=-\left(3-\tfrac{9}{10}\right) \text{ oder } =-\left(2+\tfrac{1}{10}\right) \text{ ist } w= 126{,}64269$$

$$\text{„ } x=-2 \qquad =-\;2 \qquad \text{„ } w= 125{,}00000$$

folglich ist in der Nähe der Abscisse $x=-2{,}1$ das Maximum der Ordinate und der Ort für die beiden unmöglichen Wurzeln. Die Curve selbst ist leicht aufzutragen.

Constructionssätze sind in der Geometrie Sätze, welche eine Construction verlangen; diese sind der Forderungssatz (Postulat) nnd die Aufgabe (Problem) (s. d.). Die Aufgabe verlangt Constructionen, die sich aus Erkenntnissen, die durch Lehrsätze gewonnen worden, sich ausführen lassen; der Forderungssatz verlangt nur solche Construction, die einer Definition gemäfs vollführt werden kann. Als: zwischen zwei gegebenen Punkten eine gerade Linie ziehen; aus einem gegebenen Punkt mit gegebenem Halbmesser einen Kreis beschreiben.

Continuirlich, stetig, ist so zusammenhangend, dafs keine Theile wahrzunehmen sind, die nur durch den Gedanken abgetheilt werden können. Stetige Gröfsen sind ausschliefslich die der Zeit und des Raumes. Eine Linie, Raumlinie oder Zeitlinie, ist ein Continuum, sie kann nur durch den Gedanken unterbrochen werden, ohne dafs also ihre Continuität gestört wird; dieselbe Linie kann durch den Gedanken in 2 Orten unterbrochen werden; es entsteht eine durch Anfang und Ende begrenzte Linie. Zeitlinien und Raumlinien unterscheiden sich erstens dadurch, dafs jene in einerlei Richtung, dafs sie eine gerade Linie bleibt, während die Raumlinie beliebige Formen annehmen kann, von denen die in sich geschlossenen Linien als Kreis, Ellipse, Continua zweiter Ordnung bilden, nämlich bestimmte Längen ohne Anfang und Ende.

Zweitens unterscheiden sich Zeit- und Raumlinie darin, dafs diese das Vermögen der Ortsänderung hat, welche jene nicht hat; der Zeitlinie vermag Niemand auszuweichen, wohl aber der Raumlinie, und während der Ortsänderung bildet die Raumlinie eine continuirliche Raumgröfse zweiter Klasse, die Fläche, von denen wieder die in sich geschlossenen Flächen als die Oberfläche einer Kugel, eines Ellipsoids Continua zweiter Ordnung, Flächen von bestimmter Gröfse ohne Anfang und Ende sind. Ein Winkel wird gebildet durch 2 Linien, durch 2 continuirliche Grössen, die den gemeinschaftlichen Scheitelpunkt zu ihrem gemeinschaftlichen Anfangspunkt haben, und entweder in Endpunkten begrenzt, oder unendlich weit fortgehen können.

Die Bewegung, welche zugleich der Zeit und dem Raume angehört, ist ebenso

ein Continuum, und wenn sie noch so kurze Zeit dauert. Die Bewegung der Weltkörper ist ein ununterbrochenes Continuum, die des Pendels eine Summe von unterbrochenen Continuis.

Der Begriff von continuirlich wird jedoch auch weiter ausgedehnt. So nennt man die Kettenbrüche (s. Bruch, p. 435) auch continuirliche Brüche; Proportionen, arithmetische und geometrische, mit gleichen Mittelgliedern, continuirliche oder stetige Proportionen.

Continuirliche Brüche, s. d. vor. Art. am Schlufs.

Continuirliche Gröfse, stetige, concrete Gröfse, s. continuirlich, und vergl. concrete Gröfse, collective Gröfse

Continuirliche Proportion, s. continuirlich am Schlufs.

Contraction, Zusammenziehung (des Wasserstrahls). Diese findet in Oeffnungen statt, aus welchen das Wasser fliefst. Wodurch diese C. veranlafst wird, ist in dem Art.: Ausflufs tropfbarer Flüssigkeiten, No. 4 und 5, mit Fig. 122, pag. 216 auseinandergesetzt. Der Querschnitt der ausfliefsenden Wassermenge wird also geringer als der der Ausflufsöffnung, er vermindert sich, wie Fig. 122 bildlich darstellt, von *de* auf *fg*; und da das Wasser nicht compressibel ist, da also das Wasser in dem geringeren wirklichen Ausflufsquerschnitt nicht dichter wird als vor und in der gröfseren Ausflufsöffnung, so ist die ausfliefsende Wassermenge geringer, als wenn die C. des Strahls nicht stattfände.

Die Entfernung des kleinsten Wasser querschnitts von der Ausflufsöffnung beträgt etwa ½ der Weite der Oeffnung, bei ganz dünnen Wänden ist sie geringer, bei starken gröfser.

Die C. des Strahls wird um so gröfser, also der wirkliche Ausflufsquerschnitt gegen den der Ausflufsöffnung um so geringer:

1) Je enger die Ausflufsöffnung ist. Denn je gröfser die Oeffnung ist, desto mehr mittlere Strahlen fliefsen aus, ohne von der C. mit berührt zu werden, während eine Oeffnung so eng sein kann, dafs sämmtliche ausfliefsende Strahlen bis in die Mitte der Oeffnung durch C. abgelenkt werden.

2) Je schärfer die inneren Kanten der Ausflufsöffnung sind. Abgerundete Kanten leiten das Wasser nach dem Rande zurück, der sodann adhärirend wirkt, und die C. vermindert.

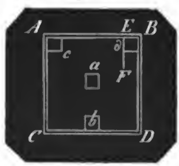
3) Je eckiger die Oeffnungen sind. Dreieckige Oeffnungen geben eine stärkere C. als viereckige, runde Oeffnungen geben die geringste C.

4) Je dünner die Wandungen der Oeffnung sind. Stärkere Wandungen wirken durch Adhäsion, und erweitern wieder den contrahirten Strahl. Diese Erweiterung des Strahls steigert sich noch mehr, wenn die Wandstärken durch angesetzte Flächen zu Röhren verlängert werden; jedoch sollen diese nicht länger sein, als 3 Mal der Weite der Oeffnung, weil sonst wieder die Reibung und Adhäsion der Wände mit dem Wasser dessen Geschwindigkeit und Ausflufsmenge vermindern.

5) Je kleiner die Druckhöhe ist. Die Geschwindigkeit des ausfliefsenden Wassers wächst mit der Höhe des Wasserspiegels über der Ausflufsöffnung, d. h. mit der Druckhöhe (s. Ausflufs etc pag. 215). Je gröfser also die Druckhöhe ist, desto schneller bewegen sich die mittleren Strahlen durch die Oeffnung, reifsen die ihnen nächsten Seitenstrahlen mit fort, und vermindern somit die Anzahl der nach den Rändern hin befindlichen Strahlen, welche von der C. beeinflufst werden, und die Beeinflussung selbst.

Man unterscheidet in der neueren Hydrotechnik vollkommene und unvollkommene oder partielle C. Es sei *ABCD* der Grundrifs eines Gefäfses mit

Fig. 506.



Wasser; *a*, *b*, *c*, *d* seien Ausflufsöffnungen im Boden, so fliefst aus *a* das Wasser über alle 4 Ränder aus, und die C. ist vollkommen. Aus der Oeffnung *b* fliefst das Wasser nur über 3 Ränder, aus *c* nur über 2, und aus der Oeffnung *d*, welche noch mit einer mittleren Wand *EF* eingefafst ist, fliefst das Wasser nur über einen Rand aus. Die C. des Wassers beim Ausflufs durch die Oeffnungen *b*, *c*, *d* ist unvollkommen (s. d. folgenden Art.).

Contractionscoefficient ist dem Wortlaut und der Natur der Sache nach die-

jenige abstracte Zahl, welche beim Ausflufs des Wassers aus Oeffnungen das Verhältnifs des durch Contraction entstandenen kleinsten Wasser-Querschnitts a' zu dem der Ausflufsöffnung a angiebt, also $= \frac{a'}{a}$

Aus dem vor. Art. ersieht man, dafs dieses Verhältnifs in jedem besonderen Fall, nämlich je nach Form der Oeffnung und nach der Gröfse der Druckhöhe, eine andere Zahl ist, und dafs alle Werthe dafür von Versuchen abhangen.

In der Praxis interessirt vorzugsweise die Ausflufsmenge M des aus einer Oeffnung fliefsenden Wassers, und diese M ist hypothetisch (s. Ausflufs, No. 4, pag. 216), d. h. unter der Voraussetzung, dafs keine Contraction stattfindet:

$$M' = 2a \cdot \sqrt{g} \cdot \sqrt{h}$$

Hier ist a die Ausflufsöffnung, folglich $2\sqrt{g} \cdot \sqrt{h}$ die Geschwindigkeit.

Die wirkliche Ausflufsmenge M des Wassers ist offenbar die, welche man erhält, wenn für a der durch Contraction erzeugte kleinere Querschnitt a' gesetzt wird, also $M = 2a' \sqrt{g} \cdot \sqrt{h}$
und zwar, weil das Wasser als incompressibel in a' nicht verdichtet ist, und weil, wenn man a' in die Lage a versetzt, die Geschwindigkeit $2\sqrt{g} \cdot \sqrt{h}$ mit der Druckhöhe h dieselbe bleibt.

Nun ist aber a' von a abhängig, und würde in jedem besonderen Falle erst zu berechnen sein; allein $\frac{a'}{a}$ als Coefficient ist aus Versuchen ermittelt; man hat ferner $a' = \frac{a'}{a} \cdot a$ und folglich $\frac{a'}{a} = k$ gesetzt:

$$M = 2ka\sqrt{g} \cdot \sqrt{h}$$

2) Es ist $\sqrt{g}$ die constante Zahl $\sqrt{15\frac{5}{8}}$; $2\sqrt{g} = 7{,}9057$ und der Bequemlichkeit beim Rechnen wegen wird k mit 7,9057 multiplicirt, als ein Coefficient α angegeben, der mit $a\sqrt{h}$ multiplicirt, die wirkliche Wassermenge giebt, so dafs nicht k, sondern $7{,}9057 \times k = \alpha$ der Contractions-Coefficient genannt wird.

Die wirkliche Wassermenge M ist demnach $\alpha \cdot a \cdot \sqrt{h}$

In den Formeln für beide Wassermengen
die hypothetische $M' = 2a \cdot \sqrt{g} \cdot \sqrt{h}$
und die wirkliche $M = \alpha \cdot a \cdot \sqrt{h}$
befindet sich die Ausflufsöffnung a als Factor, folglich erscheinen $2\sqrt{g} \cdot \sqrt{h}$ und $\alpha\sqrt{h}$ als Geschwindigkeiten, und dies ist der Grund, dafs so wie $2a\sqrt{g} \cdot \sqrt{h}$ die hypothetische, und $\alpha a\sqrt{h}$ die wirkliche Wassermenge heifst, ebenso $2\sqrt{g} \cdot \sqrt{h}$ die hypothetische, und $\alpha\sqrt{h}$ die wirkliche Geschwindigkeit genannt wird, wenngleich in beiden Fällen mit und ohne Contraction $2\sqrt{g} \cdot \sqrt{h}$ als Geschwindigkeit dieselbe bleibt.

3) In diesem Sinne ist der erste Art. (α) des Wörterbuchs als kurze Erklärung der Bedeutung des Coefficient geschrieben, wobei ich noch bemerke, dafs „Endgeschwindigkeit" am Schlusse des Art. kein Versehen ist, wie eine Recension angenommen hat: Da von dem Fallen des Wassers innerhalb eines Gefäfses vom Wasserspiegel bis zur Ausflufsöffnung dort die Rede ist, so ist Anfangsgeschwindigkeit die Geschwindigkeit am Wasserspiegel (= Null) und Endgeschwindigkeit die in der Ausflufsöffnung. Ebenso sind die Begriffe von hypothetischer und wirklicher Ausflufsgeschwindigkeit auch in dem Art.: Ausflufs etc. No. 4, pag. 216, dem Gebrauch gemäfs beibehalten, und die nähere Erklärung diesem Art. vorbehalten worden.

4) Die Bd. I, pag. 216 aufgeführten 7 C. von Eytelwein gelten für die vollkommene Contraction, also für eine Oeffnung, wie a, Fig. 506; für die unvollkommene C. wächst der Coefficient mit dem Verhältnifs des eingefafsten Theils zum ganzen Umfang. Ist dies Verhältnifs $\frac{n}{m}$, sind Fig. 506 die Oeffnungen Quadrate, so ist bei a, $\frac{n}{m} = 0$; bei b ist $\frac{n}{m} = \frac{1}{4}$; bei c ist $\frac{n}{m} = \frac{1}{2}$

Der Coefficient ist $= \left(1 + p \cdot \frac{n}{m}\right) \alpha$

Für runde Oeffnungen ist nach Bidone
$p = 0{,}128$
für rechteckige Oeffnungen ist nach Bidone
$p = 0{,}152$
für rechteckige Oeffnungen ist nach Weifsbach $p = 0{,}134$
für rechteckige Oeffnungen im Mittel also
$p = 0{,}143$

5) Aufser den Eytelwein'schen Coefficienten sollen noch neuere Versuchszahlen angegeben werden. Die folgende Tabelle enthält die Versuche von Lebros und Poncelet, nämlich die Coefficienten $k\left(= \frac{a'}{a}\right)$ für rechtwinklige Oeffnungen in dünnen verticalen Wänden bei vollständiger Contraction und dem Ausflufs des Wassers in die freie Luft bei 0,2 M. Breite der Oeffnungen; die Höhen der Oeffnungen, sowie die Druckhöhen, von dem Wasserspiegel bis zur Oberkante der Oeffnung gemessen, in Metern habe ich zugleich in preufsischen Zollen angegeben.

Druckhöhen		Coefficienten $k = \frac{a'}{a}$ für folgende Höhen der Oeffnungen.					
		0,20^m	0,10^m	0,05^m	0,03^m	0,02^m	0,01^m
Meter	= pr. Zoll	7,647 Zoll	3,823 Zoll	1,912 Zoll	1,147 Zoll	0,765 Zoll	0,382 Zoll
0,01	0,38			0,607	0,630	0,660	0,701
0,02	0,76	0,572	0,596	0,615	0,634	0,659	0,694
0,03	1,15	0,578	0,600	0,620	0,638	0,659	0,688
0,04	1,53	0,582	0,603	0,623	0,640	0,658	0,683
0,05	1,91	0,585	0,605	0,625	0,640	0,658	0,679
0,06	2,29	0,587	0,607	0,627	0,640	0,657	0,676
0,07	2,68	0,588	0,609	0,628	0,639	0,656	0,673
0,08	3,06	0,589	0,610	0,629	0,638	0,656	0,670
0,09	3,44	0,591	0,610	0,629	0,637	0,655	0,668
0,10	3,82	0,592	0,611	0,630	0,637	0,654	0,666
0,12	4,59	0,593	0,612	0,630	0,636	0,653	0,663
0,14	5,35	0,595	0,613	0,630	0,635	0,651	0,660
0,16	6,12	0,596	0,614	0,631	0,634	0,650	0,658
0,18	6,88	0,597	0,615	0,630	0,634	0,649	0,657
0,20	7,65	0,598	0,615	0,630	0,633	0,648	0,655
0,25	9,56	0,599	0,616	0,630	0,632	0,646	0,653
0,30	11,47	0,600	0,616	0,629	0,632	0,644	0,650
0,40	15,29	0,602	0,617	0,628	0,631	0,642	0,647
0,50	19,12	0,603	0,617	0,628	0,630	0,640	0,644
0,60	22,94	0,604	0,617	0,627	0,630	0,638	0,642
0,70	26,76	0,604	0,616	0,627	0,629	0,637	0,640
0,80	30,59	0,605	0,616	0,627	0,629	0,636	0,637
0,90	34,41	0,605	0,615	0,626	0,628	0,634	0,635
1,00	38,23	0,605	0,615	0,626	0,628	0,633	0,632
1,10	42,06	0,604	0,614	0,625	0,627	0,631	0,629
1,20	45,88	0,604	0,614	0,624	0,626	0,628	0,626
1,30	49,70	0,603	0,613	0,622	0,624	0,625	0,622
1,40	53,53	0,603	0,612	0,621	0,622	0,622	0,618
1,50	57,35	0,602	0,611	0,620	0,620	0,619	0,615
1,60	61,18	0,602	0,611	0,618	0,618	0,617	0,613
1,70	65,00	0,602	0,610	0,617	0,616	0,615	0,612
1,80	68,82	0,601	0,609	0,615	0,615	0,614	0,612
1,90	72,65	0,601	0,608	0,614	0,613	0,612	0,611
2,00	76,47	0,601	0,607	0,613	0,612	0,612	0,611
3,00	114,70	0,601	0,603	0,606	0,608	0,610	0,609

Die folgende Tabelle enthält die aus der vorigen berechneten Coefficienten $\alpha = 7{,}9057 \cdot k$ für dieselben Druckhöhen und Ausflufsöffnungen.

Druckhöhen		Coefficienten $\alpha = 2k\sqrt{g} = 7{,}9057 \cdot k$ für folgende Höhen der Oeffnungen.					
		0,20^m	0,10^m	0,05^m	0,03^m	0,02^m	0,01^m
Meter	= pr. Zoll	7,647 Zoll	3,823 Zoll	1,912 Zoll	1,147 Zoll	0,765 Zoll	0,382 Zoll
0,01	0,38			4,799	4,981	5,218	5,542
0,02	0,76	4,522	4,712	4,862	5,012	5,210	5,487
0,03	1,15	4,569	4,743	4,902	5,044	5,210	5,439
0,04	1,53	4,601	4,767	4,925	5,060	5,202	5,400
0,05	1,91	4,625	4,783	4,941	5,060	5,202	5,368
0,06	2,29	4,641	4,799	4,957	5,060	5,194	5,344
0,07	2,68	4,649	4,815	4,965	5,052	5,186	5,321
0,08	3,06	4,656	4,822	4,973	5,044	5,186	5,297

Druckhöhen		Coefficienten $\alpha = 2k\sqrt{g} = 7{,}9057 \cdot k$ für folgende Höhen der Oeffnungen.					
		0,20^m	0,10^m	0,05^m	0,03^m	0,02^m	0,01^m
Meter	= pr. Zoll	7,647 Zoll	3,823 Zoll	1,912 Zoll	1,147 Zoll	0,765 Zoll	0,382 Zoll
0,09	3,44	4,672	4,822	4,973	5,036	5,178	5,281
0,10	3,82	4,680	4,830	4,981	5,036	5,170	5,265
0,12	4,59	4,688	4,838	4,981	5,028	5,162	5,241
0,14	5,35	4,704	4,846	4,981	5,020	5,147	5,218
0,16	6,12	4,712	4,854	4,988	5,012	5,139	5,202
0,18	6,88	4,720	4,862	4,981	5,012	5,131	5,194
0,20	7,65	4,728	4,862	4,981	5,004	5,123	5,178
0,25	9,56	4,736	4,870	4,981	4,996	5,107	5,162
0,30	11,47	4,743	4,870	4,973	4,996	5,091	5,139
0,40	15,29	4,759	4,878	4,965	4,988	5,075	5,115
0,50	19,12	4,767	4,878	4,965	4,981	5,060	5,091
0,60	22,94	4,775	4,878	4,957	4,981	5,044	5,075
0,70	26,76	4,775	4,870	4,957	4,973	5,036	5,060
0,80	30,59	4,783	4,870	4,957	4,973	5,028	5,036
0,90	34,41	4,783	4,862	4,949	4,965	5,012	5,020
1,00	38,23	4,783	4,862	4,949	4,965	5,004	4,996
1,10	42,06	4,775	4,854	4,941	4,957	4,988	4,973
1,20	45,88	4,775	4,854	4,933	4,949	4,965	4,949
1,30	49,70	4,767	4,846	4,917	4,933	4,941	4,917
1,40	53,53	4,767	4,838	4,909	4,917	4,917	4,886
1,50	57,35	4,759	4,830	4,902	4,902	4,894	4,862
1,60	61,18	4,759	4,830	4,886	4,856	4,878	4,846
1,70	65,00	4,759	4,822	4,878	4,870	4,862	4,838
1,80	68,82	4,751	4,815	4,862	4,862	4,854	4,838
1,90	72,65	4,751	4,807	4,854	4,846	4,838	4,830
2,00	76,47	4,751	4,799	4,846	4,838	4,838	4,830
3,00	114,70	4,751	4,767	4,791	4,807	4,822	4,815

6) Die vorstehenden Tabellen haben nur Werth für dieselben Dimensionen der Oeffnungen und Druckhöhen, welche darin begriffen sind und für die, welche dazwischen liegen; die ersten Colnmnen, also für Schutzöffnungen zu Wasserrädern, wenn man von deren Wandverlängerungen absieht, durch welche die Contraction unvollkommen wird.

Die Aenderungen der C. für einerlei Oeffnung bei zunehmenden Druckhöhen zeigen kein Gesetz; aufserdem ist ersichtlich, dafs in den beiden ersten Colnmnen für die gröfseren Oeffnungen mit dem Wachsthum der Druckhöhen auch die C. wachsen, in den 3 letzten Columnen für die kleinsten Oeffnungen findet, dem 5ten Gesetz des vorigen Art. entgegen, das Umgekehrte statt, und in der dritten Columne wachsen die C. von der kleinsten Druckhöhe bis zu einer mittleren, und nehmen von da bis zur gröfsten Druckhöhe wieder ab. Ebenso auffallend, und dem 1sten Gesetz des vor. Art. entgegen ist die Erscheinung, dafs für einerlei Druckhöhe die C. mit der Abnahme der Ausflufsöffnung wachsen.

Beide regelwidrige Wirkungen lassen sich nur dadurch erklären, dafs die von den sehr nahen gegenüberliegenden Rändern entgegentretenden Wasserstrahlen beim Begegnen sich stofsen, sich gegenseitig nach ihren Rändern hin zurücktreiben, und damit den kleinsten Querschnitt wieder vergröfsern.

Aus diesen Gründen ist es unmöglich, von den tabellarisch geordneten C. so kleiner Oeffnungen auf die C. gröfserer Oeffnungen zu schliefsen.

Fig. 507.



7) Liegen die Oeffnungen unter Wasser, so bleiben die Tabellen gültig, nur hat man zur Druckhöhe die Differenz der beiden Höhen $(H - H')$ zu nehmen, welche = ist der Höhe h zwischen den beiden Wasserspiegeln.

8) Ist die Contraction unvollkommen, so bleiben die Tabellen gleichfalls gültig, wenn man nur die C. nach der Formel

No. 4 abändert. Für die hier stattfindenden rechteckigen Oeffnungen ist im Mittel $p = 0{,}143$; folglich hat man statt α den Werth

$$\left(1 + 0{,}143 \cdot \frac{n}{m}\right)\alpha;$$

wo m den ganzen Umfang, und n den Theil desselben bedeutet, der durch Wandungen eingefafst ist, und keine Contraction verursacht.

9) Bei vollkommener Contraction in Oeffnungen von 1''' Wandstärke fand

Bossut (1775)	$k = 0{,}6174$
Michelotti (1767)	$k = 0{,}6111$
Bidone (1822)	$k = 0{,}6216$
Brindley und Smeaton (1800)	$k = 0{,}6213$
Dies giebt im Mittel	$k = 0{,}61785$
Eytelwein hat gefunden	$k = 0{,}6176$
woraus $\alpha = 7{,}9057 \cdot 0{,}6176$	$= 4{,}88256$

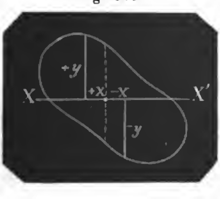
oder wenn man $2\sqrt{g} = 7{,}91$ setzt, $\alpha = 4{,}885$ wofür unter No. 7, pag. 216 $\alpha = 4{,}89$ gesetzt ist.

Vergleicht man alle übrigen von Hydrotechnikern angestellten Versuche, so findet man Abweichungen, und zwar bei Ausflufsöffnungen aller in der Praxis vorkommenden Hauptformen. Erwägt man ferner, dafs g ebenfalls nicht genau $15\frac{5}{8}$ Fufs, also $2\sqrt{g}$ nicht genau 7,9057 Fufs ist, so kann man die mittleren Werthe der Eytelwein'schen Coefficienten α (pag. 216) in allen vorkommenden Fällen ohne weitere Bedenklichkeiten und ohne sich nach anderen Coefficienten umzusehen, anwenden.

Contradiameter ist die Abscissenlinie für eine Curve, welche die Beschaffenheit hat, dafs wenn von einem bestimmten Punkt aus die Abscissen in gleichen Entfernungen links und rechts genommen werden, die Ordinaten auf einer Seite oberhalb, auf der anderen unterhalb genommenen gleich grofs sind.

Die Gleichung für die Curve in Beziehung auf die gedachte Abscissenlinie kann also nur von der Beschaffenheit sein, dafs wenn man $(-x)$ für x und $(-y)$ für y setzt, alle Glieder entweder dieselben Vorzeichen oder alle Glieder die entgegengesetzten Vorzeichen erhalten.

Fig. 508.



Z. B. eine Curve von der Form:

$$y^2 + axy + y^2 = 0$$

wo für $-y$ und $-x$ der Gleichung dieselben Vorzeichen verbleiben;

eine Curve von der Form

$$y^3 + axy^2 + bx^2y + x^3 = 0$$

wo für $-y$ und $-x$ sämmtliche Glieder minus werden.

Der Kreis und die Ellipse lassen, wie die Natur dieser Linien anschaulich macht, Contradiameter zu, und zwar sind deren Durchmesser die Abscissenlinien, und deren Mittelpunkte die Anfangspunkte der Abscissen.

Die Gleichung für den Kreis ist

$$r^2 - x^2 - y^2 = 0$$

für $-y$ und $-x$ bleiben die Vorzeichen dieselben.

Sind a und c die halben Axen der Ellipse, a die grofse, c die kleine halbe Axe, so sind die Gleichungen

$$y^2 = \frac{c^2}{a^2}\,(a^2 - x^2)$$

$$y_1{}^2 = \frac{a^2}{c^2}\,(c^2 - x^2)$$

$-y$ für y und $-x$ für x gesetzt, verbleiben dieselben Vorzeichen.

Bezeichnet man mit α den Winkel, den ein Durchmesser der Ellipse mit der grofsen Axe bildet, die vom Mittelpunkt auf diesem Durchmesser genommenen Abscissen mit x, die Ordinaten unter dem zu α gehörenden Coordinatenwinkel mit y, so ist die Gleichung

$$y^2 - \frac{a^4 \sin^2\alpha + c^4 \cos^2\alpha}{a^2 \sin^2\alpha + c^2 \cos^2\alpha} + \frac{a^4 \sin^2\alpha + c^2 \cos^2\alpha}{a^2c^2}\,x^2 = 0$$

$-y$ für y und $-x$ für x gesetzt, verbleiben den Gliedern dieselben Vorzeichen.

Contrageometrische Proportion ist die Proportion zwischen den Differenzen einfacher Glieder als Vorderglieder, und den einfachen Gliedern als Hinterglieder, letztere in entgegengesetzter Ordnung mit der, welche eine stetige Proportion ergiebt.

Wenn nämlich $a : b = b : c$
so kann gebildet werden

$$a - b : b - c = a : b = b : c$$

die contrageometrische Pr. ist aber

entweder $a - b : b - c = b : a$ (1)

oder $a - b : b - c = c : b$ (2)

In beiden Fällen existirt keine Proportion zwischen a, b und c.

Z. B. es sei $b = 8$, $c = 4$, so ist bei der zweiten Proportion

$$a - 8 : 8 - 4 = 4 : 8$$

nur möglich, wenn $a = 10$ ist.

Aber 10, 8, 4 stehen nicht in stetiger Proportion. Dieselben Werthe in die erste Proportion gesetzt, ergiebt wieder keine Proportion, es ist nämlich

$$10 - 8 : 8 - 4 \text{ nicht} = 8 : 10$$

Proportion 1 existirt, wenn

$$b = \tfrac{1}{2}\left(c - a \pm \sqrt{c^2 - 2ac + 5a^2}\right)$$

oder wenn $c = b + a - \frac{a^2}{b}$

Proportion 2 existirt, wenn

$$b = \tfrac{1}{2}\left(a - c \pm \sqrt{a^2 - 2ac + 5c^2}\right)$$

oder wenn $a = b + c - \frac{c^2}{b}$

Aus der 2ten Formel für b ersieht man, dafs wenn $a = 10$, $c = 4$ verbleiben, a auch $= -2$ gesetzt werden kann. Es ist

$$10 - (-2) : (-2) = 4 : (-2)$$

Contraharmonische Proportion ist die Proportion zwischen den beiden Differenzen zweier von 3 Gröfsen als Vorderglieder, und den beiden in jenen Differenzen nur einmal vorkommenden Gröfsen als Hinterglieder, letztere in entgegengesetzter Ordnung mit der, welche eine harmonische Proportion ergiebt, so dafs der Subtrahend der zweiten Differenz das dritte und der Minuend der ersten das vierte Glied bildet.

Die harmonische Proportion ist

$$a - b : b - c = a : c$$

das Mittelglied $b = \dfrac{2ac}{a + c}$

die contraharmonische Pr. ist

$$a - b : b - c = c : a$$

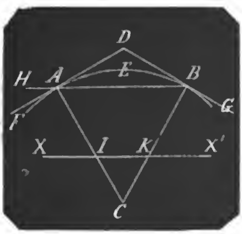
das Mittelglied $b = \dfrac{a^2 + c^2}{a + c}$

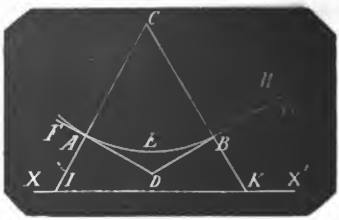
Convergenz (von vergĕre, neigen) wird von geraden Linien gesagt, die in einerlei Ebene befindlich einem Punkte sich nähern; desgleichen von Reihen, deren folgende Glieder immer kleiner werden, also dem Nullpunkt sich nähern. Der Gegensatz von C. ist Divergenz; Linien in einerlei Ebene divergiren, d. h. nach der Seite hin, wo sie sich immer weiter von einander entfernen; Reihen divergiren, wenn vom ersten Gliede ab die nachfolgenden Glieder immer gröfser werden.

Convex und **Concav** (erhaben und hohl) sind an Linien und Flächen für die Form das, was für die Richtung positiv und negativ, rechts und links ist, nur mit der Einschränkung, dafs man convex und concav nicht wie positiv und negativ, oder durch Umkehrung des Gegenstandes nicht wie rechts und links mit einander vertauschen kann.

Fig. 409 u. 410 sind *AEB* 2 krumme Linien, in *A* und *B*, *FD* und *GD* Tangenten an denselben. Die Form der Linie nach den Tangenten hin, oder von einem Standpunkt aus gesehen, in welchem die Tangenten vor der Linie liegen, heifst convex, erhaben; die Form

Fig. 509 u. 510.



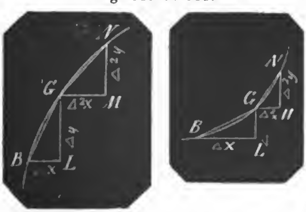


von der Tangente abwärts oder von einem Standpunkt aus gesehen, in welchem die krumme Linie vor den Tangenten liegt, heifst concav, hohl. Man erklärt auch: Eine krumme Linie (AEB), welche von einer geraden Linie (HB) in 2 Punkten (A, B) geschnitten wird, heifst nach der Richtung der Sehne (AB) hin concav, nach der Richtung deren Verlängerung (AH) hin, convex. Eine entsprechendere Erklärung ist wohl: Eine krumme Linie (AEB) heifst nach der Richtung hin, in welcher 2 nahe liegende Tangenten (AD, BD) sich schneiden, convex; nach der Richtung hin, in welcher die zugehörigen Normalen (AC, BC) sich schneiden, concav.

Die Winkel, welche die aufeinander folgenden Normalen (AC, BC) mit einer Abscissenlinie (XX') nach einerlei Richtung und nach dem Anfangspunkt der Abscissen hin gemessen, wie $\angle AJX$, $\angle BKX$, werden bei der concaven Linie immer gröfser, bei der convexen immer kleiner.

Eine Linie kann nach einerlei Richtung hin betrachtet die convexe Form mit der concaven vertauschen; der Punkt W (Fig. 510) in dem dies geschieht, heifst der Wendungspunkt. Weil bei Bestimmung der Form einer Curve in einem bestimmten Punkt E derselben ein solcher Wendungspunkt in der Nähe sein könnte, mufs der dafür zu untersuchende Bogen AB unendlich klein genommen werden.

Fig. 511 u. 512.



Im Calcül ist oft ein untrügliches Kennzeichen erforderlich, ob eine Curve in einem ihrer Punkte convex oder concav ist, und die Differenzialrechnung giebt das Mittel dazu. In dem Art.: Berührende Linie, Bd. I, pag. 344 mit Fig. 216 ist nachgewiesen, dafs die trigonometrische Tangente des Winkels (α), den die geometrische Tangente (BT) an einem Punkt (B) der Curve mit der Abscissenlinie (SH) bildet, = ist dem Quotient des Differenzials der Ordinate (y) des Punktes (B) durch das Differenzial der Abscisse (x) für denselben Punkt (B), nämlich Formel (2) daselbst

$$tg\,\alpha = \frac{\partial y}{\partial x}$$

und zwar ist dieser Werth allgemein gültig, und unabhängig davon, ob die Curve nach der Abscisse hin convex oder concav ist, ob nämlich der Punkt S links oder rechts von dem Punkt T der Tangente fällt, und der $\angle GBL <$ oder $>$ als $\angle \alpha$ ist. Fig. 511 und 512 sind die Fortsetzungen von Fig. 216, und wie das erste Differenzial $\frac{\partial y}{\partial x}$ mit Hülfe des rechtwinkligen Dreiecks GBL, dessen Catheten Δx und Δy angenommen worden, abgeleitet ist, so soll hier das zweite Differenzial aus dem folgenden zweiten Dreieck NGM, dessen Catheten $\Delta^2 x$ und $\Delta^2 y$ angenommen sind, abgeleitet werden; und zwar weil $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ als das Differenzial von

$$tg\,\alpha = \frac{\partial y}{\partial x}$$

ein characteristisches Merkzeichen für die Form der Curve abgiebt.

Es ist für $tg\,\alpha$ nämlich die Abscisse x in $x + \Delta x$ und die Ordinate y in $y + \Delta y$ umgeändert worden. Aendert man nun Δx in $\Delta x + \Delta^2 x$ und Δy in $\Delta y + \Delta^2 y$ so entsteht statt $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ der Quotient

$$\frac{\Delta y + \Delta^2 y}{\Delta x + \Delta^2 x}$$

Fig. 511, wo die Curve concav ist, wird $\angle NGM < \angle GBL$,

folglich ist $\quad \frac{\Delta^2 y}{\Delta^2 x} < \frac{\Delta y}{\Delta x}$,

also auch $\frac{\Delta y + \Delta^2 y}{\Delta x + \Delta^2 x} < \frac{\Delta y}{\Delta x}$

und der mit dem Zuwachs von Δx und Δy entstehende Zuwachs der Function $\frac{\Delta y + \Delta^2 y}{\Delta x + \Delta^2 x} - \frac{\Delta y}{\Delta x}$ wird subtractiv.

Da nun mit dem Zuwachs der Urveränderlichen Δx eine Abnahme der Function geschieht, so ist das Differenzial negativ,

also $\quad \partial \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ ist negativ.

Fig. 512, wo die Curve convex ist, wird

$$\angle NGM > \angle GBL,$$

folglich $\quad \frac{\Delta^2 y}{\Delta^2 x} > \frac{\Delta y}{\Delta x}$

also auch $\frac{\Delta y + \Delta^2 y}{\Delta x + \Delta^2 x} > \frac{\Delta y}{\Delta x}$

mit dem Wachsthum der Urveränderlichen Δx geschieht ein Wachsthum der

9*

Function, und das Differenzial $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ ist positiv.

Mithin gilt die Regel, dafs bei positivem Differenzial der Tangente die Curve gegen die Abscisse hin convex, bei negativem Differenzial concav ist. Sind die Ordinaten negativ, so findet natürlich das Entgegengesetzte statt; die Abscisse $\mp BL$ und GM würde nämlich anstatt nach der Richtung NM, nach der entgegengesetzten Richtung MN hin liegen.

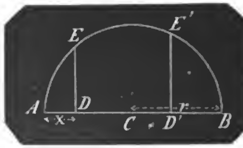
Convexgläser, erhabene Gläser sind Gläser mit erhabenen krummen Oberflächen, zum optischen Gebrauch solche, welche in Form eines Theils einer Kugeloberfläche geschliffen sind. Sind beide Oberflächen eines Glases erhaben, so heifst das Glas convex-convex oder biconvex; ist eine Oberfläche erhaben, die andere eben, so heifst das Glas planconvex; ist eine Oberfläche erhaben, die andere hohl, so heifst das Glas concav-convex oder convex-concav, auch Mondchen, Meniskus. Die optischen Wirkungen dieser Gläser sind zu ersehen in dem Art. Brennglas u. Brille, No. 1 bis 5. Vergl. Concavgläser.

Coordinaten sind die in dem Artikel Abscisse, mit Fig. 14 bis 16 (s. zuerst diesen) erklärt. Es sind gerade Linien, die von einem Punkt aus gegen feste Linien oder gegen feste Ebenen nach bestimmten Richtungen gezogen werden, um den Punkt seiner Lage nach gegen jene Linien oder Ebenen zu bestimmen; und diese Erklärung war ausreichend, um den Begriff „Abscisse“ festzustellen.

Die so erklärten Bestimmungslinien sind bis dahin nur Abstände zwischen Punkten und Linien oder Punkten und Ebenen, mit deren Maafsen die Lagen der Punkte gegen die Linien und Ebenen gegeben werden, aber noch keine Coordinaten; diese haben eine höhere Bedeutung, nämlich die der gleichen Abhängigkeit zusammengehöriger Abstände für Punkte eines und desselben Systems, so dafs wenn ein beliebiger Punkt des Systems durch die ihm zugehörenden Coordinaten gegeben wird, dies durch Gleichungen (Coordinatengleichungen) geschieht, die zugleich für alle übrigen Punkte des Systems gelten, dafs also jeder beliebige Punkt des Systems alle übrigen Punkte desselben Systems vertritt. Es sind mithin Coordinaten eines Systems von Punkten zusammengehörige Abstände von denselben, deren gegenseitige Abhängigkeit durch einerlei Function gegeben ist.

2. Es sei AEB ein Halbkreis, so lehrt die Geometrie, dafs wo in dem Durchmesser AB der Punkt D auch genommen werde, das Quadrat der senkrechten Linie DE = dem Rectangel ist, dessen Seiten

Fig. 513.



AD und BD sind. Alle Linien also, die wie DE von beliebigen Punkten des Durchmessers bis zur Peripherie senkrecht gezogen werden, haben mit den beiden Abständen jedes dieser Punkte von den Endpunkten A, B des Durchmessers einerlei Function. Setzt man also nach Vorschrift des Art.: Abscisse, AB als Abscisse, A als deren Anfangspunkt, bezeichnet jeden aller möglichen Abstände AD mit x, jede aller möglichen rechtwinkligen Ordinaten DE mit y, den Halbmesser mit r, so erhält man die Coordinatengleichung

$$DE^2 = AD \times BD$$

oder $$y^2 = x \times (2r - x) = 2rx - x^2$$

Wie also der Punkt E durch die zusammengehörenden Abstände AD und DE bestimmt wird, eben so wird jeder andere Punkt wie E' durch die ihm zugehörenden Abstände AD' und $D'E'$ bestimmt, jede 2 zusammengehörende Abstände für einen Punkt der Peripherie haben einerlei Abhängigkeit von einander, sie sind durch einerlei Function $y^2 = fx = 2rx - x^2$ gegeben, und folglich sind sie nicht nur Abstände, sondern Coordinaten, in diesem Falle rechtwinklige C., und die Gleichung

$$y^2 = 2rx - x^2$$

heifst die rechtwinklige Coordinatengleichung für den Kreis.

Bei diesem Beispiel liegen sämmtliche Punkte des Systems in einerlei Ebene, und es sind deshalb nur die Beziehungen zwischen nur einer Abscisse und Ordinaten, die alle in einer Ebene liegen, erforderlich. Liegen dagegen die ihrer Lage nach festzustellenden Punkte des Systems in verschiedenen Ebenen, so ist ein so einfaches Coordinatensystem nicht ausreichend: es kann die Bestimmung der

Punkte nur dadurch geschehen, dafs man von A aus mehrere Abscissenlinien mit ihren Ordinaten construirt, wie dies Fig. 15 angegeben ist (s. den folg. Art.).

Aufser den hier betrachteten Parallel-Coordinaten giebt es noch Polarcoordinaten, indem von einem in einer festen Linie befindlichen festen Punkt, dem Pol aus, gerade Linien, die Polarordinaten nach den verschiedenen Punkten der Curve gezogen, und diese durch die Winkel, die Polarabscissen, welche die Ordinaten mit jener festen Linie bilden, bestimmt werden.

Coordinatenaxen sind in dem Art.: „Abscisse", als diejenigen Linien, die durch den Anfangspunkt ‡ den Coordinaten gezogen werden, und also ihrer Lage nach richtig erklärt. In dem Art.: „Axe", sind Axen als primitive Hauptlinien eines Systems definirt, und wie No. 2 daselbst der C. gedacht worden, bestimmen C. ein behufs der Untersuchung von Gesetzen des Zusammenhanges von Punkten erforderliches Coordinatensystem. In Fig. 513 ist AB Abscissenlinie, d. h. eine Linie, auf welcher von einem Punkt (A) aus Abschnitte gemacht werden. Aus Fig. 15 ersieht man, dafs bei einem Coordinatensystem jede der Axen als Abscissenlinie gelten kann; daher fällt der Ausdruck: Abscisse hier fort, die Axen werden mit AX, AY, AZ bezeichnet und heifsen die Axen der x, der y, der z, wenn die von A aus genommenen Ordinaten für Punkte wie P, also auch für P', P'', P''' u. s. w. die zu einerlei System gehören, auf der Axe AX mit x, auf AY mit y und auf AZ mit z bezeichnet werden, während die von den Punkten selbst wie von P auf die von je 2 der Axen gebildeten Ebenen gefällten Linien nicht als Ordinaten, sondern nur als Hülfslinien erscheinen.

2. Die C. können rechtwinklig und schiefwinklig auf einander sich befinden, die von denselben untereinander gebildeten Winkel heifsen Coordinatenwinkel. Die Bezeichnung dieser Winkel geschieht ganz entsprechend:

Zwischen den Axen AX und AY mit (xy), zwischen den Axen AX und AZ mit (xz) und zwischen den Axen AY und AZ mit (yz).

Je 2 C. liegen in einer Ebene; die 3 C. bilden also 3 Ebenen, welche Coordinatenebenen heifsen. Deren Bezeichnung ist ganz entsprechend: für die Ebene zwischen AX und AY durch XY, zwischen AX und AZ mit XZ und zwischen AY und AZ durch YZ.

Jede Ordinate liegt in 2 Coordinatenebenen (s. Fig. 15), die Ordinaten x liegen in den Ebenen XY und XZ, die Ordinaten y in den Ebenen XY und YZ, und die Ordinaten z in den Ebenen XZ und YZ.

Ordinaten, die in den über A hinaus rückwärts verlängerten Axen liegen, werden negativ, und deren Coordinatenwinkel sind die Supplemente der positiven Winkel. So hat eine Ordinate $(-x)$ die Coordinatenwinkel $180° - (xy)$ und $180° - (xz)$; eine Ordinate $(-y)$ die Coordinatenwinkel $180° - (xy)$ und $180° - (yz)$ und eine Ord. $(-z)$ die Coordinatenwinkel $180° - (xz)$ und $180° - (yz)$.

3. Wie in dem Beispiel für Fig. 513, wo wie bei jedem in einerlei Ebene befindlichen Coordinatensystem 2 C. existiren oder zu denken sind, nur eine Coordinatengleichung erforderlich ist, um für jeden Werth von x den entsprechenden von y ermitteln zu können, so ist bei 3 C. noch eine zweite Coordinatengleichung erforderlich, um die Beziehung zwischen z und x oder zwischen z und y festzustellen. Die beiden Gleichungen hierfür sind also entweder:

$$x^n y^m \pm a x^{n \pm 1} y^{m \mp 1} \pm \ldots . = 0$$

und

$$x^n z^m \pm b x^{n \pm 1} z^{m \mp 1} \pm \ldots . = 0$$

oder

$$x^n y^m \pm a x^{n \pm 1} y^{m \mp 1} \pm \ldots . = 0$$

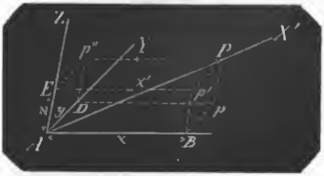
und

$$y^n z^m \pm b y^{n \pm 1} z^{m \mp 1} \pm \ldots . = 0$$

4. Die Vertauschung gegebener C. gegen andere kann erwünscht und erforderlich sein. Es sei Fig. 514 das Coordinatensystem AX, AY, AZ gegeben; die Axe AX soll mit der AX' vertauscht werden. Für einen Punkt im Raum sei P die Projection in AX', so ist AP die zu P gehörige Coordinate x' und man hat die zu demselben Punkt P gehörenden Coordinaten $AB = x$, $AD = y$ und $AE = z$ auf den gegebenen 3 C. Wenn man aus P die Linie Pp ‡ AZ auf die Ebene XY, die Linie Pp' ‡ AY auf die Ebene XZ, die Linie Pp'' ‡ AX auf die Ebene YZ fällt, und in den genannten Ebenen pB ‡ AY, $p'E$ ‡ AX und $p''D$ ‡ AZ zieht, woraus man dann, wie Fig. 15, ein Parallelepipedum bilden kann.

Das System ist dadurch gegeben, dafs die Coordinatenwinkel (xy), (xz), (yz) ge-

Fig. 514.



geben sind, und die Lage der neuen Axe AX' ist ebenfalls durch die Winkel (xx') (yx'), (zx') gegeben. Man sieht also, dafs die neuen Coordinaten x' durch die ihnen entsprechenden ursprünglichen x, y, z ausgedrückt werden können, und in dieser stereometrischen Aufgabe besteht die Verwandlung der Coordinaten eines ursprünglichen (ersten, primitiven) Systems in ein neues (zweites, secundäres) System.

Von den primitiven Axen werden eine, zwei oder auch keine beibehalten; eben so wird der Anfangspunkt der Coordinaten beibehalten oder geändert. Man erhält je nach diesen Aenderungsweisen, und ob die Coordinaten rechtwinklig oder schiefwinklig sind, einfachere oder zusammengesetztere Reductionen. Die Reduction von Coordinatengleichungen auf andere derselben Art und auf Polargleichungen für Curven von einfacher Krümmung s. u. Coordinatengleichungen.

Coordinatenebenen s. u. Coordinatenaxen No. 2.

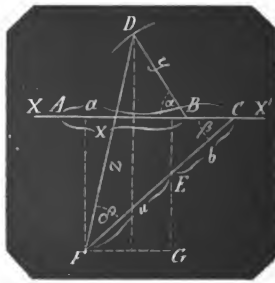
Coordinatengleichung ist eine algebraische oder transcendente Gleichung, welche den Zusammenhang zwischen zu einem System von Punkten gehörenden Coordinaten ausspricht; sie ist daher zugleich Function, und kann als solche eine implicite oder explicite sein (s. d. vorigen Art.).

Die Vertauschung der Coordinaten (s. Coordinatenaxen) kommt besonders bei Curven einfacher Krümmung vor; d. h. bei Curven, deren Punkte sämmtlich in einerlei Ebene liegen. Eben so die Vertauschung von Parallel-Coordinaten gegen Polar-Coordinaten und gegenseitig.

1. Reduction einer Coordinatengleichung auf eine andere Coordinatengleichung.

In dem Art.: Abscisse, Bd. I, pag. 16, mit Fig. 14 ist die Reduction unter der einfachen Bedingung geschehen, dafs für beide Gleichungen der Anfangspunkt A der Abscissen derselbe bleibt. Ist dies nicht, so sei Fig. 515 in der Abscissenlinie XX', A der Anfangspunkt der Abscissen, AB eine Abscisse x, α der Coordinatenwinkel, $BD = y$ die zugehörige Ordinate. EF sei eine Abscisse u in der neuen Abscissenlinie, welche die erste unter dem $\angle \beta$ in dem Punkt C in dem Abstande a von A schneidet, E in der Entfernung $CE = b$ von C sei der Anfangspunkt der neuen Abscissen, FD die zugehörige Ordinate z, δ der Coordinatenwinkel, so hat man, wenn man aus F eine Parallele FG mit XX',

Fig. 515.



die Normalen von D und E auf FG und aus F auf XX' zieht, und die Normalen von D und E auf FG und aus F auf XX' fällt, die beiden Gleichungen

$$\text{I. } y \sin \alpha + (b + u) \sin \beta = z \sin (\beta + \delta)$$

$$\text{II. } x - y \cos \alpha - z \cos (\beta + \delta) = a - (b + u) \cos \beta$$

aus welchen u und z durch x und y ausgedrückt werden können.

2. Reduction einer Coordinatengleichung auf eine Polargleichung und gegenseitig.

Es sei wieder A in XX' der Anfangspunkt der Abscissen, $AB = x$, $BD = y$.

Bleibt für die Polarcoordinaten A der Pol, AX' der feste Schenkel, so hat man Fig. 516 für die Polarabscisse $\angle DAB = \varphi$, $AD = z$ die beiden Gleichungen

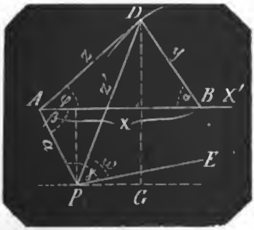
$$z \sin \varphi = y \sin \alpha$$

$$z \cos \varphi + y \cos \alpha = x$$

womit die beiden Polarcoordinaten φ und z durch x und y ausgedrückt sind.

Ist ein anderer Punkt P der Pol, der in der Entfernung $AP = a$ unter dem $\angle \beta$ mit AX' von A liegt, ist PE unter dem $\angle \gamma$ mit AP die Polaraxe, die Polarabscisse $\angle DPE = \omega$, der Polarabstand DP von $P = z'$, so ziehe durch P die Linie

Fig. 516.



$FG \mp XX'$, fälle die Lothe von P auf XX' und von D auf FG, und man hat

$$DG = y \sin\alpha + a \sin\beta$$

zugleich ist

$$DG = z' \sin DPG = z' \sin AHP$$

$$\angle AHP = 180° - (\beta + \angle APH)$$
$$= 180° - (\beta + \gamma - \omega)$$

woraus

$$\text{I. } y \sin\alpha + a \sin\beta = z' \sin(\beta + \gamma - \omega)$$

$$AB = x = a \cos\beta + z' \cos DPG + y \cos\alpha$$

woraus

$$\text{II. } x = a \cos\beta + y \cos\alpha - z' \cos(\beta + \gamma - \omega)$$

3. Reduction einer Polargleichung auf eine andere Polargleichung.

Sind φ und z die einen, ω und z' die anderen Polarcoordinaten, die auf einander reducirt werden sollen, so hat man nach 2:

$$\text{I. } z \sin\varphi + a \sin\beta = z' \sin(\beta + \gamma - \omega)$$

$$\text{II. } z \cos\varphi = a \cos\beta - z' \cos(\beta + \gamma - \omega)$$

Coordinatensystem s. Coordinatenaxen No. 1.

Coordinatenwinkel s. Coordinatenaxen No. 2.

Coordinirt, in der Geometrie s. v. w. conjugirt.

Corollarium (corolla, kleiner Kranz) ist ursprünglich ein Kränzchen zum Geschenk, daher auch Zulage, Trinkgeld, und hieraus bei den Mathematikern Zugabe zu einem Satz: Zusatz, Folgesatz: ein Satz, der unmittelbar aus einem voranstehenden Satze folgt, nothwendig hervorgeht, oder aus einfachen Schlüssen sich ergiebt. Z. B. der Zusatz zu Satz 15 im Euklid: Hieraus erhellet, dafs alle um einen Punkt (in einerlei Ebene) herumliegende Winkel zusammen vier rechten Winkeln gleich sind. Eigentlicher hätte dieser Folgesatz zu Satz 13 schon genommen werden sollen.

Correction, Berichtigung von Mefsinstrumenten und Messungen selbst. Erstere wegen der Unmöglichkeit vollkommen richtiger Arbeit, letztere theils wegen dieses Umstandes, theils möglicher Fehler in der Beobachtung, theils wegen muthmafslich nachtheiligen Einflusses einwirkender Naturkräfte. S. Barometercorrection, Collimation, Collimationsfehler und den folg. Art.

Correspondirende Höhen sind in der Astronomie die gleich grofsen Höhen, welche ein Gestirn während seines scheinbaren Laufs durch den Tagebogen des Orts vor und nach der Culmination am Himmel einnimmt. Culminirt ein Gestirn in irgend einem Zeitpunkt, d. h. befindet er sich während seines Laufs in diesem Augenblick in der Mittagslinie des Beobachtungsorts, so hat es für diesen die gröfste Höhe erreicht, und von allen geringeren Höhen, die es am Himmel einnimmt, sind immer diejenigen beiden, welche in gleichen Zeitabständen vom Culminationsaugenblick, vor und nach diesem stattfinden, einander gleich. Durch die Beobachtung vieler Höhen eines Gestirnes vor der Culmination, und zugleich mit der Bemühung, nach derselben solche zu finden, die den vorigen einzeln gleich sind (die ihnen correspondirenden Höhen), kann man daher den Zeitpunkt berechnen, in welchem das Gestirn durch die Mittagslinie gegangen ist. Eben so dient dies Verfahren, an mehreren Fixsternen vorgenommen, und wiederholt zur genauen Bestimmung des Meridians eines Orts (vergl. Culmination).

Cos. ist die Abkürzung für Cosinus.

Cosec. Abkürzung für Cosecante.

Cosecante eines Winkels oder Bogens α ist die Secante des Complements von α, eine sogenannte Cofunction s. d. Die Lagen der Secante und der C. als trigonometrische Linien giebt der Art.: Construction, trigonometrische, pag. 80 und 81, mit Fig. 437 bis 440 für Winkel oder Bogen, die allen 4 Quadranten angehören; eben so den Beweis, dafs die Cosec. für Bogen im ersten und zweiten Quadranten positiv, für Bogen im dritten und vierten Quadranten negativ ist.

Ferner sind in demselben Art. folgende Aufgaben durch Zeichnungen gelöst. Zu finden:

$$\varphi = arc\left(cosec = \pm \frac{a}{b}\right)$$

pag. 82 No. 4, VI. mit Fig. 441

$x = r \cdot cosec^2 \alpha$
pag. 83 No. 5, VI. mit Fig. 444
$\varphi = arc\left(cosec^2 = \frac{a}{b}\right)$
pag. 84 No. 6, VI. mit Fig. 445
$x = r \cdot cosec^3 \alpha$
pag. 85 No. 7, VI. mit Fig. 444
$x = r \cdot sin\,\alpha \cdot cosec\,\beta$
pag. 85 No. 8, VI. mit Fig. 447
$x = r \cdot cos\,\alpha \cdot cosec\,\beta$
pag. 86 No. 9, V. mit Fig. 448
$x = r \cdot tg\,\alpha \cdot cosec\,\beta$
pag. 87 No. 10, IV. mit Fig. 449
$x = r \cdot cot\,\alpha \cdot cosec\,\beta$
pag. 87 No. 11, III. mit Fig 449
$x = r \cdot sec\,\alpha \cdot cosec\,\beta$
pag. 87 No. 12, II. mit Fig. 450
$x = r \cdot cosec\,\alpha \cdot cosec\,\beta$
pag. 88 No. 12, III. mit Fig. 450.

2. Wie aus Fig. 437 bis 440 abgeleitet werden kann, wo $CH = cosec\,\alpha$ ist, hat man:

$cosec\,0 = cosec\,(-360^\circ) = sec\,90^\circ = \infty$
$cosec\,90^\circ = cosec\,(-270^\circ) = sec\,0 = 1$
$cosec\,180^\circ = cosec\,(-180^\circ) = sec\,(-90^\circ) = \infty$
$cosec\,270^\circ = cosec\,(-90^\circ) = sec\,(-180^\circ) = -1$
$cosec\,360^\circ = cosec\,(-0) = sec\,(-270^\circ) = -\infty$

Ist α ein Bogen für den Halbmesser $= 1$ oder ein Winkel zwischen 0 und 90° so ist

$cosec\,(90^\circ - \alpha) = cosec - (270^\circ + \alpha) = sec\,\alpha$
$cosec\,(90^\circ + \alpha) = cosec - (270^\circ - \alpha)$
$= sec\,(-\alpha) = sec\,\alpha = cosec\,(90^\circ - \alpha)$
$cosec\,(180^\circ - \alpha) = cosec - (180^\circ + \alpha)$
$= sec - (90^\circ - \alpha) = sec\,(90^\circ - \alpha)$
$= cosec\,\alpha$
$cosec\,(180^\circ + \alpha) = cosec - (180^\circ - \alpha)$
$= sec - (90^\circ + \alpha) = -\,sec\,(90^\circ - \alpha)$
$= -\,cosec\,\alpha$
$cosec\,(270^\circ - \alpha) = cosec - (90^\circ + \alpha)$
$= sec - (180^\circ - \alpha) = -\,sec\,\alpha$
$= -\,cosec\,(90^\circ - \alpha)$
$cosec\,(270^\circ + \alpha) = cosec - (90^\circ - \alpha)$
$= sec - (180^\circ + \alpha) = -\,sec\,\alpha$
$= -\,cosec\,(90^\circ - \alpha)$
$cosec\,(360^\circ - \alpha) = cosec\,(-\alpha)$
$= sec - (270^\circ - \alpha) = -\,sec\,(90^\circ - \alpha)$
$= -\,cosec\,\alpha$

3. Aus den Fig. 437 bis 440 lassen sich folgende Formeln unmittelbar ableiten. Es ist nämlich

$CH : CB = CD : DE$ oder
$cosec\,\alpha : 1 = 1 : sin\,\alpha$, woraus

$$cosec\,\alpha = \frac{1}{sin\,\alpha} \qquad (1)$$

ferner hat man

$CH^2 = BH^2 + BC^2$ oder
$cosec^2\alpha = cot^2\alpha + 1$

oder $$cosec\,\alpha = \sqrt{cot^2\alpha + 1} \qquad (2)$$

Will man nun $cosec\,\alpha$ durch die übrigen trigonometrischen Functionen ausdrücken, so hat man

$$cosec\,\alpha = \frac{1}{sin\,\alpha} = \frac{1}{\sqrt{1 - cos^2\alpha}} \qquad (3)$$

da nun aus denselben Figuren

$cot\,\alpha = \frac{1}{tg\,\alpha}$ ist, so hat man

$$cosec\,\alpha = \sqrt{\frac{1}{tg^2\alpha} + 1} = \frac{\sqrt{tg^2\alpha + 1}}{tg\,\alpha} \qquad (4)$$

und da desgleichen

$cos\,\alpha = \frac{1}{sec\,\alpha}$, so ist aus 3

$$cosec\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{sec^2\alpha}}} = \frac{sec\,\alpha}{\sqrt{sec^2\alpha - 1}} \qquad (5)$$

ferner ist wie die Figuren ergeben

$cos\,\alpha = 1 - sin\,v\,\alpha$

und $sin\,\alpha = 1 - cosin\,v\,\alpha$,

und hieraus

$$cosec\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - (1 - sin\,v\,\alpha)^2}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{sin\,v\,\alpha\,(2 - sin\,v\,\alpha)}} \qquad (6)$$
$$cosec\,\alpha = \frac{1}{1 - cos\,v\,\alpha} \qquad (7)$$

ferner hat man

$$sin\,\alpha = \frac{1}{cosec\,\alpha} \qquad (8)$$
$$cos\,\alpha = \frac{\sqrt{cosec^2\alpha - 1}}{cosec\,\alpha} \qquad (9)$$
$$tg\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{cosec^2\alpha - 1}} \qquad (10)$$
$$cot\,\alpha = \sqrt{cosec^2\alpha - 1} \qquad (11)$$
$$sec\,\alpha = \frac{cosec\,\alpha}{\sqrt{cosec^2\alpha - 1}} \qquad (12)$$
$$sinv\,\alpha = 1 - \frac{\sqrt{cosec^2\alpha - 1}}{cosec\,\alpha} \qquad (13)$$
$$cosinv\,\alpha = \frac{cosec\,\alpha - 1}{cosec\,\alpha} \qquad (14)$$

4. Pag. 98 No. 23 ist mit der Auflösung der Zeichnen-Aufgabe:

$$arc\left(cosec = \frac{cot\,\alpha + tg\,\alpha}{2}\right)$$

zugleich synthetisch die Formel als richtig bewiesen

$$cosec\,2\alpha = \tfrac{1}{2}\,(cot\,\alpha + tg\,\alpha) \qquad (15)$$

diese läſst sich auch analytisch herleiten. Setzt man nämlich in die pag. 89 bis 93 No. 14 synthetisch als richtig bewiesene Formel

$sin\,(\alpha + \beta) = sin\,\alpha\,cos\,\beta + cos\,\alpha \cdot sin\,\beta$

für β den Werth α, so entsteht die Formel

$sin\,2\alpha = 2\,sin\,\alpha \cdot cos\,\alpha$

welche auch pag. 96 No 16 synthetisch bewiesen ist

Nun ist

$$cosec\,\alpha = \frac{1}{sin\,\alpha}, \text{ also}$$

$$cosec\,2\alpha = \frac{1}{sin\,2\alpha} = \frac{1}{2\,sin\,\alpha \cdot cos\,\alpha}$$

und da aus Fig. 437—440;

$$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$

$$cosec\,2\alpha = \frac{sin^2\alpha + cos^2\alpha}{2\,sin\,\alpha \cdot cos\,\alpha}$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(\frac{sin^2\alpha}{sin\,\alpha \cdot cos\,\alpha} + \frac{cos^2\alpha}{sin\,\alpha \cdot cos\,\alpha}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(\frac{sin\,\alpha}{cos\,\alpha} + \frac{cos\,\alpha}{sin\,\alpha}\right) = \tfrac{1}{2}(tg\,\alpha + cot\,\alpha)$$

5. Die Formel 8 quadirt gibt

$$cosec^2 2\alpha = \tfrac{1}{4}(cot^2\alpha + 2\,tg\,\alpha \cdot cot\,\alpha + tg^2\alpha)$$

$$= \tfrac{1}{4}(cot^2\alpha + 2 + tg^2\alpha)$$

$$cosec^2 2\alpha = \tfrac{1}{4}(sec^2\alpha + cosec^2\alpha) \qquad (16)$$

6. Schreibe für Formel 8

$$cosec\,2\alpha = tg\,\alpha + \tfrac{1}{2}(cot\,\alpha - tg\,\alpha)$$

$$= tg\,\alpha + \frac{cos\,\alpha}{2\,sin\,\alpha} - \frac{sin\,\alpha}{2\,cos\,\alpha}$$

$$= tg\,\alpha + \frac{cos^2\alpha - sin^2\alpha}{2\,sin\,\alpha \cdot cos\,\alpha}$$

Nun ist pag. 89 bis pag. 93, No. 14 synthetisch erwiesen die Formel

$$cos(\alpha+\beta) = cos\,\alpha\,cos\,\beta - sin\,\alpha\,sin\,\beta$$

hierin $\beta = \alpha$ gesetzt giebt die Formel

$$cos\,2\alpha = cos^2\alpha - sin^2\alpha$$

welche pag. 96 No. 17 auch synthetisch erwiesen ist. Daher hat man

$$cosec\,2\alpha = tg\,\alpha + \frac{cos\,2\alpha}{sin\,2\alpha} = tg\,\alpha + cot\,2\alpha \qquad (17)$$

7. Schreibt man die Formel 8

$$cosec\,2\alpha = cot\,\alpha - \tfrac{1}{2}(cot\,\alpha - tg\,\alpha);$$

so hat man nach No. 6

$$cosec\,2\alpha = cot\,\alpha - cot\,2\alpha \qquad (18)$$

8. Schreibt man für $cosec\,2\alpha = \frac{1}{sin\,2\alpha}$

$$cosec\,2\alpha = \frac{1}{2\,sin\,\alpha\,cos\,\alpha} = \frac{cos\,\alpha}{2\,sin\,\alpha \cdot cos^2\alpha}$$

so erhält man

$$cosec\,2\alpha = \tfrac{1}{2}\,cot\,\alpha \cdot sec^2\alpha = \frac{sec^2\alpha}{2\,tg\,\alpha} \qquad (19)$$

9. Schreibe Formel 12:

$$cosec\,2\alpha = \frac{1 + tg^2\alpha}{2tg\,\alpha} = \frac{2tg\,\alpha - 2tg\,\alpha + 1 + tg^2\alpha}{2tg\,\alpha}$$

also dividirt und reducirt

$$cosec\,2\alpha = 1 + \frac{(1 - tg\,\alpha)^2}{2\,tg\,\alpha} \qquad (20)$$

10. Dividirt man Zähler und Nenner des 2ten Gliedes in Formel 13 mit $1 - tg^2\alpha$ so hat man

$$cosec\,2\alpha = 1 + \frac{(1 - tg\,\alpha)^2 : (1 - tg^2\alpha)}{2\,tg\,\alpha : (1 - tg^2\alpha)}$$

Nun ist pag. 97 No. 20 mit Fig. 475 synthetisch erwiesen, dafs

$$tg\,2\alpha = \frac{2\,tg\,\alpha}{1 - tg^2\alpha}$$

folglich ist, wenn man noch den Zähler reducirt

$$cosec\,2\alpha = 1 + \frac{\left(\frac{1 - tg\,\alpha}{1 + tg\,\alpha}\right)}{tg\,2\alpha}$$

Nun ist $tg\,45° =$ dem Radius $= 1$; man kann also den Zähler des zweiten Gliedes schreiben

$$\frac{tg\,45° - tg\,\alpha}{1 + tg\,45° \cdot tg\,\alpha}$$

Nun ist pag. 112 No. 54 mit Figur 489 synthetisch erwiesen, dafs

$$tg(\alpha - \beta) = \frac{tg\,\alpha - tg\,\beta}{1 + tg\,\alpha \cdot tg\,\beta}$$

folglich ist der Zähler $= tg(45° - \alpha)$

und $$cosec\,2\alpha = 1 + \frac{tg(45° - \alpha)}{tg\,2\alpha} \qquad (21)$$

11. Setzt man in die Gl. No. 4

$$sin(\alpha+\beta) = sin\,\alpha\,cos\,\beta + cos\,\alpha\,sin\,\beta$$

$$sin\,\alpha = \frac{1}{cosec\,\alpha},\ sin\,\beta = \frac{1}{cosec\,\beta},$$

so erhält man nach Reduction

$$cosec(\alpha+\beta) = \frac{cosec\,\alpha \cdot cosec\,\beta}{cos\,\alpha \cdot cosec\,\alpha + cos\,\beta \cdot cosec\,\beta} \qquad (22)$$

Setzt man $\beta = \alpha$ so erhält man, reducirt

$$cosec\,2\alpha = \frac{cosec\,\alpha}{2\,cos\,\alpha}$$

für $\beta = 2\alpha$

$$cosec\,3\alpha = \frac{cosec\,\alpha \cdot cosec\,2\alpha}{cos\,\alpha \cdot cosec\,\alpha + cos\,2\alpha \cdot cosec\,2\alpha}$$

$$= \frac{cosec\,\alpha}{4\,cos^2\alpha - 1} \qquad (23)$$

für $\beta = 3\alpha$

$$cosec\,4\alpha = \frac{cosec\,\alpha \cdot cosec\,3\alpha}{cos\,\alpha \cdot cosec\,\alpha + cos\,3\alpha \cdot cosec\,3\alpha}$$

$$= \frac{cosec\,\alpha}{4\,cos^3\alpha + cos\,3\alpha - cos\,\alpha}$$

da nun $cos\,3\alpha = 4\,cos^3\alpha - 3\,cos\,\alpha$ so ist

$$cosec\,4\alpha = \frac{cosec\,\alpha}{8\,cos^3\alpha - 4\,cos\,\alpha} = \frac{1}{4}\,\frac{cosec\,\alpha}{cos\,\alpha \cdot cos\,2\alpha} \qquad (24)$$

für $\beta = 4\alpha$

$$cosec\,5\alpha = \frac{cosec\,\alpha \cdot cosec\,4\alpha}{cos\,\alpha \cdot cosec\,\alpha + cos\,4\alpha \cdot cosec\,4\alpha}$$

$$= \frac{cosec\,\alpha}{16\,cos^4\alpha - 12\,cos^2\alpha + 1} \qquad (25)$$

u. s. w.

12. **Entwickelung einer Reihe für $cosec\,\alpha$ nach steigenden Potenzen von α.**

Die Reihe Bd. 1, pag 114, No. 14:

$$arc\,cosec\,x = \frac{1}{x} + \frac{1}{2 \cdot 3x^3} + \frac{3}{2 \cdot 4 \cdot 5x^5} + \ldots$$

eignet sich nicht, durch Umkehrung eine Reihe für *cosec α* zu finden, weil in derselben die Cosecanten in den Nennern sich befinden. Kehrt man die Reihe um: pag 111, No. 9

$$arc\sin x = \alpha = x + \frac{1\cdot x^3}{2\cdot 3} + \frac{3x^5}{2\cdot 4\cdot 5} + \frac{3\cdot 5\, x^7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7} + \ldots\ldots$$

so erhält man

$$\sin\alpha = \frac{\alpha}{1} - \frac{\alpha^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{\alpha^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \frac{\alpha^7}{(7)} + \ldots\ldots$$

Nun kann man freilich nicht unmittelbar, wenn man nämlich in diese Reihe $\sin\alpha = \frac{1}{cosec\,\alpha}$ setzt, eine Reihe für *cosec α* finden, allein es ist $\sin\alpha\cdot cosec\,\alpha = 1$, und wenn man $cosec\,\alpha = A + B\alpha + C\alpha^2 + D\alpha^3 + \ldots$ setzt, so erhält man durch Multiplication beider Gleichungen eine Reihe, aus welcher die unbestimmten Coefficienten entwickelt werden können. Die allgemeine Form der Reihe ist aber zuerst näher zu betrachten. Schreibt man in

$$cosec\,\alpha = A + B\alpha + C\alpha^2 + D\alpha^3 + E\alpha^4 + \ldots$$

$-\alpha$ für α so ensteht

$$cosec(-\alpha) = +A - B\alpha + C\alpha^2 - D\alpha^3 + E\alpha^4 - F\alpha^5 + G\alpha^6 - \ldots$$

Nun ist aber $cosec(-\alpha) = -cosec\,\alpha$, beide sind entgegengesetzt gleich grofs und folglich dürfen die für $(-\alpha)$ positiv bleibenden Glieder nicht vorhanden sein, und die Reihe ist

$$cosec\,\alpha = B\alpha + D\alpha^3 + F\alpha^5 + H\alpha^7 + \ldots\ldots$$

Setzt man ferner $\alpha = 0$ so wird (nach No. 2) $cosec\,\alpha = \infty$, es ist also ein Glied erforderlich, welches α im Nenner hat, demnach ist die vollständige Form

$$cosec\,\alpha = \frac{A}{\alpha} + B\alpha + C\alpha^3 + D\alpha^5 + E\alpha^7 + \ldots$$

in der das erste Glied $\frac{A}{\alpha}$ für $(-\alpha)$ ebenfalls subtractiv wird. Verbindet man mit dieser allgemeinen Reihe die bestimmte

$$\sin\alpha = \frac{\alpha}{1} - \frac{\alpha^3}{(3)} + \frac{\alpha^5}{(5)} - \frac{\alpha^7}{(7)} + \frac{\alpha^9}{(9)} - \ldots\ldots$$

durch Multiplication, so erhält man:

$$\begin{aligned}1 = A &+ B\alpha^2 + C\alpha^4 + D\alpha^6 + E\alpha^8 + F\alpha^{10}\\ &- \frac{A}{(3)}\alpha^2 - \frac{B}{(3)}\alpha^4 - \frac{C}{(3)}\alpha^6 - \frac{D}{(3)}\alpha^8 - \frac{E}{(3)}\alpha^{10}\\ &+ \frac{A}{(5)}\alpha^4 + \frac{B}{(5)}\alpha^6 + \frac{C}{(5)}\alpha^8 + \frac{D}{(5)}\alpha^{10}\\ &- \frac{A}{(7)}\alpha^6 - \frac{B}{(7)}\alpha^8 - \frac{C}{(7)}\alpha^{10}\\ &+ \frac{A}{(9)}\alpha^8 + \frac{B}{(9)}\alpha^{10}\\ &- \frac{A}{(11)}\alpha^{10}\end{aligned}$$

Hieraus

$$A - 1 = 0$$
$$B - \frac{A}{(3)} = 0$$
$$C - \frac{B}{(3)} + \frac{A}{(5)} = 0$$
$$D - \frac{C}{(3)} + \frac{B}{(5)} - \frac{A}{(7)} = 0$$
$$E - \frac{D}{(3)} + \frac{C}{(5)} - \frac{B}{(7)} + \frac{A}{(9)} = 0$$
$$F - \frac{E}{(3)} + \frac{D}{(5)} - \frac{C}{(7)} + \frac{B}{(9)} - \frac{A}{(11)} = 0$$

und endlich

$$A = 1$$
$$B = \frac{A}{(3)} = \frac{1}{(3)} = \frac{1}{6}$$
$$C = \frac{1}{(3)^2} - \frac{1}{(5)} = \frac{(5) - (3)^2}{(3)^2\cdot(5)} = \frac{7}{360}$$
$$D = \frac{(5)(7) - 2\cdot(3)^2(7) + (3)^3(5)}{(3)^3(5)(7)} = \frac{31}{15120}$$

u. s. w.
woraus

$$cosec\,\alpha = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{6}\alpha + \frac{7}{360}\alpha^3 + \frac{31}{15120}\alpha^5 + \ldots\ldots$$

vergleiche Cosinus, No. 16; Cotangente, No. 11, Cosinus versus, No. 4.

Cosinus eines Winkels oder Bogens α ist der Sinus des Complements von α, eine sogenannte Cofunction. Die Lagen der Sinus und der C. als trigonometrische Linien sind in dem Art.: Constructionen, pag. 80 und 81 mit Fig. 437 bis 440 für Winkel oder Bogen, die allen 4 Quadranten angehören, angeben; eben so ist der Beweis geführt, dafs die C. im ersten und vierten Quadranten positiv, im zweiten und dritten Quadranten negativ sind. Ferner sind in demselben Art. folgende Aufgaben durch Zeichnung gelöst. Zu finden:

$\varphi = Arc\left(\cos = \pm\frac{c}{a}\right)$
pag. 82 No. 4, II. mit Fig. 441

$x = r\cos^2\alpha$
pag. 83 No. 5, II. mit Fig. 442

$\varphi = Arc\left(\cos^2 = \frac{a}{b}\right)$
pag. 84 No. 6, II. mit Fig. 445

$x = r\cdot\cos^2\alpha$
pag. 84 No. 7, II. mit Fig. 446

$x = r\sin\alpha\cdot\cos\beta$
pag. 85 No. 8, II. mit Fig. 447

$x = r\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta$
pag. 86 mit Fig. 448 No. 9, I.

$x = r\,tg\,\alpha\cot\beta$ „ „ No. 9, II.
$x = r\cdot\cos\alpha\cot\beta$ „ „ No. 9, III.
$x = r\cdot\cos\alpha\cdot\sec\beta$ „ „ No. 9, IV.
$x = r\cdot\cos\alpha\cdot cosec\,\beta$ „ „ No. 9, V.

2. Aus Fig. 437 bis 440, wo $CE = \cos\alpha$ ist, hat man

$\cos 0 = \cos(-360^\circ) = \sin 90^\circ = +1$
$\cos 90^\circ = \cos(-270^\circ) = \sin 0 = 0$
$\cos 180^\circ = \cos(-180^\circ) = \sin(-90^\circ) = -1$
$\cos 270^\circ = \cos(-90^\circ) = \sin(-180^\circ) = 0$
$\cos 360^\circ = \cos(-0) = \sin(-270^\circ) = +1$

Ist α ein Bogen für den Halbmesser $= 1$ oder ein Winkel zwischen 0 und 90° so ist

$\cos(90^\circ - \alpha) = \cos - (270^\circ + \alpha) = \sin\alpha$
$\cos(90^\circ + \alpha) = \cos - (270^\circ - \alpha)$
$= \sin(-\alpha) = -\sin\alpha = -\cos(90^\circ - \alpha)$
$\cos(180^\circ - \alpha) = \cos - (180^\circ + \alpha)$
$= \sin - (90^\circ - \alpha) = -\sin(90^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$
$\cos(180^\circ + \alpha) = \cos - (180^\circ - \alpha)$
$= \sin - (90^\circ + \alpha) = -\sin(90^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$
$\cos(270^\circ - \alpha) = \cos - (90^\circ + \alpha)$
$= \sin - (180^\circ - \alpha) = -\sin\alpha = -\cos(90^\circ - \alpha)$
$\cos(270^\circ + \alpha) = \cos - (90^\circ - \alpha)$
$= \sin - (180^\circ + \alpha) = \sin\alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$
$\cos(360^\circ - \alpha) = \cos(-\alpha)$
$= \sin - (270^\circ - \alpha) = \sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$

3. Aus Fig. 437 bis 440 lassen sich folgende Formeln unmittelbar ableiten: Es ist nämlich

$$CE^2 + DE^2 = CD^2$$

oder $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ (1)

ferner $CE : CD = AC : AG$

oder $\cos\alpha : 1 = 1 : \sec\alpha$

woraus $\cos\alpha \cdot \sec\alpha = 1$ (2)

Will man nun $\cos\alpha$ durch die übrigen trigonometrischen Functionen ausdrücken, so hat man aus 1.

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} \quad (3)$$

Da nun den 4 Figuren nach $\sec^2\alpha = 1 + tg^2\alpha$, so ist aus 2

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2\alpha}} \quad (4)$$

und nach den 4 Figuren $\cot\alpha = \frac{1}{tg\,\alpha}$

also $$\cos\alpha = \frac{\cot\alpha}{\sqrt{1 + \cot^2\alpha}} \quad (5)$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sec\alpha} \quad (6)$$

aus dem Art. Cosecante, pag. 136 No. 3, Formel 9

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{cosec^2\alpha - 1}}{cosec\,\alpha} \quad (7)$$

aus den 4 Figuren

$$\cos\alpha = 1 - sinv\,\alpha \quad (8)$$

und da $\sin\alpha = 1 - cosv\,\alpha$

$$\cos\alpha = \sqrt{cosv\,\alpha\,(2 - cosv\,\alpha)} \quad (9)$$

ferner hat man

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} \quad (10)$$

$$tg\,\alpha = \frac{\sqrt{1 - \cos^2\alpha}}{\cos\alpha} \quad (11)$$

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1 - \cos^2\alpha}} \quad (12)$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \quad (13)$$

$$cosec\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2\alpha}} \quad (14)$$

$$sinv\,\alpha = 1 - \cos\alpha \quad (15)$$

$$cosv\,\alpha = 1 - \sqrt{1 - \cos^2\alpha} \quad (16)$$

4. Pag. 89 bis 96 No. 14 und 15 ist die Formel synthetisch als richtig bewiesen:

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta \quad (17)$$

und zwar für jeden beliebigen Werth von α und von β.

Desgleichen ist pag. 96 No. 17 die Formel

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \quad (18)$$

welche analytisch aus Formel 17 hervorgeht, wenn man darin $\beta = \alpha$ setzt.

Desgl. pag. 96 No. 18 die Formel

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \quad (19)$$

welche analytisch wieder aus Formel 18 entspringt, wenn man für $\cos^2\alpha$ den Werth $1 - \sin^2\alpha$ setzt.

Desgleichen pag. 96 No. 19 die Formel

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \quad (20)$$

welche analytisch aus Formel 18 entsteht, wenn man für $\sin^2\alpha$ den Werth $1 - \cos^2\alpha$ setzt.

Aus Formel 17 erhält man durch Addition und Subtraction beider Formeln unmittelbar

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2\cos\alpha \cdot \cos\beta \quad (21)$$

$$\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = 2\sin\alpha \cdot \sin\beta \quad (22)$$

Schreibt man in Formel 20 den Werth $\frac{1}{2}\alpha$ für α, so entsteht durch Umformung

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}} \quad (23)$$

und für $\alpha = 90^\circ \pm \alpha$ geschrieben, und da $\cos(90^\circ + \alpha)$ nach No. 2 $= -\sin\alpha$, $\cos(90 - \alpha) = \sin\alpha$ ist

$$\cos\frac{90^\circ + \alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 \mp \sin\alpha}{2}} \quad (24)$$

Beide Formeln sind pag. 99 und 100 No. 25 und 27 synthetisch bewiesen.

5. Pag. 89 bis 93 No. 14 sind die beiden Formeln

$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

Durch Subtraction dieser Formeln erhält man nach der nöthigen Umformung

$$\cos\alpha = \frac{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)}{2\sin\beta} \quad (25)$$

diese Formel ist pag. 109 No. 46 synthetisch bewiesen.

Aus Formel 21 erhält man durch Umformung

$$\cos\alpha = \frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{2\cos\alpha} \quad (26)$$

diese Formel ist pag. 109 No. 47 synthetisch erwiesen.

Schreibt man in den Formeln 21 und 22:

α für $\alpha+\beta$, β für $\alpha-\beta$

so entsteht $\frac{\alpha+\beta}{2}$ für α

und $\frac{\alpha-\beta}{2}$ für β

und man hat

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \quad (27)$$

$$\cos\beta-\cos\alpha=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \quad (28)$$

Beide Formeln sind pag. 111 No. 51 und 52 synthetisch bewiesen.

Multiplicirt man die beiden Formeln 27 und 28 mit einander, so entsteht

$$\cos^2\beta-\cos^2\alpha$$
$$=4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

da nun $2\sin\alpha\cdot\sin\beta=\sin 2\alpha$,
so hat man

$$\cos^2\beta-\cos^2\alpha=\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta) \quad (29)$$

diese Formel ist pag. 116 No. 62 synthetisch bewiesen.

Multiplicirt man die beiden Formeln No. 17 mit einander, so entsteht:

$$\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)$$
$$=\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta-\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta$$
$$=\cos^2\alpha\,[1-\sin^2\beta]-\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta$$
$$=\cos^2\alpha-\sin^2\beta\,(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)$$

oder

$$\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\alpha-\sin^2\beta \quad (30)$$

diese Formel ist pag. 117 No. 64 synthetisch erwiesen.

6. Setzt man zu der schon cirtirten Formel

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha \text{ hinzu}$$
$$1=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$$

so entsteht

$$1+\sin 2\alpha=(\sin\alpha+\cos\alpha)^2$$

und $1-\sin 2\alpha=(\pm\sin\alpha\mp\cos\alpha)^2$

Schreibt man $\frac{1}{2}\alpha$ für α

so ist $\cos\frac{\alpha}{2}>\sin\frac{\alpha}{2}$,

damit also die rechte Seite der 2ten Gleichung positiv bleibt

$$1+\sin\alpha=(\sin\tfrac{1}{2}\alpha+\cos\tfrac{1}{2}\alpha)^2$$
$$1-\sin\alpha=(\cos\tfrac{1}{2}\alpha-\sin\tfrac{1}{2}\alpha)^2$$

Wenn man nun radicirt, beide Gleichungen addirt und mit 2 dividirt so erhält man

$$\cos\tfrac{1}{2}\alpha=\tfrac{1}{2}(\sqrt{1+\sin\alpha}+\sqrt{1-\sin\alpha}) \quad (31)$$

Diese Formel ist pag. 107 No. 44 synthetisch bewiesen, und die Vorzeichen sind für die Werthe von α in allen 4 Quadranten bestimmt.

7. Dividirt man die beiden Formeln 27 und 28 durch einander so erhält man

$$\frac{\cos\alpha+\cos\beta}{\cos\beta-\cos\alpha}=\cot\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cot\frac{\alpha-\beta}{2} \quad (32)$$

$$\frac{\cos\beta-\cos\alpha}{\cos\alpha+\cos\beta}=tg\,\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot tg\,\frac{\alpha-\beta}{2} \quad (33)$$

Aus Formel 17 hat man

$$\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}=\frac{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta}$$

Dividirt man Zähler und Nennner der rechten Seite mit $\sin\alpha\cdot\cos\beta$ so entsteht

$$\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}=\frac{\cot\alpha-tg\,\beta}{\cot\alpha+tg\,\beta} \quad (34)$$

Dividirt man Formel 17:

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

durch $\cos\alpha\cdot\cos\beta$, so entsteht

$$\frac{\cos(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}=1\mp tg\,\alpha\cdot tg\,\beta \quad (35)$$

8. Setzt man zu Formel 18:

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$
$$1+\cos 2\alpha=1+\cos^2\alpha-\sin^2=2\cos^2\alpha$$

so hat man durch Division

$$\frac{\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\tfrac{1}{2}(1-tg^2\alpha) \quad (36)$$

Verbindet man eben so

$$1-\cos 2\alpha=1-\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=2\sin^2\alpha$$

mit $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$
so erhält man

$$\frac{\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}=\tfrac{1}{2}(\cot^2\alpha-1) \quad (37)$$

ferner

$$\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\frac{2\sin^2\alpha}{2\cos^2\alpha}=tg^2\alpha \quad (38)$$

Aus $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$

$$=\frac{2}{\sec^2\alpha}-1=\frac{2}{1+tg^2\alpha}-1$$

erhält man

$$\cos 2\alpha=\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}=\frac{\cot^2\alpha-1}{\cot^2\alpha+1} \quad (39)$$

9. Es ist die Sehne für den Centriwinkel 60° = dem Radius = 1

folglich $\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$

und $\cos^2 30^\circ=1-\sin^2 30^\circ=\frac{3}{4}$

folglich $\cos 30^\circ=\frac{1}{2}\sqrt{3}$

daher nach Formel 17:

$$\cos(30^\circ+\alpha)=\tfrac{1}{2}(\cos\alpha\sqrt{3}-\sin\alpha) \quad (40)$$

$$\cos(30^\circ-\alpha)=\tfrac{1}{2}(\cos\alpha\sqrt{3}+\sin\alpha) \quad (41)$$

hieraus

$$\cos(30^\circ+\alpha)+\cos(30^\circ-\alpha)=\cos\alpha\sqrt{3} \quad (42)$$

$$\cos(30^\circ-\alpha)-\cos(30^\circ+\alpha)=\sin\alpha \quad (43)$$

10. Aus Formel 21 hat man

$$\cos(\alpha+\beta)=2\cos\alpha\cdot\cos\beta-\cos(\alpha-\beta)$$

Setzt man hierein statt α, nacheinander

$\alpha+\beta$, $\alpha+2\beta$, $\alpha+3\beta\ldots.\ \alpha+(n-1)\beta$

so entsteht

$\cos(\alpha+2\beta)=2\cos\beta\cos(\alpha+\beta)-\cos\alpha$
$\cos(\alpha+3\beta)=2\cos\beta\cos(\alpha+2\beta)-\cos(\alpha+\beta)$
$\cos(\alpha+4\beta)=2\cos\beta\cos(\alpha+3\beta)-\cos(\alpha+2\beta)$
. . . .
$\cos(\alpha+n\beta)$
$=2\cos\beta\cos[\alpha+(n-1)\beta]-\cos[\alpha+(n-2)\beta]$ (44)

11. Aus Formel 22 hat man
$\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha-\beta)-2\sin\alpha\cdot\sin\beta$
hiermit wie No. 10 verfahren entsteht:
$\cos(\alpha+2\beta)=\cos\alpha-2\sin\beta\sin(\alpha+\beta)$
$\cos(\alpha+3\beta)=\cos(\alpha+\beta)-2\sin\beta\sin(\alpha+2\beta)$
$\cos(\alpha+4\beta)=\cos(\alpha+2\beta)-2\sin\beta\sin(\alpha+3\beta)$
. . . .
$\cos(\alpha+n\beta)$
$=\cos[\alpha+(n-2)\beta]-2\sin\beta\sin[\alpha+(n-1)\beta]$ (45)

12. Pag. 89 bis 96 No. 14 und 15 sind die Formeln entwickelt
$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$
$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta$
durch Subtraction entsteht
$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cdot\sin\beta.$

Schreibt man dafür
$2\sin\beta\cdot\cos\alpha=\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)$
und setzt man hierein für α nacheinander die Werthe $\alpha+\beta$, $\alpha+2\beta$, ... $\alpha+n\beta$ so erhält man
$2\sin\beta\cdot\cos(\alpha+\beta)=\sin(\alpha+2\beta)-\sin\alpha$
$2\sin\beta\cdot\cos(\alpha+2\beta)=\sin(\alpha+3\beta)-\sin(\alpha+\beta)$
$2\sin\beta\cdot\cos(\alpha+3\beta)=\sin(\alpha+4\beta)-\sin(\alpha+2\beta)$
. . . .
$2\sin\beta\cos[\alpha+(n-2)\beta]$
$=\sin[\alpha+(n-1)\beta]-\sin[\alpha+(n-3)\beta]$
$2\sin\beta\cdot\cos(\alpha+(n-1)\beta]$
$=\sin[\alpha+n\beta]-\sin[\alpha+(n-2)\beta]$
$2\sin\beta\cdot\cos(\alpha+n\beta)$
$=\sin[\alpha+(n+1)\beta]-\sin[\alpha+(n-1)\beta]$

Addirt man diese $n+1$ Gleichungen mit einander und bezeichnet die Summe $\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+2\beta)+\ldots+\cos(\alpha+n\beta)$ mit S, so hat man

$$2\sin\beta\cdot S=\sin[\alpha+(n+1)\beta]+\sin(\alpha+n\beta)-\sin\alpha-\sin(\alpha-\beta)$$

Nun ist

$$\sin\alpha+\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha+\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\sin\alpha(1+\cos\beta)-\cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$=2\sin\alpha\cos^2\frac{\beta}{2}-2\cos\alpha\sin\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}=2\cos\frac{\beta}{2}\left(\sin\alpha\cos\frac{\beta}{2}-\cos\alpha\sin\frac{\beta}{2}\right)$$
$$=2\cos\frac{\beta}{2}\cdot\sin\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)$$

Setzt man $\alpha+(n+1)\beta=\gamma$ so hat man die ersten beiden Glieder

$$\sin\gamma+\sin(\gamma-\beta)=2\cos\frac{\beta}{2}\sin\left(\gamma-\frac{\beta}{2}\right)$$

Folglich ist

$$S=\cos\frac{\beta}{2}\,\frac{\sin\left(\gamma-\frac{\beta}{2}\right)-\sin\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)}{\sin\beta}$$
$$=\sin\frac{[\alpha+(n+\frac{1}{2})\beta]-\sin(\alpha-\frac{1}{2}\beta)}{2\sin(\frac{1}{2}\beta)} \qquad (46)$$

Setzt man in den Zähler

$$\begin{aligned}\alpha+(n+\tfrac{1}{2})\beta&=\alpha^1+\beta^1\\ \alpha-\tfrac{1}{2}\beta&=\alpha^1-\beta^1\end{aligned}$$
so ist
$$\begin{aligned}2\alpha+n\beta&=2\alpha^1\\ (n+1)\beta&=2\beta^1\end{aligned}$$

Nun ist wie in No. 12
$\sin(\alpha^1+\beta^1)-\sin(\alpha^1-\beta^1)=2\cos\alpha^1\sin\beta^1$
Man hat daher

$$S=\frac{\cos(\alpha+\frac{1}{2}n\beta)\cdot\sin\frac{n+1}{2}\beta}{\sin\frac{1}{2}\beta} \qquad (47)$$

13. Setzt man in die Formeln No. 10 für β den Werth α, so erhält man

$$\begin{aligned}
\cos\alpha&=\cos\alpha\\
\cos 2\alpha&=2\cos^2\alpha-1\\
\cos 3\alpha&=2\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha-\cos\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha\\
\cos 4\alpha&=8\cos^4\alpha-8\cos^2\alpha+1\\
\cos 5\alpha&=16\cos^5\alpha-20\cos^3\alpha+5\cos\alpha\\
\cos 6\alpha&=32\cos^6\alpha-48\cos^4\alpha+18\cos^2\alpha-1\\
\cos 7\alpha&=64\cos^7\alpha-112\cos^5\alpha+56\cos^3\alpha-7\cos\alpha\\
\cos 8\alpha&=128\cos^8\alpha-256\cos^6\alpha+160\cos^4\alpha-32\cos^2\alpha+1
\end{aligned}$$
. . . .
$$\cos n\alpha=2^{n-1}\cos^n\alpha-\frac{n}{1}2^{n-3}\cos^{n-2}\alpha+\frac{n\cdot n-3}{1\cdot 2}2^{n-5}\cos^{n-4}\alpha-\frac{n\cdot n-4\cdot n-5}{1\cdot 2\cdot 3}2^{n-7}\cos^{n-6}\alpha$$
$$+\frac{n\cdot n-5\cdot n-6\cdot n-7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}2^{n-9}\cos^{n-8}\alpha-\ldots.$$

14. Setzt man in Formel 21
$cos(\alpha + \beta) = cos\,\alpha \cdot cos\,\beta - sin\,\alpha\, sin\,\beta$
für β nach einander $\alpha, 2\alpha, 3\alpha \ldots . (n-1)\alpha$, so erhält man
$cos\,2\alpha = cos^2\alpha - sin^2\alpha$
$cos\,3\alpha = cos \cdot \alpha \cdot cos\,2\alpha - sin\,\alpha \cdot sin\,2\alpha$
$cos\,4\alpha = cos\,\alpha \cdot cos\,3\alpha - sin\,\alpha \cdot sin\,3\alpha$
....
$cos\,n\alpha = cos\,\alpha \cdot cos\,(n-1)\alpha - sin\,\alpha \cdot sin\,(n-1)\alpha$

In pag. 89 bis 93 No. 14 ist für alle Werthe von α die Formel erwiesen
$sin(\alpha + \beta) = sin\,\alpha\, cos\,\beta + cos\,\alpha \cdot sin\,\beta$
woraus für β nach einander α, 2α, $3\alpha \ldots$
$sin\,2\alpha = 2sin\,\alpha \cdot cos\,\alpha$
$sin\,3\alpha = sin\,\alpha \cdot cos\,2\alpha + cos\,\alpha\, sin\,2\alpha$
$sin\,4\alpha = sin\,\alpha\, cos\,3\alpha + cos\,\alpha \cdot sin\,3\alpha$
....
$sin(n\alpha) = sin\,\alpha\, cos(n-1)\alpha + cos\,\alpha \cdot sin\,(n-1)\alpha$

Hiernach erhält man

1. $cos\,2\alpha = cos^2\alpha - sin^2\alpha$
   $sin\,2\alpha = 2sin\,\alpha \cdot cos\,\alpha$
2. $cos\,3\alpha = cos\,\alpha(cos^2\alpha - sin^2\alpha) - sin\,\alpha \cdot 2sin\,\alpha \cdot cos\,\alpha = cos^3\alpha - 3cos\,\alpha \cdot sin^2\alpha$
   $sin\,3\alpha = sin\,\alpha\,(cos^2\alpha - sin^2\alpha) + cos\,\alpha \cdot 2sin\,\alpha \cdot cos\,\alpha = 3sin\,\alpha\, cos^2\alpha - sin^3\alpha$
3. $cos\,4\alpha = cos\,\alpha\,(cos^3\alpha - 3cos\,\alpha \cdot sin^2\alpha) - sin\,\alpha\,(3sin\,\alpha \cdot cos^2\alpha - sin^3\alpha)$
   $= cos^4\alpha - 6cos^2\alpha \cdot sin^2\alpha + sin^4\alpha$
   $sin\,4\alpha = sin\,\alpha\,(cos^3\alpha - 3cos\,\alpha\, sin^2\alpha) + cos\,\alpha\,(3sin\,\alpha \cdot cos^2\alpha - sin^3\alpha)$
   $= 4cos^3\alpha\, sin\,\alpha - 4sin^3\, cos\,\alpha$

Schreibt man die bis hier gewonnenen Reihen für die cos und sin der Vielfachen des Winkels untereinander, so erhält man

$$
\begin{array}{lllll}
cos\,2\alpha = cos^2\alpha & & - sin^2\alpha & & \\
sin\,2\alpha = & + 2sin\,\alpha \cdot cos\,\alpha & & & \\
cos\,3\alpha = cos^3\alpha & & - 3cos\,\alpha\, sin^2\alpha & & \\
sin\,3\alpha = & + 3cos^2\alpha\, sin\,\alpha & & - sin^3\alpha & \\
cos\,4\alpha = cos^4\alpha & & - 6cos^2\alpha\, sin^2\alpha & & + sin^4\alpha \\
sin\,4\alpha = & + 4cos^3\alpha\, sin\,\alpha & & - 4cos\,\alpha\, sin^3\alpha &
\end{array}
$$

Zwei Cosinus und Sinus gleichvielfacher Winkel bilden hiernach zusammen eine Reihe der aufeinander folgenden Glieder des Binoms einer mit dem Vielfachen des Winkels gleich hohen Potenz; nur mit dem Unterschied, dafs jede Reihe mit additivem Gliede anfängt und ferner mit subtractiven und additiven Gliedern abwechselt.

Dies Gesetz erweist sich, so weit man mit den Vielfachen fortfährt und allgemein, wenn man das Gesetz für $cos\,n\alpha$ und $sin\,n\alpha$ als richtig annimmt und hieraus die Reihe für $cos(n+1)\alpha$ und $sin(n+1)\alpha$ entwickelt: Ist nämlich

$$cos\,n\alpha = cos^n\alpha - n_2 cos^{n-2}\alpha\, sin^2\alpha + n_4 cos^{n-4}\alpha\, sin^4\alpha - n_6 cos^{n-6}\alpha\, sin^6\alpha + \ldots$$
$$sin\,n\alpha = n_1 cos^{n-1}\alpha \cdot sin\,\alpha - n_3 cos^{n-3}\alpha\, sin^3\alpha + n_5 cos^{n-5}\alpha \cdot sin^5\alpha - n_7 cos^{n-7}\alpha\, sin^7 + \ldots .$$

So findet man aus

1. $cos(\alpha + n\alpha) = cos\,\alpha \cdot cos\,n\alpha - sin\,\alpha\, sin\,n\alpha$
2. $sin(\alpha + n\alpha) = sin\,\alpha\, cos\,n\alpha + cos\,\alpha \cdot sin\,n\alpha$

$$cos\,(n+1)\alpha = cos\,\alpha\,[cos^n\alpha - n_2 cos^{n-2}\alpha\, sin^2\alpha + n_4 cos^{n-4}\alpha\, sin^4\alpha - n_6 cos^{n-6}\alpha\, sin^6\alpha + \ldots .]$$
$$- sin\,\alpha\,[n_1 cos^{n-1}\alpha\, sin\,\alpha - n_3 cos^{n-3}\alpha\, sin^3\alpha + n_5 cos^{n-5}\alpha\, sin^5\alpha - \ldots .]$$

hieraus

$$cos\,(n+1)\alpha = cos^{n+1}\alpha - (n_1 + n_2)\, cos^{n-1}\alpha\, sin^2\alpha + (n_3 + n_4)\, cos^{n-3}\alpha\, sin^4\alpha$$
$$- (n_5 + n_6)\, cos^{n-5}\alpha\, sin^6\alpha + \ldots ..$$

Nun ist in dem Art. Binomial-Coefficient No. 2, pag. 368 bewiesen, dafs der $m$te Coefficient vor $(a+b)^{n+1}$ = ist der Summe des $m$ten und des $(m-1)$ten Coefficienten von $(a+b)^n$; demnach hat man

$$cos\,(n+1)\alpha = cos^{n+1}\alpha - (n+1)_2\, cos^{n-1}\alpha\, sin^2\alpha + (n+1)_4\, cos^{n-3}\alpha\, sin^4\alpha$$
$$- (n+1)_6\, cos^{n-5}\alpha \cdot sin^6\alpha + \ldots ..$$

Eben so erhält man aus 2.

$$sin\,(n+1)\,\alpha = sin\,\alpha\,[cos^n\alpha - n_2 cos^{n-2} sin^2\alpha + n_4 cos^{n-4}\alpha\, sin^4\alpha - n_6 cos^{n-6}\alpha\, sin^6\alpha + \ldots]$$
$$+ cos\,\alpha\,[n_1 cos^{n-1}\alpha\, sin\,\alpha - n_3\, cos^{n-3}\alpha\, sin^3\alpha + n_5\, cos^{n-5}\alpha\, sin^5\alpha - \ldots .]$$

woraus

$$sin\,(n+1)\,\alpha = (1 + n_1)\, cos^n\alpha\, sin\,\alpha - (n_2 + n_3)\, cos^{n-2}\alpha\, sin^3\alpha + (n_4 + n_5)\, cos^{n-4}\alpha\, sin^5\alpha - ..]$$

folglich

$$\sin(n+1)\alpha = (n+1)_1 \cos^n\alpha \sin\alpha - (n+1)_3 \cos^{n-2}\alpha \sin^3\alpha + (n+1)_5 \cos^{n-4}\alpha \sin^5\alpha - \ldots.$$

womit das obige Gesetz allgemein bewiesen ist.

15. Wie in No. 13 die Cosinus der vielfachen Bogen in Reihen von Potenzen des einfachen Bogens dargestellt sind, so kann man durch Umformung derselben auch die Potenzen der Cosinus des einfachen Bogens in Reihen von Cosinus der vielfachen Bogen darstellen; man hat nämlich aus 13

1. $\cos\alpha = \cos\alpha$
2. $2\cos^2\alpha = \cos 2\alpha + 1$
3. $4\cos^3\alpha = \cos 3\alpha + 3\cos\alpha$
4. $8\cos^4\alpha = \cos 4\alpha + 8\cos^2\alpha - 1$
5. $16\cos^5\alpha = \cos 5\alpha + 20\cos^3\alpha - 5\cos\alpha$
6. $32\cos^6\alpha = \cos 6\alpha + 48\cos^4\alpha - 18\cos^2\alpha + 1$
7. $64\cos^7\alpha = \cos 7\alpha + 112\cos^5\alpha - 56\cos^3\alpha + 7\cos\alpha$
8. $128\cos^8\alpha = \cos 8\alpha + 256\cos^6\alpha - 160\cos^4\alpha + 32\cos^2\alpha - 1$

....

9. $$2^{n-1}\cos^n\alpha = \cos n\alpha + \frac{n}{1}2^{n-3}\cos^{n-2}\alpha - \frac{n\cdot n-3}{1\cdot 2}2^{n-5}\cos^{n-4}\alpha + \frac{n\cdot n-4\cdot n-5}{1\cdot 2\cdot 3}2^{n-7}\cos^{n-6}\alpha - \frac{n\cdot n-5\cdot n-6\cdot n-7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}2^{n-9}\cos^{n-8}\alpha + \ldots\ldots$$

Aus 2 hat man in 4:

$$8\cos^4\alpha = \cos 4\alpha + 4(\cos 2\alpha + 1) - 1 = \cos 4\alpha + 4\cos 2\alpha + 3$$

Aus 3 hat man in 5:

$$16\cos^5\alpha = \cos 5\alpha + 5(\cos 3\alpha + 3\cos\alpha) - 5\cos\alpha$$
$$= \cos 5\alpha + 5\cos 3\alpha + 10\cos\alpha$$

Aus 2 und 4 hat man in 6:

$$32\cos^6\alpha = \cos 6\alpha + 6(\cos 4\alpha + 4\cos 2\alpha + 3) - 9(\cos 2\alpha + 1) + 1$$
$$= \cos 6\alpha + 6\cos 4\alpha + 15\cos 2\alpha + 10$$

Aus 3 und 5 hat man in 7:

$$64\cos^7\alpha = \cos 7\alpha + 7(\cos 5\alpha + 5\cos 3\alpha + 10\cos\alpha) - 14(\cos 3\alpha + 3\cos\alpha) + 7\cos\alpha$$
$$= \cos 7\alpha + 7\cos 5\alpha + 21\cos 3\alpha + 35\cos\alpha$$

Aus 6, 4 und 2 hat man in 8:

$$128\cos^8\alpha = \cos 8\alpha + 8(\cos 6\alpha + 6\cos 4\alpha + 15\cos 2\alpha + 10) - 20(\cos 4\alpha + 4\cos 2\alpha + 3) + 16(\cos 2\alpha + 1) - 1$$
$$= \cos 8\alpha + 8\cos 6\alpha + 28\cos 4\alpha + 56\cos 2\alpha + 35$$

Das allgemeine Glied, in welchem die Potenzen zu entwickeln sind ist

$$2^{n-1}\cos^n\alpha = \cos n\alpha + \frac{n}{1}2^{n-3}\cos^{n-2}\alpha - \frac{n\cdot n-3}{1\cdot 2}2^{n-5}\cos^{n-4}\alpha + \frac{n\cdot n-4\cdot n-5}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 2^{n-7}\cos^{n-6}\alpha - \frac{n\cdot n-5\cdot n-6\cdot n-7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}2^{n-9}\cos^{n-8} + \ldots$$

16. Entwickelung des Cosinus in eine nach den Potenzen seines Bogens fortlaufende Reihe. Bd. I, pag. 112 gibt die Reihe:

$$Arc\cdot\cos x = \frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{1\cdot x^3}{2\cdot 3} + \frac{3x^5}{2\cdot 4\cdot 5} + \frac{3\cdot 5\cdot x^7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7} + \ldots\right)$$

oder

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \left(\cos\alpha + \frac{\cos^3\alpha}{2\cdot 3} + \frac{3\cdot\cos^5\alpha}{2\cdot 4\cdot 5} + \frac{3\cdot 5\cos^7\alpha}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7} + \ldots\right)$$

woraus

$$\frac{\pi}{2} - \alpha = \cos\alpha + \frac{\cos^3\alpha}{2\cdot 3} + \frac{3\cdot\cos^5\alpha}{2\cdot 4\cdot 5} + \frac{3\cdot 5\cdot\cos^7\alpha}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7} + \ldots \qquad \text{I.}$$

Für die unmittelbare Entwickelung der Reihe würde man nun setzen:

$$\cos\alpha = A + B\alpha + C\alpha^2 + D\alpha^3 + \ldots$$

wo man dann die unbestimmten Coefficienten A, B, C, D, ... zu bestimmen hätte.

Für $\alpha = 0$ wird $\cos\alpha = 1$; mithin hat man

$$\cos 0 = A = 1$$

Die Entwickelung gibt also, wegen des vorstehenden unbenannten Gliedes $A = 1$, für die Coefficienten A, B, C ... lauter unendliche Reihen, und die Reihe I. ist für den vorliegenden Zweck unbrauchbar.

Es ist aber $\cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, und man kann die Reihe I. verwandeln in die:

$$\frac{\pi}{2} - \alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)^3}{2 \cdot 3} + \frac{3 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \ldots.$$

oder $\frac{\pi}{2} - \alpha = \beta$ gesetzt.

$$\beta = \sin\beta + \frac{\sin^3\beta}{2 \cdot 3} + \frac{3\sin^5\beta}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{3 \cdot 5 \cdot \sin^7\beta}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \sin^9\beta}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9} + \ldots.. \qquad \text{II.}$$

Setzt man nun

$$\sin\beta = A + B\beta + C\beta^2 + D\beta^3 + \ldots.$$

so ist, da *sinus* für $\beta = 0$ ebenfalls $= 0$ wird, $A = 0$; die Reihe wird:

$$\sin\beta = B\beta + C\beta^2 + D\beta^3 + E\beta^4 + \ldots.$$

und ist der Entwickelung fähig.

Diese allgemeine Reihe läfst sich aber noch weiter vereinfachen; denn setzt man $-\beta$ für β, so entsteht

$$\sin(-\beta) = -B\beta + C\beta^2 - D\beta^3 + E\beta^4 + F\beta^5 + \ldots.$$

Liegt aber $+\beta$ im ersten, im zweiten, im dritten, im vierten Quadrant, so liegt $-\beta$ im vierten, im dritten, im zweiten, im ersten Quadrant, die *sinus* von $+\beta$ und $-\beta$ sind mit entgegengesetzten Vorzeichen einander gleich; wenn also

$$\sin(+\beta) = \pm B\beta \pm C\beta^2 \pm D\beta^3 \pm E\beta^4 \pm F\beta^5 \pm \ldots.$$

so mufs sein

$$\sin(-\beta) = \mp B\beta \mp C\beta^2 \mp D\beta^3 \mp E\beta^4 \mp F\beta^5 \mp \ldots.$$

Folglich ist es unmöglich, dafs die Reihe für $\sin\beta$ Glieder mit α in geraden Exponenten haben kann, und die allgemeine Form der Reihe ist

$$\sin\beta = A\beta + B\beta^3 + C\beta^5 + D\beta^7 + E\beta^9 + \ldots.. \qquad \text{III.}$$

Substituirt man diese Reihe in die Reihe II und reducirt auf 0, so hat man

$$\begin{array}{lllllll}
0 = & -\beta & & & & \\
(\sin\beta) & +A\beta & +B \cdot \beta^3 & +C\beta^5 & +D\beta^7 & +E\beta^9 \\
\left(\frac{\sin^3\beta}{2 \cdot 3}\right) & & +\frac{A^3}{2 \cdot 3} \cdot \beta^3 & +\frac{3A^2B}{2 \cdot 3}\beta^5 & +\frac{3(AB^2 + A^2C)}{2 \cdot 3}\beta^7 & +\frac{B^3 + 6ABC + 3A^2D}{2 \cdot 3}\beta^9 \\
\left(\frac{3\sin^5\beta}{2 \cdot 4 \cdot 5}\right) & & & +\frac{3A^5}{2 \cdot 4 \cdot 5}\beta^5 & +\frac{3 \cdot 5 A^4B}{2 \cdot 4 \cdot 5}\beta^7 & +\frac{3(10A^3B^2 + 5A^4C)}{2 \cdot 4 \cdot 5}\beta^9 \\
\left(\frac{3 \cdot 5 \sin^7\beta}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7}\right) & & & & +\frac{3 \cdot 5 A^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7}\beta^7 & +\frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot A^6B}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7}\beta^9 \\
\left(\frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \sin^9\beta}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9}\right) & & & & & +\frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot A^9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9}\beta^9
\end{array}$$

. . . .

Setzt man jede Summe der untereinander stehenden zu einerlei Potenz von β gehörenden Coefficienten $= 0$, so erhält man

$$A - 1 = 0$$

$$\frac{A^3}{2 \cdot 3} + B = 0$$

$$\frac{3A^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{3A^2B}{2 \cdot 3} + C = 0$$

$$\frac{3 \cdot 5\ A^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \frac{3 \cdot 5\ A^4B}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{3(AB^2 + A^2C)}{2 \cdot 3} + D = 0$$

$$\frac{3 \cdot 5 \cdot 7\ A^9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9} + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7\ A^6B}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \frac{3(10A^3B^2 + 5A^4C)}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{B^3 + 6ABC + 3A^2D}{2 \cdot 3} + E = 0$$

. . . .

woraus aus der ersten Gleichung

$$A = 1$$

Diesen Werth in die zweite Gl. gesetzt, gibt

$$B = -\frac{1}{2 \cdot 3} = -\frac{1}{(3)}$$

Die Werthe von A und B in die dritte Gl. gesetzt, u. s. f. ergibt

$$C = +\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = +\frac{1}{(5)}$$

$$D = -\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} = -\frac{1}{(7)}$$

$$E = +\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9} = +\frac{1}{(9)}$$

u. s. w.

Man hat also, diese Werthe in Gl. III. substituirt

$$\sin\beta = \beta - \frac{\beta^3}{(3)} + \frac{\beta^5}{(5)} - \frac{\beta^7}{(7)} + \frac{\beta^9}{(9)} - \ldots.$$

Eine Gleichung, die für jeden beliebi-

gen Werth von β, nicht nur für den ursprünglichen $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, sondern auch für $\beta = \alpha$ gültig ist; also

$$\sin\alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{(3)} + \frac{\alpha^5}{(5)} - \frac{\alpha^7}{(7)} + \frac{\alpha^9}{(9)} - \ldots\ldots \quad \text{IV.}$$

Um aus dieser Reihe die für $\cos\alpha$ zu entwickeln, verfährt man elementar, wenn man $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$ setzt; dann ist

$$\sqrt{1-\cos^2\alpha} = \alpha - \frac{\alpha^3}{(3)} + \frac{\alpha^5}{(5)} - \frac{\alpha^7}{(7)} + \frac{\alpha^9}{(9)} - \ldots\ldots$$

woraus

$$\cos^2\alpha = 1 - \left(\alpha - \frac{\alpha^3}{(3)} + \frac{\alpha^5}{(5)} - \ldots\right)^2$$

und das Quadriren ausgeführt:

$$\cos^2\alpha = 1 - \alpha^2 + \frac{\alpha^4}{3} - \frac{2\alpha^6}{3\cdot3\cdot5} + \frac{\alpha^8}{3\cdot3\cdot5\cdot7} - \frac{2\alpha^{10}}{3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot9} + \ldots$$

Bei der successiven Wurzelausziehung erhält man das erste Glied a der $\sqrt{} = 1$; um das zweite Glied b zu finden dividirt man mit $2a = 2$ in a^2 und erhält $-\frac{a^2}{2}$, für das dritte mit 2 in a^4 dividirt, erhält man a^4, also eine Reihe mit nur geraden Potenzen von α. Daher setze man

$$\sqrt{1 - \alpha^2 + \frac{\alpha^4}{3} - \frac{2\alpha^6}{3\cdot3\cdot5} + \ldots}$$
$$= 1 + A\alpha^2 + B\alpha^4 + C\alpha^6 + D\alpha^8 + \ldots\ldots$$

also

$$1 - \alpha^2 + \frac{\alpha^4}{3} - \frac{2\alpha^6}{3\cdot3\cdot5} + \ldots$$
$$= (1 + A\alpha^2 + B\alpha^4 - C\alpha^6 + \ldots)^2$$

Nachdem wirklich quadrirt, die Gleichung auf 0 reducirt worden, erhält man die Glieder für die Coefficienten:

$$(2A+1)\alpha^2 = 0$$
$$\left(A^2 + 2B - \frac{1}{3}\right)\alpha^4 = 0$$
$$\left(2AB + 2C + \frac{2}{3\cdot3\cdot5}\right)\alpha^6 = 0$$
$$\left(B^2 + 2AC + 2D - \frac{1}{3\cdot3\cdot5\cdot7}\right)\alpha^8 = 0$$
$$\left(2BC + 2AD + 2E + \frac{2}{3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot9}\right)\alpha^{10} = 0$$

u. s. w.

Hieraus

$$A = -\frac{1}{2}$$
$$B = +\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4} = \frac{1}{(4)}$$
$$C = -\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6} = \frac{1}{(6)}$$
$$D = +\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8} = \frac{1}{(8)}$$
$$E = -\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10} = \frac{1}{(10)}$$

u. s. w. Mithin

$$\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{(4)} - \frac{\alpha^6}{(6)} + \frac{\alpha^8}{(8)} - \frac{\alpha^{10}}{(10)} + \ldots \quad \text{V.}$$

Durch Differenziren der Gleichung IV gelangt man auf leichterem Wege zur Gleichung V. Denn es ist

$$\partial\sin\alpha \cdot \partial\alpha = \partial\alpha - \frac{3\alpha^2\partial\alpha}{(3)} + \frac{5\alpha^4\partial\alpha}{(5)} - \frac{7\alpha^6\partial\alpha}{(7)} + \frac{9\alpha^8\partial\alpha}{(9)} - \ldots$$

oder

$$\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{(2)} + \frac{\alpha^4}{(4)} - \frac{\alpha^6}{(6)} + \frac{\alpha^8}{(8)} + \ldots\ldots$$

Vergleiche Cosecante No. 12, Cotangente No. 11, Cosinus versus No. 4.

Cosinus versus eines Bogens oder Winkels α ist der Sinus versus oder Quersinus des Complements von α, eine sogenannte Cofunction.

In den Figuren 437 bis 440 ist AC der feste Schenkel, CD der bewegliche, und dieser liegt in den aufeinander folgenden Figuren im 1, 2, 3 und 4ten Quadrant. Das Stück AE des festen Schenkels zwischen dem Sinus DE und der Tangente AG ist der Sinus versus von α; der Sinv. des $\angle DCB$, des Complements von α ist demnach das Stück BF dessen festen Schenkels BC zwischen dem Sinus DF und der Tangente BH dieses Complementswinkels.

Der $\cos v\, BF$ Fig. 438 ist = dem $\cos v\, BF$ Fig. 437; d. h.

$$\cos v\,(180^\circ - \alpha) = \cos v\,\alpha$$

Die $\cos v\, BF$ Fig. 439 und 440 dagegen sind = in Fig. 437 mit

$$BC + CF = 1 + \sin\alpha = 2BC - BF = 2 - \cos v\,\alpha$$

d. h.

$$\cos v\,(180^\circ + \alpha) = \cos v\,(360^\circ - \alpha) = 1 + \sin\alpha$$
$$= 2 - \cos v\,\alpha$$

Dies ergiebt sich auch aus folgender Betrachtung: Es ist Fig. 437 augenscheinlich $\cos v\,\alpha = BF = CB - CF = 1 - \sin\alpha$

Nun ist nach pag. 81, No. 2 der *sin* im 1. und 2. Quadrant positiv, im 3. und 4. Quadrant negativ, folglich für den ersten und zweiten Quadrant

$$cosv = 1 - \sin\alpha$$

für den 3. und 4. Quadrant

$$= 1 - (-\sin\alpha) = 1 + \sin\alpha = 1 + (1 - cosv\,\alpha) = 2 - cosv\,\alpha$$

2. Es ergibt sich aus dem Vorigen

$$\begin{aligned} cosv\,0 &= cosv - 360° = sinv\,90° = 1\\ cosv\,90° &= cosv - 270° = sinv\,0 = 0\\ cosv\,180° &= cosv - 180° = sinv - 90° = 1\\ cosv\,270° &= cosv - 90° = sinv - 180° = 2\\ cosv\,360° &= cosv - 0 = sinv - 270° = 1 \end{aligned}$$

Ist α ein Bogen für den Halbmesser $= 1$ oder ein Winkel zwischen 0 und 90° so ist

$$\begin{aligned} cosv(90° - \alpha) &= cosv - (270° + \alpha) = sinv\,\alpha\\ cosv(90° + \alpha) &= cosv - (270° - \alpha) = sinv\,\alpha\\ cosv(180° - \alpha) &= cosv - (180° + \alpha) = cosv\,\alpha\\ cosv(180° + \alpha) &= cosv - (180° - \alpha) = 2 - cosv\,\alpha\\ cosv(270° - \alpha) &= cosv - (90° + \alpha) = 2 - sinv\,\alpha\\ cosv(270° + \alpha) &= cosv - (90° - \alpha) = 2 - sinv\,\alpha\\ cosv(360° - \alpha) &= cosv - \alpha = 2\,cosv\,\alpha \end{aligned}$$

3. Will man nun $cosv\,\alpha$ durch die übrigen trigonometrischen Functionen ausdrücken, so hat man:

$$cosv\,\alpha = 1 - \sin\alpha$$

$$cosv\,\alpha = 1 - \sqrt{1 - \cos^2\alpha}$$

$$cosv\,\alpha = 1 - \frac{tg\,\alpha}{\sqrt{1 + tg^2\alpha}}$$

$$cosv\,\alpha = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + cot^2\alpha}}$$

$$cosv\,\alpha = 1 - \frac{\sqrt{sec^2\alpha - 1}}{sec\,\alpha}$$

$$cosv\,\alpha = \frac{cosec\,\alpha - 1}{cosec\,\alpha}$$

$$cosv\,\alpha = 1 - \sqrt{sinv\,\alpha\,(2 - sinv\,\alpha)}$$

Ferner hat man

$$\sin\alpha = 1 - cosv\,\alpha$$

$$\cos\alpha = \sqrt{cosv\,\alpha\,(2 - cosv\,\alpha)}$$

$$tg\,\alpha = \frac{1 - cosv\,\alpha}{\sqrt{cosv\,\alpha\,(2 - cosv\,\alpha)}}$$

$$cot\,\alpha = \frac{\sqrt{cosv\,\alpha\,(2 - cosv\,\alpha)}}{1 - cosv\,\alpha}$$

$$sec\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{cosv\,\alpha\,(2 - cosv\,\alpha)}}$$

$$cosec = \frac{1}{1 - cosv\,\alpha}$$

$$sinv\,\alpha = 1 - \sqrt{cosv\,\alpha\,(2 - cosv\,\alpha)}$$

4. Entwickelung des Cosinus versus in eine nach den Potenzen seines Bogens fortlaufende Reihe.

In dem vor. Art. pag. 144 No 16 ist die Reihe entwickelt

$$\sin\alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{(3)} + \frac{\alpha^5}{(5)} - \frac{\alpha^7}{(7)} + \frac{\alpha^9}{(9)} - \ldots$$

Nun ist $\sin\alpha = 1 - cosv\,\alpha$
oder $cosv\,\alpha = 1 - \sin\alpha$
daher hat man

$$cosv\,\alpha = 1 - \frac{\alpha}{1} + \frac{\alpha^3}{(3)} - \frac{\alpha^5}{(5)} + \frac{\alpha^7}{(7)} - \frac{\alpha^9}{(9)} + \ldots$$

Setzt man $\alpha = -\alpha$ so hat man

$$cosv\,(-\alpha) = 1 + \frac{\alpha}{1} - \frac{\alpha^3}{(3)} + \frac{\alpha^5}{(5)} - \frac{\alpha^7}{7} + \ldots$$

also

$$cosv\,(-\alpha) = 1 + \sin\alpha = 2 - cosv\,\alpha$$

Zu demselben Resultat gelangt man durch Umkehrung der Reihe Bd. 1, pag. 114 No. 16

$$\alpha = 1 - cosv\,\alpha + \frac{(1 - cosv\,\alpha)^3}{2\cdot 3} + \frac{3\,(1 - cosv\,\alpha)^5}{2\cdot 4\cdot 5} + \frac{3\cdot 5\cdot(1 - cosv\,\alpha)^7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7} + \ldots$$

Denn setzt man

$$cosv\,\alpha = A + B\alpha^2 + C\alpha^3 + D\alpha^4 + \ldots$$

so sieht man bei ähnlichen Betrachtungen wie dort, daſs die Glieder mit den geraden Potenzen von α fortfallen, und da für $\alpha = 0$, $cosv = 1$ wird, so läſst sich die Reihe für $cosv\,\alpha$ vereinfachen in

$$cosv\,\alpha = 1 + A\alpha + B\alpha^3 + C\alpha^5 + D\alpha^7 + E\alpha^9 + \ldots$$

wo das erste unbenannte Glied nicht wie beim Cosinus die Entwicklung unmöglich macht. Denn man erhält

$$\begin{aligned} (1 - cosv\,\alpha) &= -A\alpha - B\alpha^3 - C\alpha^5 - D\alpha^7 - \ldots\\ \frac{(1 - cosv\,\alpha)^3}{2\cdot 3} &= -\frac{A^3}{2\cdot 3}\alpha^3 - \frac{3A^2B}{2\cdot 3}\alpha^5 - \frac{3A}{2\cdot 3}(B^2 + AC)\alpha^7 - \ldots\\ \frac{3\,(1 - cosv\,\alpha)^5}{2\cdot 4\cdot 5} &= -\frac{3A^5}{2\cdot 4\cdot 5}\alpha^5 - \frac{3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 5}A^4B\alpha^7 - \ldots\\ \frac{3\cdot 5\cdot(1 - cosv\,\alpha)^7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7} &= -\frac{3\cdot 5A^7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}\alpha^7 - \ldots \end{aligned}$$

Hieraus entsteht:

$$0 = -\alpha(A+1) - \alpha^3\left(B + \frac{A^3}{2\cdot 3}\right) - \alpha^5\left(C + \frac{1}{2}A^2B + \frac{3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 5}A^5\right) -$$
$$- \alpha^7\left(D + \tfrac{1}{2}A(B^2+AC) + \tfrac{3}{8}A^4B + \frac{3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}A^7\right) - \ldots.$$

woraus

$$A = -1$$
$$B = +\frac{1}{6} = \frac{1}{(3)}$$
$$C = -\frac{1}{120} = -\frac{1}{(5)}$$
$$D = +\frac{1}{5040} = \frac{1}{(7)}$$

u. s. w. und

$$cosv\,\alpha = 1 - \frac{\alpha}{1} + \frac{\alpha^3}{(3)} - \frac{\alpha^5}{(5)} + \frac{\alpha^7}{(7)} - \ldots..$$

Vergleiche Cosecante No. 12, Cosinus No. 16, Cotangente No. 11.

Cotangente eines Winkels oder Bogens α ist die Tangente des Complements von α, eine sogenannte Cofunction. Die **Lagen** der Cot als trigonometrische Linien sind in dem Art.: Constructionen, trigonometrische pag. 80 und 81 mit Fig. 437 bis 440 für Winkel oder Bogen, die allen 4 Quadranten angehören, mitgetheilt; eben so ist der Beweis geführt, dafs die C. im ersten und dritten Quadrant positiv, im zweiten und vierten Quadrant negativ sind. Ferner sind in demselben Art folgende Aufgaben durch Zeichnung gelöst. Zu finden:

$\varphi = Arc\left(cot = \pm\frac{c}{b}\right)$
pag. 82, No. 4, IV. mit Fig. 441

$x = r\cdot cot^2\alpha$
pag. 82, No. 5, IV. mit Fig. 442

$\varphi = Arc\left(cot^2 = \frac{a}{b}\right)$
pag. 84, No. 6, IV. mit Fig. 445

$x = r\cdot cot^3\alpha$
pag. 85, No. 7, IV. mit Fig. 443

$x = r\cdot sin\,\alpha\cdot cot\,\beta$
pag. 85, No. 8, IV. mit Fig. 447

$x = r\cdot cos\,\alpha\cdot cot\,\beta$
pag. 86, No. 9, III. mit Fig. 448

$x = r\cdot tg\,\alpha\cdot cot\,\beta$
pag. 86, No. 10. II. mit Fig. 449

$x = r\cdot cot\,\alpha\cdot cot\,\beta$
pag. 87, No. 11. I. mit Fig. 449

$x = r\cdot cot\cdot\alpha\,sec\,\beta$
pag. 87, No. 11. II. mit Fig. 449

$x = r\cdot cot\,\alpha\cdot cosec\,\beta$
pag. 87, No. 11. III. mit Fig. 449

2. Aus Fig. 437 bis 440, wo $BH = cot\,\alpha$ ist, hat man

$$cot\,0 = cot - 360^\circ = tg\,90^\circ = \infty$$
$$cot\,90^\circ = cot - 270^\circ = tg\,0 = 0$$
$$cot\,180^\circ = cot - 180^\circ = tg - 90^\circ = -\infty$$
$$cot\,270^\circ = cot - 90^\circ = tg - 180^\circ = 0$$
$$cot\,360^\circ = cot - 0 = tg - 270^\circ = -\infty$$

Ist α ein Bogen für den Halbmesser $= 1$ oder ein Winkel zwischen 0° und 90°, so ist

$$cot(90^\circ - \alpha) = cot - (270^\circ + \alpha) = +\,tg\,\alpha$$
$$cot(90^\circ + \alpha) = cot - (270^\circ - \alpha) = -\,tg\,\alpha$$
$$cot(180^\circ - \alpha) = cot - (180^\circ + \alpha) = -\,cot\,\alpha$$
$$cot(180^\circ + \alpha) = cot - (180^\circ - \alpha) = +\,cot\,\alpha$$
$$cot(270^\circ - \alpha) = cot - (90^\circ + \alpha) = +\,tg\,\alpha$$
$$cot(270^\circ + \alpha) = cot - (90^\circ - \alpha) = -\,tg\,\alpha$$
$$cot(360^\circ - \alpha) = cot(-\alpha) = -\,cot\,\alpha$$

3. Aus 437 bis 440 lassen sich folgende Formeln unmittelbar ableiten. Es ist nämlich

$$BC^2 + BH^2 = CH^2$$

oder

$$1 + cot^2\alpha = cosec^2\alpha \qquad (1)$$

Ferner ist $BH : DF = BC : CF$

oder $BH : CE = AC : DE$ 1

und $CE : AC = DE : AG$ 2

so ist $BH : AC = AC : AG$ 3

für 1 kommt $cot\,\alpha : cos\,\alpha = 1 : sin\,\alpha$

„ 2 „ $cos\,\alpha : 1 = sin\,\alpha : tg\,\alpha$

„ 3 „ $cot\,\alpha : 1 = 1 : tg\,\alpha$

also 1.
$$cot\,\alpha = \frac{cos\,\alpha}{sin\,\alpha} \qquad (2)$$

3.
$$cot\,\alpha\cdot tg\,\alpha = 1 \qquad (3)$$

Will man nun $cot\,\alpha$ durch die übrigen trigonometrischen Functionen ausdrücken, so hat man

aus 2.
$$cot\,\alpha = \frac{\sqrt{1 - sin^2\alpha}}{sin\,\alpha} \qquad (4)$$
$$cot\,\alpha = \frac{cos\,\alpha}{\sqrt{1 - cos^2\alpha}} \qquad (5)$$
$$cot\,\alpha = \frac{1}{tg\,\alpha} \qquad (6)$$
$$cot\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{sec^2\alpha - 1}} \qquad (7)$$
$$cot\,\alpha = \sqrt{cosec^2 - 1} \qquad (8)$$
$$cot\,\alpha = \frac{1 - sinv\,\alpha}{\sqrt{sinv\,\alpha(2 - sinv^2\alpha}} \qquad (9)$$
$$cot\,\alpha = \frac{\sqrt{cosv\,\alpha(2 - cosv^2\alpha)}}{1 - cosv\,\alpha} \qquad (10)$$

Ferner hat man

$$sin\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + cot^2\alpha}} \qquad (11)$$
$$cos\,\alpha = \frac{cot\,\alpha}{\sqrt{1 + cot^2\alpha}} \qquad (12)$$
$$tg\,\alpha = \frac{1}{cot\,\alpha} \qquad (13)$$

$$\sec\alpha = \frac{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}{\cot\alpha} \tag{14}$$

$$\operatorname{cosec}\alpha = \sqrt{1+\cot^2\alpha} \tag{15}$$

$$\operatorname{sinv}\alpha = 1 - \frac{\cot\alpha}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}} \tag{16}$$

$$\operatorname{cosv}\alpha = 1 - \frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}} \tag{17}$$

4. Aus den pag. 89 bis 96 entwickelten Formeln:

1) $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta$

2) $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta$

erhält man durch Division

3) $\cot(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta}$

Je nachdem man nun mit einem der 4 Glieder des rechts stehenden Bruchs in die anderen dividirt, hat man

$$4)\quad \cot(\alpha \pm \beta) = \frac{\cot\alpha \cdot \cot\beta \mp 1}{\cot\beta \pm \cot\alpha} = \frac{1 \mp tg\,\alpha \cdot tg\,\beta}{tg\,\alpha \pm tg\,\beta} = \frac{\cot\alpha \mp tg\,\beta}{1 \pm \cot\alpha \cdot \cot\beta} = \frac{\cot\beta \mp tg\,\alpha}{\cot\beta \pm 1} \tag{18}$$

Diese beide Formeln sind bereits pag. 112, No. 55 und pag. 113 No. 56 synthetisch erwiesen worden.

Aus $\cot\alpha \pm \cot\beta = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\beta} + \dfrac{\cos\beta}{\sin\beta} = \dfrac{\cos\alpha \cdot \sin\beta \pm \cos\beta \cdot \sin\alpha}{\sin\alpha \cdot \sin\beta}$

ist

$$\cot\alpha \pm \cot\beta = \frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin\alpha \cdot \sin\beta} \tag{19}$$

Diese beide Formeln sind bereits pag. 114, No. 59 und pag. 115, No. 60 synthetisch erwiesen worden.

5. Aus den 4 Formeln No. 4 erhält man:

1) $\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha \cdot \cos\beta$

2) $\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha \cdot \sin\beta$

3) $\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha \cdot \cos\beta$

4) $\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta) = 2\sin\alpha \cdot \sin\beta$

Setzt man hierein $\alpha+\beta=\gamma$; $\alpha-\beta=\delta$ so entsteht

5) $\sin\gamma + \sin\delta = 2\sin\dfrac{\gamma+\delta}{2} \cdot \cos\dfrac{\gamma-\delta}{2}$

6) $\sin\gamma - \sin\delta = 2\cos\dfrac{\gamma+\delta}{2} \cdot \sin\dfrac{\gamma-\delta}{2}$

7) $\cos\gamma + \cos\delta = 2\cos\dfrac{\gamma+\delta}{2} \cdot \cos\dfrac{\gamma-\delta}{2}$

8) $\cos\delta - \cos\gamma = 2\sin\dfrac{\gamma+\delta}{2} \cdot \sin\dfrac{\gamma-\delta}{2}$

Dividirt man die 7te Gleichung durch die 5te, so erhält man

$$\cot\frac{\gamma+\delta}{2} = \frac{\cos\gamma + \cos\delta}{\sin\gamma + \sin\delta} \tag{20}$$

Dividirt man die 7te Gl. durch die 6te

$$\cot\frac{\gamma-\delta}{2} = \frac{\cos\gamma + \cos\delta}{\sin\gamma - \sin\delta} \tag{21}$$

Dividirt man die 6te Gl. durch die 8te

$$\cot\frac{\gamma+\delta}{2} = \frac{\sin\gamma - \sin\delta}{\cos\delta - \cos\gamma} \tag{22}$$

Dividirt man die 5te Gl. durch die 8te

$$\cot\frac{\gamma-\delta}{2} = \frac{\sin\gamma + \sin\delta}{\cos\delta - \cos\gamma} \tag{23}$$

6. Schreibt man in Formel 18, α für β, so erhält man

$$\cot 2\alpha = \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{2\sin\alpha \cdot \cos\alpha}$$

Dividirt man Zähler und Nenner mit $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$, so erhält man

$$\cot 2\alpha = \tfrac{1}{2}(\cot\alpha - tg\,\alpha) \tag{24}$$

Dividirt man Zähler und Nenner mit $\cos^2\alpha$,

$$\cot 2\alpha = \frac{1 - tg^2\alpha}{2tg\,\alpha} \tag{25}$$

7. Dividirt man die ersten beiden Gleichungen in 4 durch $\sin\alpha \cdot \sin\beta$, so erhält man

$$\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha \cdot \sin\beta} = \frac{\cos\alpha \cdot \cos\beta}{\sin\alpha \cdot \sin\beta} - 1$$

$$\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\sin\alpha \cdot \sin\beta} = \frac{\cos\alpha \cdot \cos\beta}{\sin\alpha \cdot \sin\beta} + 1$$

hieraus hat man

$$\cot\alpha \cdot \cot\beta = 1 + \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha \cdot \sin\beta} = -1 + \frac{\cos(\alpha-\beta)}{\sin\alpha \cdot \sin\beta} \tag{26}$$

8. Aus Art. Cosinus, Formel 19 und No. 6 hat man

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$$

oder $\quad 2\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha$

und $\quad 2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$

Die untere Gleichung durch die zweite dividirt gibt

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \cot\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha} \tag{27}$$

Aus dem Art. Cosinus, Formel 37 erhält man

$$\cot^2\alpha = \tfrac{1}{2}\left(1 + \frac{\cos 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha}\right) = \frac{1 + \cos 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha} \tag{28}$$

9. Die beiden Formeln 19 mit einander multiplicirt geben

$$cot^2\alpha - cot^2\beta = \frac{sin(\alpha+\beta)\, sin(\beta-\alpha)}{sin^2\alpha \cdot sin^2\beta} \qquad (29)$$

10. Setzt man in die Gleichungen 3 und 4, No. 4 für α den Werth 45°, so ist

$$tg\,\alpha = cot\,\alpha = 1, \; cos\,45° = sin\,45°$$

und man hat

$$cot(45° \pm \beta) = tg(45° \mp \beta) = \frac{cos\,\beta \mp sin\,\beta}{cos\,\beta \pm sin\,\beta} = \frac{1 \mp tg\,\beta}{1 \pm tg\,\beta} \qquad (30)$$

Multiplicirt man in

$$\frac{cos\,\beta - sin\,\beta}{cos\,\beta + sin\,\beta} \text{ und } \frac{cos\,\beta + sin\,\beta}{cos\,\beta - sin\,\beta}$$

Zähler und Nenner mit dem Nenner so erhält man

$$cot(45° \pm \beta) = \frac{cos\,2\alpha}{1 \pm sin\,2\alpha} \qquad (31)$$

Dividirt man beide Gleichungen 31 durch einander so erhält man

$$\frac{cot(45°+\beta)}{cot(45°-\beta)} = cot^2(45°+\beta) = \frac{1-sin\,2\alpha}{1+sin\,2\alpha} \qquad (32)$$

$$\frac{cot(45°-\beta)}{cot(45°+\beta)} = cot^2(45°-\beta) = \frac{1+sin\,2\alpha}{1-sin\,2\alpha} \qquad (33)$$

11. Entwickelung der C. in eine nach Potenzen des Bogens fortlaufende Reihe.

Die Reihe Bd. I. pag. 113, No. 12 eignet sich zur Umkehrung aus demselben Grunde nicht, wie die für den Cosinus (s. d. No. 16)

Es ist aber $cot\,\alpha = \frac{cos\,\alpha}{sin\,\alpha}$

Nach pag. 145 und 144 hat man

$$cos\,\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{(2)} + \frac{\alpha^4}{(4)} - \frac{\alpha^6}{(6)} + \frac{\alpha^8}{(8)} - \ldots.$$

$$sin\,\alpha = \frac{\alpha}{1} - \frac{\alpha^3}{(3)} + \frac{\alpha^5}{(5)} - \frac{\alpha^7}{(7)} + \frac{\alpha^9}{(9)} - \ldots..$$

Beide Reihen durch einander dividirt werden gleich gesetzt der allgemeinen Form der Reihe

$$cot\,\alpha = A + B\alpha + C\alpha^2 + D\alpha^3 + E\alpha^4 + \ldots...$$

Nun ist $cot(-\alpha) = -cot\,\alpha$ beide sind gleich grofs aber mit entgegengesetzten Vorzeichen; es dürfen also die Glieder mit geraden Exponenten von α und das unbenannte Glied A nicht vorhanden sein, weil diese auch für $(-\alpha)$ dasselbe Vorzeichen behalten.

Ferner wird für $\alpha = 0$, $cot = \infty$ mithin mufs ein Glied vorhanden sein, in welchem α Divisor ist, wie $\frac{P}{\alpha}$ welches für $\alpha = -\alpha$, $-\frac{P}{\alpha}$ wird, also der zuerst gedachten Anforderung entspricht.

Die allgemeine Form der Reihe ist also

$$cot\,\alpha = \frac{A}{\alpha} + B\alpha + C\alpha^3 + D\alpha^5 + E\alpha^7 + \ldots..$$

Und man hat die Gleichung:

$$\frac{1 - \frac{\alpha^2}{(2)} + \frac{\alpha^4}{(4)} - \frac{\alpha^6}{(6)} + \frac{\alpha^8}{(8)} - }{\frac{\alpha}{1} - \frac{\alpha^3}{(3)} + \frac{\alpha^5}{(5)} - \frac{\alpha^7}{(7)} + \frac{\alpha^9}{(9)}} = \frac{A}{\alpha} + B\alpha + C\alpha^3 + D\alpha^5 + E\alpha^7 + F\alpha^9 + \ldots$$

Nun ist, der Nenner links mit der Reihe rechts multiplicirt:

$$\begin{array}{rl}
\alpha \times = & A + B\alpha^2 + C\alpha^4 + D\alpha^6 + E\alpha^8 + F\alpha^{10} \\
-\frac{\alpha^3}{(3)} \times = & -\frac{A}{(3)}\alpha^2 - \frac{B}{(3)}\alpha^4 - \frac{C}{(3)}\alpha^6 - \frac{D}{(3)}\alpha^8 - \frac{E}{(3)}\alpha^{10} \\
+\frac{\alpha^5}{(5)} \times = & +\frac{A}{(5)}\alpha^4 + \frac{B}{(5)}\alpha^6 + \frac{C}{(5)}\alpha^8 + \frac{D}{(5)}\alpha^{10} \\
-\frac{\alpha^7}{(7)} \times = & -\frac{A}{(7)}\alpha^6 - \frac{B}{(7)}\alpha^8 - \frac{C}{(7)}\alpha^{10} \\
+\frac{\alpha^9}{(9)} \quad = & +\frac{A}{(9)}\alpha^8 + \frac{B}{(9)}\alpha^{10} \\
-\frac{\alpha}{(11)} \quad = & -\frac{A}{(11)}\alpha^{10}
\end{array}$$

Den Zähler links auf die rechte Seite gebracht und addirt gibt:

$$0 = (A-1)\alpha^0 + \left(B - \frac{A}{(3)} + \frac{1}{(2)}\right)\alpha^2 + \left(C - \frac{B}{(3)} + \frac{A}{(5)} - \frac{1}{(4)}\right)\alpha^4 +$$

$$+ \left[D - \frac{C}{(3)} + \frac{B}{(5)} - \frac{A}{(7)} + \frac{1}{(6)}\right]\alpha^6 + \left[E - \frac{D}{(3)} + \frac{C}{(5)} - \frac{B}{(7)} + \frac{A}{(9)} - \frac{1}{(8)}\right]\alpha^8 +$$

$$+ \left[F - \frac{E}{(3)} + \frac{D}{(5)} - \frac{C}{(7)} + \frac{B}{(9)} - \frac{A}{(11)} + \frac{1}{(10)}\right]\alpha^{10} + \ldots.$$

Die einzelnen Coefficienten = 0 gesetzt und entwickelt

$$A = 1$$

$$B = -\frac{1}{3}$$

$$C = -\frac{2^3}{3(5)} = -\frac{1}{45}$$

$$D = -\frac{2^5}{3(7)} = -\frac{2}{945}$$

$$E = -\frac{3 \cdot 2^7}{5(9)} = -\frac{1}{4725}$$

$$F = -\frac{5 \cdot 2^9}{3(11)} = -\frac{2}{93555}$$

u. s. w.

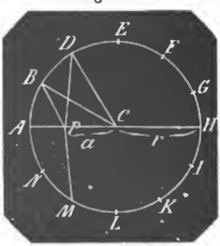
Somit ist

$$\cot \alpha = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{3}\alpha - \frac{1}{45}\alpha^3 - \frac{2}{945}\alpha^5 - \frac{1}{4725}\alpha^7 - \frac{2}{93555}\alpha^9$$

Vergleiche Cosecante No. 12, Cosinus No. 16, Cosinus versus No. 4.

Cotesischer Lehrsatz (Cotes, ein englischer Mathematiker zur Zeit Newtons). Wenn man auf dem Durchmesser AH eines Kreises aufserhalb des Mittelpunkts C einen Punkt P annimmt, jeden Halbkreisumfang in n, also den ganzen Kreisumfang in $2n$ gleiche Theile theilt, und von P aus nach den Theilpunkten gerade Linien zieht, so ist, wenn der Halbmesser $CH = r$, der Abstand $CP = a$ gesetzt wird,

Fig. 517.



1. $r^n - a^n = PA \times PD \times PF \times PH \times \ldots . PM$
2. $r^n + a^n = PB \times PE \times PG \times PJ \times \ldots . PN$

In 1 ist der erste Factor der Abstand $r - a$, in 2 ist er die nächst folgende Theillinie, der letzte Factor in beiden ist die letzte Theillinie, so dafs n Factoren entstehen. Der Punkt P kann auch aufserhalb des Kreises in der Verlängerung von HA liegen, wo dann aber $a^n - r^n$ statt $r^n - a^n$ gesetzt wird.

Zieht man nämlich von irgend einem der Theilpunkte, z. B. von D, den Halbmesser DC, so hat man

$$PD^2 = CP^2 + CD^2 \mp 2CP \times CD \cos DCP$$

oder

$$PD^2 = a^2 + r^2 \mp 2ar \cos DCP$$

wo das obere Vorzeichen für $\angle DCP$ von 0 bis 90° und von 270° bis 360°, das untere von 90° bis 270° gilt, indem hier die $\cos$ negativ sind und woher das positive Zeichen fortgelassen werden kann.

Nun ist Bogen

$$AB = BD = DE \text{ u. s. w.} = \frac{1}{n}\pi$$

folglich

$$\cos BCP = \cos \frac{1}{n}\pi$$

$$\cos DCP = \cos \frac{2}{n}\pi$$

$$\cos ECP = \cos \frac{3}{n}\pi \text{ u. s. w.}$$

Bezeichnet man nun die Theillinien von PA aus nach einander mit z; z_1; z_2; z_3 u. s. w. so hat man

$$z^2 = r^2 - 2ar \cdot \cos 0 + a^2 = (r - a)^2$$

$$z_1^2 = r^2 - 2ar \cos \frac{1}{n}\pi + a^2$$

$$z_2^2 = r^2 - 2ar \cos \frac{2}{n}\pi + a^2$$

$$z_3^2 = r^2 - 2ar \cos \frac{3}{n}\pi + a^2$$

u. s. w.

Die Bogen haben also alle die Form $\frac{2m}{n}\pi$ und $\frac{2m+1}{n}\pi$

Die Quadrate mit den Bogen der ersten Form gehören zu dem ersten Satz für $r^n - a^n$, die der 2ten Form zu dem zweiten Satz für $r^n + a^n$

Die Quadrate der Factoren von $r^n - a^n$ im ersten Quadrant sind also:

$$z^2 = (r - a)^2$$

$$z_2^2 = r^2 - 2ar \cos \frac{2}{n}\pi + a^2$$

$$z_4^2 = r^2 - 2ar \cos \frac{4}{n}\pi + a^2$$

die letzten Glieder sind, wenn n gerade ist:

$$z^2_{n-4} = r^2 - 2ar \cos \frac{n-4}{n}\pi + a^2$$

$$z^2_{n-2} = r^2 - 2ar \cos \frac{n-2}{n}\pi + a^2$$

$$z^2_n = r^2 - 2ar \cos \pi + a^2$$

$$= r^2 + 2ar + a^2 = (r + a)^2 = HP^2$$

dieselben wenn n ungerade ist

$$s^2_{n-3} = r^2 - 2\,ar\cos\frac{n-3}{n}\pi + a^2$$

$$s^2_{n-1} = r^2 - 2\,ar\cos\frac{n-1}{n}\pi + a^2 = GP^2$$

Die Quadrate der Factoren von $r^n + a^n$ sind

$$s_1^2 = r^2 - 2\,ar\cos\frac{1}{n}\pi + a^2$$

$$s_3^2 = r^2 - 2\,ar\cos\frac{3}{n}\pi + a^2$$

$$s_5^2 = r^2 - 2\,ar\cos\frac{5}{n}\pi + a^2$$

die letzten Glieder sind, wenn n gerade ist

$$s^2_{n-3} = r^2 - 2\,ar\cos\frac{n-3}{n}\pi + a^2$$

$$s^2_{n-1} = r^2 - 2\,ar\cos\frac{n-1}{n}\pi + a^2$$

und wenn n ungerade ist

$$s^2_{n-2} = r^2 - 2\,ar\cos\frac{n-2}{n}\pi + a^2$$

$$s^{2n} \quad = r^2 + 2\,ar + a^2 = (r+a)^2$$

2. Zu dem Beweise des C. Lehrsatzes gelangt man nun auf folgende Weise:

Die Trigonometrie erweist die Richtigkeit der Formel

$$\cos\alpha \pm \sin\alpha\sqrt{-1} = \sqrt[n]{[\cos n\alpha \pm \sin n\alpha\sqrt{-1}]} \qquad \text{I.}$$

Setzt man $\cos n\alpha = 1$, so ist $n\alpha$ entweder $= 0$ oder $= 2\pi$ oder einem Vielfachen von 2π, überhaupt $= 2m\pi$, wo $m = 0$ und = jeder beliebigen positiven ganzen Zahl sein kann, und für jedes m ist $\sin n\alpha = 0$. Es ist demnach für diesen Fall

$$\cos\alpha \pm \sin\alpha\sqrt{-1} = \sqrt[n]{1}$$

und

$$\alpha = \frac{2m}{n}\pi$$

für $m = 0$ entsteht $\cos 0 \pm \sin 0\sqrt{-1} = +1$
für $m = \frac{1}{2}n$ (wenn n gerade ist) entsteht

$$\cos\pi \pm \sin\pi\sqrt{-1} = -1$$

Ist n gerade, so sind 2 Wurzeln von 1^n möglich, nämlich $+1$ und -1; ist n ungerade so ist $+1$ die einzige mögliche Wurzel von 1^n. Die übrigen $n-2$ oder $n-1$ Wurzeln von 1^n sind unmöglich und sie werden durch den Ausdruck $\cos\alpha \pm \sin\alpha\sqrt{-1}$ sämmtlich geliefert, wenn man für m die natürlich aufeinander folgenden Zahlen 1 bis $n-1$ setzt, wo dann für den Fall, dafs n gerade ist, auch die zweite mögliche Wurzel (für $m = \frac{1}{2}n$) mit inbegriffen ist.

Dafs nicht mehr als diese $n-1$ Wurzeln entstehen ersieht man aus den Wurzeln wenn man für m die Werthe $m+k$ und $m-k$ setzt; denn es ist

$$\cos\frac{2(m+k)}{n}\pi = \cos\frac{2m+2k}{n}\pi = \cos\left(1+\frac{2k}{n}\right)\pi$$

$$\cos\frac{2(m-k)}{n}\pi = \cos\left(1-\frac{2k}{n}\right)\pi$$

Es ist aber

$$\cos\left(1+\frac{2k}{n}\right)\pi = \cos\left(1-\frac{2k}{n}\right)\pi$$

und

$$\sin\left(1+\frac{2k}{n}\right)\pi = -\sin\left(1-\frac{2k}{n}\right)\pi$$

Es ist mithin

$$\cos\frac{2(m+k)}{n}\pi \pm \sin\frac{2(m+k)}{n}\pi\sqrt{-1}$$

$$= \cos\frac{2(m-k)}{n}\pi \mp \sin\frac{2(m-k)}{n}\pi\sqrt{-1} \qquad \text{II.}$$

Wenn also $m > n$ genommen wird, so entstehen Werthe der Wurzel, die schon bei m um eben so viel kleiner als n vorgekommen sind; es ist daher der höchste Werth von $m = n$, und es entstehen dann für $m = 0$ bis $m = n$ zwar $n+1$ Wurzeln, aber die erste für $m = 0$, also für $\alpha = 0$ und die letzte für $m = n$, also für $\alpha = 2\pi$ sind einander gleich, so dafs überhaupt von $m = 0$ bis $m = n-1$ oder von $m = 1$ bis $m = n$ nur n Wurzeln entstehen, in welchen die eine oder die beiden einzigen möglichen Wurzeln mit inbegriffen sind.

3. Setzt man unter der Voraussetzung dafs n gerade ist, in die beiden letzten Formeln II. für die Wurzel $\frac{n}{2}$ für m so hat man die beiden gleichen Wurzeln

$$\cos\frac{2\left(\frac{n}{2}+k\right)}{n}\pi \pm \sin\frac{2\left(\frac{n}{2}+k\right)}{n}\pi\sqrt{-1} \qquad \text{III.}$$

und

$$\cos\frac{2\left(\frac{n}{2}-k\right)}{n}\pi \mp \sin\frac{2\left(\frac{n}{2}-k\right)}{n}\pi\sqrt{-1} \qquad \text{IV.}$$

von welchen die beiden Wurzeln mit den oberen und die mit den beiden unteren Vorzeichen einander gleich sind. Multiplicirt man also die beiden Wurzeln für $+k$ in No. III, ebenso die beiden Wurzeln für $-k$ in No. IV, so entstehen 2 einander gleiche Producte; demnach hat man nur eins dieser Producte als eine Doppelwurzel zu nehmen. Wählt man die untere, so hat man vereinfacht die 2 Wurzeln in einer Doppelwurzel:

$$\left[\cos\left(1-2\frac{k}{n}\right)\pi + \sin\left(1-2\frac{k}{n}\right)\pi\sqrt{-1}\right]\left[\cos\left(1-2\frac{k}{n}\right)\pi - \sin\left(1-2\frac{k}{n}\right)\pi\sqrt{-1}\right]$$
$$= \cos^2\left(1-2\frac{k}{n}\right)\pi + \sin^2\left(1-2\frac{k}{n}\right)\pi \qquad \text{V.}$$

Setzt man in Formel IV. statt k nach einander die Werthe $\frac{n}{2}$, $\frac{n}{2}-1$, $\frac{n}{2}-2$, .. $\frac{n}{2}-\frac{n}{2}$, so erhält man

$$\cos 0 \quad \pm \sin 0\sqrt{-1} = +1 \mp 0$$
$$\cos 2\frac{\pi}{n} \mp \sin 2\frac{\pi}{n}\sqrt{-1}$$
$$\cos 4\frac{\pi}{n} \mp \sin 4\frac{\pi}{n}\sqrt{-1}$$
. . . .
$$\cos 2\cdot\left(\frac{n}{2}-3\right)\frac{\pi}{n} \mp \sin 2\cdot\left(\frac{n}{2}-3\right)\frac{\pi}{n}\sqrt{-1}$$
$$\cos 2\cdot\left(\frac{n}{2}-2\right)\frac{\pi}{n} \mp \sin 2\cdot\left(\frac{n}{2}-2\right)\frac{\pi}{n}\sqrt{-1}$$
$$\cos 2\cdot\left(\frac{n}{2}-1\right)\frac{\pi}{n} \mp \sin 2\cdot\left(\frac{n}{2}-1\right)\frac{\pi}{n}\sqrt{-1}$$
$$\cos n\cdot\frac{\pi}{n} \mp \sin n\cdot\frac{\pi}{n}\sqrt{-1} = -1 \mp 0$$

Die erste und die letzte Wurzel sind einfach, die übrigen $\left(\frac{n}{2}-1\right)$ Wurzeln sind mit + und − sämmtlich doppelt und es entstehen überhaupt n Wurzeln, von denen nur die erste und die letzte mögliche Wurzeln sind.

4. Setzt man $\cos n\varphi = a^n$ statt 1^n, so hat man jeder einzelnen der vorstehenden Wurzeln noch den Factor a zu geben.

Ist nun, um auf den Cotesischen Lehrsatz zurück zu kommen

$$r^n - a^n = 0$$

also

$$r^n = +a^n$$

so sind die Wurzeln für a^n auch die für r^n. Bezeichnet man diese mit w; w_1; w_2; .... w_n so ist die Differenz zwischen r und jeder derselben, wie $(r-w_m)$ ein Factor von $r^n - a^n$ und folglich (s. algebraische Gleichung 11, 15, 17 u. s. w.) ist $r^n - a^n = (r-w)(r-w_1)(r-w_2).....(r-w_n)$

Man hat also die einzelnen Factoren von $r^n - a^n$

$$r - a\left[\cos 0 \pm \sin 0\sqrt{-1}\right]$$
$$r - a\left[\cos\frac{2}{n}\pi \pm \sin\frac{2}{n}\pi\sqrt{-1}\right]$$
$$r - a\left[\cos\frac{4}{n}\pi \pm \sin\frac{4}{n}\pi\sqrt{-1}\right]$$
. . . .
$$r - \left[\cos\frac{n-2}{n}\pi \pm \sin\frac{n-2}{n}\pi\sqrt{-1}\right]$$
$$r - \left[\cos\frac{n}{n}\pi \pm \sin\frac{n}{n}\pi\sqrt{-1}\right]$$

Multiplicirt man nun je 2 zusammengehörige nämlich je 2 durch ± vereinigte Wurzeln zu einem Doppelfactor wie IV zu der Doppelwurzel V so erhält man

$$\left[r - a\left(\cos 0 + \sin 0\sqrt{-1}\right)\right]\left[r - a\left(\cos 0 - \sin 0\sqrt{-1}\right)\right]$$
$$\left[r - a\left(\cos\frac{2}{n}\pi + \sin\frac{2}{n}\pi\sqrt{-1}\right)\right]\left[r - a\left(\cos\frac{2}{n}\pi - \sin\frac{2}{n}\pi\sqrt{-1}\right)\right]$$

u. s. w. woraus

1) $r^2 - 2ar + a^2 = (r-a)^2$

2) $r^2 - ar\left(2\cos\frac{2}{n}\pi + \sin\frac{2}{n}\pi\sqrt{-1} - \sin\frac{2}{n}\pi\sqrt{-1}\right) + a^2\left(\cos^2\frac{2}{n}\pi + \sin^2\frac{2}{n}\pi\right)$

$= r^2 - 2ar\cos\frac{2}{n}\pi + a^2$

3) $r^2 - 2ar\cos\frac{4}{n}\pi + a^2$

. . . .

$\left.\frac{n}{2} - 1\right)$ $r^2 - 2ar\cos\frac{n-2}{n}\pi + a^2$

$\left.\frac{n}{2}\right)$ $r^2 - 2ar\cos\pi + a^2 = r^2 + 2ar + a^2 = (r+a)^2$

5. Diese Factoren stimmen nun genau mit den für z^2, z_2^2... bis $z_{\frac{n}{2}}^2$ überein, und es ist nur noch zu bemerken, dafs der erste Factor $= PA^2$, der letzte $= PH^2$ ist, dafs also die quadrirten Linien nur dem ersten halben Kreis angehören. Dagegen liegt jeder Theillinie des ersten Halbkreises eine ihr gleiche in dem zweiten Halbkreis gegenüber, wie der PD die PM; es ist also $z_2^2 = PD^2 = PD \times PM$. Da nun, wie am Schlufs No. 3 bemerkt worden, der erste und der letzte Factor, hier PA und PH nur einfach genommen werden darf, wenn nicht $n+2$ statt n Wurzeln entstehen sollen, was unmöglich ist, so ist der 1. Satz, nämlich

$r^n - a^n = PA \times PD \times PF \times \ldots PM$

erwiesen.

6. Wenn der Halbkreis in eine ungrade Anzahl Theile getheilt ist (n ungerade) so fällt für den ersten Satz keine Theillinie wie PH in den Durchmesser, sondern zu beiden Seiten derselben, in PG und PJ. Man sieht, dafs beide einander gleich sind und dafs man wieder nur die Quadrate der Theillinien des ersten Halbkreises erhält. Für diesen Fall kann man in Gl. II nicht $\frac{n}{2}$ für m setzen, sondern nur $\frac{n \pm 1}{2}$.

Für $m = \frac{n+1}{2}$ hat man den allgemeinen Ausdruck des Bogens

statt Formel IV. $\alpha = \frac{2\left(\frac{n+1}{2} - k\right)}{n}\pi = \left(1 + \frac{1-2k}{n}\right)\pi$

für $m = \frac{n-1}{2}$ $\alpha = \frac{2\left(\frac{n-1}{2} - k\right)}{n}\pi = \left(1 - \frac{1+2k}{n}\right)\pi$

Setzt man für den ersten, die Werthe von k nacheinander

$\frac{n+1}{2}, \frac{n-1}{2}, \frac{n-3}{2} \ldots\ldots \frac{6}{2}, \frac{4}{2}, \frac{2}{2}, 0$

so erhält man für α nach einander

$0; \frac{2}{n}\pi; \frac{4}{n}\pi; \ldots. \frac{n-3}{n}\pi; \frac{n-1}{n}\pi; \frac{n+1}{n}\pi$

Setzt man für den 2ten Bogen die Werthe von k

$\frac{n-1}{2}, \frac{n-3}{2}, \ldots. \frac{6}{2}, \frac{4}{2}, \frac{2}{2}, 0$

so erhält man für α

$0, \frac{2}{n}\pi, \frac{4}{n}\pi \ldots. \frac{n-3}{n}\pi, \frac{n-1}{n}\pi$

für $k = -1$ entsteht erst $\alpha = \frac{n+1}{n}\pi$

Man hat von beiden Werthen für m also nur einen derselben zu Grunde zu legen, weil man für beide dieselben Bogen α erhält, und zwar dieselben wie No. 3 für $m = \frac{n}{2}$, nur dafs der letzte nicht π sondern $\frac{n-1}{n}\pi$ ist; und dieselben Doppelfactoren, nur dafs der letzte nicht wie No. 5 $= (r+a)^2 = PH^2$ sondern

$= r^2 - 2ar\cos\frac{n-1}{n}\pi + a^2 = PG^2 = PG \times PJ$

so dafs auch in diesem Falle

$r^n - a^n = PA \times PD \times PF \times \ldots. PM$

7. Zum Beweise des 2ten Satzes:

$r^2 + a^2 = PB \times PE \times PG \times \ldots. PN$

setze man in Gl. I. $\cos n\alpha = -1$ so ist $n\alpha$ entweder $= \pi$ oder $=$ einem ungeraden Vielfachen von π, überhaupt $(2m+1)\pi$, wo $m = 0$ und jede beliebige ganze positive Zahl sein kann. Für jedes m ist $\sin n\alpha = 0$ demnach ist

$\cos\alpha \pm \sin\alpha\sqrt{-1} = \sqrt[n]{-1}$

und $\alpha = \frac{2m+1}{n}\pi$

für $m = 0$ entsteht $\cos\frac{1}{n}\pi \pm \sin\frac{1}{n}\pi\sqrt{-1}$

für $m = 1$ $\qquad \cos\frac{3}{n}\pi \pm \sin\frac{3}{n}\pi\sqrt{-1}$

für $m = 2$ $\qquad \cos\frac{5}{n}\pi \pm \sin\frac{5}{n}\pi\sqrt{-1}$

u. s. w.

Ist n ungerade so sind die letzten Glieder

. . . .

für $m = \frac{n-3}{2}$; $\cos\frac{n-2}{n}\pi \pm \sin\frac{n-2}{n}\pi\sqrt{-1}$

für $m = \frac{n-1}{2}$; $\cos\pi \pm \sin\pi\sqrt{-1}$

Die hierzu gehörige Theillinie ist *PH*, $\cos\pi \pm \sin\pi\sqrt{-1} = -1 \pm 0 = -1$. Diese Theillinie als Wurzel bleibt einfach, weil sie keine ihr correspondirende hat, die vorhergehenden $\frac{n-1}{2}$ Wurzeln werden quadrirt und es entstehen zusammen $2\cdot\frac{n-1}{2} + 1 = n$ einfache Wurzeln, wie es die Potenz erfordert.

Ist n gerade, so sind die letzten Glieder

für $m = \frac{n}{2} - 2$; $\cos\frac{n-3}{n}\pi \pm \sin\frac{n-3}{n}\pi\sqrt{-1}$

für $m = \frac{n}{2} - 1$; $\cos\frac{n-1}{n}\pi \pm \sin\frac{n-1}{n}\pi\sqrt{-1}$

Die zu dem letzten Gliede gehörige Theillinie ist *PG*, ihr correspondirt die Linie *PJ*, in *H* fällt keine Theillinie, sämmtliche $\frac{n}{2}$ Theillinien von $m = 0$ bis $m = \frac{n}{2} = 1$ werden quadrirt und es entstehen wieder n einfache Wurzeln. Die Doppelwurzeln hieraus sind also wie aus No. 4:

$$1.\quad r^2 - 2ar\cos\frac{1}{n}\pi + a^2$$

$$2.\quad r^2 - 2ar\cos\frac{3}{n}\pi + a^2$$

$$3.\quad r^2 - 2ar\cos\frac{5}{n}\pi + a^2$$

. . . .

Das letzte Glied entweder $r + a$

oder $\qquad r^2 - 2ar\cos\frac{n-1}{n}\pi + a^2$

Mit der Uebereinstimmung dieser Glieder und der Glieder für $s_1{}^2, s_3{}^2, s_5{}^2$ u. s. w. ist der 2te Satz bewiesen, nämlich

$$r^2 + a^2 = PB \times PE \times PG \times \ldots\ldots PN$$

Cubikcubische Wurzel für 6te Wurzel aus einer Zahl ist eine nicht mehr gebräuchliche Bezeichnung. Die Ausziehung derselben aus einer Zahl kann nach der Bd. 1, pag. 243 No. 15 angegebenen Methode geschehen; bequemer ist es, erst die 3te Wurzel und aus dieser die zweite, oder erst die 2te und aus dieser die dritte Wurzel zu ziehen; es ist nämlich

$\sqrt[6]{a} = \sqrt[3]{\sqrt[2]{a}} = \sqrt[2]{\sqrt[3]{a}}$ Anweisung dazu gibt Bd. 1, pag. 240, No. 2 bis 8 für die $\sqrt[2]{\;}$; pag. 242, No. 9 bis 12 für die Cubikwurzel.

Cubikcubische Zahl, Cubocubus, eine nicht mehr gebräuchliche Bezeichnung für die 6te Potenz einer Zahl (a^6).

Cubik-Einheit ist der Würfel als Einheit zu Vermessung und Berechnung körperlicher Räume. Für diesen Würfel wird zur Seite eine irgend wo gesetzlich festgesetzte Länge zur Einheit angenommen; z. B. 1 Fufs zur Seite gibt den Würfel: Cubikfufs genannt, 1 Meter zur Seite den Cubikmeter u. s. w., und jeden körperlichen Raum drückt man in die Anzahl dieser C aus, welche er enthält. So z. B. hat ein rechtwinkliges Parallelepipedum von der Länge l Fufs, der Breite b Fufs und der Höhe h Fufs den körperlichen Inhalt von $l \times b \times h$ Cubikfufs. (Vergleiche Cubisches Maafs und Cubus.)

Cubik-Inhalt, Körperlicher Inhalt eines Körpers oder eines körperlichen Raumes ist die Anzahl der Cubik-Einheiten, welche er enthält.

Cubikmaafs ist eine bestimmte Cubik-Einheit, als Cubikfufs, Cubikruthe, Cubikzoll u. s. w.

Cubiktafeln sind Tafeln, in welchen die Cubi der natürlich aufeinander folgenden Zahlen angegeben sind; wie in Vega's gröfseren logarithmischen und trigonometrischen Tafeln.

Diese Tafeln sind mit Hülfe von Differenzenreihen berechnet: hat man die ersten 5 Cuben $1^3 = 1$, $2^3 = 8$, $3^3 = 27$, $4^3 = 64$, $5^3 = 125$ ermittelt, schreibt diese Zahlen als arithmetische Reihe höherer Ordnung neben einander und bildet die Differenzenreihen so erhält man

```
1     8     27     75     125
   7     19     37     61
      12     18     24
```

und ersieht, dafs die zweite Differenzenreihe eine Reihe der ersten Ordnung mit der constanten Differenz 6 ist.

```
125 ⁄←  216   343   512   729   1000   1331   1728 ...
 61 ⁄←   91   127   169   217   271    331    397 .....
 24 ⁄—   30    36    42    48    54     60     66 ........
```

Nun rechnet man $24+6=30, 30+61=91$, $91+125=216$ und hat 216 als 6^3; ferner $30+6=36, 36+91=127, 127+216=343 =7^3$; weiter $36+6=42$, $42+127=169$, $169+343=512=8^3$ u. s. f. Eine Prüfung und Versicherung der Richtigkeit ergiebt sich nach je 10 Zahlen, nämlich bei den Wurzeln 10, 20, 30, 40, deren Cuben 1000, 8000, 27000, 64000 .... sind.

Cubikwurzel einer Zahl ist diejenige Zahl, welche 3mal mit sich selbst multiplicirt jene Zahl hervorbringt. Die wenigsten Zahlen sind Cuben, wie z. B. 1, 8, 27, 64; alle dazwischen liegenden Zahlen sind keine Cuben, so z. B. existirt keine Zahl, welche 3mal mit sich selbst multiplicirt die Zahlen 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10 u. s. w. hervorbringt. Dagegen kann man durch Decimalen der $\sqrt[3]{}$ solcher Zahlen möglichst nahe kommen und daher nennt man eine Zahl von der die $\sqrt[3]{}$ angegeben werden soll, aber nur näherungsweise angegeben werden kann, einen unvollständigen Cubus.

Bd. I, pag. 242, No. 9 und 10 lehrt das Ausziehen der $\sqrt[3]{}$ aus ganzen Zahlen, No. 11 aus Decimalbrüchen auf elementarem Wege, No. 13 mit Hülfe von Logarithmen, No. 14 aus trigonometrischen Functionen, No. 15 bis 21 durch Reihen-Entwickelung auch für andere Wurzeln als $\sqrt[3]{}$. Von pag. 250 ab das Ausziehen aller Wurzeln aus Buchstabengröfsen und pag. 252 No. 6 das Ausziehen der $\sqrt[3]{}$ aus unvollständigen Cuben von Buchstabengröfsen.

Als Beispiel von näherungsweiser Auffindung der $\sqrt[3]{}$ aus einem unvollständigen Cubus von Zifferzahlen diene $\sqrt[3]{2}$. Es ist

$\sqrt[3]{2}$ nahe 1; $1^3=1$
näher 1,2; $1,2^3=1,728$
näher 1,25; $1,25^3=1,953125$
näher 1,259; $1,259^3=1,995616979$
näher 1,2599; $1,2599^3=1,9998997$
näher 1,25992; $1,25992^3=1,999981$
näher 1,259021; $1,259921^3=1,999985$

Vergl. auch Art. Cubus, No. 2, III.

2. Hat man aus einer Zahl die $\sqrt[3]{}$ ausgezogen und sie geht auf, so ist jene Zahl ein vollständiger Cubus. Will man sich von der Richtigkeit der Rechnung überzeugen, so cubirt man die erhaltene $\sqrt{}$ und sie mufs bei richtiger Rechnung den zuerst gegebenen Cubus liefern. Die sogenannte Neunerprobe, von der schon Bd. I, pag. 28, Art. Addition No. 4 die Rede gewesen ist, führt schneller zum Ziel. Man nennt den Ueberschufs der Summe der Ziffern einer Zahl über 0, 9 oder über ein Vielfaches von 9 die Probezahl und zu jeder Probezahl einer Wurzel gehört eine ganz bestimmte Probezahl ihres Cubus. Z. B. der Cubus von 5 ist 125; die $\sqrt{}=5$ hat den Ueberschufs $=5$ über 0, also die Probezahl 5; der Cubus 125 hat die Summe der Ziffern $=1+2+5=8$ also die Probezahl 8 und es gehört zur Probezahl 5 der $\sqrt{}$ die Probezahl 8 des Cubus. Eben so ist $6^3=216$; die Probezahl der Wurzel ist $=6$, die des Cubus $=0$.

Man erhält die Probezahlen, die natürlich von 0 bis 8 nur existiren, wie folgt:

Wurzel,	Probezahl;	Cubus,	Probezahl.
1	1	1	1
2	2	8	8
3	3	27	0
4	4	64	1
5	5	125	8
6	6	216	0
7	7	343	1
8	8	512	8
9	0	729	0

Die Wurzeln haben also alle Probezahlen von 0 bis 8, die Cubi nur die Probezahlen 0, 1 und 8.

Beispiele.

Wurzel,	Probezahl;	Cubus,	Probezahl.
36	0	46656	0
145	1	3048625	1
317	2	31855013	8
723	3	377933067	0
643	4	265847707	1
194	5	7301384	8
681	6	315821241	0
358	7	45882712	1
584	8	199176704	8

Dafs auch mehrziffrige Zahlen dem Gesetz der einziffrigen Wurzeln folgen müssen beweist sich folgendermaafsen:

Jede noch so grofse Zahl kann zerlegt werden in $9N+n$ wo n eine einziffrige Zahl oder $=0$ ist. Nun ist

$$(9N+n)^3=9^3\cdot N^3+3\cdot9^2\cdot N^2\cdot n+3\cdot9\,N\cdot n^2+n^3$$

Ist mithin der Ueberschufs der Summe der Ziffern einer mehrziffrigen Zahl über ein Vielfaches von 9 = einer einziffrigen Zahl n, also auch = dem Ueberschufs dieser Zahl n über 0, so ist auch der Ueberschufs der Summe der Ziffern des Cubus jener mehrziffrigen Zahl über ein Vielfaches von 9 = dem Ueberschufs der Ziffern des Cubus der einziffrigen Zahl n über ein Vielfaches von 9.

3. Dieselbe Probe kann man mit Nutzen anwenden, um die Richtigkeit der Rechnung bei der Ausziehung der $\sqrt[3]{}$ aus einem unvollkommenen Cubus zu prüfen z. B.

$$\begin{array}{rl}
& \sqrt[3]{79} = 4{,}290940\ldots \\
& 64 \\
\hline
& 15000 \\
3\cdot 4^2\cdot 2 = & 9600 \\
3\cdot 5\cdot 2^2 = & 480 \\
2^3 = & 8 \\
\hline
& 10088 \\
\hline
& 4912000 \\
3\cdot 42^2\cdot 9 = & 4762800 \\
3\cdot 42\cdot 9^2 = & 102060 \\
9^3 = & 729 \\
\hline
& 4865589 \\
\hline
& 46411000000 \\
3\cdot 4290^2\cdot 8 = & 44169840000 \\
3\cdot 4290\cdot 8^2 = & 8236800 \\
8^3 = & 512 \\
\hline
& 44178077312 \\
\hline
& 2232922688000 \\
3\cdot 42908^2\cdot 4 = & 2209315756800 \\
3\cdot 42908\cdot 4^2 = & 20595840 \\
4^3 = & 64 \\
\hline
& 2209356352704 \\
\hline
& 23586335296
\end{array}$$

u. s. w.

Zum Versuch, ob die Wurzel 42 richtig ist hat man

$$79000 - 4912 = 74088 \text{ als } 42^3.$$

Die Probezahl 0 von 74088 stimmt mit der 6 von 42.

Zum Versuch ob die Wurzel 429 richtig ist, hat man

$$79000000 - 46411 = 78953589 \text{ als } 429^3.$$

Die Probezahl 0 des Cubus stimmt mit der Probezahl 6 von 429.

Zum Versuch, ob die Wurzel 42908 richtig ist, hat man

$$\begin{array}{rl} & 79000000000000 \\ - & 2232922688 \\ \hline = & 78997767077312 \text{ als } 42908^3. \end{array}$$

Die Probezahl 8 des Cubus stimmt mit der Probezahl 5 von 42908.

Zum Versuch endlich, ob die Wurzel 429084 richtig ist, hat man

$$\begin{array}{rl} & 79000000000000000 \\ - & 23586335296 \\ \hline = & 78999976413664704 \text{ als } 429084^3 \end{array}$$

Die Probezahl 0 des Cubus stimmt mit der Probezahl 0 von 429084 u. s. w.

Aber auch diese Prüfungsweise kann man sich noch erleichtern:

Der Cubus von 42 ist $= 79000 - 4912$; man hat also nicht diese Differenz zu bilden, sondern nur die Differenz deren Ziffernsummen $= 7 + 9 - (4 + 9 + 1 + 2) = 16 - 16 = 0$ und die Probezahl 6 von 42 stimmt mit der Probezahl 0 des Cubus.

Ebenso stimmt die Probezahl 6 der Wurzel 429 mit der von $79 - 46411$, nämlich mit $16 - 16 = 0$ des Cubus.

Desgleichen die Probezahl 5 der Wurzel 42908 mit der von $79 - 2232922688$ nämlich mit $16 - 44 = -28 = -4\cdot 9 + 8$ oder mit 8 des Cubus.

Endlich die Probezahl 0 der Wurzel 429084 mit der von $79 - 23586335296$, nämlich mit $16 - 52 = -36$ also mit $+0$ des Cubus.

4. Die Cubikwurzel aus a^3 ist $= a$; es hat aber die Gleichung $x^3 - a^3 = 0$ als cubische Gleichung 3 Wurzeln (s. Bd. I, pag. 50, No. 13), und es mufs folglich $\sqrt[3]{a^3}$ aufser a noch 2 Werthe haben, so dafs wenn diese b und c sind:

$$(x - a)(x - b)(x - c) = x^3 - a^3$$

Man erhält also diese beiden Werthe wenn man $x^3 - a^3$ durch $x - a$ dividirt nämlich

$$\frac{x^3 - a^3}{x - a} = x^2 + ax + a^2 = 0$$

woraus die Wurzeln nach Bd. I, pag. 49, No. 9:

$$x = -\tfrac{1}{2}a\left(1 \pm \sqrt{-3}\right)$$

Die 3 Kubikwurzeln von a^3 sind demnach

$$a;\ -\tfrac{1}{2}a\left(1 + \sqrt{-3}\right);\ -\tfrac{1}{2}a\left(1 - \sqrt{-3}\right) \quad (1)$$

Ist a^3 irrational z. B. von der Form $b \pm \sqrt{c}$, so hat man natürlich die 3 Cubikwurzeln von a^3

$$\sqrt[3]{b \pm \sqrt{c}};\ -\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{b \pm \sqrt{c}}\,(1 + \sqrt{-3});$$
$$-\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{b \pm \sqrt{c}}\,(1 - \sqrt{-3}) \quad (2)$$

Ist a^3 unmöglich, etwa von der Form $b^3\sqrt{-1}$ so ist die eine Wurzel offenbar $-b\sqrt{-1}$ denn $(-b\sqrt{-1})^2$ ist $= -b^2$ und $(-b^2)\times(-b\sqrt{-1}) = +b^3\sqrt{-1}$ und dividirt man $x^3 - b^3\sqrt{-1}$ durch $x + b\sqrt{-1}$ so erhält man

$$x^2 + xb\sqrt{-1} - b^2 = 0$$

woraus $\quad x = \tfrac{1}{2}b\,(\sqrt{-1} \pm \sqrt{3}) \qquad (3)$

die 3 Wurzeln aus $b^3\sqrt{-1}$ sind daher

$$-b\sqrt{-1};\ \tfrac{1}{2}b\left(\sqrt{-1} + \sqrt{3}\right);\ \tfrac{1}{2}b\left(\sqrt{-1} - \sqrt{3}\right)$$

Hat das unmögliche a^3 die Form $b \pm c\sqrt{-1}$ so ist die erste Wurzel $= \sqrt[3]{b \pm c\sqrt{-1}}$ und die andern beiden sind

$$-\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{b \pm c\sqrt{-1}}\cdot\left(1 \pm \sqrt{-3}\right)$$

Die 3 Cubikwurzeln von $b \pm c\sqrt{-1}$ sind daher

$$\sqrt[3]{b \pm c\sqrt{-1}};\ -\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{b \pm c\sqrt{-1}}\,(1 + \sqrt{-3});$$
$$-\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{b \pm c\sqrt{-1}}\,(1 - \sqrt{-3}) \quad (4)$$

5. Die Cubikwurzel aus imaginären Gröfsen von der Form $\sqrt[3]{-a}$ erregen bisweilen Bedenken und veranlassen Un-

richtigkeiten, daher hier folgende kurze Erläuterungen:

Jede imaginäre Gröfse von der Form $b\sqrt{-a}$ läfst sich umändern in $b\sqrt{a} \times \sqrt{-1}$ und da $b\sqrt{a}$ als Factor nichts bedenkliches hat, so soll nur von der Gröfse $\sqrt{-1}$ die Rede sein.

Es ist	$\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = \sqrt[2]{(-1)^2} = -1$	
daher	$(\sqrt{-1})^3 = (\sqrt{-1})^2 \times \sqrt{-1} = -1\sqrt{-1} = -\sqrt{-1}$	(1)
folglich auch	$\sqrt[3]{(-\sqrt{-1})} = \sqrt{-1}$	(2)
ferner ist	$(-\sqrt{-1}) \times (-\sqrt{-1}) = (-\sqrt{-1})^2 = +(\sqrt{-1})^2 = -1$	
daher	$(-\sqrt{-1})^3 = (-\sqrt{-1})^2 \times (-\sqrt{-1}) = -1 \times (-\sqrt{-1}) = +\sqrt{-1}$	(3)
folglich auch	$\sqrt[3]{(+\sqrt{-1})} = -\sqrt{-1}$	(4)

6. Band I, pag. 253, No. 8 ist die $\sqrt[2]{}$ aus einem Binom von der Form $A \pm \sqrt{B}$ bestimmt worden. Dies veranlafst auch $\sqrt[3]{A \pm \sqrt{B}}$ bestimmen zu wollen.

Es sei $\sqrt[3]{A \pm \sqrt{B}} = x \pm y\sqrt{z}$ so ist z jedenfalls ein Factor von B und man kann setzen

$$\sqrt[3]{(A \pm \sqrt{B})} = x \pm y\sqrt{B} \qquad (1)$$

woraus $A \pm \sqrt{B} = (x \pm y\sqrt{B})^3$ (2)

und $A^2 - B = (x^2 - By^2)^3$ (3)

Eine Bedingung ist demnach, dafs $A^2 - B$ ein vollständiger Cubus sei; sollte es nicht sein, so läfst sich eine Zahl n finden, so dafs $n(A^2 - B)$ zum vollständigen Cubus wird. Es sei dieser Cubus $= m^3$ so ist

$$m = x^2 - By^2 \qquad (4)$$

Nun ist aus Gl. 2:

$$A + \sqrt{B} = x^3 + 3x^2y\sqrt{B} + 3xy^2B + y^3B\sqrt{B}$$

hiervon das Rationale dem Rationalen, das Irrationale dem Irrationalen gleich gesetzt:

$$A = x^3 + 3Bxy^2$$
$$1 = 3x^2y + y^3B$$

oder aus Gl. 4:

$$y^2 = \frac{x^2 - m}{B}$$

also $A = x^3 + 3x(x^2 - m)$

woraus $x^3 - \frac{3}{4}mx - \frac{A}{4} = 0$

eine Gleichung, die mittelst der Cardanischen Formel, Bd. I, pag. 52, No. 21 aufzulösen ist.

Diese Entwickelung befindet sich in Klügels math. Wörterbuch Bd. I, pag. 577, wo nur $\sqrt[3]{A \pm \sqrt{B}}$ nicht $= x \pm y\sqrt{B}$ sondern $= (n + \sqrt{q})\sqrt{a}$ gesetzt ist, welches zu demselben Endresultat führt, nämlich zu der cubischen Gleichung

$$A = 4p^3a - 3mpa$$

oder geordnet $p^3 - \frac{3}{4}mp - \frac{A}{4a} = 0$

Geht man auf diese allgemeine cubische Gleichung näher ein, entwickelt nämlich x nach der Cardanischen Formel, so erhält man nach Reduction:

$$x = \tfrac{1}{2}\left[\sqrt[3]{A + \sqrt[2]{A^2 - m^3}} + \sqrt[3]{A - \sqrt{A^2 - m^3}}\right]$$

Setzt man hierein für m seinen ursprünglichen Werth $A^2 - B$ so hat man

$$x = \tfrac{1}{2}\left[\sqrt[3]{A + \sqrt{B}} + \sqrt[3]{A - \sqrt{B}}\right]$$

d. h. das Resultat, welches man aus der ersten Annahme, Gleichung 1 findet, nämlich

$$\sqrt[3]{A + \sqrt{B}} = x + y\sqrt{B}$$
$$\sqrt[3]{A - \sqrt{B}} = x - y\sqrt{B}$$

folglich addirt und mit 2 dividirt:

$$\tfrac{1}{2}\left[\sqrt[3]{A + \sqrt{B}} + \sqrt[3]{A - \sqrt{B}}\right] = x$$

Die Entwickelung hat nur einen Cirkel gemacht, und die von Klügel hinterher gegebenen Beispiele

$$\sqrt[3]{2 \pm \sqrt{5}} = \tfrac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$$
$$\sqrt[3]{5 \pm 3\sqrt{3}} = (1 \pm \sqrt{3})\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}}$$

sind mit Hülfe der obigen cubischen Gl. nicht berechnet.

Cubikzahl ist die dritte Potenz einer Zahl. Vergl. Cubiktafeln.

Cubisch ist zunächst das was sich auf den Würfel, den Cubus bezieht; hiernächst, weil der Würfel die Körper- oder Cubikeinheit ist, was sich auf die Körperlichkeit eines Gegenstandes bezieht, also körperlich. So ist in dem Art. Ausdehnung der Körper durch die Wärme (Bd. I, pag. 187) die Ausdehnung als Längen-A oder lineare A, als Flächen-A oder quadratische A und als Körper-A oder cubische A betrachtet worden.

Da der cubische Raum in 3 Ausdehnungen oder Hauptrichtungen begriffen wird, von denen jede eine Längenausdehnung ist, die zu Bestimmung der cu-

bischen Gröfse mit einander multiplicirt werden, so nennt man auch in der Arithmetik jede Gröfse, welche 3 Elemente zu Factoren hat, cubisch, namentlich die Gröfse von 3 gleichen Factoren den Cubus des Elements, weil die Gröfse des Würfels oder des Cubus das Product seiner 3 gleichen Hauptausdehnungen ist, und eine Gleichung, in welcher eine Unbekannte in dritter Potenz vorkommt oder in welcher mehrere Unbekannte zu 3 Factoren mit einander verbunden sind, eine cubische Gleichung.

Curven, die durch cubische Gleichungen gegeben werden, nennt man allgemein nicht cubische Curven sondern Linien dritter Ordnung; dagegen nennt man speciell die Parabel, deren Gleichung $y^3 = a^2x$ oder $y^3 = ax^2$ ist, cubische Parabel, eben so die Hyperbel von der Gleichung $xy^2 = a^3$ cubische Hyperbel.

Cubische Ausdehnung ist die A eines Körpers oder eines körperlichen Raumes nach unendlich vielen Längenrichtungen, die sich jedoch in 3 verschiedene Hauptrichtungen zusammen fassen lassen (s. Ausdehnung Bd. I, pag. 186).

Cubische Gleichung s. u. cubisch und algebraische Gleichung.

Cubische Gröfse ist die Gröfse der cubischen Ausdehnung eines Körpers oder eines körperlichen Raumes, s. cubische Ausdehnung.

Cubische Hyperbel s. u. cubisch.

Cubisches Maafs s. v. w. Cubikmaafs, d. i. eine der verschiedenen Cubik-Einheiten, wie für die Längen der Maafsstab. Wenn man von einem Gegenstande die Gröfse wissen will, mufs man ihn messen, und der Maafsstab kann mit dem zu messenden Gegenstande nur einerlei Natur sein: Längen werden durch Längen, Flächen durch Flächen, Körper durch Körper gemessen. Aber nicht alles kann gemessen werden: dann tritt die Berechnung hinzu, wie bei unzugänglichen Linien, die durch Vermessung von zugänglichen Linien mit Hülfe von Triangulation und Zeichnung oder Berechnung ermittelt werden. Flächenmaafse werden nur bei geringfügigen Gegenständen angelegt, sonst werden nur Längen gemessen und hieraus die Flächen berechnet. Cubische Maafse sind nur im Gebrauch für Bedarf an Waaren; für sonstige körperliche Räume mifst man bestimmte Längen und berechnet aus diesen deren cubischen Inhalt.

Bekanntlich sind Linien mal Linien Flächen und Flächen mal Linien sind Körper; dies hat folgenden Grund: Denkt man sich einen Punkt, der einen endlichen geraden Weg zurücklegt, so hat derselbe eine gerade Linie beschrieben. Macht nun diese Linie eine solche Bewegung, dafs jeder ihrer Punkte einen gleich grofsen Weg zurücklegt, und dafs jeder dieser Wege eine gerade Linie ist, so beschreibt die Linie eine Ebene.

Hält die Linie ihre Bewegung irgend wo an, so hat sie offenbar so viele gleich grofse grade Linien zurückgelegt, als Punkte in ihr vorhanden sind. Weifs man die Anzahl dieser Punkte, so hat man diese Zahl nur mit der gleich grofsen Länge der Bewegung jedes einzelnen Punkts zu multipliciren um die summarische Länge der ganzen Bewegung zu erhalten. Da aber die Punkte der Linie unendlich nahe an einander liegen, so drückt die Länge der ursprünglichen Linie selbst die Anzahl ihrer Punkte aus und folglich ist die summarische Bewegung gleich dem Product, wenn man die bewegte Linie mit der Länge der Bewegung multiplicirt.

Man hat also in dem neu gefundenen Raum ein Zusammengesetztes, nämlich Linie mal Linie oder Länge mal Breite, eine Ebene.

Bewegt sich nun die Ebene wiederum so dafs jeder deren Punkte einen gleich grofsen gradlinigen Weg zurücklegt, so ist die Summe der Punkte, aus welchen die Ebene besteht mit deren Bewegungslänge multiplicirt der summarische Weg aller Punkte, diese aber unendlich nahe an einander sind in Summe gleich der Ebene selbst zu setzen und man hat Ebene mal Linie gleich dem körperlichen Raum den die Ebene mit ihrer Bewegung gebildet hat.

Cubische Parabel s. u. cubisch.

Cubus. 1. Der bekannte Körper, Würfel genannt, der einzige regelmäfsige Körper, dessen Seitenflächen aus regelmäfsigen Vierecken, aus Quadraten bestehen. Er hat 6 Seitenflächen, 12 Kanten und 8 Ecken.

Enthält die Kante a Längeneinheiten, so hat nach dem Art. cubisches Maafs die Seitenfläche $a \cdot a = a^2$ Flächeneinheiten, der Cubus $a^2 \cdot a = a^3$ Körpereinheiten. Hat also die Kante eine Längendinheit, so hat der Cubus eine Körpereinheit. Es ist hieraus ersichtlich, dafs dem Begriff von Cubikeinheit gemäfs kein Körper geeigneter ist die Cubikeinheit zu bilden als der Cubus selbst, obgleich die Kugel der Form nach ein viel einfacherer Körper oder vielmehr der einfachste Körper ist.

2. Die dritte Potenz n^3 einer Zahl n.

I. der Cubus einer zweitheiligen Gröfse $(a+b)$ ist nach dem Art. „Binomischer Lehrsatz“ Bd. I, pag. 374, oder wenn man dieselbe 2 mal mit sich selbst multiplicirt

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Sind a oder b negativ, so werden dieselben Gröfsen im Cubus gleichfalls negativ gesetzt, z. B.

$$(-a+b)^3 = -a^3 + 3a^2b - 3ab^2 + b^3$$
$$(+a-b)^3 = a^3 - 3ab^2 + 3a^2b - b^3$$

II. Ist ein Polynom zu cubiren, so erhält man durch zweimalige Multiplication mit sich selbst dessen Cubus z. B.

$$\begin{aligned}(a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 + gx^6 + hx^7 + kx^8)^3 &= a^3 + 3a^2bx + (3a^2c + 3ab^2)x^2\\ &+ (3a^2d + 6abc + b^3)x^3\\ &+ (3a^2e + 6abd + 3ac^2 + 3b^2c)x^4\\ &+ (3a^2f + 6abe + 6acd + 3b^2d + 3bc^2)x^5\\ &+ (3a^2g + 6abf + 6ace + 3ad^2 + 3b^2e + 6bcd + c^3)x^6\\ &+ (3a^2h + 6abg + 6acf + 6ade + 3b^2f + 6bce + 3bd^2 + 3c^2d)x^7\end{aligned}$$

Das Gesetz der Factoren vor den Potenzen von x ist folgendes: 1) die Coefficienten der Wurzel sind überall zu 3 und 3 verbunden in der Art wie die Combinationen mit Wiederholungen der dritten Klasse. 2) Diese 3 Factoren irgend eines zu x^n gehörenden Coefficienten des Cubus liefern in der Wurzel mit einander multiplicirt ebenfalls x^n und 3) stehen vor den Buchstabengröfsen entweder die Zahlen 1, 3 oder 6; die Zahl 1 vor jedem Cubus, die Zahl 3 vor jedem Product eines Quadrats mit einer einfachen Buchstabengröfse, die Zahl 6 vor dem Product dreier einfachen Buchstabengröfsen.

III. Die obige Reihe gibt ein Mittel an die Hand, aus einem unvollständigen Cubus die $\sqrt[3]{}$ auszuziehen, wie an dem folgenden Beispiel erläutert werden soll.

Der Cubus sei 355, so setze

$$355 = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + \ldots\ldots$$

Ist nun nach der obigen Formel

$$355 = (a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 + \ldots.)^3$$

und wird dieses Polynom in dem decadischen System ausgedrückt, so ist $x = \frac{1}{10}$;

$$A = a^3 = 7^3 = 343$$
$$B = 3a^2b$$
$$C = 3a^2c + 3ab^2$$
$$D = 3a^2d + 6abc + 6^3$$

u. s. w.

Nun hat man zunächst

$$355 - 343 = 12 = Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots\ldots$$

$$Bx\,(<12) = 3a^2bx = \frac{3\cdot 7^2}{10}\cdot b = 14{,}7 \times b$$

folglich $\quad b\left(<\frac{12}{14{,}7}\right) = 0$

und $\quad \sqrt[3]{355} = 7{,}0cdef\ldots$

2. $Cx^2\,(<12) = (3a^2c + 3ab^2)x^2$
$$= (3a^2c + 0)\,x^2 = 1{,}47\cdot c$$

folglich $\quad c < \frac{12}{1{,}47} = 8$

und $\quad \sqrt[3]{355} = 7{,}08\,def\ldots.$

Jedenfalls ist nun noch

$$12 - 8\times 1{,}47 = 0{,}24 = Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + \ldots..$$

3. $Dx^3\,(<0{,}24) = \frac{3a^2d + 0}{1000} = 0{,}147\,d$

woraus

$$d\left(<\frac{0{,}24}{0{,}147}\right) = 1$$

und $\quad \sqrt[3]{355} = 7{,}081\,efg\ldots.$

ferner

$$0{,}24 - 0{,}147\times 1 = 0{,}093 = Ex^4 + Fx^5 + \ldots.$$

4. $Ex^4\,(<0{,}093) = \frac{3a^2e + 3ac^2 + 0}{10000}$
$$= 0{,}0147\cdot e + 0{,}1344$$

woraus $\quad e < \frac{0{,}093 - 0{,}1344}{0{,}0147} = -\frac{0{,}0314}{0{,}0147}$

e ist also negativ, folglich ist $d = 1$ genommen, zu grofs, mithin $d = 0$

und $\quad \sqrt[3]{355} = 7{,}080\,efg\ldots..$

ferner $\quad 0{,}24 = Ex^4 + Fx^5 + Gx^6 + \ldots..$

und statt No. 4:

5. $Ex^4\,(<0{,}24) = \frac{3a^2e + 3ac^2}{10000}$
$$= 0{,}0147\cdot e + 0{,}1344$$

woraus $\quad e < \frac{0{,}24 - 0{,}1344}{0{,}0147} = 7 + \frac{27}{147}$

Aus dem geringen Rest $\frac{27}{147}$ läfst sich übersehen, dafs 7 zu grofs ist, woher $e = 6$ genommen werden mufs.

Es ist also $\sqrt[3]{355} = 7{,}0806\,fgh\ldots.$

ferner

$$0{,}24 - Ex^4 = 0{,}24 - (0{,}0147\times 6 + 0{,}1344)$$

oder $\quad 0{,}0174 = Fx^5 + Gx^6 + Hx^7 + \ldots.$

6. $Fx^5\,(<0{,}0174) = \frac{3a^2f + 0}{100000} = 0{,}00147\,f$

woraus $\quad f < \frac{0{,}0174}{0{,}00147} = 10 + \frac{27}{147}$

Es kann nur die höchste einziffrige Zahl $= 9$ genommen werden, mithin

$$\sqrt[3]{355} = 7{,}08069\,gh\ldots.$$

ferner $0,0174 - Fx^5 = 0,0174 - 0,00147 \times 9$
$= 0,00417 = Gx^6 + Hx^7 + Jx^8 + \ldots\ldots$

7. $Gx^6 (< 0,00417) = \frac{3a^2g + 6ace + c^3}{1000000}$
$= 0,000147\,g + 0,002528$

woraus
$$g < \frac{0,00417 - 0002528}{0,000147} = \frac{0,001642}{0,000147} = 10$$
woher $g = 9$
$$\sqrt[3]{355} = 7,080699\,hik\ldots$$
ferner $0,00417 - Gx^6$
$= 0,00417 - (9 \times 0,000147 + 0,002528)$
$= 0,000319 = Hx^7 + Jx^8 + Kx^9 + \ldots\ldots$

8. $Hx^7 (< 0,000319) = \frac{3a^2h + 6acf}{10000000}$
$= 0,0000147 \cdot h + 0,0003024$

woraus $h = \frac{0,0000166}{0,0000147} = 1$

daher $\sqrt[3]{355} = 7,0806991\,ik\ldots$
ferner
$0,000319 - Hx^7 = 0,000319 - 0,0003171$
$= 0,0000019 = Jx^8 + Kx^9 + \ldots\ldots$

9. $Jx^8 (< 0,0000019)$
$= \frac{3a^2i + 6acg + 3ae^2 + 3c^2e}{100000000}$
$= 0,00000137\,i + \left(\frac{3024 + 756 + 1152}{100000000}\right)$
$= 0,00004932$

woraus
$i = \frac{0,00000190 - 0,00004932}{0,00000147}$, also negativ
mithin ist h mit 1 zu grofs und $= 0$
$$\sqrt[3]{355} - 7,0806990\,ikl\ldots$$
ferner
$0,000319 - Hx^7 + 0,000319 - 0,0003024$
$= 0,0000166 = Jx^8 + kx^9 + \ldots.$

10. $Jx^8 (< 0,0000166)$
$= 0,00000147\,i + 0,00004932$

woraus $i = \frac{0,00001660 - 0,000004932}{0,00000147}$,
wieder negativ; und es ist mithin auch g noch zu grofs, und mufs 8 statt 9 gesetzt werden, demnach hat man statt No. 7
$$\sqrt[3]{355} = 7,080698\,hik\ldots.$$
ferner $0,00417 - Gx^6$
$= 0,00417 - (8 \times 0,000147 + 0,002528)$
$= 0,000466 = Hx^7 + Jx^8 + Kx^9 + \ldots.$

11. $Hx^7 (< 0,000466)$
$= 0,0000147 \times h + 0,0003024$

woraus $h = \frac{0,0001636}{0,0000147} = 11$

wofür natürlich nur 9 gesetzt werden kann.

Demnach $\sqrt[3]{355} = 7,0806989\,ik\ldots.$
ferner $0,000466 - Hx^7$
$= 0,000466 - (9 \times 0,0000147 + 0,0003024)$
oder $0,0000313 = Jx^8 + Kx^9 + \ldots..$

12. $Jx^8 (< 0,0000313)$
$= 0,00000147 \cdot i + 0,00004932$

woraus wieder i negativ wird und woher h mit 9 zu grofs ist. Aber auch $h = 8$ ist, wie sich übersehen läfst, noch zu grofs, demnach ist statt No. 11
$$\sqrt[3]{355} = 7,0806987$$
ferner $0,000466 - Hx^7$
$= 0,000466 - (7 \times 0,0000147 + 0,0003024)$
oder $0,0000607 = Jx^8 + Kx^9 + \ldots.$

13. $Jx^8 (< 0,0000607)$
$= 0,00000147 \times i + 0,00004932$

woraus $i = \frac{0,00001138}{0,00000147} = 8$

u. s. w.

Man hat demnach
$$\sqrt[3]{355} = 7,08069878\ldots..$$

Das vorstehende Beispiel ist deshalb so weit und streng durchgeführt, damit man bei den dabei oft vorkommenden Hindernissen durch zu grofs gewählte Zahlen nicht auf Rechnungsfehler schliefse; bei einiger Uebung verschafft man sich mehrere Erleichterungen.

Culmination eines Gestirns (culmen das Oberste einer Sache) ist der Durchgang des Gestirns durch die Mittagslinie, oder der augenblickliche Stand des Gestirns im Meridian des Beobachtungsorts. Fixsterne haben einen ungeänderten Culminationspunkt am Himmel; Sonne, Mond und Planeten ändern mit jedem Tage ihre Culminationshöhe in der Meridianlinie. Circumpolarsterne (s. den Art.) gehen innerhalb eines Sterntages 2 mal durch den Meridian des Orts, sie haben 2 Culminationen, eine obere C, von der gröfsten Höhe, und eine untere C, von der kleinsten Höhe.

In dem Art. correspondirende Höhen ist angegeben, wie man die Mittagslinie eines Orts genau bestimmen kann. Hat man diese nun fixirt, entweder durch ein Fernrohr, welches nur in der Verticalen drehbar ist, oder durch ein Fadendreieck, indem man das vordere Ende einer über eine Rolle geleiteten Schnur mit einem Gewicht beschwert, so dafs es vertical hängt und das hintere Ende derselben innerhalb des Meridians befestigt, so dafs beide Schnur-Enden den Meridian visiren, so kann man die C eines Gestirns unmittelbar beobachten und dessen Zeitpunkt unmittelbar an der Uhr ablesen.

Die Sonne und der Mond culminiren in dem Augenblick, wo deren Mittelpunkte in dem Meridian sich befinden; geschieht dies durch die Sonne, so hat man den Zeitpunkt des **wahren Mittags**.

Sterne, die zu gleicher Zeit culminiren, haben gleiche Rectascension (s. Aufsteigung und Absteigung eines Gestirns); Sterne, die 12 Stunden später culminiren, sind von den vorigen um 180° an Rectascension unterschieden. Circumpolarsterne, die 2 mal culminiren, haben 2 Rectascensionen, die um 180° unterschieden sind. Sterne, die in den Sonnenwenden culminiren, haben einerlei Rectascension und Länge, weil dieser Meridian sowohl auf dem Aequator als auf der Ekliptik senkrecht steht.

Culminationspunkt oder Punkt im Meridian, in welchem ein Gestirn culminirt (s. den vor. Art.).

Curven, krumme Linien. Es gibt 2 Klassen derselben: Curven einfacher Krümmung und C. doppelter Krümmung. Die ersten sind solche, deren sämmtliche Punkte in einerlei Ebene liegen; die letzten solche, deren Punkte in verschiedenen Ebenen liegen, und zwar der Art, dafs jeder auch noch so kleine Theil der C in verschiedenen Ebenen liegt. Die C. erster Klasse entstehen durch Zeichnung von krummen Linien auf einer ebenen Oberfläche, die der zweiten Klasse durch Zeichnung von Linien auf krummen Oberflächen, als auf Cylindern, Kegeln, Paraboloiden u. dergl. Eben so entstehen dieselben als Durchschnittslinien sich schneidender krummer Flächen. Z. B. bei Kappen in Gewölben, bei Ausbauten an krummlinigen Bedachungen, bei Zusammensetzung technischer Geräthe u. s. w.

Unter C in der Wissenschaft versteht man aber nicht jede willkührlich gezeichnete und nach Laune beliebig abzuändernde krumme Linie, sondern eine solche, bei deren Form und Fortgang ein bestimmtes Gesetz obwaltet. Der kurze Art: Coordinaten gibt darüber eine klare Vorstellung; und wie hier eine Coordinatengleichung für den Kreis aufgestellt ist, so hat jede andere aufser dem Kreis noch mögliche C. ihr eigenthümliches Gesetz, welches bei C. einfacher Krümmung durch nur eine, bei C. doppelter Krümmung durch zwei Gleichungen ausgesprochen wird.

Curven einfacher Krümmung.

I. Allgemeines.

1. In dem Art. Coordinaten ist die Gleichung für den Kreis

$$y^2 = 2rx - x^2$$

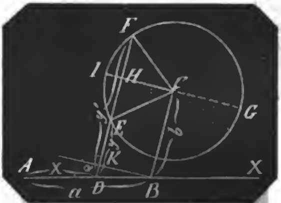
oder auf 0 reducirt

$$y^2 + x^2 - 2rx = 0 \qquad (1)$$

Diese Gleichung ist entstanden, indem der Durchmesser zur Abscissenlinie, einer dessen Endpunkte (A) zum Anfangspunkt der Abscissen gemacht und der Coordinatenwinkel als rechter genommen worden ist. Diese 3 Einschränkungen haben die obige Gleichung offenbar ebenfalls eingeschränkt, vereinfacht, und sie kann als allgemeine Coordinatengleichung für den Kreis nicht gelten.

Es sei Fig. 518 EFG ein Kreis, C dessen Mittelpunkt, dessen Radius wie CE, $CF = r$. Eine beliebige gerade Linie AX sei die Abscissenlinie, ein beliebiger Punkt A in derselben der Anfangspunkt der Abscissen und der Coordinatenwinkel wie

Fig. 518.



$\angle ADF = \alpha$, so mufs zuerst die Lage des Kreises gegen A und AX festgestellt werden, und dies geschieht angemessen, wenn man vom Mittelpunkt C auf AX unter dem $\angle \alpha$ die gerade Linie CB zieht und die Abstände $AB = a$ und $CB = b$ setzt.

Nimmt man nun den beliebigen Abstand $AD = x$, setzt die beiden Ordinaten $DE = y$, $DF = y_{,}$, zieht die Hülfslinien $CH = BK$ normal auf DF so hat man

$$CE^2 = r^2 = CH^2 + EH^2$$
$$CF^2 = r^2 = CH^2 + FH^2$$

Nun ist

$$CH = BK = BD \sin \angle BDK = (a - x) \sin \alpha$$
$$EH = DH - DE = HK + DK - DE$$
$$FH = -DH + DF = -(HK + DK) + DF$$

Da nun

$$HK = BC = b$$

und $DK = BD \cos \angle BDK = -(a - x) \cos \alpha$

so ist $EH = b - (a - x) \cos \alpha - y$

$$FH = -b + (a - x) \cos \alpha + y$$

und

$$CE^2 = r^2 = (a - x)^2 \sin^2\alpha + [b - (a - x) \cos \alpha - y]^2$$
$$CH^2 = r^2 = (a - x)^2 \sin^2\alpha + [-b + (a - x) \cos \alpha + y_{,}]^2$$

woraus zu ersehen, dafs y^2 und $y_{,}^2$ eine und dieselbe Function von x ist, und zwar ist

$$y^2 + 2(a-x)y\cos\alpha + (a-x)^2 - 2by - 2b(a-x)\cos\alpha + b^2 - r^2 = 0$$

oder die Klammern aufgelöst

$$y^2 - 2yx\cos\alpha + x^2 + 2y(a\cos\alpha - b) - 2x(a - b\cos\alpha) + (a^2 - 2ab\cos\alpha + b^2 - r^2) = 0 \quad (2)$$

Sobald $\alpha = 90° = \frac{1}{2}\pi$ genommen wird, entsteht die Gl.

$$y^2 + (a-x)^2 - 2by + b^2 - r^2 = 0 \quad (3)$$

für $b = 0$, also wenn AX durch den Mittelpunkt C geht

$$y^2 + (a-x)^2 - r^2 = 0 \quad (4)$$

und für $a = r$, wenn nämlich A in den Umfang des Kreises liegt,

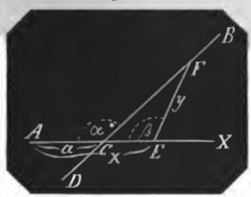
$$y^2 + x^2 - 2rx = 0 \quad (5)$$

wie Gleichung 1.

2. Es ist der Kreis die einfachste krumme Linie, und dennoch wird sie schon durch eine Gleichung des zweiten Grades bestimmt; die einfachste unter allen Linien ist offenbar die gerade, und wenn man diese als Curve behandelt und eine Gleichung für dieselbe ermittelt, so erhält man diese vom ersten Grade wie folgt:

Es sei Fig. 519, BD die gegebene Richtung einer geraden Linie, AX eine beliebige Abscissenlinie in derselben Ebene, so schneiden sich beide Linien in irgend einem Punkt C unter der Voraussetzung,

Fig. 519.



dafs sie nicht $\nparallel$ sind. Nimmt man den beliebigen Punkt A als Anfangspunkt der Abscissen, setzt den Abstand $AC = a$, den Schneidungswinkel $ACB = \alpha$, so ist die Linie BD gegen A und AX bestimmt. Setzt man nun den constanten Coordinatenwinkel wie $\angle AEF = \beta$, so ist zwischen der beliebigen Länge $AE = x$ und der zugehörigen Ordinate $EF = y$

$$CE : EF = \sin CFE : \sin FCE$$

oder $x - a : y = \sin(\alpha - \beta) : \sin\alpha$

woraus

$$y\sin(\alpha - \beta) - x\sin\alpha + a\sin\alpha = 0 \quad (1)$$

für $\beta = 90°$ entsteht

$$y\cos\alpha + x\sin\alpha - a\sin\alpha = 0 \quad (2)$$

für $a = 0$, wenn also die Abscissen vom Durchschnittspunkt C anfangen

$$y - x\,tg\,\alpha = 0 \quad (3)$$

3. Es gibt auch C. deren Bestimmung nur mit Hülfe von Gleichungen geschieht, in welchen die Coordinaten von Kreisbogen oder Logarithmen abhangen, also von transcendenten Gleichungen wie z. B. in dem Art. berührende gerade Linie No. 4, pag. 343 die Gleichungen für die Cycloide:

$$x = r(1 - \cos\varphi)$$
$$y = r(\varphi - \sin\varphi)$$

Curven, deren Gesetzen algebraische Gleichungen zu Grunde liegen nennt man algebraische Curven, Curven, die durch transcendente Gleichungen bestimmt werden, transcendente Curven. Unter den letzten heifsen diejenigen, in welchen eine der Coordinaten als Exponent erscheint exponentiale Curven, wie die logarithmische Linie, deren Gleichung ist: $y = a^x$.

Die in einer Gleichung vorkommenden unveränderlichen Gröfsen heifsen die Parameter der C., weil diese den Maafsstab der C. bestimmen, dergestalt, dafs mit der Abänderung dieser Parameter nicht die Form, sondern nur die Abmessung der C. geändert wird.

4. Wie die Gleichungen für die gerade Linie No. 4 eine Gleichung vom ersten Grade, die für den Kreis No. 2 vom 2ten Grade, so hat man auch Gleichungen vom 3ten, vom 4ten, ... vom $n$ten Grade, zu welchen Curven von einfacher Krümmung gehören. Die gerade Linie, zu welcher eine Gl. vom ersten Grade gehört, bildet die erste Ordnung der Linien überhaupt; die Curven, welchen Gleichungen vom 2ten Grade zugehören, sind Linien zweiter Ordnung; Curven zu Gleichungen vom 3ten, 4ten .... $n$ten Grade sind Linien der 3ten, 4ten, $n$ten Ordnung. Dagegen betrachtet man auch die Curven mit Ausnahme der geraden Linie für sich und nennt C. zu Gleichungen vom 2ten Grade Curven erster Classe, die zu Gleichungen vom 3ten, 4ten .... $n$ten Grade sind C. 2ter, 3ter, ... $(n-1)$ter Classe.

Die Gleichungen 1 No. 4 und 2 No. 2, wenn man in dieser noch die Klammern auflöst, heifsen vollständige Gleichungen. Die erste hat die allgemeine Form:

$$ay + bx + c = 0 \quad (1)$$

die zweite die allgemeine Form:

$$ay^2 + bx^2 + cyx + dy + ex + f = 0 \quad (2)$$

Eine Gleichung vom 3ten Grade ist vollständig bei folgenden vorhandenen Gliedern

$$ay^3 + bx^3 + cy^2x + dx^2y + ey^2 + fx^2 + gxy + hy + ix + k = 0 \qquad (3)$$

Ueberhaupt ist eine auf 0 reducirte Gleichung vom $n$ten Grade vollständig, wenn x und y in der $n$ten, der $(n-1)$ten, der $(n-2)$.... 2ten, 1ten Potenz, wenn ferner die Producte von x und y vorkommen, deren Exponentensummen n, $n-1$, $n-2$, ... 3, 2 betragen, + dem bekannten Gliede.

Um die Anzahl der zu einer vollständigen Gl. vom $n$ten Grade gehörenden Glieder zu finden, hat man

x und y in sämmtlichen Potenzen von der 1 bis $n$ten	$2n$
x und y in den Producten	$\frac{1}{2}(n-1)n$
das unbenannte Glied	1
gibt die Summe der Glieder $2n + \frac{1}{2}(n-1)n + 1 =$	$\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$

Es hat also Glieder die Gleichung
vom 1. Grade $= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 = 3$
" 2. " $= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6$
" 3. " $= \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 = 10$
" 4. " $= \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 = 15$
u. s. w.

5. Setzt man in die allgemeine Gleichung des 1ten Grades

$$ay + bx + c = 0$$

$x = 0$, so erhält man

$$y = -\frac{c}{a}$$

für $x = +x$ ist

$$y = -\frac{bx + c}{a}$$

für $x = -x$

$$y = \frac{bx - c}{a}$$

Setzt man für a, b, c die Werthe aus Gl. 1 No. 2 mit Bezug auf Fig. 520, so hat man

für $x = +x$; $y = (x - a)\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha - \beta)}$

für $x = 0$; $y = -a\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha - \beta)}$

für $x = -x$; $y = -(x + a)\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha - \beta)}$

Setzt man $a = 0$, d. h. verlegt man den Anfangspunkt der Abscissen in den Durchschnittspunkt beider Linien, so ist

für $x = +x$; $y = x\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha - \beta)}$

für $x = 0$; $y = 0$

für $x = -x$; $y = -x\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha - \beta)}$

d. h. bei beliebiger Annahme der Abscisse rechts oder links sind die Ordinaten gleich grofs, aber in Beziehung auf die Abscissenlinie AX in entgegengesetzter Lage.

6. Aus der allgemeinen Gleichung 2 No. 4

$$ay^2 + byx + cx^2 + dy + ex + f = 0$$

y entwickelt gibt für $x = +x$

$$y = -\frac{bx + d}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{bx + d}{2a}\right)^2 - \frac{cx^2 + ex + f}{a}} \qquad (1)$$

für $x = 0$

$$y = -\frac{d}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{d}{2a}\right)^2 - \frac{f}{a}} \qquad (2)$$

für $x = -x$

$$y = -\frac{d - bx}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{d - bx}{2a}\right)^2 - \frac{cx^2 - ex + f}{a}} \qquad (3)$$

Setzt man aus Gl. 2 No. 1 die Werthe für die allgemeinen Coefficienten a bis f in diese 3 Gleichungen, so hat man die Wurzelgröfse in 1:

$$[(a - x)\cos\alpha - b]^2 - x^2 + 2(a - b\cos\alpha)x - a^2 + 2ab\cos\alpha - b^2 + r^2 = r^2 - (a - x)^2\sin^2\alpha$$

Dieselbe in 2:

$$(a\cos\alpha - b)^2 - a^2 + 2ab\cos\alpha - b^2 + r^2 = r^2 - a^2\sin^2\alpha$$

Dieselbe in 3:

$$[(a + x)\cos\alpha - b]^2 - x^2 - 2(a - b\cos\alpha)x + 2ab\cos\alpha - b^2 + r^2 = r^2 - (a + x)^2\sin^2\alpha$$

Aus der allgemeinen Gleichung hat man nun die Ordinate für positive Abscissen $(+x)$

$$y = b - (a - x)\cos\alpha \pm \sqrt{r^2 - (a - x)^2\sin^2\alpha} \qquad (4)$$

für $x = 0$

$$y = b - a\cos\alpha \pm \sqrt{r^2 - a^2\sin^2\alpha} \qquad (5)$$

für negative Abscissen $(-x)$

$$y = b - (a + x)\cos\alpha \pm \sqrt{r^2 - (a + x)^2\sin^2\alpha} \qquad (6)$$

Für rechtwinklige Coordinaten, also für $\alpha = 90°$ hat man für positive Abscissen $(+x)$

$$y = b \pm \sqrt{r^2 - (a - x)^2} \qquad (7)$$

für $x = 0$

$$y = b \pm \sqrt{r^2 - a^2} \qquad (8)$$

für negative Abscissen $(-x)$

$$y = b \pm \sqrt{r^2 - (a + x)^2} \qquad (9)$$

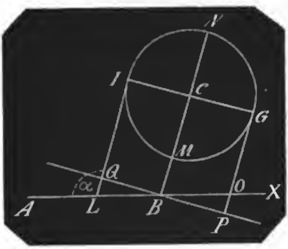
7. A. In Gl. 4 ist (Fig. 518) $b = CB$, $(a - x)\cos\alpha = - DK$ also die Gröſse vor dem $\sqrt{}$zeichen die Linie DH, die Wurzelgröſse= $HE = HF$, so daſs

$y = DH {+HF \atop -HE} = DF$ oder DE ist.

B. Für $(a - x)\sin\alpha = r$; d. h. für $BK = CJ = r$ muſs H in die Peripherie in J fallen; dann wird $HE = HF = 0$ und $DE = DF$ die Tangente in J. Es existirt also nur diese eine Ordinate $= b-(a-x)\cos\alpha = b+(a-x)\cos BDK = HK+DK$ welche jene Tangente in $J \ddagger CB$ ist, die bis in AX fällt, nämlich die Ordinate LJ, Fig. 520.

C. Für $(a - x)\sin\alpha > r$, also wenn D zwischen A und L fällt, wird die $\sqrt{}$gröſse negativ, y ist unmöglich, wie auch Fig. 520 nachweiſst.

Fig. 520.



D. Für $x = a$, also $a - x = 0$; d. h. wenn $AB = x$, ist $y = b \pm r$ also Fig. 520:

$y = BC {+CN \atop -CM} = BN$ oder BM.

E. Für $x = a + x$, d. h. wenn x über B hinaus, also zwischen B und X fällt, wird $a - x = a - (a + x) = - x$ daher die $\sqrt{}$gröſse $r^2 - (-x)^2 \sin^2\alpha = r^2 - x^2 \sin^2\alpha$ und

$y = b + x\cos\alpha \pm \sqrt{r^2 - x^2\sin^2\alpha}$

So lange nun $x\sin\alpha < r$ bleibt, erhält man Doppelordinaten zwischen B und O, für $x\sin\alpha = r$ wird die $\sqrt{}$gröſse $= 0$, $y = b + x\cos\alpha = b + r\cot\alpha = b - BP\,tg\,BOP = GP - GO = GO$; die letzte Ordinate ist also wieder die zweite Tangente GO an G und für $x\sin\alpha > r$, nämlich für x über O hin existiren keine Ordinaten mehr.

8. Für $x = 0$ in Gl. 5 existiren nur Ordinaten wenn $a\sin\alpha < r$, wenn also der Punkt A innerhalb LO liegt. Wird A in L angenommen, so ist $a = BL$ und es existirt die einzige Ordinate, die Tangente in $J = b - BL\cos\alpha = b + BL\cos BLJ = JQ + LQ = JL$.

Wird A in B genommen, so ist $a = 0$; $y = b \pm r = BC {+NC \atop -MC} = NB$ oder MB.

Wird A in O angenommen, so ist $a = - BO$ und $y = b + a\cos\alpha = b - BO\cos BOP = GP - OP = GO$ die einzige Tangente in G.

Für $\pm a\sin\alpha > r$, wenn also der Punkt A in den Verlängerungen von BL und BO liegt, wird die $\sqrt{}$gröſse negativ und y ist unmöglich.

9. Wenn x negativ ist, wenn also x in der Verlängerung von LA liegt, gibt es keine Ordinaten, weil schon $a\sin\alpha > r$ ist. Es existiren die No. 7 gedachten Ordinaten, wenn der Punkt A innerhalb LO oder in der Verlängerung von BO gelegen ist; im ersten Fall für positive und negative, im 2ten nur für negative Abscissen.

10. Die zu beiden Gleichungen 1 No. 2 und 2 No. 1 gehörenden Curven unterscheiden sich also auch wesentlich darin, daſs bei jener für alle positiven und negativen Werthe von x bis ins Unendliche Ordinaten existiren, bei dieser dagegen die Abscissen für mögliche Ordinaten beschränkt sind. Da die Curve ein Stetiges ist und da wegen der Unendlichkeit des Raumes kein Grund für die Annahme vorhanden ist, daſs die C. irgendwo aufhöre, so muſs da, wo die Abscisse für Ordinaten eine Grenze hat, die C. in eine dem Fortschreiten der Abscissen entgegengesetzte Richtung sich wenden und entweder in sich zurückkehren, wie beim Kreise Fig. 519 oder sich schneiden. Diese Aenderung im Fortgange characterisirt sich dadurch, daſs an solcher Stelle statt 2 Ordinaten aus der Gleichung nur eine hervorgeht, welche die Richtungsänderung vermittelt, wie in Gl. 4 No. 6 für $(a-x)\sin\alpha = r$ oder für $x = a - r\,cosec\,\alpha$ und $x = a + r\,cosec\,\alpha$ oder bei rechtwinkligen Ordinaten Gl. 7 No. 6 wenn $x = a - r$ und $= a + r$ ist. In jedem der beiden Punkte geschieht eine Umwendung der Curve.

11. Bei Curven, welche zurückkehren, heiſsen diejenigen Theile, welche einer anderen Folge von Ordinaten angehören, **Zweige**. Haben diese die Eigenschaft, daſs sämmtliche Ordinaten von der Abscissenlinie aus nach entgegengesetzten Richtungen genommen paarweise zu einer Abscisse gehörig gleich lang werden, so heiſst die Abscissenlinie ein **Durchmesser** der C.; sind die Coordinaten rechtwinklig, so heiſst der Durchmesser be-

sonders **Axe** und ihr Durchschnittspunkt mit der C. **Scheitelpunkt**.

Die beiden **geschlossenen Curven**, der Kreis und die Ellipse werden durch jeden Durchmesser in Zweige geschieden, das Oval ist eine geschlossene Linie, die nur einen Durchmesser und 2 ganz bestimmte Zweige hat. Man gebraucht den Ausdruck Zweige vornehmlich von Curventheilen, die von einem **Scheitelpunkt** aus, nach verschiedenen Richtungen ins Unendliche auslaufen, wie bei der Parabel; bisweilen laufen sie durch einen Punkt, den **Knoten**, in welchem sie sich durchkreuzen. Hiervon sollen die beiden folgenden Sätze Beispiele liefern.

12. Die Gleichung

$$xy^2 + x^3 - ay^2 = 0 \qquad (1)$$

gibt eine C. der zweiten Klasse oder eine Linie der 3ten Ordnung.

Für $x = 0$ wird $y = 0$; der Anfangspunkt der Abscissen ist also zugleich ein Punkt der C.

Entwickelt man y so erhält man

$$y = \pm\sqrt{\frac{x^3}{a-x}}$$

Es existiren also für jedes x (mit Ausnahme für $x = 0$) 2 gleich grofse entgegengesetzt liegende Ordinaten, die einen positiven z. B. über, die anderen negativen unterhalb der Abscissenlinie.

Setzt man x negativ, so entsteht

$$y = \pm\sqrt{-\frac{x^3}{a+x}}$$

Es existiren also für negative Abscissen keine Ordinaten und der Anfangspunkt der Abscissen ist der Scheitelpunkt der C.

$$\text{Es ist } y^2 = \frac{x^3}{a-x}$$

$$= \frac{x^3}{a} + \frac{x^4}{a(a-x)}$$

$$= \frac{x^3}{a} + \frac{x^4}{a^2} + \frac{x^5}{a^2(a-x)}$$

$$= \frac{x^3}{a}\left[1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^3}{a^3} + \ldots\right]$$

Das Quadrat der Ordinate wächst also in einem noch höheren Maafse als mit dem Cubus der Abscisse und beide Zweige der C. sind gegen die Abscissenlinie convex.

Endlich ist a die Grenze der positiven Abscissen und für $x = a$ wird y unendlich, folglich diese letzte Ordinate eine Asymptote an beiden Zweigen der C. Die C. der aufgestellten Gleichung ist die **Cissoide** (κισσος, Epheu) des Diokles und soll nun construirt werden.

Aus Gl. 1 erhält man

$$x^3 = y^2(a - x)$$

woraus $\quad x : a - x = y^2 : x^2 \qquad (1)$

Nun hat man, wenn Fig. 521, $AFHB$ ein Halbkreis ist, EF die lothrechte Ordinate in E; AF, BF Sehnen, nach Euklid X, 34:

$$AE : BE = AF^2 : BF^2$$

Nimmt man vom Mittelpunkt C das Stück $CG = CE$, errichtet die Ordinate GH, zieht die Sehne AH, welche die Ordinate EF in K schneidet, so ist

$$\angle BAH = \angle ABF$$

daher $\quad \triangle EAK \sim \triangle FBA$

und $\quad AF : BF = EK : AE$

folglich $\quad AE : BE = EK^2 : AE^2$

Fig. 521.



Setzt man nun den Durchmesser $AB = a$, $AE = x$ so ist $BE = a - x$, und es ist

$$x : a - x = EK^2 : x^2$$

folglich ist nach Gl. I, EK die Ordinate y für $x = AE$.

Nimmt man eine Abscisse $AG > \frac{1}{2}a$ dann ist nach Euklid

$$AG : BG = AH^2 : BH^2$$

Verlängert man nun GH und AF bis zu ihrem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt J, so ist

$$\angle JAG = \angle ABH$$

also $\quad \triangle JAG \sim \triangle ABH$

und $\quad AH : BH = GJ : AG$

also $\quad AG : BG = GJ^2 : AG^2$

oder $\quad x : a - x = GJ^2 : x^2$

und $\quad GJ = y$ für $x = AG$

Der obere Zweig der Cissoide für positive Ordinaten hat ungefähr die Form $JDKA$, der untere Zweig für die negativen Ordinaten hat dann die ihr gleiche Form ACM.

13. Die **Konchoide** (κογχη, Muschelschale) **Muschellinie** ist eine Linie der 4ten Ordnung oder eine L. der 3ten Klasse.

Ihre auf 0 reducirte Gleichung ist

$$y^4 + 2cy^3 + (x^2 - a^2 + c^2)y^2 - 2a^2cy - a^2c^2 = 0 \quad (1)$$

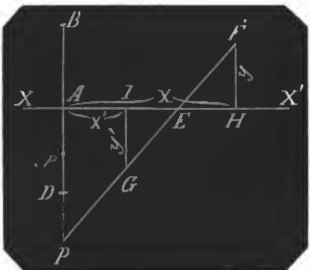
Die K. besteht aus 2 einzelnen Linien, die eine gemeinschaftliche Asymptote haben und die also in den beiden einander entgegengesetzten unendlich fernen Punkten sich berühren.

Setzt man in die Gl. $-y$ für y so erhält man die Gl.

$$y^4 - 2cy^3 + (x^2 - a^2 + c^2)y^2 + 2a^2cy - a^2c^2 = 0 \quad (2)$$

Die erste Gleichung ist für die obere, die zweite für die untere K., und diese untere enthält unter gewissen Bedingungen einen Knoten, um dessen Willen die Linie als Beispiel hier aufgeführt wird.

Fig. 522.



Es sei Fig. 522, XX' die gemeinschaftliche Abscissenlinie, A der Anfangspunkt der Abscissen. In den beiden Gleichungen kommt x nur im Quadrat vor, die C. ist also für $+x$ und $-x$ dieselbe und daher die obere und die untere K. von A aus zu beiden Seiten symmetrisch.

Es sei BP normal in A auf XX', P unter dem Abstande c von A ein fester Punkt, $AB = AD$ eine constante Länge a, B und D sind die Anfangspunkte, oder wenn die zu beiden Seiten von A liegenden 4 Zweige der K. betrachtet werden, die Mittelpunkte der oberen und der unteren K. Die Construction ist folgende:

Man zieht, um Punkte der K. zu erhalten, von jedem beliebigen Punkt z. B. E der Abscisse eine gerade Linie EP nach dem Punkt P, dem Pol der K. mit Verlängerung nach oben und nimmt auf dieser Linie von E aus zu beiden Seiten die Längen $EF = EG = a$, so ist F ein Punkt der oberen und G ein Punkt der unteren K.

Aus dieser einfachen Construction ersieht man, dafs B und D die entferntesten Punkte von XX' sind und dafs die Punkte F und G, je weiter E von A genommen wird, je schräger also die Linie PE ausfällt, immer näher aneinander rücken, die Linie XX' aber nie erreichen. Die Normalen FH und GJ sind die gleich grofsen Ordinaten und die Abstände AH und AJ, welche um $JH = 2JE$ unterschieden sind, die Abscissen für die Punkte F und G.

Die Gleichung für die K. ergibt sich nun folgendermaafsen:

Es ist $PA : AE = GJ : EJ = FH : EH$

oder $c : x^1 + JE = y : JE = y : JE$

oder $c : x - JE = y : JE$

daher $JE = \dfrac{x^1 y}{c - y} = \dfrac{xy}{c + y}$

Für $x^1 = x$ hat man also

$$JE = \frac{xy}{c \pm y} \quad (3)$$

wo das obere Vorzeichen für die obere, das untere für die untere K. gilt.

Nun ist

$$EG^2 = EF^2 = FH^2 + EH^2 = GJ^2 + JE^2$$

oder

$$a^2 = y^2 + \left(\frac{xy}{c \pm y}\right)^2 \quad (4)$$

woraus die Gleichung

$$y^4 \pm 2cy^3 + (x^2 - a^2 + c^2)y^2 + 2a^2cy - a^2c^2 = 0 \quad (5)$$

Wenn A, B, C, D die 4 Wurzeln der Gleichung für y sind, so hat man

$$(y - A)(y - B)(y - C)(y - D) = 0$$

woraus entwickelt:

$$y^4 - (A + B + C + D)y^3 + (AB + AC + AD + BC + BD + CD)y^2 - (ABC + ABD + ACD + BCD)y + ABCD = 0$$

Es ist mithin $ABCD = -a^2c^2$

$$-(A + B + C + D) = \pm 2c$$

folglich sind für die obere K die Wurzeln

$$A = +a;\ B = -a;\ C = -c;\ D = -c$$

für die untere K.

$$A = +a;\ B = -a;\ C = +c;\ D = +c$$

Die beiden Wurzeln $\pm c$ enthalten der Figur nach einen Widerspruch; denn da y entweder $=$ oder $<a$ ist, so kann y weder $+c$ noch $-c$ werden. Sollen also diese Wurzeln gelten, so mufs P nach p innerhalb AD verlegt werden.

Die Gleichungen 1 und 2 sowie Gl. 4 sind zu complicirt, als dafs man die Form der C. aus ihnen unmittelbar entnehmen könnte; sie sind auch erst der vorangegangenen Construction entsprechend aufgefunden worden. Man kann aber aus Gl. 4 mit Hülfe von Gl. 3 eine einfachere Relation für die Veränderlichen ableiten:

Bezeichnet man nämlich den jedesmaligen Abstand AE mit z so hat man aus 3

Für die obere K.

$$z = x - \frac{xy}{c + y} = \frac{c}{c + y}\, x \qquad (6)$$

und $$x = \frac{c + y}{c}\, z \qquad (7)$$

Für die untere K.

$$z = x + \frac{xy}{c - y} = \frac{c}{c - y}\, x \qquad (8)$$

und $$x = \frac{c - y}{c}\, z \qquad (9)$$

Diese Werthe von x in Gl. 4 gesetzt, gibt für die obere und untere K.

$$y^2 = \frac{a^2 c^2}{c^2 + z^2} \qquad (10)$$

$$z^2 = \frac{a^2 - y^2}{y^2} \cdot c^2 \qquad (11)$$

und $$z = \frac{c}{y} \sqrt{a^2 - y^2} \qquad (12)$$

Nun ist, wenn $y = \pm a$ ist, $z = 0$ d. h. E fällt in A und die Ordinaten sind

$$AB = + a \text{ und } AD = - a$$

Für $y = \pm a$ hat man $z = \pm \sqrt{a^2 - c^2}$

Es mufs also $c <$ sein als a und es entstehen die Ordinaten

$$FH = - c \text{ und } Ap = + c$$

(Ap ist $= + c$ gegeben)

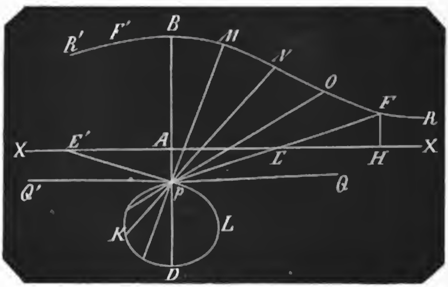
wenn $$Ep = EF = a \text{ ist.}$$

Für $z = \sqrt{a^2 - c^2}$ wird also für die untere K.

$$x = 0 \text{ und } Ap = + c$$

ist eine Doppelordinate weil sie 2 mal entsteht, nämlich wenn E rechts und wenn E links von A genommen wird.

Fig. 523.



Bei $z = \sqrt{a^2 - c^2}$ für die obere K. wird $$x = AH = 2z$$ wie auch Gl. 7 besagt, nämlich

$$x = \frac{c + y}{c}\, z = \frac{2c}{c}\, z = 2z$$

Bei $z < AE$ entstehen für die obere K. der Reihenfolge nach wie M, N, O; für die untere K. durchkreuzen sich die Zeigerlinien in p, deren Endpunkte bilden eine Rundung pKD, von welcher pD der Durchmesser ist. Geht nun E von A links weiter, so wird von D ab rechts eine Krümmung DLp beschrieben, welche der Krümmung $DKp \cong$ ist. Ist E nach E' gerückt, so dafs $E'A = EA$, so fällt die C. wieder in p und von E rechts und von E' links entstehen unendliche Zweige pQ und pQ' so wie FR und $F'R'$ welche sich der XX' immer mehr nähern ohne sie jemals zu erreichen.

Die Konchoide, wenn $c > a$ ist, hat 4 Zweige: die beiden unteren wie die beiden oberen BFR und $BF'R'$; wenn $c < a$, 5 Zweige: BFR, $BF'R'$, KpQ, LpQ' und KDL.

14. Die Abscisse kann eine Curve in höchstens so vielen Punkten schneiden, als die höchste Potenz von x in der Gleichung Einheiten enthält, weil für ein bestimmtes y, hier $= 0$, x^n höchstens n Wurzeln haben kann. Sie kann aber die Curve in wenigeren Punkten schneiden, weil einige unmögliche Wurzeln von x^n bei $y = 0$ existiren könnten, oder auch in keinem Punkt, wenn n gerade ist und alle Wurzeln unmöglich sind. Ist n ungerade, so schneidet die Abscisse die C. in wenigstens einem Punkt.

Eine Ordinate kann die C. höchstens in so vielen Punkten schneiden, als die höchste Potenz von y, die in der Gl. vorkommt, Einheiten enthält, aber auch in weniger Punkten und in gar keinem Punkt aus denselben obigen Gründen.

Beisp 1. Gleichung 1 No. 2:

$$y \sin(\alpha - \beta) - x \sin \alpha + a \sin \alpha = 0$$

gibt für $y = 0$ einen reellen Werth für x, nämlich $x = a$. Daher schneidet die Abscisse die gerade Linie, aber nur in einem Punkt. y entwickelt gibt

$$y = \frac{(x - a) \sin \alpha}{\sin (\alpha - \beta)}$$

also für jedes x, auch für $x = 0$, einen reellen Werth für y entweder positiv oder negativ, und also schneidet jede Ordinate die gerade Linie in einem Punkt.

Beisp. 2. Gleichung 2, No. 1 ist für $y = 0$

$$x^2 - 2x(a - b \cos \alpha) + a^2 - 2ab \cos \alpha + b^2 - r^2 = 0$$

woraus

$$x = + a - b \cos \alpha \pm \sqrt{r^2 - b^2 \sin^2 \alpha}$$

Beide Werthe von x sind unmöglich, weil $r < b \sin \alpha$ daher schneidet x den Kreis nicht. Liegt dagegen die Abscissenlinie durch den Kreis, so ist $r > b \sin \alpha$ es entstehen 2 reelle Werthe und AX schneidet den Kreis in 2 Punkten. Unter welchen Bedingungen y (bei unmöglichen Wurzeln) den Kreis nicht schneidet, und (bei möglichen Wurzeln) nur einmal und höchstens 2mal schneidet, ist No. 7 und 8 mit Bezug auf Gl. 4, 5, 6 No. 7 nachgewiesen worden.

Beisp. 3. Gl. 1, No. 12:

$$xy^2 + x^3 - ay^2 = 0$$

gibt für $y = 0$ nur den einen Werth $x = 0$, mithin wird die Cissoide von der Abscissenlinie nur in einem Punkte und zwar in dem Anfangspunkt A der Abscissen geschnitten. Dafs und wie weit y die Curve in 2 entgegengesetzten Punkten schneidet, zeigt No. 12 selbst.

15. Aus dem bisherigen Vortrag ist zu entnehmen, dafs Gleichungen vollständig und unvollständig sein können, um eine Linie von der Ordnung des Grades der Gleichung zu geben; es gehört aber dazu noch die wesentliche Bedingung, dafs die **auf Null reducirte Gleichung nicht in rationale Factoren sich auflösen lasse.**

Die Gleichung

$$y^2 + (a + c) xy + acx^2 + (b + d) y + (ad + bc) x + bd = 0 \qquad (1)$$

gibt keine Linie der zweiten Ordnung, weil sie, wie schon aus den Coefficienten ersichtlich ist, aus zweien rationalen Factoren besteht, nämlich aus

$$(y + ax + b)(y + cx + d) = 0$$

Es ist also $y + ax + b = 0$
und $y + cx + d = 0$

Jede von beiden Gl. gibt eine gerade Linie, und somit gibt die obige quadratische Gl. 2 sich durchschneidende grade Linien; deren Durchschnittspunkt liegt unter der Abscisse x, die man erhält, wenn man setzt

$$ax + b = cx + d$$

also unter $$x = \frac{d - b}{a - c} \qquad (2)$$

und hierbei ist $$y = \frac{ad - bc}{a - c} \qquad (3)$$

Man untersucht die Gleichung auf rationale Factoren, wenn man nach einander y und $x = 0$ setzt und die beiden dadurch erhaltenen Gleichungen untersucht.

Für $y = 0$ entsteht aus Gl. 1

$$acx^2 + (ad + bc)x + bd = 0$$

Diese geordnet gibt

$$x^2 + \left(\frac{d}{c} + \frac{b}{a}\right) x + \frac{d}{c} \times \frac{b}{a} = 0$$

woraus man die Wurzeln $-\frac{d}{c}$ und $-\frac{b}{a}$ erkennt.

Für $x = 0$ entsteht aus Gl. 1.

$$y^2 + (b + d) y + bd = 0$$

woraus die Wurzeln $-b$ und $-d$ hervorgehen.

Beispiel. Die Gleichung

$$y^2 - xy - 6y^2 + 2y + 9x - 3 = 0 \qquad (4)$$

ergibt für $x = 0$

$$y^2 + 2y - 3 = 0$$

woraus $y = + 1$ und $- 3$

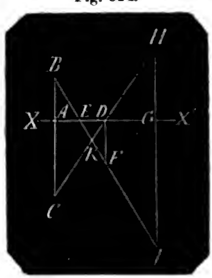
Diese Fig. 524 in A, dem Anfangspunkt der Abscissen aufgetragen ergeben die Curvenpunkte B und C.

Für $y = 0$ entsteht

$$- bx^2 + 9x - 3 = 0$$

woraus $x = + 1$ und $+ \frac{1}{3}$.

Fig. 524.



Diese Längen in XX' von A ab nach AD und AE aufgetragen, ergeben die Curvenpunkte D und E.

Für $x = 1$ entsteht aus Gl. 4:

$$y^2 + y = 0$$

woraus $y = 0$ und $= -1$

Der Punkt D für $y = 0$ ist schon bezeichnet; für $y = 1$ entsteht der Curvenpunkt F.

Für $x = 2$ entsteht aus Gl. 4

$$y^2 - 9 = 0$$

also $y = +3$ und -3

Nimmt man $AG = 2$, so erhält man die Punkte H und J, und wenn man die Punkte B, E, F, J und C, D, H zusammenzieht, die in K sich schneidenden geraden Linien BJ und CH, die für weitere Abscissen $\pm x$ verlängert werden.

Um den Durchschnittspunkt K aus Gl. 2 und 3 zu bestimmen, hat man erst die Werthe von a, b, c, d aufzufinden.

Vergleicht man Gl. 1 mit Gl. 4 so ist

$$a + c = +1 \qquad b + d = +2$$
$$ac = -6 \qquad bd = -3$$

Hieraus erhält man (s algebr. Gleichung pag. 61, C.)

$$a = +2;\ b = -1;\ c = -3;\ d = +3$$

also für K:

$$x = \frac{d - b}{a - c} = {}^4/_5$$

$$y = \frac{ad - bc}{a - c} = {}^3/_5$$

Aufser dieser practisch geometrischen Darstellung kann man auch die Gleichung auf gerade Linien prüfen, wenn man in die Gl. erst $x = 1$ und dann $x = n$ setzt. Liefert die Gl. statt einer krummen Linie 2 gerade Linien, so mufs für $x = n$ auch das $n$fache y entstehen, wenn nämlich im Anfangspunkt der Abscissen die Curve anfängt, wenn also $y = 0$ für $x = 0$

$x = 1$ in Gleichung 1 gesetzt gibt

$$y^2 + (a + b + c + d)\,y + (a + b)\,(c + d) = 0$$

hieraus

$$y = -\frac{a + b + c + d}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a + b + c + d}{2}\right)^2 - (a + b)\,(c + d)}$$

Die Wurzelgröfse findet man $\pm \dfrac{(a + b) - (c + d)}{2}$

mithin y entweder $\qquad -(a + b)$ oder $-(c + d)$ $\qquad$ (5)

$x = n$ in Gl. 1 gesetzt gibt

$$y^2 + [n\,(a + c) + (b + d)]\,y + acn^2 + (ad + bc)\,n + bd = 0$$

woraus

$$y = -\frac{n(a + c) + (b + d)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{n(a + c) + (b + d)}{2}\right)^2 - acn^2 - (ad + bc)\,n - bd}$$

Die Wurzelgröfse findet man

$$\pm \frac{n(a - c) + (b - d)}{2}$$

mithin

y entweder $= -(na + b)$ oder $-(nc + d)$ (6)

Es ist oben gefunden worden, dafs für $x = 0$ die Wurzeln der Gleichung für $y =$ sind $-b$ und $-d$. Die Curve beginnt also erst dann in dem Anfangspunkt der Abscissen, wenn man die XX' nach der Minusseite um die Entfernung b oder d verlegt, und die Ordinaten für $x = 1$ sind nicht wie ad 5:

$$(a + b) \text{ und } -(c + d)$$

sondern

$-(a + b - a) = -a$ und $-(c + d - d) = -c$ und die Ordinaten für $x = n$ sollen sein $-na$ und $-nc$. Von der ursprünglichen Abscissenlinie XX' sind dann diese Ordinaten

$$-(na + b) \text{ und } -(nc + d)$$

wie sie ad 6 entwickelt worden sind.

Eine Gleichung vom 3ten Grade, die in 3 rationale Factoren

$$(y + ax + b)\,(y + cx + d)\,(y + ex + f) = 0$$

sich auflösen läfst, gibt ein System von 3 geraden Linien.

Sind die Factoren

$$(y + ax + b)\,(y^2 + x^2 - dx) = 0$$

so ist der erste Factor die Gleichung für eine gerade Linie, der zweite Factor die Gleichung für einen Kreis vom Durchmesser d und die aus beiden Factoren hervorgehende Gleichung vom 3ten Grade gibt statt einer Curve die gerade Linie und den Kreis. Eben so kann eine Gleichung vom 4ten Grade 4 gerade Linien, 2 Linien der 2ten Ordnung, eine grade Linie und eine der dritten Ordnung liefern.

16. Die Anzahl der geometrischen Bestimmungsstücke jeder besonderen C. zu wissen ist eben so wichtig wie bei den geradlinigen Figuren und man findet dieselbe aus folgender Betrachtung.

Wenn man die Bestimmungsgleichung einer C. mit einer bestimmten Zahl multiplicirt oder dividirt, so bleibt die Gleichung und also auch die durch sie bestimmte C. dieselbe; z. B. die Gl. für die gerade Linie

$$ay + bx + c = 0$$

liefert dieselbe Linie in Beziehung auf ihre Lage zu einer gegebenen anderen wie die Gl.

$$y + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Schreibt man diese Gl. allgemein:

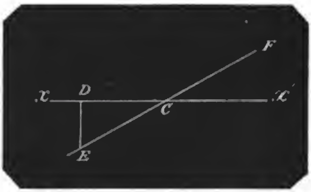
$$y + Ax + B = 0$$

so ersieht man, dafs die gerade Linie bekannt ist, sobald die Zahlen A und B bekannt sind. Denn

für $x = 0$ ist $y = -B$

und für $y = 0$ ist $x = -\frac{B}{A}$

Fig. 525.



Soll man also die gerade Linie der vorstehenden Gl. gegen eine andere gegebene grade Linie XX' Fig. 525 bestimmen, und ist zugleich der Punkt C in XX' gegeben, in welcher beide Linien sich schneiden sollen, so hat man von C aus die Länge $CD = \frac{B}{A}$ und die Ordinate $DE = -B$ aufzutragen und erhält die gesuchte Linie EF durch C.

Es sind also zu Bestimmung einer geraden Linie EF 2 Punkte (C und E) erforderlich, also so viele Punkte als Coefficienten zu bestimmen sind, wenn der von $y = 1$ gesetzt wird, oder so viele Punkte als die vollständige Gleichung Glieder hat weniger einem.

Die Gleichung für den Kreis ist, der Coefficient von $y = 1$ gesetzt:

$$y^2 + ayx + bx^2 + cy + dx + e = 0 \quad (1)$$

Gesetzt nun, es wäre ein Punkt des Kreises gegen eine gerade Linie XX' der Art gegeben, dafs in einem Abstande α vom Punkt C die rechtwinklige Ordinate $= A$ ist,

so hat man für $x = \alpha$, $y = A$.

Diese Werthe in die allgemeine Gleichung gesetzt, erhält man

$$A^2 + \alpha A \times a + \alpha^2 \times b + A \cdot c + \alpha \cdot d + e = 0 \quad (2)$$

Subtrahirt man Gl. 1 von Gl. 2, so fällt e fort und man erhält eine Gleichung von nur 4 unbekannten Coefficienten a, b, c, d nämlich

$$(1^2 - y^2) + (\alpha A - yx)\,a + (\alpha^2 - x^2)\,b + (A - y)\,c + (\alpha - x)\,d = 0 \quad (3)$$

Kennt man nun einen 2ten Punkt des Kreises, so dafs für den Abstand β von C die Ordinate $= B$ ist und setzt diese Werthe in Gl. 3, so erhält man die Gl.:

$$(A^2 - B^2) + (\alpha A - \beta B)\,a + (\alpha^2 - \beta^2)\,b + (A - B)\,c + (\alpha - \beta)\,d = 0 \quad (4)$$

multiplicirt man Gl. 3 mit $(\alpha - \beta)$, Gl. 4 mit $(\alpha - x)$ und subtrahirt, so fällt α fort und man erhält eine Gl. von nur 3 unbekannten Coefficienten a, b, c u. s. w.

Um also alle 5 unbekannten Coefficienten der ursprünglichen Gl. finden und den Kreis construiren zu können, müssen 5 Punkte desselben gegeben sein. Hieraus ist die Regel ersichtlich, dafs zu einer C. so viele geometrische Bestimmungsstücke gehören, als die für sie erforderliche vollständige Gleichung Glieder hat weniger einem Nach No. 4 ist diese Anzahl der Glieder für eine Gleichung vom $n$ten Grade

$$= \tfrac{1}{2}(n + 1)(n + 2)$$

daher die Anzahl der Bestimmungsstücke für eine Linie der $n$ten Ordnung oder eine L. der $(n - 1)$ten Classe

$$= \tfrac{1}{2}(n + 1)(n + 2) - 1 = \tfrac{1}{2}n\,(n + 3).$$

Erleichterungen für die Construction der C. erhält man, wenn man die Abscissenlinie durch 2 der gegebenen Punkte legt, wodurch die beiden zugehörigen Ordinaten = Null werden.

II. Linien der ersten Ordnung.

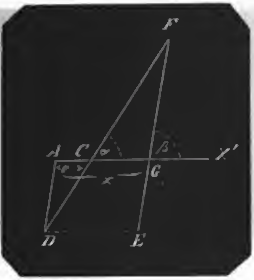
1. Diese bestehen nach I. No. 2 nur in der einzigen geraden Linie. Die Coordinatengleichung für dieselbe ist No. 2 mit Fig. 520 entwickelt. Es ist noch zu bemerken, dafs mit α und β auch die Winkel auf der Plusseite wie Fig. 526 u. 527 bezeichnet werden und dann hat man

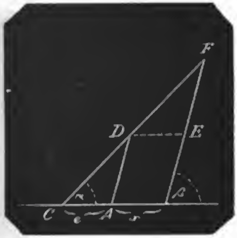
$$y = (x \mp e) \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin (\beta - \alpha)} \quad (1)$$

Für $e = 0$, d. h. wenn der Anfangspunkt der Abscissen in dem Durchschnittspunkt C beider Linien liegt

$$y = x \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin (\beta - \alpha)} \quad (2)$$

Fig. 526 u. 527.





Wenn $\beta = 90°$ genommen wird, so ist Für Gl. 1.

$$y = (x \mp e)\, tg\, \alpha \qquad (3)$$

Für Gl. 2:

$$y = x\, tg\, \alpha \qquad (4)$$

2. In der allgemeinen Gleichung für die grade Linie

$$y = a + bx \qquad (5)$$

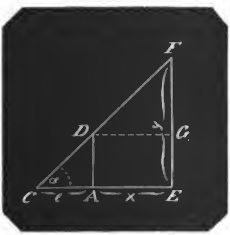
bedeutet a die Ordinate (AD) im Anfangspunkt der Abscissen, und der Coefficient b von x ist der Quotient, wenn man dieselbe Ordinate AD durch den Abstand e zwischen dem Durchschnittspunkt beider Linien und dem Anfangspunkt dividirt.

Sind die Coordinaten rechtwinklig, so ist das bekannte Glied a in Gl. 5 die Normale AD im Anfangspunkt A der Abscissen bis zur verlangten geraden Linie $= e\, tg\, \alpha$, und der Coefficient b des zweiten Gliedes ist

$$\frac{FG}{DG} = tg\, \alpha$$

so dafs $\quad bx = x \cdot tg\, \alpha = FG$ ist.

Fig. 528.

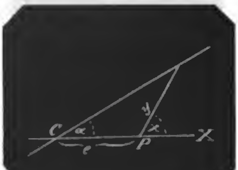


Ist $\alpha = 0$ so ist $y = a$, und die gerade Linie läuft mit der Abscissenlinie in dem Abstande a parallel. Ist $a = 0$, so fängt die Linie in dem Anfangspunkt A der Abscissen an und schneidet dieselbe dort unter dem $\angle\, \alpha$.

3. Die Polargleichung für die gerade Linie bestimmt sich wie folgt.

Es sei CX die Polaraxe, C deren Durchschnittspunkt mit der verlangten geraden Linie, α der Winkel zwischen beiden, der Abstand des Pols P vom Durchschnittspunkt $C = e$, $\angle\, x$ eine Polarabscisse, y

Fig. 529.



die zugehörige Polarordinate, so ist

$$e : y = \sin(x - \alpha) : \sin \alpha$$

woraus

$$y = e\, \frac{\sin \alpha}{\sin(x - \alpha)} \qquad (1)$$

Beispiele.

1. Beisp. $\quad y = x$

Im Vergleich mit Gl. 5 No. 2 ist hier $a = 0$, mithin beginnt die gerade Linie in dem festgesetzten Anfangspunkt der gegebenen Abscissenlinie;

ferner ist $b = tg\, \alpha = 1$, mithin $\alpha = 45°$

Ist also (Fig. 528) CE die gegebene Abscissenlinie mit dem Anfangspunkt C, so zeichne CF unter $\alpha = 45°$, und CF ist die verlangte Linie.

2. Beisp. $\quad y = -\cos\alpha + x \sin\alpha \sqrt{3}$

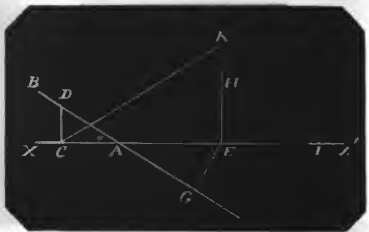
Es sei A in XX' der Anfangspunkt der Abscissen; zeichne nach der Minusseite hin

$\angle BAX = \alpha$, nimm $AD = 1$, fälle das Loth DC so ist $AC = -\cos\alpha$, folglich C der Durchschnittspunkt der verlangten Linie mit XX'.

Nimm ein beliebiges $x = AE$, verlängere BA, fälle das Loth EG, so ist $\quad EG = x \sin\alpha$ errichte das Loth EF, zeichne $EH = EG$, schneide EX' aus H mit $HJ = 2EH$, mache $EK = EJ$ so ist CK die verlangte Linie.

Denn es ist

Fig. 530.



$$EK^2 = HJ^2 - HE^2 = (2HE)^2 - HE^2 = 3HE^2 = 3x^2 \sin^2\alpha$$

folglich $\quad EK = x \sin\alpha \sqrt{3}.$

3. Beisp. $\quad y = \frac{1}{\cos x}$

Ist (Fig. 531) CX die Polaraxe, C der gegebene Durchschnittspunkt zwischen dieser und der verlangten Linie, so ist die verlangte gerade Linie die Normale auf CX in C. Denn es ist

Fig. 531.



$$\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sin(90^\circ - x)} = -\frac{\sin 90^\circ}{\sin(x - 90^\circ)}$$

Also in Formel 1: $\alpha = 90^\circ$.

Nimmt man nun auf der Minusseite $CP = 1$, so ist für ein beliebiges

$$x = \angle DPC, \; PD = y$$

und man hat auch

$$PD : PC = \sin\alpha : \sin PDC$$
$$y : 1 = 1 : \cos x$$

woraus $\quad y = \frac{1}{\cos x}$

III. Linien der zweiten Ordnung oder Curven der ersten Klasse.

Von diesen Curven ist No. 1 die Coordinatengleichung des Kreises beispielsweise entwickelt und theilweise untersucht worden. Es sollen nun hier aus der der ganzen Klasse zugehörigen allgemeinen Gleichung

$$ay^2 + bxy + cx^2 + dx + ex + f = 0 \quad (1)$$

die verschiedenen Arten der hierher gehörigen Curven und deren besondere Eigenschaften ermittelt werden.

1. Da y und x in der 2ten Potenz vorkommen, so hat sowohl y wie x zwei Wurzeln; d. h. es existiren für jede Abscisse x zwei Ordinaten und für jede Ordinate y zwei Abscissen x. Nur bei Unvollständigkeit der Gl. ist dies nicht: Wenn $a = 0$, so existirt für jedes x nur ein y und wenn $c = 0$, so existirt für jedes y nur ein x.

2. Für $b = 0$ und $d = 0$, also bei der Gl.:

$$ay^2 + cx^2 + ex + f = 0 \quad (2)$$

existiren für jedes x zwei gleich grofse aber entgegengesetzt liegende Ordinaten

$$y = \pm\sqrt{-\frac{cx^2 + ex + f}{a}}$$

d. h. die Abscissenlinie ist ein Durchmesser der C.

Für $b = 0$ und $e = 0$, also bei der Gl.

$$ay^2 + cx^2 + dy + f = 0 \quad (3)$$

existiren für jedes y zwei gleich grofse aber entgegengesetzt liegende Abscissen

$$x = \pm\sqrt{-\frac{ay^2 + dy + f}{c}}$$

d. h. jede beliebige Ordinate ist ein Durchmesser der C., wenn man dieselbe als Abscissenlinie und die der Abscissenlinie parallele x als Ordinaten betrachtet.

3 Setzt man $x = 0$ in die Formel für y, so erhält man

$$y = \pm\sqrt{-\frac{f}{a}}$$

Wenn also f und a gleiche Vorzeichen haben, also da a immer positiv ist, wenn f positiv ist, so existirt für $x = 0$ keine Ordinate, aber für ein negatives f existi-

ren 2 gleich grofse entgegengesetzte Ordinaten.

Setzt man in die Formel für x, $y=0$, so erhält man

$$x = \pm \sqrt{-\frac{f}{c}}$$

Für $y=0$ existirt also keine Abscisse wenn f und c einerlei Vorzeichen haben, für verschiedene Vorzeichen aber existiren 2 gleich grofse und entgegengesetzte Abscissen.

4. Ist $f=0$ also die Gleichung:

$$ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex = 0 \qquad (4)$$

so ist für $x=0$ auch ein Werth von $y=0$, und der Anfangspunkt der Coordinaten liegt in einem Punkt der Curve.

5. In Gl. 4: $y=0$ gesetzt gibt

$$cx^2 + ex = 0$$

Mithin entweder $x=0$ oder $x = -\frac{e}{c}$

und $-\frac{e}{c}$ ist die Entfernung zwischen beiden Durchschnittspunkten der Abscissenlinie und der Curve.

In Gl. 4: $x=0$ gesetzt gibt

$$ay^2 + dy = 0$$

woraus entweder $y=0$ oder $y = -\frac{d}{a}$

6. Setzt man in Gl. 1 $y=0$, so erhält man

$$cx^2 + ex + f = 0$$

woraus $x = \dfrac{-e \pm \sqrt{e^2 - 4cf}}{2c}$

Ist $e^2 > 4cf$ so entstehen 2 ungleiche Abscissen

$$x = \frac{-e + \sqrt{e^2 - 4cf}}{2c} \text{ und } x^1 = \frac{-e - \sqrt{e^2 - 4cf}}{2c}$$

Ist $e^2 < 4cf$ so entstehen nur 2 Abscissen wenn cf subtractiv ist.

Für $e^2 = 4cf$ entsteht nur eine Abscisse $x = -\frac{e}{2c}$

Für $e=0$ und auch für $f=0$ oder bei der Gl.

$$ay^2 + byx + cx^2 + dy = 0 \qquad (5)$$

wird für $y=0$, x nur $=0$, aber für $x=0$ wird $y=0$ und $= -\frac{d}{a}$

7. Setzt man in Gl. 1. $x=0$ so entsteht:

$$ay^2 + dy + f = 0$$

woraus $y = \dfrac{-d \pm \sqrt{d^2 - 4af}}{2a}$

Für $d^2 > 4af$ entstehen 2 ungleiche Ordinaten

$$y = \frac{-d + \sqrt{d^2 - 4af}}{2a} \text{ und } y^1 = \frac{-d - \sqrt{d^2 - 4af}}{2a}$$

Ist $d^2 < 4af$ dann existiren nur Ordinaten wenn af subtractiv ist, wenn also da a immer positiv ist, f negativ ist.

Ist $d^2 = 4af$ so existirt nur eine Ordinate $y = -\frac{d}{2a}$

8. Setzt man nun noch $d=0$ so hat man die Gl.:

$$ay^2 + byx + cx^2 = 0 \qquad (6)$$

woraus $y = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} x \qquad (7)$

Für diesen Fall ist mit $x=0$ auch $y=0$ und gegenseitig.

9. Die bisherigen Betrachtungen haben nur die Bedeutung und den Einflufs der einzelnen Coefficienten für sämmtliche in diese Klasse gehörenden Curven anzeigen sollen; es ist nur noch zu bemerken, dafs da x und y Linien sind, alle Glieder der allgemeinen Gleichung von einerlei also von 2 Dimensionen sein müssen; demnach sind a, b, c abstracte Zahlen; d, e Linien und f ist eine Fläche.

Der Character der Curven ist aber nur aufzufassen, wenn man den Zusammenhang der Abscissen von beliebiger Länge mit deren zugehörigen Ordinaten betrachtet, und hierzu eignet sich ganz besonders Formel 7. Dagegen geht diese letzte aus einer unvollkommenen Gleichung 6 hervor.

10. Aus der allgemeinen Gl. 1 erhält man

$$y = \frac{-(bx+d) \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)x^2 + 2(bd - 2ae)x + d^2 - 4af}}{2a} \qquad (8)$$

Diese Gleichung gilt nun für jedes x, so grofs man es nehmen mag, und um den Einflufs der Glieder bei beliebig grofsem x besser zu übersehen dividirt man mit x und erhält

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{2a}\left[-\left(b + \frac{d}{x}\right) \pm \sqrt{(b^2 - 4ac) + \frac{2(bd - 2ae)}{x} + \frac{d^2 - 4af}{x^2}}\right] \qquad (9)$$

Je gröfser x genommen wird, desto kleiner werden die veränderlichen Glieder zur Rechten, weil diese sämmtlich x im Nenner haben, während die Zähler constant sind und für $x = \infty$ fallen dieselben als 0 fort. Es ist demnach für $x = \infty$

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{2a}\left[-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}\right] \qquad (10)$$

d. i. Formel 7 für den Fall, dafs d, e, $f = 0$ sind.

Da die Seite rechts eine endliche Gröfse ist, so ist $\frac{y}{x} = \frac{y}{\infty}$ nicht $= 0$, welches daher kommt, dafs y mit $x = \infty$, ebenfalls unendlich ist und dafs zugleich zwischen $x = \infty$ und $y = \infty$ ein endliches Verhältnifs statt findet.

Sämmtliche Curven der ersten Klasse zerfallen also in 3 Hauptgattungen,

1. die, für welche die Wurzelgröfse $b^2 - 4ac$ positiv ist,
2. die für welche sie negativ ist und
3. die für welche sie Null ist.

Hat b einen wirklichen Werth, ist also b nicht $= 0$, so ist es für den ersten Fall gleichgültig, ob c additiv oder subtractiv ist; in den beiden letzten Fällen mufs c additiv sein. Ist für die Gleichung 2, No. 2, wo die Abscissenlinie ein Durchmesser ist, $b = 0$, so ist für den ersten Fall c subtractiv, für den zweiten Fall c additiv und für den dritten Fall $c = 0$.

11. Die C. des zweiten Falles: $b^2 < 4ac$ unterscheiden sich dadurch, dafs für $x = \infty$, y unmöglich wird, auffallend von den C. der beiden anderen Fälle; es kommt nun darauf an, den Unterschied der Curven des ersten und dritten Falles zu bestimmen.

Geht man auf Gl. 9 zurück, so hat man, wenn zugleich die beiden ungleichen Ordinaten mit y und y' bezeichnet werden:

1. Für $b > 4ac$

$$\frac{y - y^1}{x} = \frac{1}{a}\sqrt{(b^2 - 4ac) + \frac{2bd - 4ae}{x} + \frac{d^2 - 4af}{x^2}} \qquad (11)$$

2. Für $b = 4ac$

$$\frac{y - y^1}{x} = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{2bd - 4ae}{x} + \frac{d^2 - 4af}{x^2}} \qquad (12)$$

In dem ersten Fall, wo die beiden letzten Glieder der Wurzelgröfse für $x = \infty$ verschwinden, ist

$$y - y^1 : x = \sqrt{b^2 - 4ac} : a$$

In dem zweiten Fall ist

$$y - y^1 : x = \sqrt{\left(\frac{2bd - 4ae}{x} + \frac{d^2 - 4af}{x^2}\right)} : a$$

In dem ersten Fall, für $b > 4ac$, steht also die Differenz beider unendlichen Ordinaten mit der unendlichen Abscisse in einem endlichen Verhältnifs

$$\sqrt{b^2 - 4ac} : a$$

In dem zweiten Fall, für $b = 4ac$ steht die Differenz beider unendlichen Ordinaten mit der unendlichen Abscisse in einem unendlichen Verhältnifs. Denn es ist

$$\sqrt{\left(\frac{2bd - 4ae}{x} + \frac{d^2 - 4af}{x^2}\right)} : a = \sqrt{(2bd - 4ae)x + (d^2 - 4af)} : ax$$

Gegen das unendliche erste Glied der Wurzelgröfse verschwindet das endliche zweite Glied, und es ist das Verhältnifs

$$y - y^1 : x = \sqrt{(2bd - 4ae)\,x} : ax = \sqrt{(2bd - 4ae)} : a\sqrt{x} = 1 : \frac{a}{\sqrt{2bd - 4ae}}\sqrt{x} = 1 : \infty$$

12. Es kommt nun darauf an, die 3 Gattungen der Curven erster Klasse näher kennen zu lernen, und dies geschieht am geeignetsten, wenn man die allgemeine Gleichung für dieselben dergestalt einschränkt, dafs für jede beliebige Abscisse x eine mögliche Ordinate existirt. Demnach ist nach No. 4 in Gl. 1 zunächst $f = 0$ zu setzen, und man hat die Gl.:

$$ay^2 + byx + cx^2 + dy + ex = 0 \qquad (13)$$

Sämmtliche 3 Gattungen der Curve haben nach No. 2 die gemeinschaftliche Eigenschaft, für $b = 0$ und $d = 0$ in der Abscissenlinie einen Durchmesser zu besitzen und man hat daher die eingeschränktere Gleichung

$$ay^2 + cx^2 + ex = 0 \qquad (14)$$

so dafs für jedes x (mit Ausnahme von $x = 0$ und von $x = -\frac{e}{c}$, s. No. 5) zwei gleiche aber entgegengesetzte Ordinaten entstehen, und zwar ist

$$y = \pm\sqrt{-\frac{cx^2 + ex}{a}}$$

Für $c = 0$ wird nun $y = \pm\sqrt{-\frac{e}{a}x}$ und da a immer positiv ist, so existiren

für die Gleichung 14 bei $c = 0$ für ein positives e nur Ordinaten für negative Abscissen. Damit diese Einschränkung nicht statt finde, soll das Glied ex in Gl. 14 subtractiv gesetzt werden und man hat die Gl.

$$ay^2 + cx^2 - ex = 0 \qquad (15)$$

Ist nun (1. Fall) $b^2 > 4ac$; also $0 > 4ac$ so ist c subtractiv, und die Gleichung dafür ist

$$\text{I.} \quad ay^2 - cx^2 - ex = 0 \qquad (16)$$

Ist (2. Fall) $b^2 < 4ac$; also $0 < 4ac$ so ist c additiv und die Gleichung dafür ist

$$\text{II.} \quad ay^2 + cx^2 - ex = 0 \qquad (17)$$

Ist (3. Fall) $b^2 = 4ac$; also $0 = 4ac$ so ist $c = 0$ und die Gleichung dafür ist

$$\text{III.} \quad ay^2 - ex = 0 \qquad (18)$$

Da nach I. No. 16 eine C. dieselbe bleibt, wenn deren Gleichung durch eine constante Zahl multiplicirt oder dividirt wird, so hat man durch a dividirt, y entwickelt, und wenn man $\frac{e}{a}$ mit A und $\frac{c}{a}$ mit B bezeichnet

I. Für $b^2 > 4ac$

$$y^2 = Ax + Bx^2 \qquad (19)$$

II. Für $b^2 < 4ac$

$$y^2 = Ax - Bx^2 \qquad (20)$$

III. Für $b^2 = 4ac$

$$y^2 = Ax \qquad (21)$$

wobei zu bemerken, (s. No. 9), dafs A eine Linie und B eine abstracte Zahl bedeutet.

13. Die beiden Curven I und III haben für eine unendliche Abscisse 2 unendliche Ordinaten, die C. II. hat für eine unendliche Abscisse unmögliche Ordinaten, und da eine C. nie aufhört, so mufs die C. II. Rückkehrungen machen (s. I. No. 10.) Nun ist für $y = 0$, x entweder $= 0$ oder $= \frac{A}{B}$; es existirt also nur für 2 bestimmte Werthe von x ein einziger Werth und zwar $= 0$ für y; ferner hat für alle übrigen Werthe von x, jedes y zwei und nicht mehr als zwei Werthe, mithin kann die C. nur eine Umkehrung machen und die C. II. mufs eine geschlossene C. sein, von welcher zugleich $\frac{A}{B}$ der Durchmesser ist.

Um diese geschlossene C. näher zu untersuchen, setzt man

$$x_1 = \frac{A}{B} - x$$

so dafs die Abscisse x_1 am zweiten Nullpunkt von y anfängt und der ersten Abscisse x entgegengeht. Dann erhält man

$$y_1^2 = A\left(\frac{A}{B} - x_1\right) - B\left(\frac{A}{B} - x_1\right)^2$$

woraus

$$y_1^2 = Ax_1 - Bx_1^2$$

Es ist mithin die geschlossene C. von beiden Endpunkten ab symmetrisch und y in der Mitte ein Maximum, nämlich für

$$x = x_1 = \frac{A}{2B}$$

oder für die Gleichung

$$y^2 = A \cdot \frac{A}{2B} - B \cdot \left(\frac{A}{2B}\right)^2$$

woraus

$$y = \pm \frac{A}{2\sqrt{B}} = \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{A^2}{B}}$$

Es ist demnach die C. II. eine Ellipse, $\frac{A}{B}$ und $\frac{A}{\sqrt{B}}$ sind bei rechtwinkligen Coordinaten deren Axen. Ist $B > 1$ so ist $\frac{A}{\sqrt{B}}$ die grofse, $\frac{A}{B}$ die kleine Axe; ist $B < 1$ so ist $\frac{A}{B}$ die grofse und $\frac{A}{\sqrt{B}}$ die kleine Axe; für $B = 1$ sind beide Axen gleich grofs und die C. ist ein Kreis und IV: $\quad y^2 = Ax - x^2 \qquad (22)$

14. Setzt man in die Formeln I bis IV (19 bis 22) $(-x)$ für x, so entsteht

$$\text{I.} \quad y_1^2 = -Ax_1 + Bx_1^2$$

woraus $\quad y_1 = \pm\sqrt{-Ax_1 + Bx_1^2}$

$$\text{II.} \quad y_1^2 = -Ax_1 - Bx_1^2$$

woraus $\quad y_1 = \pm\sqrt{-Ax_1 - Bx_1^2}$

$$\text{III.} \quad x_1^2 = -Ax$$

woraus $\quad y_1 = \pm\sqrt{-Ax_1}$

$$\text{IV.} \quad y_1^2 = -Ax_1 - x_1^2$$

woraus $\quad y_1 = \pm\sqrt{Ax_1 - x_1^2}$

Gleichung I. ist also die einzige der 4 Gleichungen, in welcher y einen reellen Werth erhält.

Für $x = -\frac{A}{B}$, also für den negativen Werth der Ellipsenaxe wird $y = 0$ und die Abscissenlinie schneidet die C. Sonst hat die Abscissenlinie mit der C. keinen Durchschnittspunkt weiter.

Setzt man in den beiden Gleichungen I, $y_1 = y$, so erhält man

$$Ax + Bx^2 = -Ax_1 + Bx_1^2$$

oder $\quad (x_1^2 - x^2)B - (x_1 + x)A = 0$

oder $\quad (x_1 - x)B - A = 0$

woraus $\quad x_1 = x + \frac{A}{B}$

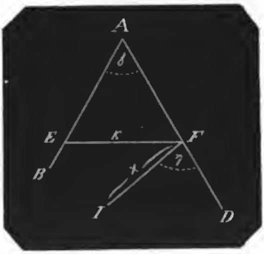
so dafs nach der entgegengesetzten Richtung der x von der constanten Länge $\frac{A}{B}$ ab dieselbe C. wie für die positiven x, aber nach entgegengesetzter Richtung der positiv gelegenen C. beginnt, eine

Eigenschaft, welche der einzigen Hyperbel angehört. Da ferner eine C. von der Gl. III. nur eine Parabel sein kann, die Gleichung II. aber entweder eine Ellipse oder einen Kreis liefert, so **bestehen die Curven erster Klasse nur in den 4 Kegelschnittslinien.**

15. Die Kegelschnittslinien sind in dem Art. Brennpunkte der Kegelschnitte pag. 420 mit Hülfe von Fig. 257 durch ihre Gleichungen entwickelt, wenn die Coordinaten rechtwinklig sind, die Abscissenlinie die Axe ist und der Anfangspunkt der Abscissen im Scheitelpunkt liegt.

Fig. 532 zeigt Fig. 257 in den hier nothwendigen Umrissen: ABD ist der Axendurchschnitt eines Kegels, γ (statt α) dessen Winkel an der Spitze, F der Scheitelpunkt sämmtlicher Kegelschnitte, so gelegen, dafs wenn $AE = AF$ genommen wird die Länge $EF = k$ ist.

Fig. 532.



η (statt β) bezeichnet allgemein den Winkel, den die Axe FJ jedes Kegelschnitts mit der Kegelseite AD bildet, in welcher der Scheitelpunkt F liegt. Setzt man nun in den Formeln sub. A, B, C Bd. I. pag. 420 u. f. für $\alpha = \gamma$ und für $\beta = \eta$, so erhält man

(A) Für die Parabel

$$y^2 = 2k \sin \frac{\gamma}{2} \cdot x \tag{23}$$

(B) Für die Ellipse

$$y^2 = k \frac{\sin \eta}{\cos \frac{\gamma}{2}} x - \frac{\sin (\eta - \gamma)}{\cos^2 \frac{\gamma}{2}} \cdot \sin \eta \, x^2 \tag{24}$$

(C) Für die Hyperbel

$$y^2 = k \frac{\sin \eta}{\cos \frac{\gamma}{2}} x + \frac{\sin (\gamma - \eta)}{\cos^2 \frac{\gamma}{2}} \cdot \sin \eta \cdot x^2 \tag{25}$$

Für die Parabel ist $\eta = \gamma$, für die Ellipse $\eta > \gamma$, für die Hyperbel $\eta < \gamma$.

Für den Kreis fällt FJ in FE, es ist

$$\eta = 90^\circ + \frac{\gamma}{2}$$

und wenn man diesen Werth in die Gleichung 24 für die Ellipse setzt, so erhält man die Gleichung für den Kreis

$$y^2 = kx - x^2 \tag{26}$$

Es ist demnach in den Gleichungen 19, 20 und 21

$$A = k \cdot \frac{\sin \eta}{\cos \frac{\gamma}{2}} \tag{27}$$

$$B = \frac{\pm \sin (\eta - \gamma)}{\cos^2 \frac{\gamma}{2}} \sin \eta \tag{28}$$

16. Sollen nun die Gleichungen 19 bis 22 in ganz allgemeine wie I. Gl. 1 verwandelt werden, so hat man Art. Coordinatengleichung mit Fig. 516 die Gleichungen

I. $y \sin \alpha + (b + u) \sin \beta = z \sin (\beta + \delta)$

II. $x - y \cos \alpha - z \cos (\beta + \delta) = a - (b + u) \cos \beta$

Es sollen also hiermit die mit x, y und $\alpha = 90^\circ$ gegebenen Gl. 19 bis 22 auf andere für u, z, δ gewählte Gleichungen reducirt werden.

Setzt man $\alpha = 90^\circ$ und ändert die Constanten a und b in p und g um sie mit den Coefficienten a und b nicht zu verwechseln, so hat man

I. $y + (g + u) \sin \beta = z \sin (\beta + \delta)$

II. $x - z \cos (\beta + \delta) = p - (g + u) \cos \beta$

Nun hat man

I. Für die Parabel

$$y^2 = Ax$$

Setzt man in diese Gl. die Werthe von y und x aus Gleichung I. und II., so erhält man:

$$[z \sin (\beta + \delta) - (g + u) \sin \beta]^2 = Ap + Az \cos (\beta + \delta) - A (g + u) \cos \beta$$

II. Für die Hyperbel.

$$y^2 = Ax + Bx^2$$

wie vorher verfahren gibt

$$[z \sin (\beta+\delta) - (g+u) \sin \beta]^2 = A[p + z \cos (\beta+\delta) - (g+u) \cos \beta] + B[p + z \cos (\beta+\delta) - (g+u) \cos \beta]^2$$

III. Für die Ellipse.

$$y^2 = Ax - Bx^2$$

$$[z \sin (\beta + \delta) - (g+u) \sin \beta]^2 = A[p + z \cos (\beta + \delta) - (g+u) \cos \beta] - B[p + z \cos (\beta+\delta) - (g+u) \cos \beta]^2$$

IV. Für den Kreis

$$y^2 = Ax - x^2$$

$$[z \sin(\beta+\delta) - (g+u)\sin\beta]^2 = A[p + z\cos(\beta+\delta) - (g+u)\cos\beta] - [p + z\cos(\beta+\delta) - (g+u)\cos\beta)^2$$

Diese 4 Gleichungen aufgelöst und geordnet findet man:

I. Die allgemeine Gleichung für die Parabel:

$$\sin^2(\beta+\delta)\, z^2 - 2\sin(\beta+\delta)\sin\beta \cdot zu + \sin^2\beta\, u^2 - [2g\sin(\beta+\delta)\sin\beta + A\cos(\beta+\delta)]z$$
$$+ (2g\sin^2\beta + A\cos\beta)\,u + g^2\sin^2\beta - A(p - g\cos\beta) = 0 \qquad (29)$$

II. Die allgemeine Gleichung für die Hyperbel.

$$[\sin^2(\beta+\delta) - B\cos^2(\beta+\delta)]z^2 - 2[\sin(\beta+\delta)\sin\beta + B\cos(\beta+\delta)\cos\beta]zu$$
$$+ (\sin^2\beta - B\cos^2\beta)u^2 - [2g\sin(\beta+\delta)\sin\beta + A\cos(\beta+\delta) + 2B\cos(\beta+\delta)(p - g\cos\beta)]z$$
$$+ [2g\sin^2\beta + A\cos\beta + 2B\cos\beta(p - g\cos\beta)]u + g^2\sin^2\beta - A(p - g\cos\beta) - B(p - g\cos\beta)^2 = 0 \qquad (30)$$

III. Die allgemeine Gleichung für die Ellipse.

$$[\sin^2(\beta+\delta) + B\cos^2(\beta+\delta)]z^2 - 2[\sin(\beta+\delta)\sin\beta - B\cos(\beta+\delta)\cos\beta]\,zu$$
$$+ (\sin^2\beta + B\cos^2\beta)u^2 - [2g\sin(\beta+\delta)\sin\beta + A\cos(\beta+\delta) - 2B\cos(\beta+\delta)(p - g\cos\beta)]z$$
$$+ [(2g\sin^2\beta + A\cos\beta - 2B\cos\beta(p - g\cos\beta)]u + g^2\sin^2\beta - A(p - g\cos\beta) + B(p - g\cos\beta)^2 = 0 \qquad (31)$$

IV. Die allgemeine Gleichung für den Kreis.

$$z^2 - 2\cos\delta \cdot zu + u^2 - [2g\cos\delta + (A - 2p)\cos(\beta+\delta)]z + [2g + (A - 2p)\cos\beta]u$$
$$+ g^2\sin^2\beta - A(p - g\cos\beta) + (p - g\cos\beta)^2 = 0 \qquad (32)$$

17. Setzt man $\beta = 0$, so erhält man die Axen der Kegelschnitte zu Abscissenlinien, die Ordinaten unter dem beliebigen $\angle\,\delta$ und Fig. 516 verwandelt sich in Fig. 533. Man erhält demnach die Gleichungen:

Fig. 533.



I. Für die Parabel.

$$\sin^2\delta \cdot z^2 - A\cos\delta \cdot z + Au - A(p - g) = 0 \qquad (33)$$

II. Für die Hyperbel.

$$(\sin^2\delta - B\cos^2\delta)z^2 - 2B\cos\delta \cdot zu - Bu^2$$
$$- [A + 2B(p - g)]\cos\delta \cdot z + [A + 2B(p - g)]u$$
$$- A(p - g) - B(p - g)^2 = 0 \qquad (34)$$

III. Für die Ellipse.

$$(\sin^2\delta + B\cos^2\delta)z^2 + 2B\cos\delta \cdot zu + Bu^2$$
$$- (A - 2B(p - g)]\cos\delta \cdot z + [A - 2B(p - g)]u$$
$$- A(p - g) + B(p - g)^2 = 0 \qquad (35)$$

IV. Für den Kreis.

$$z^2 - 2\cos\delta \cdot zu + u^2 - [2g + (A - 2p)]\cos\delta \cdot z + [2g + A - 2p]u - A(p - g) + (p - g)^2 = 0 \qquad (36)$$

18. Setzt man in die Gleichungen 33 bis 36 für z den Werth $(z + h)$, so erhält man die schiefwinkligen Coordinatengleichungen für eine Abscissenlinie, die mit den Axen der Kegelschnitte in der Entfernung $c \sin\delta \mp$ läuft.

I. Für die Parabel.

$$\sin^2\delta \cdot z^2 - (A\cos\delta - 2h\sin^2\delta)z + Au - A(p - g + h\cos\delta) + h^2\sin^2\delta = 0 \qquad (37)$$

II. Für die Hyperbel.

$$(\sin^2\delta - B\cos^2\delta)z^2 - 2B\cos\delta \cdot zu - Bu^2 + [2(\sin^2\delta - B\cos^2\delta)h - A\cos\delta - 2B(p - g)\cos\delta]z$$
$$+ [A + 2B(p - g) - 2Bh\cos\delta]\,u - A(p - g) - B(p - g)^2 + (\sin^2\delta - B\cos^2\delta)h^2$$
$$- [A + 2B(p - g)]\,h\cos\delta = 0 \qquad (38)$$

III. Für die Ellipse.

$$[\sin^2\delta + B\cos^2\delta]\,z^2 + 2B\cos\delta \cdot zu + Bu^2 - \Big[[A - 2B(p - g)]\cos\delta - 2(\sin^2\delta + B\cos^2\delta)h\Big]z$$
$$+ [A - 2B(p - g) + 2Bh\cos\delta]\,u - A(p - g) + B(p - g)^2 - [A - 2B(p - g)]\,h\cos\delta$$
$$+ (\sin^2\delta + B\cos^2\delta)\,h^2 = 0 \qquad (39)$$

IV. Für den Kreis.

$$z^2 - 2\cos\delta \cdot zu + u^2 - [(A - 2[p - g])\cos\delta - 2h]\,z + [A - 2(p - g) - 2h\cos\delta]\,u$$
$$- A(p - g) + (p - g)^2 - [A - 2(p - g)]\,h\cos\delta + h^2 = 0 \qquad (40)$$

19. Setzt man in Gleichung 29 bis 32 statt δ den Werth $(90^\circ - \beta)$ so erhält man Coordinatengleichungen für eine beliebige Abscissenlinie und Ordinaten die normal den Axen der Kegelschnitte sind.

I. Für die Parabel.

$$s^2 - 2\sin\beta\cdot su + \sin^2\beta\cdot u^2 - 2g\sin\beta\cdot s + (2g\sin^2\beta + A\cos\beta)u + g^2\sin^2\beta - A(p - g\cos\beta) = 0 \quad (41)$$

II. Für die Hyperbel.

$$s^2 - 2\sin\beta\cdot su + (\sin^2\beta - B\cos^2\beta)u^2 - 2g\sin\beta\cdot s + [2g\sin^2\beta + A\cos\beta + 2B\cos\beta(p - g\cos\beta)]u + g^2\sin^2\beta - A(p - g\cos\beta) - B(p - g\cos\beta)^2 = 0 \quad (42)$$

III. Für die Ellipse.

$$s^2 - 2\sin\beta\cdot su + (\sin^2\beta + B\cos^2\beta)u^2 - 2g\sin\beta\cdot s + [2g\sin^2\beta + A\cos\beta - 2B\cos\beta(p - g\cos\beta)]u + g^2\sin^2\beta - A(p - g\cos\beta) + B(p - g\cos\beta)^2 = 0 \quad (43)$$

IV. Für den Kreis.

$$s^2 - 2\sin\beta\cdot su + u^2 - 2g\sin\beta\cdot s + [2g + (A - 2p)\cos\beta]u + g^2\sin^2\beta - A(p - g\cos\beta) + (p - g\cos\beta)^2 = 0 \quad (44)$$

20. Setzt man in die Gleichungen 37 bis 40 den Werth 90° für δ, so erhält man die rechtwinkligen Coordinatengleichungen für die Kegelschnitte, wenn die Abscissenlinie mit den Axen in der Entfernung $h \mp$ läuft.

I. Für die Parabel.

$$s^2 + 2hs + Au - A(p - g) + h^2 = 0 \quad (45)$$

II. Für die Hyperbel.

$$s^2 - Bu^2 + 2hs + [A + 2B(p - g)]u - A(p - g) - B(p - g)^2 + h^2 = 0 \quad (46)$$

III. Für die Ellipse.

$$s^2 + Bu^2 + 2hs + [A - 2B(p - g)]u - A(p - g) + B^2(p - g)^2 + h^2 = 0 \quad (47)$$

IV. Für den Kreis.

$$s^2 + u^2 + 2hs + [A - 2(p - g)]u - A(p - g) + (p - g)^2 + h^2 = 0 \quad (48)$$

21. Setzt man in die Gleichungen 33 bis 36 den Werth 90° für δ, oder in die Gleichungen 41 bis 44 für β den Werth $= 0$, oder in die Gleichungen 45 bis 48 für $h = 0$, so erhält man die rechtwinkligen Coordinatengleichungen für die Kegelschnitte, wenn deren Axen die Abscissenlinien sind und bei dem Anfangspunkt A in der Entfernung p vom Scheitel.

I. Für die Parabel.

$$s^2 + Au - A(p - g) = 0 \quad (49)$$

II. Für die Hyperbel.

$$s^2 - Bu^2 + [A + 2B(p - g)]u - A(p - g) - B(p - g)^2 = 0 \quad (50)$$

III. Für die Ellipse.

$$s^2 + Bu^2 + [A - 2B(p - g)]u - A(p - g) + B(p - g)^2 = 0 \quad (51)$$

IV. Für den Kreis.

$$s^2 + u^2 + [A - 2(p - g)]u - A(p - g) + (p - g)^2 = 0 \quad (52)$$

22. Setzt man in diese letzten 4 Gleichungen für u den Werth $(p - g - u)$ so erhält man (vergl. Gl. 19 bis 22):

I. Für die Parabel.

$$s^2 - Au = 0 \quad (53)$$

II. Für die Hyperbel.

$$s^2 - Au - Bu^2 = 0 \quad (54)$$

III. Für die Ellipse.

$$s^2 - Au + Bu^2 = 0 \quad (55)$$

IV. Für den Kreis.

$$s^2 - Au + u^2 = 0 \quad (56)$$

23. Aus den Gleichungen 29 bis 56 ist nun die Bedeutung der Coefficienten in der allgemeinen Coordinatengleichung für die Kegelschnitte

$$as^2 + bsu + cu^2 + ds + eu + f = 0$$

zu ermitteln.

I. Der Coefficient a von s^2 ist allein abhängig von dem Winkel zwischen den Ordinaten und der Axe des Kegelschnitts, indem $(\beta + \delta)$ als Aufsenwinkel von β und δ jenen Winkel jederzeit mifst (s. Gl. 29 bis 40). Ist dieser Winkel $= 90^\circ$ so ist $a = 1$ (s. Gl. 41 bis 52). Bei dem Kreise ist a jederzeit $= 1$, weil jeder

Durchmesser des Kreises zugleich Axe des Kreises ist, also jede beliebig gelegene Ordinate auf irgend einer der Axen des Kreises normal steht. Dividirt man daher eine mit as^2 gegebene Gleichung durch a, so verwandelt man sie in eine Gleichung für dieselbe C., in welcher die Ordinaten rechtwinklig auf der Axe stehen. Aus diesem Grunde sind die Gleichungen 29 bis 40 nicht mehr in Betracht zu ziehen, sondern nur noch die 4 Gattungen No. 41 bis 44, 45 bis 48, 49 bis 52 und 53 bis 56; und es sollen von jetzt ab die Coefficienten b bis f für $a = 1$ gelten.

II. Der Coefficient b von su ist für alle 4 Kegelschnitte = dem doppelten negativen Sinus des zwischen der Abscissenlinie und der Axe des Kegelschnitts befindlichen Winkels β (s. Gl. 41 bis 44).

Liegt die Abscissenlinie ∦ der Axe oder ist sie die Axe selbst, ist also $\beta = 0$, so fehlt das Glied su (s. Gl. 45 bis 56 und vergl. No. 2); nach No. I. fehlt es also jederzeit beim Kreise.

III. Der Coefficient c von u^2 ist in allen Kegelschnitten von dem gedachten $\angle \beta$ abhängig, aber er ist in jedem Kegelschnitt verschieden:

A. Bei der Parabel ist c allgemein $= + \sin^2\beta$; ist die Abscissenlinie ∦ der Axe oder die Axe selbst, so ist $\beta = 0$ und das Glied u^2 fehlt.

B. Bei der Hyperbel ist

$$c = \sin^2\beta - B \cos^2\beta$$

C. Bei der Ellipse ist

$$c = \sin^2\beta + B \cos^2\beta$$

Ist nun die Abscissenlinie ∦ der Axe oder die Axe selbst, so ist

bei der Hyperbel $c = - B$

bei der Ellipse $c = + B$

beim Kreise ist deshalb c immer = 1.

Die Bedeutung von B s. No. 15 u. 24.

IV. Der Coefficient d von s ist = der doppelten Entfernung des Anfangspunkts A der Abscissen von der Axe; positiv, wenn die Abscissenlinie zwischen der Axe und der Curve liegt, wie Gl. 45 bis 48, wo die Ordinaten s um h kleiner sind; negativ wenn die Axe zwischen der C. und der Abscissenlinie liegt wie Gl. 37 bis 40. Setzt man in die Gl. 33 bis 36 den Werth $(s - h)$ für s so werden die Ordinaten s in den Gl. 37 bis 40 und 45 bis 48 um h gröfser, die Abscissenlinie rückt also um eben so viel von der C. weiter ab und wie jetzt jedes Glied mit den Factoren hs additiv ist, so wird es dann subtractiv. Liegt die Abscissenlinie in der Axe, so fällt das Glied s fort, wie in Gl. 49 bis 56 (vergl. No. 2).

V. Der Coefficient e von u hängt von 3 Elementen ab. Von dem $\angle \beta$ zwischen der Axe und der Abscissenlinie, von der Entfernung des Anfangspunkts A der Abscissen oder dessen Projection auf die Axe von dem Scheitelpunkt des Kegelschnitts und von den Parametern A und B der Kegelschnitte.

Ist die Axe zugleich Abscissenlinie und der Scheitelpunkt Anfangspunkt der Abscissen so ist bei allen Kegelschnitten $e = - A$ (s. Gl. 53 bis 56).

Ist die Axe Abscissenlinie oder diese ∦ der Axe und die Entfernung zwischen A und dem Scheitel $= p - g = s$ so ist

bei der Parabel $e = + A$

„ „ Hyperbel $e = + A + 2Bs$

„ „ Ellipse $e = + A - 2Bs$

beim Kreise $e = + A - 2s$

Die Bedeutung von A und B s. No. 15 und 24.

In Gleichung 41 bis 44 ist

$$p - g \cos\beta = s$$

und man hat also, wenn die Abscissenlinie mit der Axe den $\angle \beta$ bildet:

bei der Parabel $e = + 2g \sin^2\beta + A \cos\beta = N$

„ „ Hyperbel $e = N + 2B \cos\beta \cdot s$

„ „ Ellipse $e = N - 2B \cos\beta \cdot s$

beim Kreise $e = N - 2 \cos\beta \cdot s$

Anmerk. Für den Kreis erhält man die Formel, wenn man in den Factor von u in Gl. 44: für $2g$ den Werth setzt

$$2g \sin^2\beta + 2g \cos^2\beta.$$

VI. Der Coefficient f, das unbenannte Glied wird nach No. 4 = 0 wenn ein Punkt der C. zugleich Anfangspunkt der Abscissen ist (s. Gl. 53 bis 56). Liegt der Anfangspunkt der Abscissen in der Entfernung $(p - g) = s$ vom Scheitel in der Axe (s. Gl. 49 bis 52) so ist

bei der Parabel $f = - As$

„ „ Hyperbel $f = - As - Bs^2$

„ „ Ellipse $f = - As + Bs^2$

beim Kreise $f = - As + s^2$

Liegt die Abscissenlinie in der Entfernung h von der Axe, so ist

bei der Parabel $f = - As \pm h^2$

„ „ Hyperbel $f = - As - Bs^2 \pm h^2$

„ „ Ellipse $f = - As + Bs^2 \pm h^2$

beim Kreise $f = - As + s^2 \pm h^2$

Das obere Vorzeichen von h^2 gilt, wenn die Abscissenlinie der C. näher, das untere wenn sie der C. entfernter liegt (s. Gl. 45 bis 48).

Schneidet die Abscissenlinie die Axe in Entfernung p vom Scheitel, und liegt der Anfangspunkt A der Abscissen von

dem Durchschnittspunkt in der Entfernung g, der Winkel zwischen Abscissenlinie und Axe $= \beta$,
so ist $g \sin \beta = h_1$
die Entfernung des Punkts A von der Axe und $(p - g \cos \beta) = s_1$
die Entfernung der Projection des Punkts A von dem Scheitelpunkt. Man hat sodann (s. Gl. 41 bis 44)
bei der Parabel $f = h_1^2 - As_1$
„ „ Hyperbel $f = h_1^2 - As_1 - Bs_1^2$
„ „ Ellipse $f = h_1^2 - As_1 + Bs_1^2$
beim Kreise $f = h_1^2 - As_1 + s_1^2$

24. Bestimmung der Parameter A und B (No. 15).

Es ist
$$A = \frac{\sin \eta}{\cos \frac{\gamma}{2}} k \qquad (1)$$
$$B = \frac{\pm \sin(\eta - \gamma)}{\cos^2 \frac{\gamma}{2}} \sin \eta \qquad (2)$$

Der Winkel γ Fig. 534 hat die Grenzen 0 und 180°; bei 0° fällt der Kegel mit seiner Axe in eine gerade Linie zusammen, $\angle \eta$ wird ebenfalls $= 0$ und A und B werden $= 0$; bei 180° geht der Kegel in eine Kreisebene über; A und B werden ∞.

Der Winkel η hat seine Grenzen 0 und 180°. Für beide Werthe fallen die Kegelschnitte mit den Seitentheilen FD und FA zu geraden Linien zusammen; A und B werden $= 0$.

Für $\eta = 90° + \frac{\gamma}{2}$ fällt FJ in FE, der Kegelschnitt wird ein Kreis.

Es ist
$$A = \frac{\sin\left(90° + \frac{\gamma}{2}\right)}{\cos \frac{\gamma}{2}} k = k$$
$$B = \frac{+\sin\left(90° - \frac{\gamma}{2}\right)}{\cos^2 \frac{\gamma}{2}} \cdot \sin\left(90° + \frac{\gamma}{2}\right) = 1$$

Für $\eta > \gamma$ ist der Kegelschnitt eine Ellipse, also in allen Lagen, wenn FJ um F von $FM \mp AB$ ab, links herum bis in die Richtung FA sich bewegt, mit Ausnahme von $\eta = 90° + \frac{\alpha}{2}$ wo die Ellipse in einen Kreis übergeht. In diesen Fällen gilt für B das additive Vorzeichen.

A wird ein Maximum für $\eta = 90°$, nämlich $A = \frac{k}{\cos \frac{\gamma}{2}}$.

Hierbei wird
$$B = \pm \frac{\sin(90° - \gamma)}{\cos^2 \frac{\gamma}{2}} \sin 90° = \pm \frac{\cos \gamma}{\cos^2 \frac{\gamma}{2}} = \pm \left(1 - tg^2 \frac{\gamma}{2}\right)$$

Es wird also B positiv und der Kegelschnitt eine Ellipse für $\gamma < 90°$, und B negativ und der Kegelschnitt eine Hyperbel für $\gamma > 90°$.

Für $\gamma = 90°$ wird $B = 0$ und der Kegelschnitt eine Parabel.

Zwischen
$$\eta = \left(90° + \frac{\gamma}{2}\right) \text{ und } \eta = \left(90° - \frac{\gamma}{2}\right)$$
wird $A > k$, für alle anderen Werthe von η wird $A < k$.

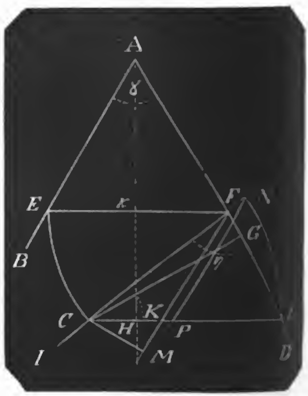
Für $\eta < \gamma$, also in allen Lagen von FJ, von $FM \mp AB$ ab, um F rechts bis in die Richtung FD gedreht, ist der Kegelschnitt eine Hyperbel und für B gilt das subtractive Vorzeichen.

25. Fig. 534 ist in den Umrissen mit Fig. 533 gleich. Beschreibt man aus F mit $FE = k$ den Bogen EC zieht $CL \mp EF$ so ist CL der Parameter A.

Denn fällt man das Loth CG auf AD, so ist $CG = CF \sin \eta = k \sin \eta$

Halbirt man nun $\angle \gamma$ durch AH so ist AH normal mit EF und CL,

Fig. 534.



also $\angle ALC = 90° - \frac{\gamma}{2}$

und da $\angle CGL = 90°$

so ist $\angle GCL = \frac{\gamma}{2}$

Nun ist

$$CG = CL \cdot \cos \angle GCL = CL \cdot \cos \frac{\gamma}{2}$$

folglich $CL \cdot \cos \frac{\gamma}{2} = k \sin \eta$

und $$CL = \frac{\sin \eta}{\cos \frac{\gamma}{2}} k = A \quad (1)$$

Bei einerlei γ wächst A von $\eta = 0$ bis $\eta = 90°$ wo A ein Maximum $= \frac{k}{\cos \frac{\gamma}{2}}$ wird. Je gröfser γ desto gröfser wird A, bei $\gamma = 180°$ wird $A = \infty$.

Zieht man $FM \pm AB$,
so ist $\angle JFM = \eta - \gamma$
und fällt man die Normale CM auf FM, so ist $CM = CF \sin(\eta - \gamma) = k \sin(\eta - \gamma)$

Es ist zugleich $\angle LCM = \angle LCG = \frac{\gamma}{2}$

daher $CK \cdot \cos \frac{\gamma}{2} = CM$

daher $CK \cos \frac{\gamma}{2} = k \sin(\eta - \gamma)$

und $$\frac{CK}{k} = \frac{\sin(\eta - \gamma)}{\cos \frac{\gamma}{2}}$$

Nun ist

$$B = \frac{\sin \eta}{\cos \frac{\gamma}{2}} \cdot \frac{\sin(\eta - \gamma)}{\cos \frac{\gamma}{2}} = \frac{A}{K} \frac{\sin(\eta - \gamma)}{\cos \frac{\gamma}{2}} \quad (2)$$

daher $$B = \frac{CK}{k} \cdot \frac{A}{k} = \frac{A \cdot CK}{k^2}$$

oder $$B = \frac{CK \cdot CL}{EF^2}$$

Verlängert man CF, nimmt $CN = CL = A$, zieht $NP \mp FM$ so ist

$$CF : CN = CK : CP$$

woraus $$CP = \frac{CN \cdot CK}{CF} = \frac{CL \cdot CK}{EF}$$

mithin $$B = \frac{CP}{EF} = \frac{CP}{k} \quad (3)$$

26. Sind die Parameter, A als Linie und B als abstracte Zahl gegeben, oder sind beide aus einer gegebenen Gleichung ermittelt, so existirt der aus beiden Parametern hervorgehende Kegelschnitt in jedem beliebigen Kegel, d. h. in einem Kegel mit beliebigem $\angle \gamma$ an der Spitze des Axenquerschnitts.

Denn aus Gl. 1. No. 24 hat man

$$A \cos \frac{\gamma}{2} = k \sin \eta$$

und je nachdem B positiv oder negativ gegeben ist hat man in Gl 2: $\eta >$ oder $< \gamma$

Nun ist aber aus einem gegebenen γ und einem gegebenen B der $\angle \eta$ zu finden und diesen in die Formel für A eingesetzt ergiebt bei gegebenem A den Werth von k.

Noch ist zu bemerken, dafs man sich durch die Vorzeichen nicht irre machen lasse: B ist immer als absoluter Werth zu nehmen; bei der Ellipse ist

$$B = + \frac{\sin(\eta - \gamma)}{\cos^2 \frac{\gamma}{2}} \sin \eta$$

bei der Hyperbel ist

$$B = + \frac{\sin(\gamma - \eta)}{\cos^2 \frac{\gamma}{2}} \cdot \sin \eta$$

27. Beispiele.

I. Die Gleichung $y^2 \pm \gamma xy + 16x^2 + \ldots$ gibt eine Parabel, weil
$b^2 (= 8^2) = 4ac\ (4 \cdot 1 \cdot 16) = 64$ ist

II. Die Gleichung $y^2 \pm 8xy - 16x^2 + \ldots$ gibt eine Hyperbel, weil
$b^2 (= 64) > 4ac\ (= -64)$ ist.

III. Die Gleichung $y^2 \pm 8xy + 18x^2 + \ldots$ gibt eine Ellipse, weil
$b^2 (= 64) < 4ac\ (= 72)$ ist.

IV. Die Gleichung $y^2 \pm 8xy + x^2 + \ldots$ gibt einen Kreis, weil
$b^2 < 4ac$ und zugleich $a = c$ ist.

Beispiel V. Gegeben ist eine Gleichung, die mit a, dem Coefficient von z^2 dividirt folgende ist

$$z^2 + 10zu + 3u^2 + 25z + 7u + 20 = 0 \quad (1)$$

Hier ist $a = 1$; $c = 3$; also $4ac = 12$; $b = 10$, also $b^2 = 100$; folglich $b^2 > 4ac$ und die der Gleichung entsprechende C. ist eine Hyperbel.

Es soll aber nach No. 23, II. der Coefficient von $zu = -2 \sin \beta$ sein, also subtractiv und < 2; es scheint demnach, dafs die gegebene Gleichung eine Hyperbel, überhaupt einen Kegelschnitt nicht gibt. Um dies zu untersuchen, dividire die Gleichung durch eine Quadratzahl von der Beschaffenheit, dafs der Coefficient < 2 werde, am bequemsten also mit der Zahl 100. Dann erhält man

$$\left(\frac{z}{10}\right)^2 + \frac{z}{10} u + 0{,}03\, u^2 + 2{,}5 \frac{z}{10} + 0{,}07 \cdot u + 0{,}2 = 0 \quad (2)$$

Man erhält aus der ersten Gleichung

$$z = -\frac{10u + 25}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{88\,u^2 + 472\,u + 545} \tag{3}$$

Aus der zweiten

$$\frac{z}{10} = -\frac{u + 2{,}5}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{0{,}88\,u^2 + 4{,}72\,u + 5{,}45} \tag{4}$$

Man ersieht, dafs man aus demselben u dasselbe z erhält, welche der beiden Gleichungen man auch nehmen will und man kann daher für die erste Gleichung schreiben

$z^2 + zu + 0{,}03\,u^2 + 2{,}5\,z + 0{,}07\,u + 0{,}2 = 0$ (5)

Da nun nach No. 23, II. der Coefficient b von zu (hier = 1) subtractiv sein soll, so mufs u negativ sein und man hat statt Gl. 1:

$z^2 - 10\,zu + 3\,u^2 + 25\,z - 7\,u + 20 = 0$ (6)

statt Gleichung 3

$z = +\dfrac{10\,u - 25}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{88\,u^2 - 472\,u + 545}$ (7)

und statt Gl. 5

$z^2 - zu + 0{,}03\,u^2 + 2{,}5\,z - 0{,}07\,u + 0{,}2 = 0$ (8)

A. Setzt man in Gl. 7 für u entweder $+ 3{,}681301$ oder $+ 1{,}682335$ so erhält man die Wurzelgröfse = 0 und für $u = 1{,}682335$ wird $z = -4{,}0883$ für $u = 3{,}681301$ wird $z' = +5{,}9065$

Wenn man also die Werthe von u in Gleichung 8 setzt, für welche nun der Kegelschnitt gefunden wird, so hat man die Ordinaten der Scheitel

für $u = 1{,}682335$; $z = -0{,}40883$
für $u = 3{,}681301$; $z' = +0{,}59065$

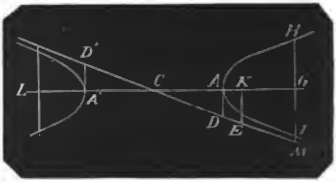
Hieraus ist klar, dafs beide zusammengehörigen Hyperbeln mit den Coordinaten die Lage von Fig. 535 haben müssen (vergl. Fig. 516). Wenn nämlich E der Anfangspunkt der Abscissen ist, so ist bei

$u = ED = +1{,}682335$; $z = AD = -0{,}40883$

bei

$u = ED' = +3{,}681301$; $z = A'D' = +0{,}59065$

Fig. 535.



Es stimmt auch diese Zeichnung mit der Eigenschaft der Gleichungen 1 bis 8, dafs kein Werth von u den Werth $z = 0$ gibt.

Die graphische Construction der obigen Gleichung (5 oder 8) entsprechenden Hyperbel wird durch Verwandlung deren Coefficienten in die No. 23 angegebenen Werthe ermittelt.

B. Der Coefficient b von zu, hier = 1 ist nach No. 23, II. $= 2\sin\beta$, folglich ist

$\sin\beta = \tfrac{1}{2}$ und $\beta = 30°$.

D. h. der zwischen der Abscissenlinie ED' und der Axe LK begriffene

$\angle ACD$ ist $= 30°$ (9)

wobei noch zu bemerken, dafs das 2te Glied

in Gl. 5 ist: $+\sin 30° \cdot z\,(+u)$
in Gl. 8 ist: $-\sin 30° \cdot z\,(-u)$

C. Nach No. 23, III. ist

c (hier = 0,03) $= \sin^2\beta - B\cos^2\alpha = \tfrac{1}{4} - \tfrac{3}{4}B$ woraus

$$B = +\frac{\sin(\gamma - \eta)}{\cos^2\dfrac{\gamma}{2}}\sin\eta = +\tfrac{1}{3}\cdot 0{,}88 = 0{,}2933\ldots. \tag{10}$$

D. Nach No. 23, IV. ist

d (hier = 2,5) $= 2g\sin\beta = 2\cdot\tfrac{1}{2}g = g$

Da nun d hier additiv ist, so müfste nach No. 23, IV. die Abscissenlinie zwischen Axe und Curve durchgehen, da aber in Gl. 1 bis 8 kein Werth von u den Werth $z = 0$ ergibt, so ist solche Lage nicht möglich und folglich mufs g negativ sein. Man hat demnach

$CE = g = -2{,}5$ (11)

Dieser Werth von g stimmt auch mit der Zeichnung und den ad A berechneten Werthen von u und z für die Scheitel A, A'. Denn

$CD = CE - DE = 2{,}5 - 1{,}682335 = 0{,}817665$

hieraus

$AD = CD\sin 30° = \tfrac{1}{2}CD = 0{,}40883$

ferner

$CD' = ED' - CE = 3{,}681301 - 2{,}5 = 1{,}181301$

hieraus

$A'D' = CD'\sin 30° = \tfrac{1}{2}CD' = 0{,}59065$

E. Nach No. 23, V. ist

$$e\,(\text{hier} = 0{,}07) = 2g\sin^2\beta + A\cos\beta + 2B\cos\beta\cdot z \tag{12}$$

0,07 ist hier subtractiv für $(-u)$.

In dieser Gleichung 12 befinden sich 2 Unbekannte A und s; es mufs deshalb der folgende Coefficient f hinzugezogen werden. Nun ist

F. Nach No. 23, VI.

$$f\,(\text{hier} = 0{,}2) = g^2 \sin^2\beta - As - Bs^2 \qquad (13)$$

Setzt man nun in Gl. 12 die Werthe für β und g und entwickelt A so erhält man:

$$A = 1{,}3625466 - 2Bs \qquad (14)$$

Diesen Werth von A in Gl. 13 gesetzt, gibt

$$0{,}2 = 1{,}5625 - (1{,}3625466 - 2Bs)\,s - Bs^2$$

oder geordnet

$$s^2 - 4{,}64504\,s + 4{,}644886 = 0$$

woraus $s = 2{,}32252 \pm 0{,}86557$

und $s = +\,3{,}18809$ und $+\,1{,}45695 \qquad (15)$

Diese Längen sind die Entfernungen der Projection K des Anfangspunkts E der Abscissen von den Scheiteln A und A' also die Längen KA' und KA. Dieselben stimmen auch genau mit den ad A ermittelten Längen von u für die Ordinaten der Scheitel A und A'; denn es ist

$$DE \cos\beta = DE\sqrt{\tfrac{3}{4}} = 1{,}682335\sqrt{\tfrac{3}{4}} = 1{,}45695$$

und

$$D'E \cos\beta = 3{,}681301\sqrt{\tfrac{3}{4}} = 3{,}18809.$$

G. Nun ist nach No. 23, V. und Gleichung 42

$$s = p - g\cos\beta$$

aber $+\,AK = -\,AC + CK$

und da g negativ,

also $+\,CK = -\,g\cos\beta$

ist, so ist p ebenfalls negativ und

$$p = (-\,AC) = g\cos\beta + s = -\,2{,}5\sqrt{\tfrac{3}{4}} + 1{,}45695 = -\,0{,}70809 \qquad (16)$$

Eben so ist $s' = p' - g\cos\beta$

aber $+\,A'K = +\,A'C + CK = +\,A'C - g\cos\beta$

und $p' = (+\,A'C) = g\cos\beta + s' = -\,2{,}5\sqrt{\tfrac{3}{4}} + 3{,}18809 = +\,1{,}02303 \qquad (17)$

Auch diese Längen von p und p' stimmen mit den ad A berechneten Ordinaten AD und $A'D'$ für den Scheitel; denn man erhält

$$-\,0{,}70809 \times tg\,30^\circ = -\,0{,}40883$$

und $+\,1{,}02303 \times tg\,30^\circ = +\,0{,}59065$

H. Nun ist noch der Parameter A zu bestimmen, und dies geschieht durch Formel 14 für A.

Man erhält bei $s = 1{,}45695$

$$A = 0{,}50802$$

Bei $s = 3{,}18809$ wird A negativ, welches unmöglich ist, und es existirt natürlicher Weise nur ein Werth für A.

Für die Verzeichnung der Hyperbeln hat man nun aus G:

$$p = -\,0{,}70809$$
$$p' = +\,1{,}02303$$

Nimmt man in der geraden Linie LK den willkührlichen Punkt C, trägt nach einer Seite die Länge $CA = p$, nach der anderen die Länge $CA' = p'$ so erhält man die beiden Scheitel der beiden durch Gleichung 1 gegebenen Hyperbeln und da

$$A = 0{,}507802$$

und $B = \dfrac{0{,}88}{3} = 0{,}2933\ldots.$

so hat man für die Hyperbeln die Gleichung

$$y^2 = 0{,}507802 \cdot x + 0{,}293\ldots.\,x^2$$

J. Zum Beweise, dafs die Hyperbel mit der Gleichung 1 übereinstimmt setze man für x eine bestimmte Länge z. B. $AG = 10$ so ist

$$y^2 = 5{,}07802 + 29{,}333\ldots. = 34{,}41135$$

woraus $y = 5{,}86612.$

Die Projection K des Anfangspunkts E auf der Axe LK liegt vom Scheitel A entfernt um die Länge $AK = s = 1{,}45695$

$AG = 10{,}00000$

mithin ist die Projection der zu AG gehörenden Abscisse EM von K entfernt $= 8{,}54305$

und die Abscisse $u = EM$ ist

$$= \frac{8{,}54305}{\cos 30^\circ} = 9{,}864666$$

Nun war die Richtung der Abscisse ED negativ, folglich ist $u = EM$ positiv und die Formel 7 für z mufs geschrieben werden

$$z = +\,\frac{-\,10u - 25}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{88u^2 + 472u + 545}$$

Setzt man in diese den Werth von $u = 9{,}864666$ so erhält man

$$z = -\,61{,}8233 \pm 58{,}6612$$

also $z = -\,120{,}4855$ und $-\,3{,}1621$

und die Zehntel davon genommen, für Gl. 8:

$$z = -\,12{,}0485 \text{ und } -\,0{,}3162$$

Es ist nun

das erste z die Ordinate $MH = -\,12{,}0485$

das zweite z die Ordinate $MJ = -\;\;0{,}3162$

subtrahirt gibt $HJ = -\,11{,}7323$

und die Hälfte $= 5{,}8661 = y$

K. Zur Ueberzeugung, dafs beide Hyperbeln zusammen gehören und einander $\cong$ sind hat man aus No. G, 16 und 17

$$AA' = p + p' = 1{,}73112$$

hierzu $x = 10$

gibt $-\,x' = AL = 11{,}73112$

Man hat nun

$$y^2 = -\,11{,}73112\,A + 11{,}73112^2 \cdot B$$

$= -5{,}957 + 40{,}368 = +34{,}411$
wie bei der ersten Hyperbel.

Es ist dieses Beispiel deshalb so complicirt gewählt und so sorgfältig durchgenommen worden, damit die vorgetragenen Gesetze über die Natur der Curven erster Klasse als allgemein gültig erkannt werden.

IV. Linien dritter und höherer Ordnungen oder Curven zweiter und höherer Klassen.

Diese Curven finden wenig Anwendung, sie sind ihrer verschiedenen zusammengehörigen Eigenschaften wegen ebenfalls in Gattungen zu bringen und haben Formen der mannichfachsten Art, und um so mannichfacher je höher deren Ordnung ist. Die I, No. 12 betrachtete Cissoide ist eine Linie der dritten Ordnung, die Konchoide No. 13 ist eine Linie der vierten Ordnung.

Unter Familie von Curven versteht man die Summe der Curven, von denen jede einer anderen Ordnung angehört, deren Gleichungen aber allen der Form nach eine und dieselbe allgemeine Gleichung zu Grunde liegt.

So z. B. drückt die Gleichung

$$x^{n+1} = ax^n$$

eine Familie aus zu welcher die Gleichungen gehören

$$y^2 = ax$$
$$y^3 = ax^2$$
$$y^4 = ax^3 \text{ u. s. w.}$$

Die bekannteren Curven und deren Kenntnifs verlangt wird, als der Kreis, die Parabel, die Hyperbel, die Ellipse, die Konchoide, die Neoide, die Evolvente, die Cycloide, die Epicycloide, die Hypocycloide, die logarithmische Linie, die Spirallinien u. s. w. werden in diesem Wörterbuche ihre Artikel haben.

Curvenlehre, auch höhere Geometrie genannt, eine höhere Disciplin der Geometrie, ist die Lehre von denjenigen krummen Linien, (Curven) die nach irgend einem Gesetz gebildet sind, von deren Eigenschaften und von den Flächen und Körpern, die aus ihnen durch Construction hervorgehen können; während die niedere Geometrie nur gerade und Kreislinien und die aus ihnen hervorgehenden Flächen und Körper zum Gegenstande ihrer Untersuchung macht. Auch wie die niedere Geometrie hat diese höhere G. ihren synthetischen und ihren analytischen Theil. Die Ableitung des Verhältnisses zwischen den Abscissen und Ordinaten der Kegelschnitte im Art. Brennpunkte der K. kann als synthetisch angesehen werden, die Entwickelung der Formen der Curven im vorigen Art. ist nur analytisch. Die hörere G. hat dem Obigen nach auch ihre Longimetrie, ihre Planimetrie und ihre Stereometrie.

Der erste Theil der C., die Kenntnifs der Curven selbst, eine eigentliche Curvagraphie ist in dem vor. Art. im Allgemeinen und aus dem Gesichtspunkt gegeben, dafs so viele Curven existiren als man Gleichungen aufzustellen beliebt. Diejenigen bekannteren Curven, deren speciell nicht Erwähnung geschehen, werden in dem Wörterbuch ihre Artikel finden. Der zweite Theil der hier noch abzuhandelnden C. besteht in den Aufgaben, deren Lösung erforderlich ist, um mit den Curven rechnungsweise verfahren zu können, also in einer eigentlichen algebraischen C.

I. Bestimmung der Tangenten an Curven.

Tangente oder berührende gerade Linie in irgend einem Punkt der Curve heifst diejenige gerade Linie, welche durch diesen Punkt hindurch geht und mit der Curve diesen einzigen Punkt nur gemein hat, so dafs keine zweite gerade Linie zwischen ihr und der Curve durch denselben Punkt gezogen werden kann, ohne dafs diese die C. in 2 Punkten schneidet (vergl. Bd. 1, Art. berührende gerade Linie mit Fig. 204).

Ist BT die Tangente an der Curve FG in B, so kann das Curven-Element in B zugleich als das Element einer Kreisperipherie angesehen werden, deren Halbmesser in der normal auf TB in B gezogenen geraden Linie BN liegt, und da jeder Halbmesser auf dem von ihm berührten Kreiselement normal steht, so steht auch die im Berührungspunkt normal auf der Tangente befindliche Linie normal auf dem Curvenelement.

Sind T und N die Durchschnittspunkte der beiden genannten Linien mit der Abscissenlinie XX', BD die rechtwinklige Ordinate für den Punkt B, so heifst für den Punkt B:

Die Länge der berührenden Linie BT zwischen dem Berührungspunkt B und der Abscissenlinie die Tangente.

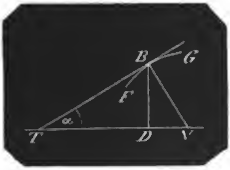
Die Länge der normal auf BT in B befindlichen Linie BN zwischen dem Berührungspunkt B und der Abscissenlinie die Normale.

Die normale Projection TD der Tangente BT auf der Abscissenlinie die Subtangente und

Die normale Projection ND der Nor-

male BN auf der Abscissenlinie die Subnormale.

Fig. 536.



Bd. 1, pag. 344 mit Fig. 216 ist bereits entwickelt, wenn die Form der Curve durch eine rechtwinklige Coordinatengleichung $y = fx$ gegeben ist:

Subtangente $DT = \frac{y}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)} = \frac{fx}{f'x}$ (1)

$$tg\,\alpha = \frac{BD}{DT} = \frac{y}{\text{Subtg.}} = \frac{\partial y}{\partial x} = f'x \quad (2)$$

Nun ist Tangente

$$BT = \sqrt{DT^2 + DB^2} = \sqrt{\frac{y^2}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} + y^2}$$

$$= \frac{y}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} = \frac{fx}{f'x}\sqrt{1 + (f'x)^2} \quad (3)$$

Da $\angle DBN = \angle DTB = \alpha$

so ist $DT : BD = BD : DN$

woraus Subnormale

$$DN = \frac{BD^2}{DT} = y^2 : \frac{y}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)} = y \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = fx \cdot f'x \quad (4)$$

Ferner ist

$$DT : BT = BD : BN$$

woraus Normale

$$BN = \frac{BD \cdot BT}{DT} = \frac{y \cdot \frac{y}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}}{\frac{y}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}} = y\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} = fx\sqrt{1 + (f'x)^2} \quad (5)$$

Beispiele (pag. 344) 1. die Parabel:

Gleichung $y^2 = px$

Es ist $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{p}{2y}$

daher Subtg. $DT = \frac{2y^2}{p} = 2x$

$tg\,\alpha = \frac{p}{2y}$

Tang. $BT = \frac{y}{p}\sqrt{4y^2 + p^2}$

Subnorm. $DN = \frac{p}{2}$

Norm. $BN = \frac{1}{2}\sqrt{4y^2 + p^2}$

2. Die Ellipse.

Gleichung: $y^2 = \frac{c^2}{a^2} \cdot (2ax - x^2)$

Es ist $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{c^2}{a^2} \cdot \frac{a - x}{y}$

daher Subtg. $DT = \frac{2ax - x^2}{a - x} = \frac{a^2}{c^2} \cdot \frac{y^2}{a - x}$

$tg\,\alpha = \frac{c^2}{a^2} \cdot \frac{a - x}{y}$

Tang. $BT = \frac{y}{a - x}\sqrt{\left(\frac{a^2}{c^2}\,y\right)^2 + (a - x)^2}$

Subnorm. $DN = \frac{c^2}{a^2}(a - x)$

Norm. $BN = \sqrt{y^2 + \left[\frac{c^2}{a^2}(a - x)\right]^2}$

II. Ist die Form der Curve durch eine Polargleichung gegeben, so sei Fig. 537, C der Pol, EA die Polaraxe, $\angle\varphi$ die Polarabscisse für den Punkt B, $BC = s$ der Polarabstand oder die Polarordinate von B: ferner sei BA die berührende gerade Linie an der Curve an B. Zieht man nun durch C die Linie TN normal auf CB, so heifst die Länge BT der Linie BA die Tangente, deren Projection CT auf TN die Subtangente, die in B auf BA bis in die Richtung TN errichtete Normallinie BN die Normale und deren Projection CN auf TN die Subnormale in Beziehung auf den Punkt B.

Diese Linien lassen sich nun aus denen, welche für rechtwinklige Coordinaten ermittelt worden sind, für die Polarcoordinaten ableiten.

Fällt man nämlich das Loth BD auf AF, setzt $CD = x$, $BD = y$, so ist

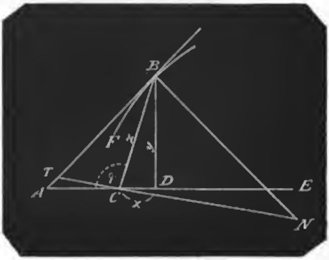
$tg \angle BAD = cot \angle DBT = \frac{\partial y}{\partial x}$ (I. Formel 2)

Nun ist $\angle CBT = \angle DBT - \angle CBD$

mithin $cot \angle CBT = cot\,(\angle CBD)$

und mit Hülfe dieser Gleichung ist Bd. I, pag. 345, B. mit Fig. 217 ermittelt.

Fig. 537.



$$\text{Subtangente } CT = \frac{z^2}{\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)} \qquad (1)$$

$$\text{Cot. } CBT = \frac{\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)}{z} \qquad (2)$$

Nun erhält man die Tangente *BT* aus

$$BT = CT \operatorname{cosec} CBT = CT \cdot \sqrt{1 + \cot^2 CBT}$$

$$= \frac{z^2}{\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)} \cdot \sqrt{1 + \frac{\frac{\partial z}{\partial \varphi}}{z^2}}$$

oder

$$\text{Tangente } BT = \frac{z}{\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)} \sqrt{z^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} \qquad (3)$$

Aus der Proportion $CT : CB = CB : CN$

oder $$\frac{z^2}{\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)} : z = z : CN$$

$$\text{Die Subnormale } CN = \frac{\partial z}{\partial \varphi} \qquad (4)$$

da nun $BN = \sqrt{BC^2 + CN^2}$

so ist

$$\text{die Normale } BN = \sqrt{z^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} \qquad (5)$$

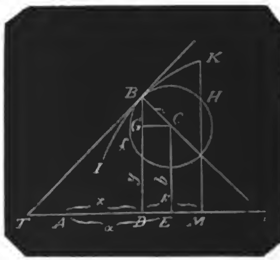
II. Bestimmung des Krümmungskreises an Curven.

Es ist ad I. gesagt, dafs jedes Curvenelement als das Element einer Kreisperipherie angesehen werden kann; der Kreis selbst, der diesem Elemente angehört heifst der Krümmungskreis oder Schmiegungskreis der Curve in dem Punkt. Ein Krümmungs- oder Schmiegungskreis ist also ein Kreis, der mit der Curve nur ein Element gemein hat; er ist zugleich der gröfste der Kreise, die durch einen und denselben Punkt der Curve hindurch gehen können ohne die Curve in noch einem Punkte zu schneiden, oder der gröfste aller der die Curve in diesem Punkt zu berühren möglichen Kreise. Der Halbmesser dieses Kreises liegt in der Richtung der Normale der Curve in dem Berührungspunkt und heifst der Krümmungshalbmesser.

Die Bestimmung des Krümmungskreises geschieht nun folgender Art.

Es sei *KBJ* eine Curve; dieselbe sei durch eine rechtwinklige Coordinatengleichung $y = \varphi x$ gegeben; es soll der Krümmungskreis an dem Punkt *B* bestimmt werden. Ist nun *A* der Anfangspunkt der Abscissen, so ist $AD = x$ die Abscisse, $DB = y$ die Ordinate von *B*. Stellt *BHL* den Krümmungskreis vor, so liegt dessen Mittelpunkt *C* in der Normale *BF* oder in dessen Verlängerung. Bezeichnet man die Abscisse *AE* des Mittelpunkts *C* mit *a*, dessen Ordinate *EC* mit *b*, den Krümmungshalbmesser *BC* mit *r*, so sind diese 3 Parameter *a*, *b*, *r* des Krümmungskreises zu ermitteln.

Fig. 538.



Die erste Bedingung ist offenbar, dafs der Punkt *B* der Curve sowohl als dem Kreise angehöre; hieraus entspringt die erste Bedingungsgleichung

$$BC^2 = BG^2 + CG^2$$

oder $$r^2 = (y - b)^2 + (a - x)^2 \qquad (1)$$

Die zweite Bedingung ist, dafs der Mittelpunkt in der Normale liege. Ist demnach *BT* die Tangente an *B*

so ist $\angle BTD = \angle CBG$

folglich $DT : BD = BG : CG$

oder da

$$DT \text{ als Subtangente} = \frac{y}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)} \quad \text{(I. Formel 1)}$$

$$\frac{y}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)} : y = y - b : a - x \qquad (2)$$

Die dritte und letzte Bedingung ist, dafs zwischen dem Kreise und der Curve kein anderer Kreis durch B hindurchgehen könne ohne die Curve noch mindestens einmal zu schneiden, was übrigens unter der zweiten Bedingung **zweimal** geschehen würde.

Läfst man, um dieser Bedingung zu genügen, die Abscisse x um ein beliebiges Stück $DM = k$ wachsen, so hat man nach der Taylorschen Reihe für die Curve $y = \varphi x$ die Ordinate MK oder

$$y' = \varphi(x+k) = \varphi x + \frac{\partial \varphi x}{\partial x} k + \frac{\partial^2 \varphi x}{\partial x^2} k^2 + \frac{\partial^3 \varphi x}{\partial x^3} k^3 + \ldots\ldots$$

Setzt man die Function von y für den Kreis, wie sie Gleichung 1 ausspricht: fx, so hat man für den Kreis die Ordinate MH oder

$$y_1 = f(x+k) = fx + \frac{\partial fx}{\partial x} k + \frac{\partial^2 fx}{\partial x^2} k^2 + \frac{\partial^3 fx}{\partial x^3} k + \ldots\ldots .$$

folglich die Differenz HK beider Ordinaten

$$y' - y_1 = \varphi x - fx + \left(\frac{\partial \varphi x}{\partial x} - \frac{\partial fx}{\partial x}\right) k + \left(\frac{\partial^2 \varphi x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 fx}{\partial x^2}\right) k^2 + \left(\frac{\partial^3 \varphi x}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 fx}{\partial x^3}\right) k^3 + \ldots$$

Da nun nach der ersten Bedingung $\varphi x = fx = BD = y$, so ist

$$y' - y_1 = \left(\frac{\partial \varphi x}{\partial x} - \frac{\partial fx}{\partial x}\right) k + \left(\frac{\partial^2 \varphi x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 fx}{\partial x^2}\right) k^2 + \left(\frac{\partial^3 \varphi x}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 fx}{\partial x^3}\right) k^3 + \ldots.$$

Da nun diese Differenzenreihe mit den Potenzen von k fortschreitet, so kann man k so klein wählen, dafs, welches auch die eingeklammerten Differenzen sein mögen, jedes Glied gröfser wird als die Summe sämmtlicher nachfolgenden Glieder.

Wenn also zur Bestimmung der 3 Parameter a, b, r noch 2 Gleichungen erforderlich sind, und sie werden so bestimmt, dafs die ersten beiden Glieder der Reihe $= 0$ werden, also

$$\frac{\partial \varphi x}{\partial x} - \frac{\partial fx}{\partial x} = 0 \qquad (3)$$

und

$$\frac{\partial^2 \varphi x}{\partial x^2} - \frac{\partial fx}{\partial x^2} = 0 \qquad (4)$$

so schliefst sich der diesen Parametern zugehörige Kreis der Curve am innigsten an, weil mit dem kleinsten Werth der Differenzenreihe auch die Differenz KN die geringst mögliche wird.

Um aus den vorstehenden Bedingungen die 3 Parameter zu entwickeln hat man Gl. 1 differenzirt:

$$0 = 2(y-b)\partial y - 2(a-x)\partial x$$

woraus

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial \varphi x}{\partial x} = \frac{\partial fx}{\partial x} = \frac{a-x}{y-b} \qquad (3)$$

Man sieht, dafs diese Gleichung mit der 2ten Bedingungsgleichung identisch ist und dafs die nothwendige Gleichsetzung der beiden ersten Differenziale von φx und fx die Bedingung ausspricht, dafs der Mittelpunkt des Krümmungskreises in der Normale liege.

Schreibt man Gl. 5:

$$(y-b)\frac{\partial y}{\partial x} = a - x \qquad (6)$$

und differenzirt, so erhält man

$$(y-b)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = -1$$

woraus

$$(y-b) = -\frac{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}} \qquad (7)$$

Diesen Werth in Gl. 6 gesetzt gibt

$$(a-x) = -\frac{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}{\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)} \frac{\partial y}{\partial x} \qquad (8)$$

Diese Werthe aus 7 und 8 in 1 gesetzt gibt

$$r^2 = \left(\frac{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}\right)^2 + \frac{\left[1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]^2 \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}{\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2} = \frac{\left[1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]^3}{\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2}$$

folglich

$$\text{I.}\quad r = \pm \frac{\left[1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}} \qquad (9)$$

$$\text{II.}\quad a = x - \frac{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}{\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)}\,\frac{\partial y}{\partial x} \qquad (10)$$

$$\text{III.}\quad b = y + \frac{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}} \qquad (11)$$

Ueber das Vorzeichen von r ist zu bemerken, dafs das positive Zeichen die Lage r von B aus nach BF hin, das negative die Lage r über B hinaus in der Verlängerung von FB bedeutet. Ersteres findet bei einer hohlen, letzteres bei der erhabenen Curve statt. Da nun bei der hohlen Curve das zweite Differenzial immer subtractiv, bei der erhabenen C. immer additiv ist (vergl. den Art. convex und concav), so ist das Vorzeichen von r mit dem Vorzeichen des zweiten Differenzials von y übereinstimmend.

Beispiel. Die Parabel. Anfangspunkt der Abscissen im Scheitel, Abscissenlinie die Axe; Gl. $y^2 = px$.

Es ist also $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{y}{2x} = \frac{p}{2y}$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{p}{4xy} = -\frac{p^2}{4y^3} = -\frac{y}{4x^2}$$

hieraus

$$r = \frac{(4x+p)^{3/2}}{2\sqrt{p}} = \frac{(4x^2+px)^{3/2}}{2xy}$$

$$a = x - \frac{4x^2+y^2}{2x} = 3x + \tfrac{1}{2}p$$

$$b = y + \frac{4x^2+y^2}{-y} = -\frac{4x^2}{y}$$

III. Bestimmung der Curve der Mittelpunkte.

Jeder Punkt einer Curve hat seinen besonderen Krümmungskreis, und jeder derselben seinen Mittelpunkt. Diejenige krumme Linie, in welcher die Mittelpunkte aller Krümmungskreise einer Curve liegen, heifst Curve der Mittelpunkte, auch die Evolute der gegebenen Curve, so wie diese wieder die Evolvente der Mittelpunktscurve heifst.

Bei der No. II. gegebenen Coordinatengleichung $y = \varphi x$ ist die für dieselbe Abscissenlinie und denselben Anfangspunkt der Abscissen a die Abscisse und b die Ordinate des Mittelpunkts von dem zu dem Punkt B derselben Coordinaten x und y gehörenden Krümmungskreise. Ist daher eine Evolvente JBK durch eine rechtwinklige Coordinatengleichung $y = \varphi x$ gegeben und man soll die Evolute finden, so nehme man die Gleichungen

$$\text{II.}\quad a = x - \frac{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}\,\frac{\partial y}{\partial x}$$

$$\text{III.}\quad b = y + \frac{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}{\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)}$$

Substituire in beide Gleichungen y und dessen Differenziale aus der gegebenen Function $y = \varphi x$, eliminire y so werden a und b nur durch x ausgedrückt. Eliminirt man dann x aus beiden Gleichungen, so erhält man eine Gleichung zwischen a und b, welche die verlangte ist.

Beispiel. Die Coordinatengleichung für die Parabel ist

$$y^2 = \varphi x = py$$

Verfährt man nun so wie in dem Beispiel ad II. so erhält man wie dort

$$a = 3x + \tfrac{1}{2}p$$

$$b = -\frac{4x^2}{y} = -\frac{4x^2}{\sqrt{px}}$$

x aus beiden Gleichungen entwickelt und die Werthe einander gleich gesetzt, entsteht:

$$\frac{b^2 p}{16} = \frac{(a-\frac{1}{2}p)^3}{27}$$

woraus die verlangte Gleichung für die Evolute

$$b^2 = \frac{16\,(a-\frac{1}{2}p)^3}{27\,p}$$

IV. Bestimmung, ob und wo die Curve einen Wendungspunkt oder einen Rückkehrpunkt hat.

Der Wendungspunkt, in welchem eine Curve aus der convexen in die concave Form übergeht, macht sich in der Formel oder Gleichung dadurch kenntlich, dafs der Krümmungshalbmesser für diesen Punkt $\pm\infty$ wird, weil hier das Element der Curve geradlinig ist. Allein dieses Zeichen ist nicht genügend: es gilt auch für eine Spitze, einen Rückkehrpunkt, demnach mufs noch ein zweites Zeichen hinzutreten und dies ist, dafs bei einem Wendungspunkt rechts und links von dessen Ordinate die Ordinaten mögliche Gröfsen sind, während bei dem Rückkehrpunkt eine von beiden Ordinaten unmöglich wird.

I. Beispiel. Die Cissoide, pag. 165, Fig. 521 hat die Gleichung

$$xy^2 + x^3 - ay^2 = 0$$

diese differenzirt gibt

$$y^2 + 3x^2 - 2y(a-x)\frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

woraus $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{y^2 + 3x^2}{2y(a-x)}$

Die Differenzialgleichung abermals differenzirt gibt

$$2y(a-x)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 2(a-x)\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + 4y\frac{\partial y}{\partial x} + 6x = 0$$

woraus $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{5y^4 + 9x^4 + 6xy^2(x+2a)}{4y^3(a-x)^2}$

Das zweite Differenzial von y bildet den Nenner in der Formel für den Halbmesser des Krümmungskreises (Formel I, No. II.); demnach hat man das eben gefundene $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, oder dessen Zähler = Null zu setzen nämlich

$$5y^4 + 9x^4 + 6xy^2(x+2a) = 0$$

Man ersieht, dafs wegen der eingeklammerten Gröfse $(x+2a)$ nur entweder für $x=0$, weil für $x=0$ auch $y=0$ ist, oder für $x=$ einem negativen und kleineren Werth als $2a$ der Ausdruck $= 0$ wird.

Nun ergiebt sich aber aus der Gleichung

$$xy^2 + x^3 - ay^2 = 0$$

dafs für ein negatives x die Ordinate unmöglich ist, nämlich

$$y = \pm\sqrt{-\frac{x^3}{a+x}}$$

Daher ist kein negatives x möglich, x kann nur 0 sein, der Punkt der Cissoide für $x=0$ ist kein Wendungspunkt, sondern ein Rückkehrpunkt.

2. Beispiel. Die Konchoide pag. 165, Fig. 522 u. 523, hat die Gleichung (pag. 166) 4

$$a^2 = y^2 + \left(\frac{xy}{c \pm y}\right)^2$$

oder nach Entwickelung von x

$$x = \frac{(c \pm y)\sqrt{a^2 - y^2}}{y}$$

Hieraus das Differenzial $\frac{\partial y}{\partial x}$

$$\partial x = \frac{1}{y^2}\left[\frac{-y^2(c \pm y)}{\sqrt{a^2-y^2}} \pm y\sqrt{a^2-y^2} - (c \pm y)\sqrt{a^2-y^2}\right]\partial y$$

oder

$$\partial x = \frac{-y^2(c \pm y) \pm y(a^2-y^2) - (c \pm y)(a^2-y^2)}{y^2\sqrt{a^2-y^2}}\partial y$$

oder reducirt und entwickelt

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{y^2\sqrt{a^2-y^2}}{a^2c \pm y^3}$$

Nun hat man

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \partial\frac{y^2\sqrt{a^2-y^2}}{a^2c \pm y^3}$$

$$= \frac{(a^2c \pm y^3)[-y^3 + 2y(a^2-y^2)] \mp 3y^4(a^2-y^2)}{(a^2c \pm y^3)^2\sqrt{a^2-y^2}} \cdot \frac{\partial y}{\partial x}$$

$$= -\frac{a^2y[2a^2c - 3cy^2 \mp y^3]}{(a^2c \pm y^3)^2\sqrt{a^2-y^2}} \cdot \left(-\frac{y^2\sqrt{a^2-y^2}}{a^2c \pm y^3}\right)$$

$$= \frac{a^2y^3(2a^2c - 3cy^2 \mp y^3)}{(a^2c \pm y^3)^3}$$

Dieses zweite Differenzial wird nun = 0 wenn der Factor

$$2a^2c - 3cy^2 \mp y^3 = 0$$

wo das obere Vorzeichen von y^3 für die obere, das untere für die untere Konchoide gilt.

Für die obere Konchoide entsteht also die geordnete Gleichung

$$y^3 + 3cy^2 - 2a^2c = 0 \qquad (1)$$

Für die untere

$$y^3 - 3cy^2 + 2a^2c = 0 \qquad (2)$$

1. Beispiel. Es sei $c=1$; $a=5$, so hat man

1. für die obere Konchoide die Gleichung:

$$y^3 + 3y^2 - 50 = 0$$

durch Probiren erhält man $y = 2{,}909$ mit $(y - 2{,}909)$ die Gleichung dividirt ergibt die Gl.

$$y^2 + 5{,}909\,y + 17{,}28928 = 0$$

beide Wurzeln daraus sind unmöglich und die erstere $y = 2{,}909$ zu beiden Seiten von A genommen der Ort des Wendungspunkts. Dafs hier y zu beiden Seiten von A genommen werden kann liegt darin, dafs wie pag. 166, Gl. 5 vom 4ten Grade darthut, für $+x$ und $-x$ dieselbe Ordinate entsteht.

2. Für die untere Konchoide ist die Gleichung

$$y^3 - 3y^2 + 50 = 0$$

Die Wurzel ist $y = -2{,}909$; die Glei-

chung durch $y + 2{,}909$ dividirt gibt:

$$y^2 - 5{,}909\, y + 17{,}28928 = 0$$

deren beide Wurzeln unmöglich sind. Die beiden Ordinaten rechts und links von A für die untere Konchoide sind denen für die obere gleich. Die der oberen erscheinen positiv, die der unteren negativ, und es genügt eine der beiden Gleichungen zur Bestimmung der Wendepunkte.

Setzt man den Werth von y in Gleichung 12, pag. 167, so erhält man für beide Konchoiden

$$s = \frac{c}{y}\sqrt{a^2 - y^2} = \pm \frac{1}{2{,}909}\sqrt{25 - 2{,}909^2} = \pm 1{,}398$$

Die Werthe von y und s in Gl. 7 gesetzt gibt für die obere Konchoide

$$x = \frac{c + y}{c}\, s = \frac{1 + 2{,}909}{1} \cdot 1{,}398 = 5{,}46478$$

Für die untere Konchoide, wo s negativ wird (s. Gl. 8, pag. 167), indem s auf der entgegengesetzten Seite von A liegt.

$$x = \frac{c - y}{c}\, s = \frac{1 - 2{,}909}{1}(-1{,}398) = +2{,}66878$$

Der Wendungspunkt der unteren Konchoide liegt also der Mittellinie näher als der der oberen.

In dem Beispiel entsteht für die untere K. ein Knoten (s. pag. 167, Fig. 523); es folgt hier ein solches Beispiel, wo kein Knoten entsteht, indem $c > a$ gesetzt wird.

2. Beisp. Es sei $c = 10$, $a = 5$, so hat man die Gleichung für die obere Konchoide

$$y^3 + 30 y^2 - 500 = 0$$

$y = + 3{,}8445$ ist eine Wurzel und gibt jeden der beiden oberen Wendungspunkte. Denn die Gl. mit $y - 3{,}8445$ dividirt entsteht

$$y^2 + 33{,}8845\, y + 130{,}269 = 0$$

welche 2 negative Wurzeln giebt, die nicht gelten können. Die Gl. für die untere Koncboide würde sein

$$y^3 - 30\, y^2 + 500 = 0$$

Eine Wurzel ist hier wieder die entgegengesetzte der oberen nämlich $y = -3{,}8445$ und diese gibt die beiden Wendungspunkte; denn die Gl. mit $y + 3{,}8445$ dividirt gibt

$$y^2 - 33{,}8845\, y + 130{,}269 = 0$$

welche 2 positive Wurzeln gibt, die hier nicht gelten können.

Aus der Construction der Konchoide, und auch da für jedes x von 0 bis $\pm\infty$ mögliche Werthe von y entstehen geht hervor, dafs die hier gefundenen Punkte keine Spitzen an der Curve sind.

V. Rectification der Curven.

Hierunter versteht man, die Länge einer C. anzugeben, oder die gerade Linie zu finden, welche mit der C. einerlei Länge hat.

Es sei ABG eine krumme Linie, CX die Abscissenlinie C der Anfangspunkt der Abscissen; $CE = x'$, $CD = x$ die Abscissen, $EA = y'$, $DB = y$ die Ordinaten zweier Punkte A und B der krummen Linie, diese Ordinaten y', y als Functionen von x', x gegeben; man soll die

Fig. 539.



Länge λ des zwischen beiden Punkten A und B befindlichen Curvenstücks bestimmen.

Läfst man $CD = x$ um das Stück $DF = \triangle x$ wachsen, so ist die Ordinate

$$FG = y + \triangle y$$

zieht man $BJ \# CX$,

so ist $\quad BJ = \triangle x$ und $GJ = \triangle y$

zieht man ferner durch B die Tangente KH, so ist

Da die Tangente BH mit BJ denselben Winkel bildet wie mit der Abscissenlinie, (nach pag 185, Gl. 2) die trigonometrische Tangente von $\angle HBJ$

oder $\qquad tg\, HBJ = \frac{\partial y}{\partial x}$

Verlängert man daher die Ordinate FG bis sie die Tangente in H schneidet,

so ist $\quad HJ = BJ\, tg\, HBJ = \triangle x \frac{\partial y}{\partial x}$

folglich $\qquad GH = \triangle x \frac{\partial y}{\partial x} - \triangle y$

und $\qquad BH = \sqrt{BJ^2 + JH^2} = \sqrt{\triangle x^2 + \left(\triangle x \cdot \frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} = \triangle x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}$

Zieht man nun die Sehne *BG* so hat man

$$BG \sqrt{BJ^2 + JG^2} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$$

Es ist aber nach Lehren der Geometrie der Bogen größer als die Sehne und kleiner als die Summe der beiden ihn außerhalb einschließenden geraden Linien, oder

$$BG < \Delta\lambda < BH + GH$$

oder

$$\Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} < \Delta\lambda < \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} + \Delta x \frac{\partial y}{\partial x} - \Delta y$$

oder

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} < \frac{\Delta \lambda}{\Delta x} < \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} + \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Läßt man nun den Zuwachs Δx von x beliebig klein werden, so nähert sich der Zuwachsquotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ in dem 3ten Vergleichungsgliede beliebig seinem Grenzwerth $\frac{\partial y}{\partial x}$ und die Differenz $\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\Delta y}{\Delta x}$ kann beliebig klein, resp. $= 0$ werden; das vorstehende Glied $\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}$ als Grenzwerth bleibt ungeändert. Das erste Glied $\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$ der Vergleichung nähert sich seinem Grenzwerthe $\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}$ welcher dem ersten Gliede des dritten Vergleichungsgliedes gleich ist; es können also die das Mittelglied $\frac{\Delta\lambda}{\Delta x}$ einschließenden beiden Glieder

$\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$ und $\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} + \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\Delta y}{\Delta x}$

einander beliebig nahe gebracht werden, oder sie haben einerlei Grenzwerth und folglich hat das eingeschlossene Glied $\frac{\Delta\lambda}{\Delta x}$ denselben Grenzwerth. Oder es ist

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}$$

woraus

$$\lambda = \int \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} \partial x + C$$

Die Constante C bestimmt sich daraus, daß für x' der Bogen $\lambda = 0$ wird.

Beispiel. Die Parabel. Es ist $y^2 = px$ wenn die Abscissen in der Axe vom Scheitelpunkt ab genommen werden.

also

$$2y \frac{\partial y}{\partial x} = p$$

und

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{p}{2y}$$

also

$$\lambda = \int \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} \partial x = \int \sqrt{1 + \left(\frac{p}{2y}\right)^2} \partial x$$

Nimmt man des leichteren Integrirens wegen y als urvariabel, so ist zu setzen

$$\partial x = \frac{2y}{p} \partial y$$

und man erhält

$$\lambda = \int \sqrt{1 + \left(\frac{p}{2y}\right)^2} \cdot \frac{2y}{p} \partial y = \int \sqrt{1 + \left(\frac{2y}{p}\right)^2} \partial y = \frac{1}{p} \int \sqrt{p^2 + 4y^2} \partial y$$

woraus

$$\lambda = \frac{1}{4p} \left[2y \sqrt{p^2 + 4y^2} + p^2 \, logn \left(2y + \sqrt{p^2 + 4y^2}\right)\right] + C$$

Da die Coordinaten vom Scheitel aus genommen worden, so ist für $y = 0$ auch $\lambda = 0$ daher hat man zur Bestimmung der Constante:

$$0 = \frac{1}{4p} [0 + p^2 \, logn \, p] + C$$

woraus

$$C = -\frac{1}{4p} \cdot p^2 \, logn \, p$$

daher vollständig

$$\lambda = \frac{1}{4p} \left[2y\sqrt{p^2+4y^2} + p^2 \, logn \, \frac{2y+\sqrt{p^2+4y^2}}{2}\right]$$

2. Ist die Curve durch eine Polargleichung gegeben, so nehme man Fig. 537 in dem Pol C den Anfangspunkt der rechtwinkligen Coordinaten und man hat, das Stück *FB* der Curve $= \lambda$ gesetzt.

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}$$

Nun ist

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x} = \frac{\partial\lambda}{\partial\varphi} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial x}$$

und eben so

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial\varphi} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial x}$$

Substituirt man diese Werthe in die erste Formel, so erhält man

$$\frac{\partial\lambda}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2}$$

also

$$\frac{\partial\lambda}{\partial\varphi}=\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2}$$

Nun ist

$$y = z\sin\varphi$$
$$x = -z\cos\varphi$$

daher

$$\frac{\partial y}{\partial\varphi}=z\cos\varphi+\frac{\partial z}{\partial\varphi}\sin\varphi$$

und

$$\frac{\partial x}{\partial\varphi}=z\sin\varphi-\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cos\varphi$$

hieraus

$$\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2=\left[z\sin\varphi-\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cos\varphi\right]^2+\left[z\cos\varphi+\frac{\partial z}{\partial\varphi}\sin\varphi\right]^2$$
$$=z^2(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)=z^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2$$

daher $\frac{\partial\lambda}{\partial\varphi}=\sqrt{z^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2}$

und $\lambda=\int\sqrt{z^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2}\,\partial\varphi+C$

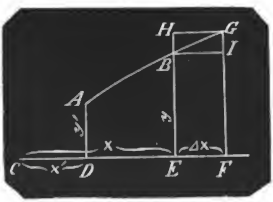
Die Constante C wird hier dadurch bestimmt, daſs wenn man den Werth von z' für den Punkt F einsetzt, $\lambda=0$ entsteht.

VI. Quadratur der von Curven begrenzten Ebenen.

Hierunter versteht man die Bestimmung des Flächenraums einer Ebene, welche durch eine Curve, durch die Ordinaten ihrer Endpunkte und das zwischen beiden befindliche Stück der Abscisse begrenzt ist.

A. Ist die Curve ABG durch eine rechtwinklige Coordinatengleichung $y=fx$ gegeben, und soll der Flächenraum F zwischen AB, DE, y' und y bestimmt werden, so lasse man x um das Stück $EF=\Delta x$

Fig. 540.



wachsen, zeichne die Ordinate FG, so ist $FG=y+\Delta y$ und die Fläche $EFBG=\Delta F$.

Zeichnet man nun die Parallelen mit CF : GH bis in die Richtung EB und BJ, so entstehen 2 Rechtecke $EFGH$ und $EFBJ$ von denen das Erstere $= EF\times FG = \Delta x(y+\Delta y)$ gröſser und das zweite $EF\times EB=\Delta x\cdot y$ kleiner als $EFGB=\Delta F$ ist. Man hat also die Vergleichung

$$\Delta x(y+\Delta y)>\Delta F>\Delta x\cdot y$$

oder

$$y+\Delta y>\frac{\Delta F}{\Delta x}>y$$

Bei beliebiger Abnahme von Δx nimmt auch Δy beliebig ab, und es können die beiden äuſseren Glieder einander beliebig nahe gebracht werden und das dritte Glied ist der Grenzwerth des ersteren; mithin ist y zugleich der Grenzwerth des mittleren Gliedes und da dieses der Zuwachsquotient von F als Function von x ist, so geht derselbe in das Differenzial von F über und wird $=\frac{\partial F}{\partial x}$

woraus

$$\frac{\partial F}{\partial x}=y$$

und

$$F=\int y\,\partial x+C$$

worin die Constante so bestimmt wird, daſs für $x=x'$; $F=0$ entsteht.

Zusatz. Bei dieser Entwickelung ist ganz davon abgesehen, daſs CE eine gerade Linie ist. Die Formel gilt also auch für den Fall, daſs CE eine in einer Ebene liegende Curve ist und die krumme Oberfläche ist dann das Integral der Ordinate als Function des Bogens.

Beispiel. Die Parabel: Wenn die Axe als Abscissenlinie, der Scheitel als Anfangspunkt genommen wird, so ist

$$y^2=px \text{ oder } y=\sqrt{px}$$

daher

$$F=\int\sqrt{px}+C=\sqrt{p}\int x^{\frac{1}{2}}+C=\sqrt{p}\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C=\tfrac{2}{3}x\sqrt{px}+C$$

Soll die Parabelfläche mit einem zugehörigen $x=x'$ beginnen, so hat man

$$0=\tfrac{2}{3}x'\sqrt{px'}+C$$

woraus

$$C=-\tfrac{2}{3}x'\sqrt{px'}$$

und vollständig ist

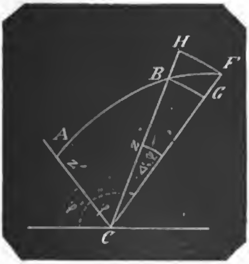
$$F = \tfrac{2}{3}x\sqrt{px} - \tfrac{2}{3}x'\sqrt{px'} = \tfrac{2}{3}\sqrt{p}\,[x\sqrt{x} - x'\sqrt{x'}]$$

Für $x' = 0$, wenn also die Parabelfläche mit deren Scheitel beginnen soll, hat man

$$F = \tfrac{2}{3}x\sqrt{px} = \tfrac{2}{3}xy$$

B. Ist die Curve durch eine Polargleichung gegeben, so ist (Fig. 541) die Fläche ***ACB*** zwischen dem Curvenstück *AB* und den zu den Abscissen φ' und φ gehörenden Ordinaten $CA = z'$ und $CB = z$ als ***F*** zu bestimmen. Läfst man nun die Abscisse φ um das Stück $BCF = \Delta\varphi$ wachsen, so ist *CF* die Polarordinate $(z + \Delta z)$ zu $(\varphi + \Delta\varphi)$ und der Ausschnitt $BCF = \Delta F$. Beschreibt man nun aus *A*

Fig. 541.



die Bogen *BG* und *FH* bis in die Richtung von *CB*, so ist der Bogen

$$BG = z \cdot \Delta\varphi$$

der Bogen $\quad FH = (z + \Delta z)\,\Delta\varphi$

folglich Ausschnitt $BCG = \tfrac{1}{2}z^2\,\Delta\varphi$

und Ausschnitt $FCH = \tfrac{1}{2}(z + \Delta z)^2\,\Delta\varphi$

Zwischen beiden Ausschnitten ist der Ausschnitt $BCF = \Delta F$ begriffen, folglich hat man die Vergleichung

$$\tfrac{1}{2}z^2\,\Delta\varphi < \Delta F < \tfrac{1}{2}(z + \Delta z)^2\,\Delta\varphi$$

oder

$$\tfrac{1}{2}z^2 < \frac{\Delta F}{\Delta\varphi} < \tfrac{1}{2}(z + \Delta z)^2$$

Bei beliebiger Abnahme von $\Delta\varphi$ wird das erste Glied $\tfrac{1}{2}z^2$ der Grenzwerth des dritten Gliedes $\tfrac{1}{2}(z + \Delta z)^2$ folglich auch der Grenzwerth von $\frac{\Delta F}{\Delta\varphi}$. Dieser Zuwachsquotient geht aber bei beliebiger Abnahme von $\Delta\varphi$ in das Differenzial von F in Beziehung auf φ über, also hat man

$$\frac{\partial F}{\partial\varphi} = \tfrac{1}{2}z^2$$

und

$$F = \tfrac{1}{2}\int z^2\,\partial\varphi + C$$

worin *C* dadurch bestimmt wird, dafs für φ' der Werth von $F = 0$ entsteht.

VII. Bestimmung der Oberflächen, welche bei Umdrehung von Curven um feste Axen entstehen.

Es sei (Fig. 539) ***CX*** die Axe, um welche die Curve ***AB*** sich herumdreht, so soll die von ***AB*** erzeugte Oberfläche bestimmt werden. Jeder Punkt der C. also beschreibt einen Kreis und die von ***AB*** auf ***CX*** gefällten Normalen, wie ***AE*** und ***BD*** sind die Halbmesser der von den Punkten *A* bis *B* beschriebenen Kreise.

Ist *CX* zugleich Abscissenlinie der Curve, *A* der Anfangspunkt der Coordinaten, die Curve durch die rechtwinklige Coordinatengleichung $y = fx$ gegeben, so setze $CD = x$, $CE = x'$, $DB = y$, $EA = y'$, die von *AB* erzeugte Oberfläche $= F$.

Wächst nun die Abscisse x um $DF = \Delta x$, so wird die Ordinate $FG = y + \Delta y$ und die durch den Zuwachs *BG* der Curve erzeugte Oberfläche $= \Delta F$. Zieht man nun durch *B* die Tangente *BH* bis in die Richtung von *FG* und die Sehne *BG*, so werden von den beiden geraden Linien *BH* und *BG* zwei abgekürzte Kegelmäntel beschrieben. Der von *BG* beschriebene Kegelmantel ist kleiner als ΔF, der von *BH* beschriebene Kegelmantel + dem Kreisringstück, welcher durch *GH* beschrieben wird ist gröfser als ΔF.

Nun ist nach pag 185, Gl. 2, wenn man noch $BJ \parallel CX$ zieht,

$$tg\,\angle HBJ = \frac{\partial y}{\partial x}$$

daher

$$HJ = BJ\,tg\,\angle HBJ = \Delta x\,\frac{\partial y}{\partial x}$$

und

$$BH = \sqrt{\Delta x^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \Delta x^2} = \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}$$

Der von *BH* gebildete Kegelmantel ist aber

$$\pi\,(BD + FH) \cdot BH = \pi\,(BD + BD + JH) \cdot BH = \pi\left(2y + \Delta x\,\frac{\partial y}{\partial x}\right)\Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} \quad \text{(I)}$$

der von *GH* gebildete Kreisring

$$\pi\,(FH^2 - FG^2) = \pi\,[(FJ + JH)^2 - FG^2] = \pi\left[\left(y + \Delta x\,\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 - (y + \Delta y)^2\right]$$

$$= \pi\left(\Delta x\,\frac{\partial y}{\partial x} - \Delta y\right)\left(2y + \Delta x\,\frac{\partial y}{\partial x} + \Delta y\right) \quad \text{(II)}$$

der von BG gebildete Kegelmantel

$$\pi(BD+FG)\cdot BG=\pi(2y+\Delta y)\cdot\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}=\pi(2y+\Delta y)\Delta x\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\ \text{(III)}$$

Zwischen der Gröſse (I + II) und der Gröſse (III) liegt nun der Zuwachs ΔF der Oberfläche F. Dividirt man die 3 Vergleichungsglieder durch Δx so erhält man

$$\text{I.}\quad =\pi\left(2y+\frac{\partial y}{\partial x}\Delta x\right)\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}$$

$$\text{II.}\quad =\pi\left(\frac{\partial y}{\partial x}-\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)\left(2y+\Delta x\frac{\partial y}{\partial x}+\Delta y\right)$$

$$\text{III.}\quad =\pi(2y+\Delta y)\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$$

so daſs $\quad \text{I}+\text{II}>\frac{\Delta F}{\Delta x}>\text{III}$

Bei beliebiger Abnahme von Δx entstehen nun folgende Aenderungen:

In I wird das zweite Glied $\frac{\partial y}{\partial x}\Delta x$ des zweiten Factors beliebig klein und der Factor selbst $2y+\frac{\partial y}{\partial x}\Delta x$ kommt auf seinen Grenzwerth $2y$; da nun die beiden anderen Factoren ungeändert bleiben, so wird $\quad \text{I}=2\pi y\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}$

In II kann der zweite Factor, indem $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ seinem Grenzwerth $\frac{\partial y}{\partial x}$ sich beliebig nähert, beliebig klein werden; sein Grenzwerth ist $=0$ und der Grenzwerth der ganzen Gröſse II ist $=0$

In III endlich erhält bei beliebiger Abnahme von Δx, also auch von Δy der zweite Factor $2y+\Delta y$ seinen Grenzwerth $2y$, der Zuwachsquotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ geht in das Differenzial über und es ist

$$\text{III}=2\pi y\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}$$

Es werden also I und III als Grenzwerthe einander gleich, und folglich muſs auch der zwischen liegende Zuwachsquotient $\frac{\Delta F}{\Delta x}$ in dem Differenzial $\frac{\partial F}{\partial x}$ als seinem Grenzwerth jenem Grenzwerthe gleich sein, und man hat

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2\pi y\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}$$

und $\quad F=2\pi\int y\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\,\partial x+C$

Die Constante ergiebt sich daraus, daſs wenn man x' für x setzt, $F=0$ wird.

Beispiel. Die Parabel.

$y^2=px$, also $y=\sqrt{px}$ und $\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{x}}$ mithin

$$F=2\pi\int px\sqrt{1+\frac{p}{4x}}\,\partial x=2\pi\sqrt{p}\int\sqrt{\frac{4x+p}{4}}\,\partial x=\pi\sqrt{p}\int\sqrt{4x+p}\cdot\partial x$$

Setzt man $\quad 4x+p=z$

so ist $\quad x=\frac{z-p}{4}$

und $\quad \frac{\partial x}{\partial z}=\frac{1}{4}$

oder $\quad \partial x=\frac{1}{4}\partial z$

daher $\quad F=\pi\sqrt{p}\sqrt{z}\cdot\frac{1}{4}\partial z$

$$=\tfrac{1}{4}\pi\sqrt{p}\cdot\frac{z^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}=\tfrac{1}{6}\pi\,p^{\frac{1}{2}}\,z^{\frac{3}{2}}$$

$$=\tfrac{1}{6}\pi\,p^{\frac{1}{2}}(4x+p)^{\frac{3}{2}}+C$$

Für $x=x'$ wird $F=0$

folglich ist $\quad 0=\frac{1}{6}\pi\,p^{\frac{1}{2}}(4x'+p)^{\frac{3}{2}}+C$

und vollständig die Oberfläche des parabolischen Conoids

$$F=\tfrac{1}{6}\pi\,p^{\frac{1}{2}}\left[(4x+p)^{\frac{3}{2}}-(4x'+p)^{\frac{3}{2}}\right]$$

Fängt das Paraboloid am Scheitel an und ist geschlossen, so ist

$$F=\tfrac{1}{6}\pi\,p^{\frac{1}{2}}(4x+p)^{\frac{3}{2}}$$

VIII. Bestimmung der durch Umdrehung von Curven um feste Axen hervorgehenden körperlichen Räume.

In Fig. 540 bei der ad VII. gewählten Bezeichnung, soll der durch Umdrehung des Curvenstücks AB und der Ordinaten AD und BE um die Axe CX erzeugte Körper K bestimmt werden. Der von AD beschriebene Kreis ist $\pi y_1{}^2$; der von BD beschriebene Kreis πy^2, der bei dem Wachsthum von x um Δx von GF beschriebene Kreis ist $\pi(y+\Delta y)^2$ und der bei der Umdrehung von BG, BE und GF beschriebene Körper ist ΔK. Dieser Zuwachs des Körpers K ist zwischen 2 Cylindern enthalten, von denen der eine den Kreis in B, nämlich πy^2 und der andere den Kreis in H, nämlich $\pi(y+\Delta y)^2$ zum Grundkreise und den Zuwachs $EF=\Delta x$

zur Höhe hat. Man hat also die Vergleichung

$$ny^2 \cdot \triangle x < \triangle K < n\,(y + \triangle y)^2 \cdot \triangle x$$

oder wenn mit der Zunahme von x eine Abnahme von y geschieht:

$$ny^2 \triangle x > \triangle K > n\,(y + \triangle y)^2 \triangle x$$

oder mit $\triangle x$ dividirt

$$ny^2 \gtrless \frac{\triangle K}{\triangle x} \gtrless n\,(y + \triangle y)^2$$

Mit beliebiger Abnahme von $\triangle x$ also auch von $\triangle y$ wird das erste Glied der Grenzwerth des dritten, folglich wird auch das mittlere zwischen beiden begriffene Glied derselbe Grenzwerth, wobei es in das Differenzial $\frac{\partial K}{\partial x}$ übergeht, und man hat

$$\frac{\partial K}{\partial x} = ny^2$$

woraus $K = n \int y^2\, \partial x + C$

Zusatz. Es ist ny^2 die Kreisfläche zu Ende des körperlichen Raums, der bestimmt werden soll. Aus dem Entwickelungsgange ist zu ersehen, dafs auch ein Körper bestimmt wird, der kein Umdrehungskörper ist, wenn man statt ny^2 die Endfläche fx setzt, dann ist

$$K = \int fx\, \partial x + C$$

Beispiel. Die Parabel. Gl.: $y^2 = px$

$$K = n \int px\, \partial x = \tfrac{1}{2} npx^2 + C$$

Für x' statt x wird $K = 0$ folglich ist vollständig

$$K = \tfrac{1}{2} np\,(x^2 - x'^2)$$

Setzt man für px und px' die Werthe y^2 und $y_1{}^2$ so erhält man

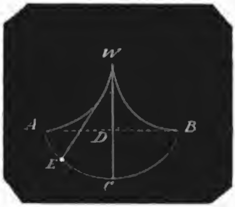
$$K = \tfrac{1}{2} n\,(y^2 x - y_1{}^2 x')$$

Für $x' = 0$, also für das geschlossene parabolische Conoid hat man

$$K = \tfrac{1}{2} n y^2 x$$

Cycloidalpendel ist ein Pendel, welches statt in einem Kreisbogen, in einem cycloidischen Bogen schwingt und der Grund für diese Einrichtung ist, dafs bei einerlei Länge des Fadens das Pendel durch verschiedene grofse Bogen gleichzeitig schwingt, dafs es isochrone Oscillationen macht. Dies Pendel ist so construirt worden, dafs man von dem Aufhängepunkt W aus nach beiden Seiten hin feste Flächen WA, WB von cycloidischer Form zusammensetzte und das Pendel an einer biegsamen Uhrfeder aufhing, die sich gegen das Ende jeder Schwingung an jene Flächen zum Theil auf- und beim Rückgang wieder abwickelte, wo dann der cycloidische Bogen innerhalb ACB durchlaufen wurde und wobei es auf die Länge der Auf- und Abwickelung nicht ankam, weil wie eben gesagt, jeder verschieden grofse Bogen in einerlei Zeit durchlaufen wird. In der Praxis hat sich das C nicht bewährt, denn bei den nur kleinen Bogen, welche durchlaufen werden, ist es schwierig, richtige cycloidische Chablonen zu fertigen, die Elasticität der Federn oder anderer Fäden veranlafst eine auf

Fig. 542.



die richtige Bewegung nachtheilige Rückwirkung und zugleich sind kleine Kreisbogen zu gleichzeitigen Schwingungen des Pendels ausreichend. Aus diesem Grunde soll dieser Art. auch nur kurz behandelt werden.

Wenn die Flächen AW uud BW Cycloiden sind, von welchen die krumme Linie ACB sich abwickelt, so ist diese die Evolute der beiden cycloidischen Bogen. In dem folgenden Art. No. 7 mit Fig. 543 ist nachgewiesen, dafs die Evolute der Cycloide selbst $\backsim$ ist, und während (Fig. 543) die Evolute der Cycloide ACB aus den beiden Hälften AW und BW besteht, so ist hier die Curve ACB die Evolute der beiden halben Cycloiden AW und BW. Ferner ist nachgewiesen, dafs $WD = CD$ ist, und der Erzeugungskreis für die beiden Chablonen mufs die halbe Pendellänge zum Durchmesser erhalten.

Dafs nun der Isochronismus bei der Schwingung des Pendels in einer Cycloide statt findet, liegt in dem No. 8 erwiesenen Gesetz, dafs jeder von der Mitte C ausgemessene Bogen, wie $CL =$ der doppelten Sehne CP ist; d. i. der Halbmesser r multiplicirt mit dem 4fachen Sinus des von C bis L abgewickelten Kreisbogens CP oder LK, dafs also die von dem Pendel durchlaufenen cycloidischen Bogen mit den Sinus der ihnen zugehörigen aus W beschriebenen Kreisbogen in Proportion stehen. Denn alsdann vereinfacht sich der Ausdruck für die Zeit t einer halben Pendelschwingung und es ist

$$t = \sqrt{\frac{l}{2g}}\left[\tfrac{1}{2}\pi - Arc\sin\frac{CE}{CA}\right]$$

hierin ist t die Zeit, in welcher das Pendel von A' bis E fällt, l die Länge des Pendelfadens, g die Beschleunigung. Setzt man nun $CE = 0$ so ist die Zeit des Fallens bis C, nämlich

$$t = \tfrac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{l}{2g}}$$

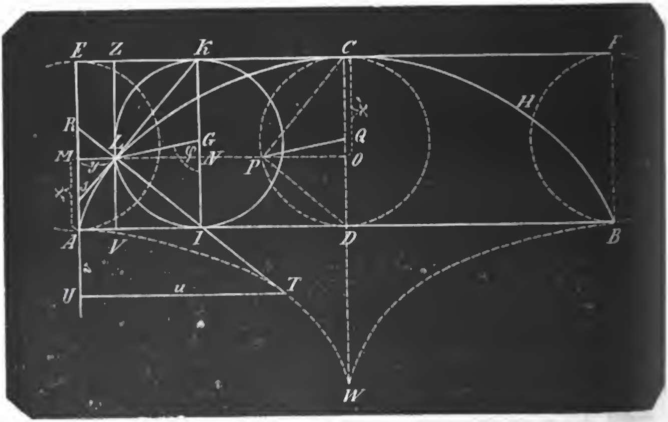
unabhängig von der Länge des Bogens, durch den das Pendel fällt und für alle Bogen wie EC oder AC gleich grofs.

Cycloide wird durch jeden in der Ebene eines Kreises befindlichen Punkt beschrieben, wenn dieser Kreis innerhalb einer Ebene auf einer geraden Linie sich der Art fortwälzt, dafs er mit der Abwälzung eines Bogens auch um dieselbe Bogenlänge auf der geraden Linie fortschreitet.

Die gerade Linie heifst die Grundlinie oder Basis der C., der sich umwälzende Kreis heifst der Erzeugungskreis und der Punkt, den die C. beschreibt der beschreibende Punkt.

Liegt der beschreibende Punkt in der Peripherie des erzeugenden Kreises so heifst die C. die gemeine C., Radlinie; man versinnlicht sich diese Linie durch Beobachtung der Curve, welche der Nagel eines Wagenrades während der Fortbewegung des Wagens in der Luft beschreibt. Liegt der beschreibende Punkt innerhalb der Peripherie, so entsteht die gestreckte oder gedehnte C., welche z. B. die Kurbelwarze an dem Treibrade einer Locomotive beschreibt. Liegt der beschreibende Punkt aufserhalb der Peripherie, so entsteht die verkürzte oder verschlungene C., wie sie z. B. die Windescheibe auf der Welle einer zu einem Krahn gehörenden mit Laufrollen fortzubewegenden sogenannten Katze beschreibt.

Fig. 543.



2. Es sei AB die Basis, AE der Erzeugungskreis im Anfange seiner Bewegung, A also der beschreibende Punkt. Ist AD die Länge der halben Peripherie und befindet sich der Kreis über D, so liegt jetzt der Punkt E in D und der Punkt A in C. Ist DB die Länge der zweiten Hälfte der Peripherie und befindet sich der Kreis über B, so ist von A bis B der ganze Kreis abgewälzt, der Punkt E ist nach F, der Punkt A nach B gekommen, und $ALCHB$ ist die mit einmaliger Umwälzung des Kreises von dem Punkt A beschriebene C. Der senkrechte Durchmesser in der Mitte der Bewegung heifst die Axe der C.; der Punkt C der Cycloide ist von der Basis am weitesten, und zwar um den Durchmesser des Erzeugungskreises entfernt und heifst der Scheitel der C. Von der Axe ab sind beide Hälften der C. einander ≅.

3. Es sei der Kreis bis über J gekommen, JK sein lothrechter Durchmes-

ser, G sein Mittelpunkt, so ist der Punkt L in der Cycloide der Ort des beschreibenden Punkts, es ist der Bogen JL auf der Linie AJ abgewälzt und AJ = Bogen LJ.

Nimmt man die auf AB normale AE zur Abscissenlinie (vergl. Bd. I, pag. 343 mit Fig. 215), so ist $AM = x$ die Abscisse und $ML = y$ die Ordinate von L. Zieht man GL, setzt den Bogen für den Halbmesser = 1 zwischen den Schenkeln GJ und $GL = \varphi$, den Halbmesser $GJ = r$, so ist Bogen $JL = r\varphi$; verlängert man MC, so ist

$$LN = r \sin \varphi; \quad MN = AJ = \text{Bogen } JL = r\varphi$$
$$GN = r \cos \varphi$$

und man hat die beiden Gleichungen für die C.

$$x = r - r\cos\varphi \qquad (1)$$
$$y = r\varphi - r\sin\varphi \qquad (2)$$

Aus der ersten Gleichung erhält man

$$\cos\varphi = \frac{r-x}{r} \qquad (3)$$

also

$$\sin\varphi = \sqrt{1-\cos^2\varphi} = \sqrt{1-\left(\frac{r-x}{r}\right)^2} = \frac{\sqrt{2rx-x^2}}{r}$$

Aus der 3ten Gleichung

$$\varphi = Arc\left(\cos\frac{r-x}{r}\right)$$

daher

$$y = r\,Arc\left(\cos\frac{r-x}{r}\right) - \sqrt{2rx-x^2} \qquad (4)$$

4. Nimmt man den lothrechten Durchmesser CD zur Abscissenlinie, den Scheitel C zum Anfangspunkt der Abscissen, so ist $CO = x_1$ die Abscisse und $OL = y_1$ die Ordinate für den Punkt L.

Nun ist $AM = AE - CO$
und $ML = AD - LO$
oder $x = 2r - x_1$
und $y = \pi r - y_1$

Diese Werthe in Gl. 4 substituirt gibt

$$\pi r - y_1 = r\,Arc\left(\cos\frac{r-(2r-x_1)}{r}\right) - \sqrt{2r(2r-x_1)-(2r-x_1)^2}$$

woraus

$$y_1 = r\left[\pi - Arc\left(\cos\frac{x_1-r}{r}\right)\right] + \sqrt{2rx_1-x_1^2}$$

Da $arc\left(\cos\frac{x_1-r}{r}\right)$ den Bogen $\pi - Arc\left(\cos\frac{x_1-r}{r}\right)$ zum Halbkreise ergänzt, so ist

$$\cos\left[\pi - Arc\left(\cos\frac{x_1-r}{r}\right)\right] = -\frac{x_1-r}{r} = +\frac{r-x_1}{r}$$

folglich hat man

$$y_1 = r\,Arc\left(\cos\frac{r-x_1}{r}\right) + \sqrt{2rx_1-x_1^2} \quad (5)$$

Zieht man den Halbmesser PQ, so ist dieser $\#\, LG$

$$\text{Bogen } DP = \text{Bogen } JL = r\,arc\left(\cos\frac{r-x}{r}\right)$$

$$\text{folglich Bogen } CP = r\,arc\left(\cos\frac{r-x_1}{r}\right)$$

Da nun zugleich $OP = \sqrt{2rx_1 - x_1^2}$ so ist nach Formel 5

$$y = OL = \text{Bogen } CP + OP$$

aber auch $y = LP + OP$
folglich Bogen $CP = LP$

5. **Die Construction der Tangente** an einen beliebigen Punkt L ist Bd. I, pag. 343 mit Fig. 215 gezeigt: Man erhält sie in der geraden Linie KL. Verlängert man diese bis S in der Abscissenlinie AE, so ist LS die Tangente und MS die Subtangente; da nun LJ mit LK rechtwinklig ist, so hat man in der Verlängerung LR von JL bis an die Abscissenlinie AE die Normale und MR die Subnormale des Punktes L.

Wenn man für irgend einen Punkt L der C. den Erzeugungskreis in seinem zugehörigen Stande zeichnen will, so zeichne man über irgend einem Punkt z. B. D der Basis AB, den Erzeugungskreis CPD, ziehe $LP \# AB$, die Sehne PD und aus L die Parallele LJ damit, so ist J der Ort für den lothrechten Durchmesser des verlangten Erzeugungskreises.

6. **Die Lage des Krümmungshalbmessers** ist durch die der Normale bekannt, die Länge desselben ist nach pag. 188, Formel 9

$$\varrho = \pm\frac{\left[1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}$$

Aus Formel 1 und 2 entspringt

$$\frac{\partial x}{\partial\varphi} = r\sin\varphi$$
$$\frac{\partial y}{\partial\varphi} = r - r\cos\varphi$$

hieraus $$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial \varphi} : \frac{\partial x}{\partial \varphi} = \frac{r - r\cos\varphi}{r\sin\varphi} = \frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi} = tg\,\frac{\varphi}{2}$$

Zur Auffindung der zweiten Differenziale hat man

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\frac{\partial x}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial y}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial x^2}}{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^3} = \frac{r\sin\varphi\cdot r\sin\varphi - r(1-\cos\varphi)\cdot r\cos\varphi}{r^3\sin^3\varphi}$$

$$= \frac{1}{r}\cdot\frac{1-\cos\varphi}{\sin^3\varphi} = \frac{tg\,\frac{\varphi}{2}}{r\sin^2\varphi} = \frac{1}{4r\sin\frac{\varphi}{2}\cos^3\frac{\varphi}{2}}$$

folglich $$\varrho = + \frac{\left(1 + tg^2\frac{\varphi}{2}\right)^{3/2}}{\frac{1}{4r\sin\frac{\varphi}{2}\cos^3\frac{\varphi}{2}}} = 4r\sin\frac{\varphi}{2}\cdot\cos^3\frac{\varphi}{2}\sec^3\frac{\varphi}{2} = 4r\cdot\sin\frac{\varphi}{2} \quad (6)$$

Nun ist $\angle JKL = \frac{1}{2}\angle JGL = \frac{\varphi}{2}$

$JK = 2r$

daher $JL = 2r\sin\frac{\varphi}{2}$

woraus folgt, dafs der Krümmungsmittelpunkt in T sich befindet, wenn $LT = 2JL$ ist.

Nun ist $JL^2 = JK \times JN = 2rx$

daher $JL = \sqrt{2rx}$

und $\varrho = LT = 2\sqrt{2rx}$ (7)

Die Abscisse x für den Scheitel ist $= 2r$, daher ist ϱ für $C = 4r = 2CD$. D. h. der Krümmungshalbmesser des Scheitels ist = der doppelten Axe, er liegt in der doppelten Verlängerung von CD.

Dies Resultat erhält man auch aus Formel 6; denn für C wird φ der gestreckte $\angle DQC$, also $\frac{\varphi}{2} = 90°$ und $\varphi = 4r$.

Für den Anfangspunkt A ist $\varphi = \angle AMA = 0$ und $x = 0$. Aus Formel 6 und 7 geht also hervor, dafs ϱ für $A = 0$ ist. D. h. Es existirt für A kein Krümmungskreis, und jeder mit noch so kleinem Halbmesser beschriebene Kreis würde mit dem ersten Element aufserhalb der Curve fallen.

7. Die Gleichungen für die Curve der Mittelpunkte oder die Evolute der C. erhält man durch eine Coordinatengleichung für den beliebigen Punkt T derselben.

Fällt man demnach das Loth TU auf AE, setzt $TU = u$, $AU = v$, so hat man

$\triangle RTU \infty \triangle LKN$

daher $\angle RTU = \angle LKN = \frac{\varphi}{2}$

Nun ist

$$v = JT\sin\frac{\varphi}{2} = \sqrt{2rx}\cdot\sin\frac{\varphi}{2} \quad (8)$$

$$u = AJ + JT\cdot\cos\frac{\varphi}{2}$$

$$= \text{Bogen } JL + JT\cos\frac{\varphi}{2}$$

$$= r\varphi + \sqrt{2rx}\cdot\cos\frac{\varphi}{2} \quad (9)$$

Nun ist Gl. I. $x = r - r\cos\varphi$ hieraus wenn man mit $2r$ multiplicirt und radicirt

$$\sqrt{2rx} = r\sqrt{2(1-\cos\varphi)} = 2r\sin\frac{\varphi}{2}$$

Diesen Werth in die Gleichungen 8 und 9 für u und v substituirt, entsteht

$$v = 2r\sin^2\frac{\varphi}{2} = r(1-\cos\varphi) \quad (10)$$

und

$$u = r\varphi + 2r\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} = r\varphi + r\sin\varphi \quad (11)$$

Aus 10 ist $\cos\varphi = \frac{r-v}{r}$

Daher $\sin\varphi = \sqrt{1-\cos^2\varphi}$

$$= \sqrt{1 - \left(\frac{r-v}{r}\right)^2} = \frac{\sqrt{2rv - v^2}}{r}$$

und $\varphi = Arc\left(\cos\frac{r-v}{r}\right)$

Diese Werthe in Gl. 11 substituirt gibt

$$u = r\,Arc\left(\cos = \frac{r-v}{r}\right) + \sqrt{2rv - v^2} \quad (12)$$

Setzt man in diese Gleichung x, für v so erhält man Gleichung 5. Die Evolute ist also eine mit der gegebenen C. congruente Cycloide; oder vielmehr sie besteht aus 2 halben Cycloiden, deren Scheitel in A und B liegen, deren gemeinschaftlicher Anfangspunkt W in der verlängerten Axe CD in

Entfernung $CD = 2r$ von AB liegt und deren Basis durch W mit der Basis AB $\ddagger$ läuft, in der Form, wie Fig. 543 punktirt angegeben ist.

8. Rectification der Cycloide. Setzt man Bogen $AL = s$ so ist nach pag. 191, rechts λ oder

$$s = \int \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\, \partial x + C$$

Nach No. 6 hat man

$$\frac{\partial y}{\partial x} = tg\,\frac{\varphi}{2}$$

$$\partial x = r \sin\varphi\, \partial\varphi$$

daher
$$s = r\int \sqrt{1 + tg^2\frac{\varphi}{2}} \cdot \sin\varphi\, \partial\varphi = r\int \sec\frac{\varphi}{2} \sin\varphi\, \partial\varphi$$

$$= r\int \frac{2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}{\cos\frac{\varphi}{2}} \cdot 2\partial\frac{\varphi}{2} = 4r\int \sin\frac{\varphi}{2} \cdot \partial\frac{\varphi}{2}$$

also
$$s = -4r\cos\frac{\varphi}{2} + C$$

Für $\frac{\varphi}{2} = 0$ wird $s = 0$

folglich ist $\quad 0 = -4r + C$

woraus $\quad C = +4r$ und man hat

$$AL = s = 4r\left(1 - \cos\frac{\varphi}{2}\right) \qquad (13)$$

Für $\varphi = 180°$, also für $\frac{\varphi}{2} = 90°$ entsteht die halbe Cycloide $ALC = 4r$ d. h. die halbe Cycloide ist = der doppelten Axe.

Es ist $\quad \angle JKL = \frac{\varphi}{2}$

also $\quad KL = 2\cos\frac{\varphi}{2}$

daher ist Bogen $AL = s = 4r - 2\,KL$ und da die halbe Cycloide $= 4r$ ist, so ist der vom Scheitel C ab gemessene Bogen $CL = 2\,KL = 2CP$ d. h. die vom Scheitel ab gemessene C. ist = der doppelten Sehne des in der Axe befindlichen Erzeugungskreises, welche durch die Ordinate OL des Bogens abgeschniten wird.

Es ist $KL^2 = KJ \times KN = 2r \cdot (2r - x)$

daher Bogen $CL = s' = 2\sqrt{2r(2r - x)}$

oder wenn man, wie No. 4, $CO = x'$ setzt

$$CL = s' = 2\sqrt{2rx'}$$

und der Bogen

$$AL = s = 2\left(2r - \sqrt{2r(2r - x)}\right)$$
$$= 2\left(2r - \sqrt{2rx'}\right)$$

9. Quadratur der Cycloide. Fällt man das Loth LV, so erhält man das Flächenstück ACV (nach pag. 192)

$$F = \int x\, \partial y$$

oder das Flächenstück

$$ALM = F' = \int y\, \partial x + C$$

Nun ist (Gl. 1) $y = r(\varphi - \sin\varphi)$

(No. 8) $\quad \partial x = r\sin\varphi\, \partial\varphi$

folglich $\quad F' = r^2 \int (\varphi - \sin\varphi) \sin\varphi\, \partial\varphi$

$$= r^2\int \varphi \sin\varphi\, \partial\varphi - r^2 \int \sin^2\varphi\, \partial\varphi$$

Es ist

$$\int \varphi \sin\varphi = \varphi \int \sin\varphi - \int \left(\int \sin\varphi\, \partial\varphi\right) \partial\varphi$$
$$= -\varphi\cos\varphi - \int -\cos\varphi\, \partial\varphi$$
$$= -\varphi\cos\varphi + \sin\varphi$$

$$\int \sin^2\varphi\, \partial\varphi = \int \sin\varphi \cdot \sin\varphi\, \partial\varphi$$
$$= \sin\varphi \int \sin\varphi\, \partial\varphi - \int \left[\cos\varphi\, \partial\varphi \int \sin\varphi\, \partial\varphi\right]$$
$$= -\sin\varphi\cos\varphi + \int \cos^2\varphi\, \partial\varphi$$
$$= -\sin\varphi\cos\varphi + \int \partial\varphi - \int \sin^2\varphi\, \partial\varphi$$

hieraus

$$2\int \sin^2\varphi\, \partial\varphi = -\sin\varphi\cos\varphi + \varphi$$

und $\quad \int \sin^2\varphi\, \partial\varphi = \frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{2}\sin\varphi\cos\varphi$

Diese Werthe eingesetzt ergibt

$$F' = r^2\left[\sin\varphi - \varphi\cos\varphi - \tfrac{1}{2}\varphi + \tfrac{1}{2}\sin\varphi\cos\varphi\right] \qquad (14)$$

das Rechteck $\quad AMLV$ ist $= x \cdot y = r^2(1 - \cos\varphi)(\varphi - \sin\varphi)$

$$= r^2\left[-\sin\varphi - \varphi\cos\varphi + \varphi + \sin\varphi\cos\varphi\right] \qquad (15)$$

hiervon F' abgezogen gibt den Flächenraum

$$ALV = F = r^2\left[\tfrac{1}{2}\varphi - 2\sin\varphi + \tfrac{1}{2}\sin\varphi\cos\varphi\right] \qquad (16)$$

Für $\varphi = 0$ verschwindet die Fläche, also ist die Constante $= 0$.

Für $\varphi = 180° = \pi$ hat man das Rechteck $CDAE = 2\pi r^2$

= dem doppelten Erzeugungskreise (17)

die Fläche $AECLA$ (aus 14) $= \frac{1}{2}\pi r^2$

= dem halben Erzeugungskreise (18)

die Fläche $ADCLA$ (aus 15) $= \frac{3}{2}\pi r^2$ (19)

die ganze cycloidische Fläche $ACB = 3\pi r^2$
$=$ dem 3fachen Erzeugungskreise (20)
die ganze äufsere Fläche $AEFBCA = \pi r^2$
$=$ dem Erzeugungskreise (21)

10. Um die Fläche CLO zu finden kann man von der Fläche CDA die Fläche $ACOD = ALV + OLVD$ abziehen.

Nun ist Fläche

$CDA = \frac{1}{2}\pi r^2$

$ALV = r^2[\frac{1}{2}\varphi - 2\sin\varphi + \frac{1}{2}\sin\varphi\cos\varphi]$

$OLVD = x(r\pi - y) = r^2(1 - \cos\varphi)(\pi - \varphi + \sin\varphi) = r^2[(\pi - \varphi) - (\pi - \varphi)\cos\varphi + \sin\varphi - \sin\varphi\cos\varphi]$

daher $ALV + OLVD = r^2[\pi + \frac{1}{2}\varphi - \sin\varphi - (\pi - \varphi)\cos\varphi - \frac{1}{2}\sin\varphi\cos\varphi]$

und Fläche $CLO = F'' = r^2[\frac{1}{2}(\pi - \varphi) + \sin\varphi + (\pi - \varphi)\cos\varphi + \frac{1}{2}\sin\varphi\cos\varphi]$

Setzt man $\pi - \varphi = \varphi^1$, so dafs das Flächenstück CLO von der Axe und dem Scheitel aus genommen wird, so hat man zugleich $\varphi = \pi - \varphi^1$ also $\cos\varphi = -\cos\varphi^1$ und $\sin\varphi = \sin\varphi^1$ und es ist Fläche

$$CLO = F' = r^2[\tfrac{1}{2}\varphi^1 + \sin\varphi^1 - \varphi^1\cos\varphi^1 - \tfrac{1}{2}\sin\varphi^1\cos\varphi^1] \qquad (22)$$

11. Die äufsere Fläche CZL ist $= \# CZLO - CLO$

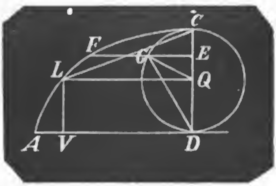
$$\# CZLO = x^1 \cdot y^1 = (2r - x)(r\pi - y) = r^2(1 + \cos\varphi)(\pi - \varphi + \sin\varphi)$$
$$= r^2[(\pi - \varphi) + (\pi - \varphi)\cos\varphi + \sin\varphi + \sin\varphi\cos\varphi]$$
$$= r^2[\varphi^1 - \varphi^1\cos\varphi^1 + \sin\varphi^1 - \sin\varphi^1\cos\varphi^1]$$

hiervon CLO (Formel 22) abgezogen bleibt Fläche $CZL = \frac{1}{2}r^2(\varphi^1 - \sin\varphi^1\cos\varphi^1)$ (23)

12. Zieht man durch den Mittelpunkt Q des in der Axe befindlichen Erzeugungskreises eine grade Linie QL ⫲ der Basis AD, fällt das Loth LV auf AD so ist

$$\varphi = \varphi^1 = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$$

Fig. 544.



Also $F = ALV$ (Formel 13)
$= (\frac{1}{4}\pi - 2) r^2$ (24)

$F' = CLQ$ (Formel 22)
$= (\frac{1}{4}\pi + 1) r^2$ (25)

hierzu $\square LVDQ = r \cdot y^1$
$= (\frac{1}{2}\pi + 1) r^2$

gibt die halbe cycloidische Fläche $ACD = \frac{3}{2}\pi r^2$ (26)

13. Zieht man die Sehne CL so ist

$\triangle CLQ = \frac{1}{2}CQ \cdot QL = \frac{1}{2}ry^1 = \frac{1}{2}r^2(\pi - \varphi + \sin\varphi)$

hier ist $\varphi = \frac{1}{2}\pi$

folglich ist $\triangle CLQ = \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right) r^2$

dies abgezogen von der Fläche CLQ (Formel 25)

bleibt Segment CLF über $CL = \frac{1}{2}r^2$ (27)

14. Halbirt man CQ in E, zieht EF ⫲ AD, so hat man $\cos\varphi^1 = \frac{1}{2}$

also $\varphi^1 = 60^\circ$

Mithin nach Formel 22

die Fläche $CEF = r^2[\frac{1}{2}\varphi^1 + \sin\varphi^1 - \frac{1}{2}\varphi^1 - \frac{1}{4}\sin\varphi^1) = \frac{3}{4}r^2\sin\varphi^1$

Zieht man nun DG

so ist $\triangle DEG = \frac{1}{2}DE \cdot EG = \frac{3}{2}r \cdot r\sin GQE = \frac{3}{4}r^2\sin\varphi^1$

Daher Fläche $CEF = \triangle DEG$ (28)

15. Die gewölbte Oberfläche, die der Bogen AL (Fig. 543) bei der Drehung um AM beschreibt, findet man aus der Formel (pag. 194, rechts)

$$F = 2\pi\int y\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\,\partial x + C$$

Nun ist $y = r(\varphi - \sin\varphi)$

Aus No. 8 hat man $\frac{\partial y}{\partial x} = tg\,\frac{\varphi}{2}$

$\partial x = r\sin\varphi\,\partial\varphi$

daher

$$F = 2\pi r^2\int(\varphi - \sin\varphi)\sqrt{1 + tg^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}\sin\varphi \cdot \partial\varphi$$

woraus nach erforderlicher Umformung

$$F = 16\pi r^2\left[\int\frac{\varphi}{2}\,tg\,\frac{\varphi}{2}\,\partial\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \int\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\cdot\partial\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right] + C$$

welches einen Ausdruck mit $logn$ gibt und der von keinem practischen Nutzen ist. Eben so practisch unbrauchbar ist der Ausdruck für die Oberfläche bei der

Drehung um AV, wo in obiger Formel (für F) y mit x zu vertauschen ist.

16. Nimmt man dagegen die Axe CD der Cycloide zur Umdrehungsaxe, so hat man die Oberfläche durch die Umdrehung des Bogens CL um CO nach derselben Formel

$$F = 2\pi \int y' \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y'}{\partial x'}\right)^2} \partial x' + C$$

Nun ist

$$y' = \pi r - y = r(\pi - \varphi) + r \sin\varphi = r(\varphi' + \sin\varphi')$$
$$x' = r(1 - \cos\varphi')$$

hieraus $\dfrac{\partial y'}{\partial \varphi'} = r(1 + \cos\varphi')$

$\dfrac{\partial x'}{\partial \varphi'} = r \sin\varphi'$

also $\dfrac{\partial y'}{\partial x'} = \dfrac{1 + \cos\varphi'}{\sin\varphi'}$

und $\partial x' = r \sin\varphi' \cdot \partial\varphi'$

folglich ist

$$F = 2\pi r^2 \int (\varphi' + \sin\varphi') \sqrt{1 + \left(\frac{1 + \cos\varphi'}{\sin\varphi'}\right)^2} \sin\varphi' \cdot \partial\varphi'$$

Nun ist $$1 + \left(\frac{1 + \cos\varphi}{\sin\varphi}\right)^2 = \frac{2(1 + \cos\varphi)}{\sin^2\varphi} = \frac{4\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\sin^2\varphi}$$

Also

$$F = 4\pi r^2 \int (\varphi' + \sin\varphi') \cos\frac{\varphi'}{2} \cdot \partial\varphi'$$

Um das Integral ganz durch $\frac{\varphi'}{2}$ auszudrücken, hat man

$$\varphi' + \sin\varphi' = 2\frac{\varphi'}{2} + 2\sin\frac{\varphi'}{2} \cdot \cos\frac{\varphi'}{2}$$

und $$\partial\varphi = 2\,\partial\left(\frac{\varphi'}{2}\right)$$

Also wenn man zugleich α für $\frac{\varphi'}{2}$ schreibt

$$F = 16\pi r^2 \int (\alpha + \sin\alpha \cdot \cos\alpha) \cos\alpha \cdot \partial\alpha$$

Schreibt man das Integral in 2 Gliedern, also

$$\int \alpha \cdot \cos\alpha \cdot \partial\alpha + \int \sin\alpha \cdot \cos^2\alpha \cdot \partial\alpha$$

so ist nach der allgemeinen Reductionsformel

$$\int \varphi x f x = \varphi x \int f x\, \partial x - \int \varphi' x \int f x\, \partial x$$

I. $\int \alpha \cos\alpha\, \partial\alpha = \alpha \int \cos\alpha\, \partial\alpha - \int \partial\alpha \int \cos\alpha\, \partial\alpha$
$= \alpha \sin\alpha - \int \sin\alpha\, \partial\alpha = \alpha\sin\alpha + \cos\alpha$

II. $\int \sin\alpha \cos^2\alpha\, \partial\alpha$
$= \sin\alpha \int \cos^2\alpha\, \partial\alpha - \int \partial \sin\alpha \int \cos^2\alpha\, \partial\alpha$
$= \sin\alpha \int \cos^2\alpha\, \partial\alpha - \int \cos\alpha \int \cos^2\alpha\, \partial\alpha = A - B$

und $F = 16\pi r^2 (\text{I} + \text{II})$

Nun ist $\int \cos^2\alpha\, \partial\alpha = \frac{1}{2}(\sin\alpha\cos\alpha + \alpha)$

daher $A = \frac{1}{2}\sin\alpha(\sin\alpha\cos\alpha + \alpha)$

und $B = \frac{1}{2}\int \cos\alpha(\sin\alpha \cdot \cos\alpha + \alpha)\partial\alpha$
$= \frac{1}{2}\int \sin\alpha\cos^2\alpha\, \partial\alpha + \frac{1}{2}\int \alpha\cos\alpha\, \partial\alpha$
$= \frac{1}{2}\int \sin\alpha\cos^2\alpha\, \partial\alpha + \frac{1}{2}(\alpha\sin\alpha + \cos\alpha)$

Es ist also

$$\tfrac{1}{2}\int \sin\alpha \cdot \cos^2\alpha\, \partial\alpha = B - \tfrac{1}{2}(\alpha\sin\alpha + \cos\alpha)$$

und nach II. $\int \sin\alpha\cos^2\alpha\, \partial\alpha = A - B$

folglich die beiden letzten Ausdrücke addirt

$$\tfrac{3}{2}\int \sin\alpha\cos^2\alpha\, \partial\alpha = A - \tfrac{1}{2}(\alpha\sin\alpha + \cos\alpha)$$

und

II. $\int \sin\alpha\cos^2\alpha\, \partial\alpha = \frac{2}{3}A - \frac{1}{3}(\alpha\sin\alpha + \cos\alpha)$

folglich

$\text{I} + \text{II} = \alpha\sin\alpha + \cos\alpha + \frac{1}{3}\sin\alpha(\sin\alpha\cos\alpha + \alpha)$
$- \frac{1}{3}(\alpha\sin\alpha + \cos\alpha)$
$= \alpha\sin\alpha + \frac{2}{3}\cos\alpha + \frac{1}{3}\sin^2\alpha\cos\alpha$

Schreibt man nun wieder $\frac{\varphi'}{2}$ für α, so erhält man

$$F = 16\pi r^2 \left[\frac{\varphi'}{2}\sin\frac{\varphi'}{2} + \tfrac{2}{3}\cos\frac{\varphi'}{2} + \tfrac{1}{3}\sin^2\left(\frac{\varphi'}{2}\right)\cos\frac{\varphi'}{2} + C\right]$$

Für $\varphi = 0$ wird $F = 0$ folglich ist

$$0 = 16\pi r^2(0 + \tfrac{2}{3} \cdot 1 + 0 + C)$$

also vollständig

$$F = 16\pi r^2 \left[\frac{\varphi'}{2}\sin\frac{\varphi'}{2} - \tfrac{2}{3}\left(1 - \cos\frac{\varphi'}{2}\right) + \tfrac{1}{3}\sin^2\left(\frac{\varphi'}{2}\right)\cos\frac{\varphi'}{2}\right] \quad (29)$$

Für $\varphi' = 180° = \pi$ entsteht die gewölbte Oberfläche der ganzen Cycloide

$$= 16\pi r^2\left[\frac{\pi}{2} - \tfrac{2}{3} + 0\right] = 8\pi r^2(\pi - \tfrac{4}{3}) \quad (30)$$

17. Dreht sich der Bogen AL um AV, so erhält man den dadurch erzeugten Umdrehungskörper aus der Formel pag. 195, links.

$$K = \pi \int x^2 \partial y$$

Es ist

$$x = r(1 - \cos\varphi)$$
$$y = r(\varphi - \sin\varphi)$$

woraus

$$\partial y = r(1 - \cos\varphi)\,\partial\varphi$$

daher

$$K = \pi r^3 \int (1 - \cos^2\varphi)(1 - \cos^2\varphi)\,\partial\varphi = \pi r^3 \int (1 - \cos\varphi)^2\,\partial\varphi$$
$$= \pi r^3 \int (1 - 3\cos\varphi + 3\cos^2\varphi - \cos^3\varphi)\,\partial\varphi$$
$$= \pi r^3 \Big[\int \partial\varphi - 3\int \cos\varphi\,\partial\varphi + 3\int \cos^2\varphi\,\partial\varphi - \int \cos^3\varphi\,\partial y\Big]$$

Nun ist

$$\int \partial\varphi = \varphi$$
$$\int \cos\varphi\,\partial\varphi = \sin\varphi$$
$$\int \cos^2\varphi\,\partial\varphi = \tfrac{1}{2}(\sin\varphi\cos\varphi + \varphi$$
$$\int \cos^3\varphi\,\partial\varphi = \tfrac{1}{3}\sin\varphi(\cos^2\varphi + 2)$$

daher

$$K = \pi r^3 [\varphi - 3\sin\varphi + \tfrac{3}{2}\sin\varphi\cos\varphi + \tfrac{3}{2}\varphi - \tfrac{1}{3}\sin\varphi\cos^2\varphi - \tfrac{2}{3}\sin\varphi]$$
$$= \pi r^3 [\tfrac{5}{2}\varphi - \tfrac{11}{3}\sin\varphi + \tfrac{3}{2}\sin\varphi\cos\varphi - \tfrac{1}{3}\sin\varphi\cos^2\varphi + C] \quad (31)$$

Für $\varphi = 0$ wird $K = 0$, daher $C = 0$ der von der Fläche ACD durch Umdrehung um AD gebildete cycloidische Körper ist, wenn man π für φ setzt

$$= 5\pi^2 r^3 \quad (32)$$

18. Dreht sich der Bogen LCD um die Axe CD so hat man

$$K' = \pi \int y'^2 \partial y'$$

Setzt man aus No. 16 die Werthe von y' und $\partial x'$ in diese Formel, so erhält man

$$K' = \pi r^3 \int (\varphi' + \sin\varphi')^2 \sin\varphi'\,\partial\varphi' = \pi r^3 \Big[\int \varphi'^2 \sin\varphi' + 2\int \varphi' \sin^2\varphi' + \int \sin^3\varphi'\Big]\,\partial\varphi'$$

Nun ist nach der No. 16 citirten allgem. Reductionsformel (das Gestrichelte fortgelassen also $\varphi' = \varphi$ gesetzt)

I. $\int \varphi^2 \sin\varphi\,\partial\varphi = -\varphi^2\cos\varphi + 2\int \varphi\cos\varphi\,\partial\varphi = -\varphi^2\cos\varphi + 2\varphi\sin\varphi + 2\cos\varphi$

II. $\int \varphi \sin^2\varphi = \varphi \int \sin^2\varphi\,\partial\varphi - \int\int \sin^2\varphi\,\partial\varphi$

$$\tfrac{1}{2}\varphi(-\cos\varphi\sin\varphi + \varphi) - \tfrac{1}{2}\int(-\cos\varphi\sin\varphi - \varphi)\,\partial\varphi = A - B$$
$$B = -\tfrac{1}{8}\int \sin 2\varphi\,(\partial 2\varphi) + \tfrac{1}{2}\int \varphi\,\partial\varphi = +\tfrac{1}{8}\cos 2\varphi + \tfrac{1}{4}\varphi^2$$

daher

II. $\int \varphi\sin^2\varphi = \tfrac{1}{2}\varphi(-\cos\varphi\sin\varphi + \varphi) + \tfrac{1}{8}\cos 2\varphi + \tfrac{1}{4}\varphi^2 = \tfrac{1}{4}\varphi^2 - \tfrac{1}{4}\varphi\sin 2\varphi - \tfrac{1}{8}\cos 2\varphi$

III. $\int \sin^3\varphi\,\partial\varphi = \int \sin\varphi\sin^2\varphi\,\partial\varphi = \sin\varphi\int \sin^2\varphi\,\partial\varphi - \int \cos\varphi \int \sin^2\varphi$

$$= -\tfrac{1}{3}\cos\varphi\sin^2\varphi - \tfrac{2}{3}\cos\varphi$$

Hiernach

$$K' = \pi r^3 [\tfrac{1}{2}\psi^2(1 - 2\cos\varphi) + \tfrac{1}{2}\varphi(4\sin\varphi - \sin 2\varphi) + \tfrac{4}{3}\cos\varphi - \tfrac{1}{4}\cos 2\varphi - \tfrac{1}{6}\sin\varphi\sin 2\varphi] + C$$

oder

$$K' = \pi r^3 [\tfrac{1}{2}\varphi^2(1 - 2\cos\varphi) + \varphi\sin\varphi(2 - \cos\varphi) + \tfrac{1}{3}\cos\varphi(4 - \sin^2\varphi) + \tfrac{1}{4}(\sin^2\varphi - \cos^2\varphi) - \tfrac{13}{12}] \quad (33)$$

Für $\varphi = 0$ verschwindet der Körper daher $C = -(\tfrac{4}{3} - \tfrac{1}{4}) = -\tfrac{13}{12}$ gesetzt worden ist.

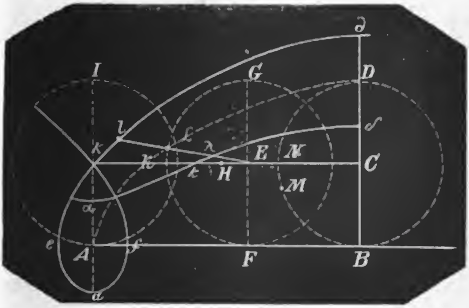
Der von der Fläche ACD durch Umdrehung um die Axe CD gebildete cycloidalische Körper ist bei $\varphi = \pi$

$$K = \pi r^3 [\tfrac{1}{2}\pi^2(1 + 2) + \tfrac{1}{3}(-1)\cdot 4 + \tfrac{1}{4}(-1) - \tfrac{13}{12}] = \pi r^3 [\tfrac{3}{2}\pi^2 - \tfrac{8}{3}] \quad (34)$$

Cycloide. Die gestreckte oder gedehnte und die verkürzte oder verschlungene Cycloide. Es sei BD der lothrechte Durchmesser des auf der geraden Linie AB sich wälzenden Kreises, C sein Mittelpunkt. Aufserhalb und innerhalb CD seien an CD die beiden festen Punkte d, δ verbunden, so sind D, d, δ beschreibende Punkte zu drei Cycloiden; D der beschreibende Punkt für die gemeine C., d der für die verkürzte C. und δ der für die gestreckte C, und D, d, δ sind die Punkte dieser 3 C. in deren Axe.

Ist der Mittelpunkt des Kreises während seiner Wälzung nach E gekommen, FG sein lothrechter Durchmesser, so ist $BF =$ dem Bogen BM, der von B ab auf

Fig. 545.



AB sich abgewälzt hat, so dafs *M* nach *F* gekommen ist, = dem Bogen *GL*, um welchen der Punkt *D* nach *A* hin fortgeschritten ist. Der Halbmesser *CD* befindet sich also jetzt in *EL*, und mit demselben der Punkt *d* in *l* und der Punkt *δ* in *λ*. Folglich sind *L*, *l* und *λ* Punkte der genannten 3 C.

Ist *BA* = der halben Peripherie des Kreises, so ist bei der halben Abwälzung desselben *D* nach *A* gekommen, der Halbmesser *CD* nach *kA* und mit demselben der Punkt *d* nach *a* und der Punkt *δ* nach *α*.

Ist $CH = kH$ = dem Quadrant *DN* des Erzeugungskreises und befindet sich dessen Mittelpunkt in *H*, so liegt *CD* waagerecht; *D* liegt in *K*, *d* in *k* und *δ* in *x*.

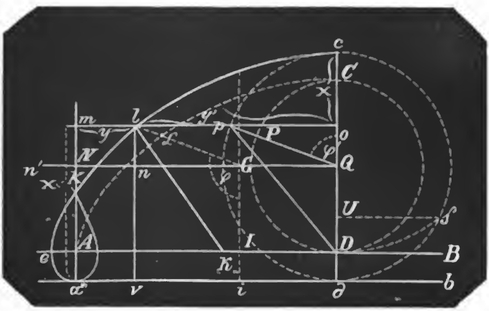
Von hier ab kommt *CD* unterhalb *CK*, der Punkt *d* geht über den lothrechten Durchmesser *AJ* hinaus, beschreibt den Bogen *kea* und die halbe verkürzte C. ist die Linie *dlkea*. Der zweite Bogen *afk* zwischen *a* und *k* gehört schon zu derjenigen verkürzten C., welche entsteht wenn der Kreis von *A* aus in die Verlängerung von *BA* tritt; er bildet mit der ersten C. eine Schleife und in *k* mit derselben einen Knoten *k*, weshalb diese C. auch die verschlungene C. genannt wird. Die gestreckte C. dagegen bleibt innerhalb *BD* und *AJ*, sie wird in der Nähe von *α* gegen *AB* convex und zwischen *α* und *x* hat sie einen Wendungspunkt.

Hier ist *k* genau in dem lothrechten Durchmesser *AJ*, also in dem Mittelpunkt des über *A* befindlichen Erzeugungskreises gezeichnet. Dies kann aber nur sein, wenn *Cd* = dem Quadrant *DN* ist. Für *Cd* > Bogen *DN* fällt *k* links von *AJ*, der Knoten oberhalb *Ck* und die Schleife wird gröfser; für *Cd* < Bogen *DN* fällt *k* rechts von *AJ*, der Knoten unterhalb *Ck* und die Schleife wird kleiner.

I. **Die verkürzte Cycloide.** Um diese C. zu untersuchen ist bei derselben Bezeichnung wie Fig. 545, *AB* die Basis der Cycloide, *CD* der Durchmesser des Erzeugungskreises in der Axe, *Q* dessen Mittelpunkt, daher *ALC* die gemeine Cycloide, *aelc* die verkürzte C.

Setzt man nun für den Punkt *l*, $am = x$, $ml = y$, verlängert *y* bis *o*, setzt $co = x_1$, $ol = y_1$, zieht den Halbmesser *Qp*, setzt $\angle pQc = \varphi_1$ so gehören die Bogen *cl* und *CL* zu φ_1 und die Bogen *al*, *AL* zu dem $\angle lGi = \angle pQd = \varphi = \pi - \varphi_1$.

Fig. 546.



Nun ist $x = lo = vn + ln = R + lG\cos\varphi_1 = R - R\cos\varphi$ (1)

$y = ml = AJ - vi = \text{Bogen } DP - Gn = r\varphi - R\sin\varphi$ (2)

$x_1 = oc = 2R - x = R + R\cos\varphi = R - R\cos\varphi_1$ (3)

$y_1 = ol = AD - y = \pi r - (r\varphi - R\sin\varphi) = (\pi - \varphi)r + R\sin\varphi = r\varphi_1 + R\sin\varphi_1$ (4)

hieraus ist wie ad 2.

$$\cos\varphi = \frac{R-x}{R};\ \cos\varphi_1 = \frac{R-x_1}{R}$$

$$\sin\varphi = \sqrt{1-\cos^2\varphi} = \frac{\sqrt{2Rx - x^2}}{R}$$

$$\sin\varphi_1 = \frac{\sqrt{2Rx_1 - x_1^2}}{R}$$

$$\varphi = Arc\left(\cos = \frac{R-x}{R}\right)$$

$$\varphi_1 = Arc\left(\cos = \frac{R-x_1}{R}\right)$$

$$y = r\,Arc\left(\cos\frac{R-x}{R}\right) - \sqrt{2Rx - x^2} \quad (5)$$

$$y_1 = r\,Arc\left(\cos\frac{R-x_1}{R}\right) + \sqrt{2Rx_1 - x_1^2} \quad (6)$$

2. Aus Gleichung 2: $y = r\varphi - R\sin\varphi$ folgt, daſs für 2 Werthe von φ, $-y = 0$ wird.

A. Für $\varphi = 0$, wo der Erzeugungskreis über A sich befindet und der Curvenpunkt a ist.

B. Für $r\varphi = R\sin\varphi$ oder für $\varphi = \frac{R}{r}\sin\varphi$, wo der Curvenpunkt k ist.

Zwischen $\varphi = 0$ und $\varphi = \frac{R}{r}\sin\varphi$, wenn also $\varphi < \frac{R}{r}\sin\varphi$ ist, wird y negativ und es entsteht der Bogen aek.

Ist $x = R$, so liegt k in N, und nach Formel 1 ist zugleich

$$x = R - R\cos\varphi$$

Dies ist also nicht anders möglich als wenn $R\cos\varphi = 0$, also wenn $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ ist, wenn also der Quadrant des Kreises abgewälzt ist.

Man hat also für diesen Fall

$$\tfrac{1}{2}\pi = \frac{R}{r}\sin\tfrac{1}{2}\pi = \frac{R}{r}$$

oder

$$R = \tfrac{1}{2}\pi r$$

d. h. R ist = dem Quadrant des Erzeugungskreises wie schon No. 1 bemerkt ist.

Aus Formel 2:

$$y = r\varphi - R\sin\varphi$$

wird für $x = R$, also zugleich für $\varphi = \frac{1}{2}\pi$

$$y = \tfrac{1}{2}\pi r - R$$

Ist also $R < \frac{1}{2}\pi r$, so ist y positiv, der Curvenpunkt liegt rechts von N, nach n hin, der Knoten k fällt unterhalb der Mittellinie, die Schleife wird kleiner.

Ist $R > \frac{1}{2}\pi r$, so wird y negativ, der Curvenpunkt fällt links von N, nach n' hin; k fällt oberhalb N, die Schleife wird gröſser.

Für $R = r$ entsteht die gemeine C., k fällt in A und die Schleife verschwindet.

3. Zur Construction der Tangente und der Normale hat man

aus Formel 1: $\frac{\partial x}{\partial\varphi} = R\sin\varphi$

aus Formel 2: $\frac{\partial y}{\partial\varphi} = r - R\cos\varphi$

hieraus $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{r - R\cos\varphi}{R\sin\varphi}$ = der Tangente ($tg\,\alpha$) des $\angle\,\alpha$ den die Tangente in l mit der Linie am bildet, oder des $\angle$, den die Normale für l mit der Linie ab oder AB bildet. Die Construction ist einfach:

Zieht man nämlich pD so ist

$$Do = po\ tg\angle opD$$

Nun ist

$$oQ = pQ\cos\varphi' = R\cos\varphi' = -R\cos\varphi$$

folglich $Do = DQ + Qo = r - R\cos\varphi$

und da $po = R\sin\varphi' = R\sin\varphi$

so ist $r - R\cos\varphi = R\sin\varphi \cdot tg\angle opD$

woraus $tg\angle opD = \frac{r - R\cos\varphi}{R\sin\varphi}$

$\angle opD$ ist also $= \alpha$ und die mit pD gezogene Parallele lK die für l verlangte Normale.

4. Die Subtangente für den Punkt l (wie MS für L, Fig. 543) erhält man aus Formel 1, pag. 185

$$y : \frac{\partial y}{\partial x} = (r\varphi - R\sin\varphi) : \frac{r - R\cos\varphi}{R\sin\varphi} = \frac{R\sin\varphi\,(r\varphi - R\sin\varphi)}{r - R\cos\varphi} \quad (7)$$

Die Tangente für l (LS für L Fig. 543) aus Formel 3, pag. 185

$$\frac{y}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} = \frac{r\varphi - R\sin\varphi}{r - R\cos\varphi}\sqrt{r^2 + R(R - 2r\cos\varphi)} \quad (8)$$

Die Subnormale für l (RM für L Fig. 543) aus Formel 4, pag. 185

$$y \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = (r\varphi - R\sin\varphi)\frac{r - R\cos\varphi}{R\sin\varphi} \quad (9)$$

Die Normale für l (LR für L, Fig. 543) aus Formel 5, pag. 185

$$y\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} = \frac{r\varphi - R\sin\varphi}{R\sin\varphi}\sqrt{r^2 + R(R-2r\cos\varphi)} \tag{10}$$

5. Die Länge des Krümmungshalbmessers in der Normale erhält man, nach pag. 188, Formel 9, wenn man wie im vor. Art. No. 6 verfährt:

Es ist $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{r - R\cos\varphi}{R\sin\varphi}$

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = R\sin\varphi \qquad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = r - R\cos\varphi$$

also $\frac{\partial^2 x}{\partial \varphi^2} = R\cos\varphi$

und $\frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2} = R\sin\varphi$

daher $$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{R\sin\varphi \cdot R\sin\varphi - (r - R\cos\varphi)R\cos\varphi}{R^3\sin^3\varphi} = \frac{R - r\cos\varphi}{R^2\sin^3\varphi}$$

und $$\varrho = \frac{\left[1+\left(\frac{r-R\cos\varphi}{R\sin\varphi}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{R - r\cos\varphi}{R^2\sin^3\varphi}\right)} = \frac{(R^2+r^2-2rR\cos\varphi)^{\frac{3}{2}}}{R(R-r\cos\varphi)} \tag{11}$$

6. Aus No. 3 hat man für $\varphi = 0$,

$$\frac{\partial y}{\partial x} = tg\,\alpha = \frac{r - R\cos 0}{R\sin 0} = \infty$$

mithin ist $\alpha = \angle lkA = 90^\circ$ und die Normale für a liegt in der lothrechten aN. Nun ist für $\varphi = 0$

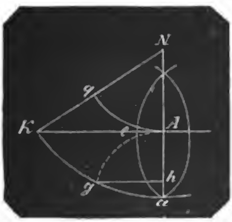
$$\varrho = \frac{(R^2+r^2-2rR)^{\frac{3}{2}}}{R(R-r)} = \frac{(R-r)^2}{R} \tag{12}$$

Der Punkt A hatte keinen Krümmungskreis, wohl aber der Punkt a, und da aus Formel 12

$$2R : R - r = R - r : \tfrac{1}{2}\varrho$$

so erhält man dessen Halbmesser, wenn man aus N mit $Na = R$ den Kreisbogen ag beschreibt, aus a mit $Aa = (R - r)$ den Bogen Ag zeichnet, das Loth gh fällt

Fig. 547.



und ah doppelt nimmt, wo dann $2ah$ der Halbmesser des Krümmungskreises ist.

Für $\varphi = \pi$ also für den Scheitelpunkt c, Fig. 546 wird

$$\varrho = \frac{(R^2+r^2+2rR)^{\frac{3}{2}}}{R(R+r)} = \frac{(R+r)^2}{R}$$

und da mithin $2R : R + r = R + r : \frac{1}{2}\varrho$ so beschreibe aus c mit $cD = R + r$ den Bogen DS, fälle das Loth SU so ist cU der halbe Krümmungshalbmesser für den Scheitel c. Für $R = r$ wird $\varrho = 4r$, wie im vor. Art. No. 6 schon nachgewiesen worden. Schreibt man $R = r + k$ so erhält man

$$\varrho = \frac{(2r+k)^2}{r+k} = 4r + \frac{k^2}{r+k}$$

es ist also bei der verkürzten C. der Krümmungshalbmesser immer gröfser als bei der gemeinen C.

7. Man erhält aus Formel 2 für y

$$\frac{\partial y}{\partial \varphi} = r - R\cos\varphi = 0$$

woraus für $-y$ als Maximum $\cos\varphi = \frac{r}{R}$

Setzt man diesen Werth von φ in Formel 1, so erhält man

$$x = R - R \cdot \frac{r}{R} = R - r = aA$$

Es liegt mithin das Maximum von $-y$ immer in der Basis AB.

Nun hat man $-y = -r\varphi + R\sin\varphi$

Zeichnet man daher Fig. 547 aus N den Bogen ak, zieht NK, so ist $\angle aNK = \varphi$ dessen Einheitsbogen $= arc\left(\cos\frac{r}{R}\right)$ ist. Zeichnet man noch Bogen Aq, so ist $Aq = r\varphi$, $KA = R\sin\varphi$ und

$$-y = Ae = KA - \text{Bogen } Aq.$$

Daher liegt auch die Normale für e in der Basis AB, wie schon in No. 4 die Formel

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{r - R\cos\varphi}{R\sin\varphi} = \frac{r - R\cdot\frac{r}{R}}{R\sin\varphi} = 0 = tg\,\alpha$$

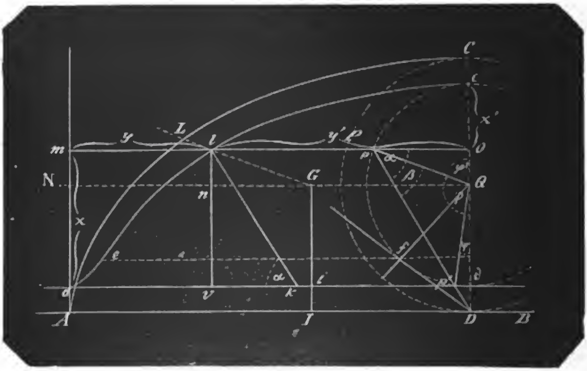
nachweist, indem $tg\,\alpha = 0$ und $\alpha = 0$ wird.

Den Krümmungshalbmesser für e erhält man aus Formel 11

$$\varrho = \frac{\left(R^2 + r^2 - 2Rr\cdot\frac{r}{R}\right)^{\frac{3}{2}}}{R\left(R - r\cdot\frac{r}{R}\right)} = \sqrt{R^2 - r^2}$$

der Krümmungshalbmesser ϱ für den Punkt e ist also die Länge Ak.

Fig. 548.



II. Die gestreckte Cycloide. Bei derselben Bezeichnung wie Fig. 546 ist AB die Basis der gemeinen C., CD der Durchmesser des Erzeugungskreises in der Axe, Q dessen Mittelpunkt, ALC die Cycloide, alc die gestreckte C. Setzt man nun den Halbmesser QC des Erzeugungskreises $= r$, den Abstand cQ des beschreibenden Punkts c vom Mittelpunkt $Q = r_1$, setzt ferner, wie No. 1, für den Punkt l, $am = x$, $ml = y$, verlängert y bis o, setzt $co = x_1$, $ol = y_1$, zieht den Halbmesser QP, setzt $\angle PQC = \varphi_1$, so gehören die Bogen cl und CL zu φ_1 und die Bogen al und AL zu dem $\angle lGi = \angle PQD = \varphi = \pi - \varphi_1$ (vergl. verkürzte C. No. 1 bis 7).

Nun ist

$$x = lv = vn + ln = r_1 + lG\cos\varphi_1 = r_1 - r_1\cos\varphi \qquad (1)$$

$$y = lm = AJ - vi = \text{Bogen } DP - Gn$$
$$= r\varphi - r_1\sin\varphi_1 = r\varphi - r_1\sin\varphi \qquad (2)$$

$$x_1 = r_1 - r_1\cos\varphi_1 \qquad (3)$$

$$y_1 = r\varphi_1 + r_1\sin\varphi_1 \qquad (4)$$

hieraus ist

$$\cos\varphi = \frac{r_1 - x}{r_1};\; \cos\varphi_1 = \frac{r_1 - x_1}{r_1}$$

$$\sin\varphi = \sqrt{1 - \cos^2\varphi} = \frac{\sqrt{2r_1x - x^2}}{r_1}$$

$$\sin\varphi_1 = \frac{\sqrt{2r_1x_1 - x_1^2}}{r_1}$$

$$\varphi = Arc\left(\cos = \frac{r_1 - x}{r_1}\right)$$

$$\varphi_1 = Arc\left(\cos = \frac{r_1 - x_1}{r_1}\right)$$

$$y = R\,arc\left(\cos = \frac{r_1 - x}{r_1}\right) - \sqrt{2r_1x - x^2} \qquad (5)$$

$$y_1 = R\,arc\left(\cos = \frac{r_1 - x_1}{r_1}\right) + \sqrt{2r_1x_1 = x_1^2} \qquad (6)$$

2. Gleichung 2 ist $y = r\varphi - r_1\sin\varphi$ Für $y = 0$ entsteht $\varphi = 0$ und $r_1\sin\varphi = r\varphi$.

Nun ist aber $\sin\varphi$ immer kleiner als φ, also $r_1\sin\varphi < r_1\varphi$, also noch vielmehr $r_1\sin\varphi < r\varphi$. Es ist also $\sin\varphi = r\varphi$ nicht möglich und es existirt allein für $\varphi = 0$ und für das einzige $x = 0$ die Ordinate $= 0$ wie auch der Form der Curve entspricht. Eben so existirt kein negatives y weil $r_1\sin\varphi <$ bleibt als $r\varphi$.

3. Wenn man in No 3 r mit r_1 vertauscht, so erhält man

$$\frac{\partial y}{\partial x} = tg\,\alpha = \frac{r - r_1\cos\varphi}{r_1\sin\varphi} \qquad (7)$$

Zur Construction der Normale für l hat man nun

$$DQ = r_1\; Qo = pQ\cos\varphi_1 = -\,r_1\cos\varphi$$

daher $Do = r - r_1 \cos\varphi$

$po = r_1 \sin\varphi$

$po\, tg \angle opD = Do = r - r_1 \cos\varphi$

folglich $tg\,\alpha = \frac{r - r_1 \cos\varphi}{r_1 \sin\varphi} = tg \angle opD$

und $\angle opD = \alpha$

Zieht man daher durch l die mit pD parallele lk, so ist diese die Normale in l.

Da die Linie pD den Kreis cpd in noch einem Punkt p' schneidet, so existirt noch ein zweiter Punkt in der C., deren Normale mit pD und lk ∦ ist, und man erhält denselben, wenn man aus p' mit AB bis zur C. eine Parallele zieht. Jeder Punkt der C. von a bis c hat also noch einen ihm correspondirenden Punkt für parallele Normalen und folglich auch für parallele Tangenten.

Nur der Punkt der C. für den die aus D gezeichnete Linie den Kreis dpc berührt, hat eine Normale und eine Tangente, mit denen keine Normale und Tangente eines anderen Punktes der C. ∦ läuft. Man erhält diesen Punkt e wenn man aus dem Berührungspunkt f von Df an dem Kreise dpc mit AB eine Parallele fe bis an die C. zieht.

Der Zusammenhang je zweier für parallele Ordinaten correspondirenden Punkte ist folgender:

Ist $\angle opD$ der Tangentenwinkel α für die Punkte p und p', $\angle pQd = \varphi$ der zu p gehörige, $\angle p'Qd = \psi$ der zu p' gehörige Wälzungswinkel, bezeichnet man ferner $\angle p'pQ = \angle pp'Q$ mit β, so hat man

$$\alpha - \beta = 90^\circ - \varphi' = \varphi - 90^\circ$$

woraus $\beta = 90^\circ + \alpha - \varphi$

auch ist $2\beta = 180^\circ - (\varphi - \psi)$

also $\beta = 90^\circ - \frac{\varphi - \psi}{2}$

beide Werthe für β gleich gesetzt, gibt

$$\alpha - \varphi = -\frac{\varphi - \psi}{2}$$

woraus $\alpha = \frac{\varphi + \psi}{2}$

Hat man also für den zu dem $\angle\varphi$ gehörenden Punkt l den $\angle\alpha$ gefunden, so erhält man $\psi = 2\alpha - \varphi$, und mit diesem $\angle$ den Punkt der C., der mit dem Punkt l parallele Normalen und Tangenten hat. Für den Punkt e hat man $\alpha = \varphi = \psi$ und dieser $\angle$ findet sich aus $r \cos\varphi = r_1$, also $\varphi = arc\left(\cos = \frac{r_1}{r}\right)$

4. Aus Formel 2:

$$y = r\varphi - r_1 \sin\varphi$$

und Formel 7

$$\frac{\partial y}{\partial x} = tg\,\alpha = \frac{r - r_1 \cos\varphi}{r_1 \sin\varphi}$$

erhält man wie No. 5 für die verkürzte C.

Die Subtangente für den Punkt l (wie MS für L, Fig. 543)

$$y : \frac{\partial y}{\partial x} = (r\varphi - r_1 \sin\varphi) : \frac{r - r_1 \cos\varphi}{r_1 \sin\varphi} = \frac{r_1 \sin\varphi\,(r\varphi - r_1 \sin\varphi)}{r - r_1 \cos\varphi} \tag{8}$$

Die Tangente für l (wie LS für L, Fig. 543)

$$\frac{y}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} = \frac{r\varphi - r_1 \sin\varphi}{r - r_1 \cos\varphi} \sqrt{r^2 + r_1 (r_1 - 2r \cos\varphi)} \tag{9}$$

Die Subnormale für l (wie RM für L, Fig. 543)

$$y \frac{\partial y}{\partial x} = (r\varphi - r_1 \sin\varphi) \frac{r - r_1 \cos\varphi}{r_1 \sin\varphi} \tag{10}$$

Die Normale für l (wie LR für L, Fig. 543)

$$y \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} = \frac{r\varphi - r_1 \sin\varphi}{r_1 \sin\varphi} \sqrt{r^2 + r_1 (r_1 - 2r \cos\varphi)} \tag{11}$$

5. Die Länge des Krümmungshalbmessers in der Normale bei demselben Verfahren wie No. 6, und bei Vertauschung von R mit r_1

$$\varrho = \frac{(r_1^2 + r^2 - 2rr_1 \cos\varphi)^{\frac{3}{2}}}{r_1 (r_1 - r \cos\varphi)} \tag{12}$$

6. Auch hier liegt aus denselben Gründen wie No. 7 die Normale für den Punkt a in aN, die Länge von ϱ für a ist $\frac{(r_1 - r)^2}{r_1} = \frac{(r - r_1)^2}{r_1}$

Ist in beiden C. der verkürzten und der gestreckten $R - r = r - r_1$, d. h. ist in beiden der Abstand Cc gleich grofs $= k$, so ist ϱ für a bei der verkürzten C. kleiner als bei der gestreckten C. Beide ϱ verhalten sich wie $r_1 : R$ oder wie $r - k : r + k$.

Für den Scheitel c ist $\varrho = \frac{(r + r_1)^2}{r_1}$

Auch hier für c ist ϱ bei der verkürzten C kleiner als bei der gestreckten C.

die 3 Krümmungshalbmesser für die gemeine, die verkürzte und die gestreckte C. im Scheitel verhalten sich wie

$$4r : \frac{(r+R)^2}{R} : \frac{(r+r')^2}{r}$$

$$= 4r : 4r + \frac{k^2}{r+k} : 4r + \frac{k^2}{r-k}$$

15. Bei der verkürzten C. ist der Nenner in der Formel für $\varrho = R\ (R - r \cos \varphi)$. Da r immer $< R$, also $r \cos \varphi$ erst recht immer $< R$, so hat dieser Nenner stets einen positiven Werth.

Bei der gestreckten C. ist dies nicht der Fall: der Nenner ist $r'(r' - r \cos \varphi)$; es ist $r > r'$ und es kann der Nenner subtractiv werden. Mithin existiren Theile der C., welche gegen die Basis convex sind; der Punkt derselben für $r' = r \cos \varphi$ ist ein Wendungspunkt. Man sieht, dafs dieser Punkt der Punkt e ist, dessen Normale mit der keines anderen Punktes der C. ⫲ läuft und der, wie am Schlufs von No. 3 angegeben, zu $\varphi = arc\left(\cos\frac{r'}{r}\right)$ gehört.

Cyclus, Cykel, Kreislauf, also ein immer wiederkehrender Lauf, auch ein Zeitlauf, oder ein Zeitabschnitt, in welchem bestimmte astronomische Erscheinungen in derselben Reihenfolge wiederkehren. In der Chronologie hat man hauptsächlich 2 Cykel, den Sonnen- und den Mondcykel.

Ersterer, der Sonnencykel begreift die Zeit, nach welcher jeder Wochentag wieder auf denselben Jahrestag fällt, z. B. der Sonntag immer wieder auf den 1, 8, 15... Januar, und so das Jahr und die übrigen Jahre hindurch wie in dem vorangegangenen Cykel. Da das Jahr aus 365 Tagen = $^{365}/_7$ = $52^1/_7$ Wochen, also aus 52 Wochen und einem Tage besteht, so würde der Cykel einen Zeitraum von 7 Jahren umfassen, wenn nicht das je 4to Jahr als Schaltjahr einen Tag mehr hätte, woher der Sonnencykel aus $4 \times 7 = 28$ Jahren besteht.

Der Mondcykel begreift denjenigen Zeitraum, nach welchem die Mondphasen, als der Neumond, immer wieder auf denselben Jahrestag fallen wie in dem vorherigen C, und dieser begreift 19 Jahre. Denn ein synodischer Monat beträgt im Mittel 29 Tage $12^3/_4$ Stunden, das Jahr (das gemeine und das Schaltjahr zusammen) im Mittel $365^1/_4$ Tage, folglich hat man die Verhältnifszahl zwischen Dauer des Jahres und des Monats

$$= \frac{365 \text{ Tage } 6 \text{ Stunden}}{29 \text{ Tage } 12\tfrac{3}{4} \text{ Stunden}} = \frac{365{,}25}{29{,}53125} = \frac{3896}{315}.$$

Um dies Verhältnifs auf die kleinst möglichen und dem Verhältnifs möglichst nahe kommenden Zahlen zu bringen hat man den Bruch

$$= 12 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \left(\frac{1}{16}\right)}}}}}$$

Läfst man $^1/_{16}$ als unbedeutend fort, so hat man den Kettenbruch

$$= 12 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}} = 12 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{5}}} = 12 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{5}{7}} = 12 + \frac{7}{19} = \frac{235}{19}.$$

So dafs 19 Jahre oder 235 synodische Monate einen Mondcykel ausmachen. Die Differenz beider ist an Zeit sehr gering, denn es betragen 19 Jahre zu $365^1/_4$ Tage in Summe 6339 Tage 18 Stunden und 235 Monate zu 29 Tage $12^3/_4$ Stunden sind 6339 Tage und $20^1/_2$ Stunde, so dafs der Unterschied zwischen beiden nur $2^1/_2$ Stunde ausmacht.

So auch kann ein Zeitabschnitt von 4 Jahren, in welchen sich der Bruchtheil des Tages, um welchen die Erde mehr als 365 Tage um die Sonne sich bewegt und der auf 4 Jahre in 3 Gemeinjahren und einem Schaltjahr abgetheilt ist, ein C. genannt werden, weil abgesehen von der noch nicht vollständigen Ausgleichung der Zeit die Erde an jedem Tage der folgenden 4 Jahre wirklich oder die Sonne scheinbar in demselben Ort in der Ekliptik steht.

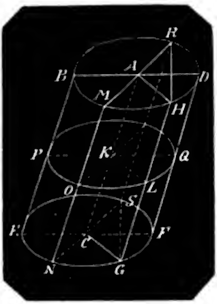
Cylinder ist ein Körper, der von 2 parallelen, gleich grofsen Kreisebenen und einer um diese befindlichen krummen Fläche begrenzt wird, die so beschaffen ist, dafs jede zwischen zweien Umfangspunkten beider Kreise und ⫲ mit der Verbindungslinie der Mittelpunkte derselben gezogene gerade Linie mit allen ihren Punkten innerhalb der krummen

Linie liegt. Die beiden begrenzenden Kreise heifsen Endkreise, Grundkreise des C., die gerade Verbindungslinie der Mittelpunkte beider Kreise heifst die Axe des C., die krumme Oberfläche der Mantel des C. Jede mit der Axe parallele Linie im Mantel heifst eine Seite des C. Steht die Axe auf den Grundkreisen normal, so heifst der C. ein gerader, steht sie geneigt gegen die Grundkreise, so heifst der C. ein schiefer C.

2. Führt man einen mit den Endkreisen parallelen Durchschnitt durch den Cylinder, so ist dieser ein den Endkreisen congruenter Kreis.

Denn es sei *BDEF* der Cylinder, *AC* dessen Axe, *POLQ* eine ∦ mit den Endkreisen genommene Durchschnittsebene, welche die Axe in *K* schneidet. Zieht

Fig. 549.



man nun aus einem Punkt *G* des Umfangs eines der Endkreise eine Parallele *GH* mit der Axe, so liegt diese zufolge der obigen Erklärung mit allen ihren Punkten in dem Mantel des C., und berührt also den zweiten Endkreis und den Durchschnitt in 2 Punkten *H*, *L*, die mit *G* in derselben geraden Linie liegen.

Verbindet man nun die 3 Axenpunkte mit den 3 Umfangspunkten zu den 3 geraden Linien *CG*, *AH*, *KL*, so liegen dieselben zwischen zwei Parallelen *AC* und *GH* also in einerlei Ebene (Eukl. Erkl. 35 und XI, 7), und da sie in 3 mit einander parallelen Ebenen liegen, so sind sie untereinander ∦ (Eukl. XI, 16); nun sind *AH* und *CG* als Halbmesser zweier gleicher Kreise einander gleich, folglich auch *KL* mit ihnen gleich. So läfst sich von jeder von *K* nach dem Umfang des Durchschnitts gezogenen graden Linie beweisen, dafs sie den gleichen Halbmessern der Endkreise gleich ist, folglich sind diese Linien Halbmesser und der Durchschnitt *POLQ* ist ein Kreis.

3. Führt man eine Ebene durch die Axe oder ∦ mit der Axe, so bildet der Durchschnitt dieser Ebene mit dem Cylindermantel ein Parallelogramm.

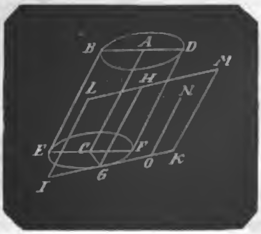
Denn es sei *MNRS* eine durch die Axe *AC* gelegte Ebene, so schneidet diese die beiden Endkreise in 2 geraden Linien *MR* und *NS* die beide in der Durchschnittsebene und zugleich in den parallelen Grundkreisen liegen, folglich einander ∦ und als Durchmesser gleicher Kreise auch einander gleich sind. Führt man nun durch die Endpunkte *N* und *S* des einen Durchmessers 2 gerade Linien ∦ der Axe, so liegen diese in der zu den graden Linien *AC* und *NS* gehörenden Ebene, d. h. in der durch die Axe gelegten Durchschnittsebene und schneidet den Durchmesser *MR* des zweiten Endkreises; da nun beide durch *N* und *S* ∦ *AC* gezogene Linien mit allen ihren Punkten in dem Cylindermantel liegen, so schneiden sie den Durchmesser *MR* in *M* und *R*, das Viereck *MNRS* ist der Durchschnitt der Ebene mit dem Cylinder und ist, da *MN* ∦ *RS* und *MR* ∦ *NS*, ein ⧣.

Ist *HRGS* die ∦ *AC* geführte Durchschnittsebene, so liegen die beiden Durchschnittslinien *HR*, *GS* der Ebene mit den Endkreisen in der Durchschnittsebene und sind einander ∦ weil sie in den parallelen Endebenen liegen; durch *G* und *S* 2 mit *AC* parallele Linien geführt, schneiden die Linie *HR* und da sie gänzlich im Cylindermantel liegen, die *HR* in *H* und *R*. Nun war *HR* ∦ *GS*, *GH* ∦ *AC* ∦ *RS* folglich der Durchschnitt *GHRS* ein ⧣.

4. Wird durch eine Tangente des Grundkreises eines Cylinders eine Ebene ∦ zu dessen Axe gelegt, so hat diese Ebene mit dem Cylindermantel nur eine gerade Linie gemein und ist eine Tangentialfläche des Cylinders.

Denn es sei *JK* eine Tangente in *G* an dem Grundkreise *EFG*, *JLMK* eine durch *JK* mit der Axe *AC* ∦ gelegte Ebene. Legt man nun durch *AC* und den Punkt *G* eine Ebene, so schneidet diese die Ebene *JKLM* in einer mit *AC* parallelen geraden Linie, folglich fallen beide durch *G* gehenden Durchschnittslinien in eine gerade Linie *GH* zusammen, welche sowohl dem Mantel als der Ebene *JKLM* angehört. Jede andere in der Ebene *JKLM* mit *AC* ∦ gezogene Linie, wie z. B. *NO* schneidet die Tan-

Fig. 550.

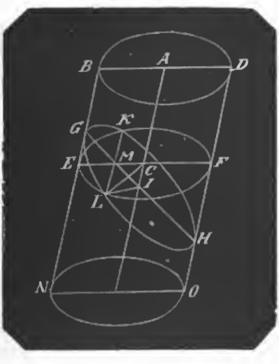


gente JK in einem anderen Punkt als G, den sie mit dem Grundkreise allein gemein hat, folglich liegt jede andere Linie innerhalb $JKML$ und $\# AC$ aufserhalb des Cylindermantels und folglich hat die Ebene $JKLM$ nur die eine grade Linie GH mit dem Cylindermantel gemein und ist eine Tangentialfläche des Cylinders.

5. In jedem schiefen Cylinder gibt es aufser den mit den Endflächen parallelen Durchschnitten noch ein zweites System von parallelen Durchschnitten die mit dem Grundkreise congruente Kreise sind.

Es sei $BDNO$ ein schiefer C., AC seine Axe, die Ebene $BDNO$ durch die Axe und normal auf die Grundkreise gelegt. Zieht man nun in dieser Ebene die grade

Fig. 551.



Linie GH durch den Punkt J der Axe der Art, dafs $\angle GHD = \angle BDH$, dafs also die Linien GH und BD antiparallel sind, und führt durch GH eine auf die Ebene $BDNO$ normale Ebene, so ist deren Durchschnitt $GKHL$ mit dem Cylindermantel ein den Endkreisen congruenter Kreis.

Um dies nachzuweisen, lege man durch irgend einen Punkt z. B. L des Durchschnitts dieser Ebene mit dem Mantel einen den Endkreisen parallelen Kreis $EKFL$, dessen Mittelpunkt sei C, die in der Ebene $BDNO$ befindlichen Durchmesser EF und GH beider Kreise schneiden sich in dem Punkt M und beide Kreisebenen in der durch M gehenden graden Linie LK, welche normal der Ebene $BDNO$ ist, weil es beide Kreisebenen sind,

mithin ist $\angle LMF = \angle LMH = R$
ferner ist $\angle MJC = \angle MHD = \angle BDH$
da nun auch $\angle MCJ = \angle BDH$
so ist $\angle MCJ = \angle MJC$
daher $MC = MJ$

Zieht man also die Linien LC, LJ so sind die beiden bei M rechtwinkligen Dreiecke

$$\triangle LMC \cong \triangle LMJ$$

daher ist auch $LC = LJ$.

Nun ist LC der Halbmesser des Kreises $EKFL$ = dem Halbmesser der Grundkreise und JL ist gerade Verbindungslinie eines Mantelpunkts L mit dem Axenpunkt J, die beide in der Ebene $GKHL$ liegen. Da nun L in dem Umfang der letzten Ebene beliebig gewählt ist, so liegt auch jeder andere Punkt des Durchschnitts zwischen Mantel und Ebene $GKHL$ von dem Durchschnittspunkt J der Ebene mit der Axe um den Halbmesser des Grundkreises entfernt und folglich ist die Durchschnittsebene $GKHL$ ein den Endkreisen congruenter Kreis. Man nennt den Durchschnitt $GKHL$ einen Wechselschnitt.

6. In jedem anderen ebenen Durchschnitt des Mantels, der nicht parallel den Grundkreisen liegt oder ein Wechselschnitt ist, wird von dem Mantel eine Ellipse begrenzt.

Denn ist $\angle DHG$ nicht $= \angle BDH$ so ist auch MC nicht $= MJ$, CF nicht $= JH$ und der Durchmesser EF des Endkreises nicht gleich der Linie $2JG = GH$. Nun ist MK normal auf EF und normal auf GH. Es ist aber in dem Kreise $EKFL$

$$MK^2 = EM \times MF$$

da nun $\triangle MGE \sim \triangle MHF$
so ist $GM : MH = EM : MF$
also auch

$$GM + MH : GM = EM + MF : EM$$

oder $GH : EF = GM : EM$
und da auch $GH : EF = HM : FM$
so ist $GH^2 : EF^2 = GM \cdot HB : EM \cdot FM$

oder $GH^2 : EF^2 = GM \cdot HB : MK^2$

hieraus $MK^2 = GM \cdot HM \times \frac{EF^2}{GH^2}$

oder $MK^2 = GM \times (GH - GM) \times \frac{EF^2}{GH^2}$

Setzt man nun MK als lothrechte Ordinate $= y$, GM als Abscisse $= x$ so hat man die Gleichung

$$y^2 = \frac{EF^2}{GH} x - \frac{EF^2}{GH^2} x^2$$

welches die rechtwinklige Coordinatengleichung für die Ellipse ist.

Für $\angle JHF > \angle BDF$ wird JH die halbe kleine, $JL = CF = AD$ die halbe grofse Axe.

Für $\angle JHF < \angle BDF$ wird JH die halbe grofse, $JL = CF = AD$ die halbe kleine Axe.

Ist $BDON$ ein gerader C., so existirt kein Wechselschnitt und jeder andere als parallel mit den Endkreisen genommene ebene Schnitt durch den Mantel wird eine Ellipse.

7. Der gerade Cylindermantel ist = einem Rechteck, dessen Grundlinie = dem Umfange des Grundkreises und dessen Höhe = der Axe oder einer Seite des Cylinders ist. Ist r der Halbmesser des Grundkreises, h die Länge der Axe, so ist der Cylindermantel $= 2\pi rh$. Denn wenn man sich den Cylindermantel von einer beliebigen Seite aus in eine Ebene abgewickelt denkt, so entsteht das eben angegebene Rechteck.

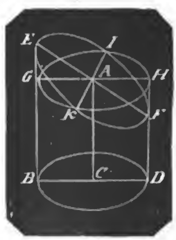
Diesen Satz beweist man ganz streng mit Hülfe der Grenzwerthe: Man beschreibe in dem Grundkreise und um denselben regelmäfsige Vielecke von gleich viel Seiten, von welchen die Ecken des inneren Vielecks auf die Mitten der Seiten des äufseren treffen, oder auch so belegen, dafs je 2 Seiten der beiden Vielecke einander ∦ sind, so ist die Summe der Seiten des inneren Vielecks kleiner und die Summe der Seiten des äufseren Vielecks gröfser als der Umfang des Grundkreises. Zieht man nun aus allen Ecken beider Vielecke Parallelen mit der Axe bis in die Ebene des zweiten Endkreises, verbindet in diesen die Durchschnittspunkte durch gerade Linien, so entstehen in dem zweiten Endkreise zwei den unteren congruente Vielecke; und legt man durch sämmtliche Seitenpaare Ebenen, so entstehen innerhalb und aufserhalb des Cylindermantels so viele Rechtecke als die Vielecke Seiten haben. Die inneren Rechtecke berühren mit ihren Seiten den Mantel, die äufseren sind Tangentialflächen des Mantels.

Die Summe der inneren Rechtecksflächen ist kleiner, die Summe der äufseren ist gröfser als der Cylindermantel. Durch beliebig wiederholte Verdoppelung der Vielecksseiten und der zu ihnen gehörigen Rechtecke wird die Summe der inneren Rechtecksflächen immer gröfser, die der äufseren immer kleiner und man kann deren summarische Gröfsen einander beliebig nahe bringen. Aber immer bleibt der Cylindermantel kleiner als die Summe der äufseren und gröfser als die Summe der inneren Rechtecksflächen, und da zugleich das Rechteck, dessen Grundlinie der Umfang des Grundkreises und dessen Höhe die Axe ist ebenfalls immer kleiner bleibt als die Summe der äufseren und gröfser als die Summe der inneren Rechtecke, so sind diese beiden eingeschlossenen Gröfsen: erstens das Rechteck vom Umfang der Grundfläche mal der Axe und zweitens der Cylindermantel einander gleich.

8. Der Mantel eines schief abgeschnittenen geraden Cylinders ist ebenfalls = dem Rechteck $2\pi rh$, wenn r der Halbmesser des Grundkreises und h die Höhe seiner Axe ist.

Denn ist $BDEF$ der abgekürzte Cylinder, dessen Grundkreis den Halbmesser $BC = r$ hat und dessen Axe $AC = h$ ist, und man legt durch den Endpunkt A der Axe eine Ebene $JGKH$ ∦ dem Grundkreise, ergänzt den rechts befindlichen niedrigeren Theil des Mantels bis zur Durchschnittsebene $JGKH$ um das Stück $JHFK$ so schneidet der dem Grundkreise parallele Kreis $GJHK$ die den C. oben

Fig. 552.



begrenzende Ellipse $EJFK$ in der durch A liegenden geraden Linie JK. Nun ist die Fläche des abgekürzten Cylinders = der Cylinderfläche $GHBD$ + der Huffläche $JKEG$ − der Huffläche $JKFH$. Da aber beide Hufflächen von gleichen Höhen EG und FH und demnach gleich sind, so ist der Mantel des schief abgekürzten geraden C. = dem Mantel $GHBD = 2\pi rh$.

9. Der Mantel eines schiefen C. ist gleich dem Rechteck dessen Grundlinie der Umfang des auf der Axe normal genommenen Ellipse und dessen Höhe die Axe ist. Denn legt man durch die Endpunkte der Axe A, C, Fig. 552, zwei normal auf AC befindliche Ebenen, so werden an beiden Enden 2 halbe Hufflächen gebildet, die einander gleich sind, und von welchen die eine fortgenommen und an dem anderen Ende angesetzt den C. zu einem Körper gestaltet, der zwei gleiche elliptische Grundebenen hat und deren Seiten normal darauf sind.

10. Die gesammte Oberfläche eines geraden Cylinders ist bei obiger Bezeichnung

$$= 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(h + r)$$

also gleich einem Rechteck, dessen eine Seite der Umfang des Grundkreises und dessen andere Seite die Summe des Halbmessers und der Axe ist. Ist die Höhe des C. gleich dem Durchmesser des Grundkreises, so ist der Mantel $= 4\pi r^2$ gleich der Oberfläche einer Kugel von dem Halbmesser r, die also von dem Mantel in allen Punkten ihres gröfsten Kreises berührt wird. Die gesammte Oberfläche dieses Cylinders ist $6\pi r^2 = 1\frac{1}{2}$ mal der Oberfläche der Kugel, welche von dem Mantel und beiden Endflächen berührt wird.

11. Der körperliche Raum eines geraden Cylinders ist gleich dem eines Prisma, welches mit dem C. eine gleich grofse Grundfläche und gleiche Höhe hat.

Denn construirt man in den Endflächen des Cylinders die Vielecke und verfährt weiter wie ad 7, so entstehen in dem C. und um denselben Prismen von gleich viel Seiten, von welchen das äufsere gröfser und das innere kleiner ist als der C. Durch beliebig wiederholte Verdoppelung der in den Endebenen befindlichen Vielecksseiten und mit diesen auch die der Prismenflächen kann man den Unterschied beider beliebig nahe bringen, so dafs derselbe kleiner werden kann als jede noch so klein gegebene körperliche Gröfse, Da nun zwischen den Vielecksspaaren der Endflächen beider Prismen die Grundkreise des Cylinders eingeschlossen sind, so ist auch zwischen beiden Prismen dasjenige Prisma eingeschlossen, dessen Grundebene der Grundkreis des C. und dessen Höhe die Axe des C. ist. Da nun auch der C. zwischen beiden Prismen eingeschlossen bleibt, so ist dieser C. dem eben genannten Prisma gleich.

Bezeichnet man den Halbmesser des Grundkreises mit r, die Höhe des C. mit h, so ist der körperliche Raum K des C. $= \pi r^2 h$. Ist $h = 2r$, so ist $K = 2\pi r^3$. Die von dem Cylinder umgrenzte Kugel ist $K' = \frac{4}{3} r^3 \pi$ folglich verhalten sich Kugel und Cylinder wie $2:3$.

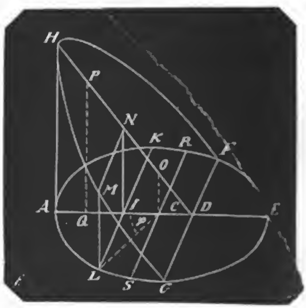
12. Der körperliche Raum K eines schief abgeschnittenen graden C. ist = dem Grundkreise mal der Axe $= \pi r^2 h$.

Denn construirt man Fig. 552 nach No. 8, so ist der Inhalt des schief abgeschnittenen C. = dem geraden Cylinder $GHBD$ + dem Huf $JKEG$ – dem Huf $JKFH$, und da beide Hufe einander gleich sind, K = dem Cylinder $GHBD$ = Grundfläche $BD \times$ Axe $AC = \pi r^2 h$.

Der körperliche Raum K eines schiefen C. ist gleich dem Prisma, welches zur Grundfläche die auf der Axe normale Ellipse und zur Höhe die Axe hat, wie aus No. 8 hervorgeht.

Cylindrischer Hufabschnitt ist das von einer durch den Mantel und den Grundkreis eines Cylinders gelegten Ebene GHF abgeschnittene, zwischen dieser Ebene und dem Grundkreise begriffene Stück $AFGH$ des Cylinders. Der Theil $FAGH$ des Cylindermantels zwischen dem Grundkreise und der Durchschnittsebene heifst die Huffläche.

Fig. 553.



Ist FG die gerade Linie, in welcher die Ebene den Grundkreis schneidet, so ist die durch deren Mitte D normale AE der Durchmesser des Grundkreises, welcher die gröfste Seite, die Höhe AH des Hufabschnitts trifft, $\angle HDA$ ist dessen Neigungswinkel und die Ebene HAD theilt den Hufabschnitt in 2 symmetrisch gleiche Theile. Die Durchnittsebene HFG kann auch durch den Endpunkt E des Durchmessers geführt werden. Trifft sie

den Mittelpunkt C, so wird der Huf auch in der Elementar-Stereometrie untersucht.

2. Um die Huffläche zu finden, nehme man ein beliebiges Stück AJ des Durchmessers AE, ziehe durch J die Linie $KL \mp FG$, so ist die zu J gehörige Seite des Hufabschnitts LM und das zu AL gehörige Hufflächenstück $ALMH$. Errichtet man in J ein Loth auf dem Grundkreis, so trifft dieses die Mittellinie DH in N

und es ist $LM = JN$

und $JN : AH = DJ : DA$ (1)

Setzt man nun den Halbmesser $AC = r$, die Länge AD des Hufes $= a$, dessen Höhe $AH = h$, die beliebige Seite $LM = y$, so ist nach der allgemeinen Quadraturformel, pag. 192, Zusatz, das Flächenstück $AHLM$ von der festen Seite $AH = h$ aus = der Ordinate LM mal dem Differenzial des Bogens AL

setzt man also $AL = v$

so ist $AHLM = F = \int y \, \partial v$

Setzt man nun $CJ = x$

$\angle ACL = \varphi$

so ist, da $JN = LM = y$, aus der Proportion 1:

$y : h = (a - r) + x : a$

woraus

$$y = \frac{h}{a}(a - r + x) = \frac{h}{a}(a - r + r\cos\varphi) \quad (2)$$

$v = r\varphi$ und $\partial v = r\,\partial\varphi$

Es ist aber wenn man $\cos\varphi = z$ setzt

$$\partial\varphi = -\frac{\partial z}{\sqrt{1 - z^2}}$$

daher

$$F = -\int \frac{h}{a} \frac{a - r + rz}{\sqrt{1 - z^2}} r \cdot \partial z \quad (3)$$

$$= -\frac{hr}{a}(a - r)\frac{\partial z}{\sqrt{1 - z^2}} - \frac{hr^2}{a}\int \frac{z\,\partial z}{\sqrt{1 - z^2}}$$

$$= -\frac{hr}{a}(a - r) \operatorname{Arc\,sin} z + \frac{hr^2}{a}\sqrt{1 - zz}$$

Setzt man für z seinen Werth $\cos\varphi$, so erhält man

$$F = -\frac{hr}{a}(a - r) \operatorname{Arc}(\sin = \cos\varphi) + \frac{hr^2}{a}\sqrt{1 - \cos^2\varphi}$$

$$= -\frac{hr}{a}(a - r)\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) + \frac{hr^2}{a}\sin\varphi + C$$

Für $\varphi = 0$ wird $F = 0$.

Man hat demnach

$$F = 0 = -\frac{hr}{a}(a - r)\frac{\pi}{2} + 0 + C$$

woraus

$$C = +\frac{hr}{a}(a - r)\frac{\pi}{2}$$

also vollständig

$$F = +\frac{hr}{a}(a - r)\varphi + \frac{hr^2}{a}\sin\varphi \quad (4)$$

Nun ist $r\varphi$ = Bogen AL

$\frac{h \cdot (a - r)}{a}$ ist das Loth CO

$r \sin\varphi$ ist $= JL$

und $\frac{hr}{a}$ ist das Loth QP

wenn $AQ = CJ$ genommen wird.

Das Flächenstück $AHML$ ist also = den beiden Rechtecken

$CO \times$ Bogen $AL + JL \times QP$

Für $r\cos\varphi = -(a - r)$, also für $\varphi = \operatorname{arc}\left(\cos = -\frac{a - r}{r}\right)$ entsteht die ganze Huffläche $AHLMG$

$$F = \frac{hr}{a}(a - r) \operatorname{arc}\left(\cos = -\frac{a - r}{r}\right) + \frac{hr^2}{a} \sin \operatorname{arc}\left(\cos = -\frac{a - r}{r}\right)$$

$$= \frac{hr}{a}(a - r) \operatorname{arc}\left(\cos - \frac{a - r}{r}\right) + \frac{hr}{a}\sqrt{2ar - a^2}$$

= den beiden Rechtecken $CO \times$ Bogen $AG + QP \times DG$.

Für $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ erhält man die halbe Huffläche $HAMLG$ aus 4

$$F' = \frac{hr}{a}(a - r)\frac{\pi}{2} + \frac{hr^2}{a} \quad (5)$$

also = den beiden Rechtecken $CO \times$ Bogen $AG + PQ \times AC$

3. Nimmt man in Formel 4 für F die Länge $a = r$, so erhält man die Huffläche $AHLM$, wenn FG durch C in RS gelegt wird.

$F = hr \sin\varphi$

= dem Rechteck $JL \times AH$ (6)

und wenn man $\varphi = \frac{\pi}{2}$ setzt, die halbe Huffläche von HA bis S

$F' = h \cdot r$

= dem Rechteck $AH \times AC$

= dem doppelten $\triangle AHC$ (7)

4. Das Körperstück zwischen der Höhe *AH* und der Ebene *MNJL* erhält man nach der allgemeinen Cubaturformel

$$K = \int JL \times LM \cdot \partial AJ$$

Wenn man also $AJ = x$ setzt, so hat man

$$x = r - r\cos\varphi$$
$$\partial x = + r\sin\varphi\,\partial\varphi$$
$$JL = r\sin\varphi$$
$$LM = \frac{h}{a}\,DJ = \frac{h}{a}(a - x)$$

und

$$K = \int_{0}^{\varphi} r\sin\varphi \cdot \frac{h}{a}(a - r + r\cos\varphi)\,r\sin\varphi\,\partial\varphi$$
$$= \frac{r^2h}{a}\int\sin^2\varphi\,(a - r + r\cos\varphi)\,\partial\varphi$$
$$= \frac{r^2h}{a}(a-r)\int_{0}^{\varphi}\sin^2\varphi\,\partial\varphi + \frac{r^3h}{a}\int_{0}^{\varphi}\sin^2\varphi\cos\varphi\,\partial\varphi$$

Nun ist $\int\sin^2\varphi\,\partial\varphi = \frac{1}{2}(\varphi - \sin\varphi\cos\varphi)$

$$\int\sin^2\varphi\cdot\cos\varphi\cdot\partial\varphi = \int\sin^2\varphi\,(\partial\sin\varphi)$$
$$= \frac{1}{3}\sin^3\varphi$$

also vollständig, weil Const. = 0 wird

$$K = \frac{r^2h}{2a}(a - r)(\varphi - \sin\varphi\cos\varphi) + \frac{r^3h}{3a}\sin^3\varphi \qquad (8)$$

Für $r\cos\varphi = -(a - r)$, also für $\varphi = arc\cdot\left(\cos - \frac{a-r}{r}\right)$ entsteht der Körper

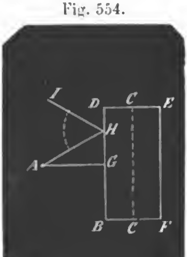
$$HAGD = \frac{r^2h}{2a}(a-r)\left[arc\left(\cos - \frac{a-r}{r}\right) - \frac{a-r}{r}\sqrt{1-\left(\frac{a-r}{r}\right)^2}\right] + \frac{r^3h}{3a}\left(\sqrt{1-\left(\frac{a-r}{r}\right)^2}\right)^3$$
$$= \frac{r^2h}{2a}(a-r)\,arc\left(\cos - \frac{a-r}{r}\right) - \frac{h}{2a}(a-r)^2\sqrt{2ar - a^2} + \frac{h}{3a}(2ar - a^2)^{\frac{3}{2}}$$
$$= \frac{r^2h}{2a}(a-r)\,arc\left(\cos = -\frac{a-r}{r}\right) + \frac{h}{6a}(10ar - 5a^2 - 3r^2)\sqrt{2ar - a^2} \qquad (9)$$

Setzt man $a = r$, so erhält man den körperlichen Raum des Hufabschnitts, wenn man die Ebene *HGF* durch *SR* führt, und es ist statt Formel 8 der Körper von *AH* bis $LMNJ = \frac{1}{3}r^2h\sin^3\varphi$

Für $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ entsteht der halbe Hufabschnitt von *AH* bis $SR = \frac{1}{3}r^2h$ (10) d. h. = derjenigen Pyramide, welche das Quadrat des Halbmessers zur Grundfläche und die Höhe $AH = h$ zur Höhe hat.

Cylinderspiegel ist ein Spiegel mit cylindrischer Oberfläche. Die Gesetze der Spiegelung sind dieselben wie beim ebenen Spiegel, wenn man den Punkt, der einen Lichtstrahl aufnimmt als den Punkt einer den Spiegel tangirenden Ebene betrachtet.

Fig. 554.



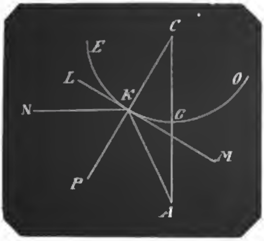
Es sei Fig. 554 der Durchschnitt eines C. durch die Axe *CC*, also *BD* eine Seite des *C.*, so kehren diejenigen Lichtstrahlen in sich selbst zurück, die normal auf eine Seite des C. fallen. So z. B. tritt das Bild von *A* nach *G* in *GA* zurück: der Lichtstrahl *AH* dagegen reflectirt in die Linie *HJ*, wenn $\angle JHD = \angle BHA$.

Ist also *A* das Auge, so empfängt es in *H* das Bild von *J*, alle innerhalb des Winkels *JHA* begriffenen Gegenstände werden in der Linie *GH* gesehen, und die Gegenstände werden um so mehr verkleinert, je weiter sie innerhalb des $\angle JHA$ von *DB* zurückliegen.

Ist Fig. 555 ein normal auf die Axe *CC* genommene Querschnitt des C., so kehrt jeder Lichtstrahl in sich selbst zurück, der auf die Axe fällt; so kehrt der Strahl *AG* nach *GA*, der Strahl *PK* nach *KP* zurück. Der Strahl *AK* reflectirt nach *KN* wenn *LM* in *K* die Tangente an *EKO* und wenn $\angle LKN = \angle MKA$ ist. Ist *A* das Auge, so empfänpt es in *K* das Bild von *N*, und alle Gegenstände, die innerhalb des $\angle NKA$ liegen, werden auf dem Bogen *GK* abgebildet und um so mehr verkleinert, je weiter sie von dem C. zurück liegen.

Wenn man einen mit dem C. genau gleichen Holzcylinder abdreht, diesen mit Papier überzieht und darauf ein richtiges Bild zeichnet, so kann man mit Hülfe beliebig anzulegender Tangentialebenen

Fig. 555.



und Winkelabnahmen ein Zerrbild verzeichnen, welches in bestimmter Entfernung vor dem C. gehalten von diesem in dem verzeichneten richtigen Bilde zurückgeworfen wird.

Cylindroid heifst ein Körper, der 2 parallele congruente Grundebenen hat, deren Umfänge andere krumme Linien als Kreise sind, und um welche eben so ein Mantel von übrigens denselben Eigenschaften wie bei dem Cylinder gelegt wird.

Da man durch einen Cylinder parallele Durchschnittsebenen führen kann, welche Ellipsen sind, so kann man ein Cylindroid mit elliptischen Grundflächen in einen Cylinder verwandeln, wenn man in den Mittelpunkten der Endflächen durch die grofsen Axen Ebenen legt, welche Halbkreise werden und wenn man den abgeschnittenen halben Huf jeder Endfläche gegen den der anderen legt, oder wenn man jeden abgeschnittenen halben Huf um die grofse Axe um 180° herumdreht, wo er dann gegen den verbliebenen halben Grundkreis sich legt und das fehlende Stück der neuen Grundebene ergänzt.

D.

Dämmerung s. astronomische Dämmerung.

Dämmerungskreis s. astronomische Dämmerung.

Dampf ist ein Körper in dem Zustande der Luftförmigkeit, in welchen er aus dem flüssigen Zustande übergegangen ist ohne dafs er in seiner chemischen Beschaffenheit eine Aenderung erfahren hat. Die Ursache der Aenderung des Aggregatzustandes (s. d.) ist allein die Wärme, welche der Flüssigkeit zur Dampfbildung zugeführt werden mufs, so dafs Dampf nichts anderes ist als Flüssigkeit + Wärme.

Die Aenderung einer Flüssigkeit in Dampf geschieht unter allen Temperaturen und ein Minimum von Wärme, als zur Dampfbildung nothwendig, ist noch nicht ermittelt worden — auch Eis bei grofser Kälte verdampft —.

Der Dampf hat (bis auf eine Grenze der Compressionsfähigkeit, welche man permanenten Gasen noch nicht hat nachweisen können) alle Eigenschaften der Gase: Er ist durchsichtig, in einem Gefäfs eingeschlossen überall gleich dicht, gleich elastisch, er übt auf jedes gleich grofse Flächenstück der Wandung einen gleich grofsen Druck aus und hat somit das Bestreben der Ausdehnsamkeit, dessen Grenze noch nicht ermittelt ist.

2. Der Dampf ist also ein Produckt aus Flüssigkeit (F) und Wärme (W) und seine physikalischen Eigenschaften sind daher nur abhängig von der Natur der F aus der er entnommen ist, und hiernächst von den Mengen von F und von W, aus welchen er besteht.

Auf die Entwickelung des D haben aufserdem noch die mechanischen Wirkungen anderer Stoffe und Kräfte Einflufs, als besonders die atmosphärische Luft durch Druck und Bewegung. Nimmt man diese fremdartigen Einflüsse hinfort, setzt man z. B. über ein Gefäfs mit F eine Glocke, die mit ihren Rändern eintaucht, also hermetisch und man evacuirt, so ergeben sich folgende Erscheinungen:

Bei einem bestimmten thermometrischen Wärmegrade (T) hat der Dampf eine ganz bestimmte Dichtigkeit (D); d. h. ist v das Volumen der F in tropfbarem Zustande, welche in Dampfgestalt innerhalb der Glocke von dem Volumen V sich befindet, so ist $\frac{v}{V}$, die Dichtigkeit des Dampfes (die tropfbare F als Einheit genommen) constant.

Bei Vermehrung von T nimmt die Glocke mehr F als Dampf in sich auf. v, und mit v die Dichtigkeit $\frac{v}{V}$ des Dampfes wird gröfser und um so gröfser je gröfser man T werden läfst.

Da der Glockenraum die F zur Unterlage hat und der Dampf nur eine ganz bestimmte Menge v und nicht mehr aus der F entnimmt, so nennt man den Dampf gesättigt, man sagt: der Dampf ist in seinem gesättigten Zustande.

Erkältet man, d. h. läfst man T abnehmen, so kann der Dampf mit der verminderten W bei seiner Dichtigkeit nicht bestehen, er ist übersättigt und gibt so viel Dampf der F zurück bis er die der verminderten T entsprechende geringere Dichtigkeit, also seinen Sättigungszustand erreicht hat; und diese Zurückgabe des Dampfes an die F geschieht mit fortgesetzter Abkühlung successive bis die F in ihrer anfänglichen Quantität wieder hergestellt ist.

Hat man durch vermehrte *W* die *F* gänzlich verdampft und man vermehrt die *W* noch weiter, so würde der Glockenraum noch mehr *F* als Dampf in sich aufnehmen, wenn noch *F* vorhanden wäre: der Dampf ist ungesättigt und hat nicht die seiner *T* zugehörige gröfste Dichtigkeit.

3. Der Dampf hat das Bestreben sein Volumen zu vergröfsern, d. h sich auszudehnen und die Gröfse des Widerstandes, welcher diesem Bestreben das Gleichgewicht hält, heifst seine Spannung. Diese Spannung (*S*) bei derselben *F* ist abhängig von der *T* und der *D* des Dampfes, und zwar wächst die *S* bei Dampf von einerlei *D* mit der Vergröfserung von *T* und bei Dampf von einerlei *T* mit der Vermehrung der *D*, also wächst *S* überhaupt mit dem Wachsthum von $T \times D$.

Gesättigter Dampf hat bei einerlei *T* auch einerlei *D* und einerlei *S*. Vermehrt man *T* so nimmt der Dampf neue *F* in sich auf, seine *D* wird gröfser und hiermit auch seine *S*. Vermindert man *T* so schlägt ein Theil des Dampfes zu *F* nieder, seine *D* und mit *D* auch seine *S* wird vermindert.

Gesättigter Dampf mit *F* aufser Berührung gebracht und *T* vermehrt bleibt Dampf von derselben *D*, er wird ungesättigter Dampf und seine *S* wird vermehrt. Gesättigter Dampf hat also gegen ungesättigten von einerlei *D* die geringste *S*. Gesättigter Dampf mit *F* aufser Berührung gebracht und bei gleichbleibender *T* das Volumen (*V*) vermehrt wird ungesättigter Dampf von geringerer *D* und geringerer *S* und beides in dem Maafse geringer als *V* vermehrt wird.

Ungesättigter Dampf, also aufser Berührung mit *F*, bei gleichbleibender *T* das Volum vermindert erhält gröfsere *D* und gröfsere *S*. Die Compression bis zu der *D* des Sättigungszustandes fortgesetzt gibt das Maximum von *D* und von *S*: denn eine weitere Compression veranlafst, dafs der Dampf zum Theil zu *F* niedergeschlagen wird, so dafs die *D* und die *S*, welche dem gesättigten Dampfe bei der statthabenden *T* zugehören, dieselben bleiben. Man kann die Compression bei gleichbleibender *T* so weit fortsetzen, dafs der Dampf gänzlich zu *F* wird, ohne dafs sich *D* und *S* bis dahin vermehren. Läfst man mit dem Druck nach, so wird die *F* wieder, und mit fortgesetzter Vermehrung des Raumes immer mehr und mehr derselben zu Dampf und zwar zu Dampf von derjenigen *D* und derjenigen *S*, welche der *D* und der *S* des Sättigungszustandes bei der gleichgebliebenen *T* zugehören. Gesättigter Dampf ist demnach in dem Zustande des Maximums seiner Spannung.

4. Der ungesättigte Dampf also, und nur dieser allein hat die Eigenschaften der Gase und für ihn gelten dieselben Gesetze, welche in den Art.: „Ausflufs der Luft" und „aerostatische Gesetze" vorgetragen sind. Da nun für diese Dämpfe eine niedrigere *T* gehört, um den Sättigungspunkt und das Maximum der Spannung zu erreichen, so betrachtet man ganz richtig die Gase als Dämpfe, die unterhalb des Maximums der Dichtigkeit sich befinden, und welches sie erst bei einer so niedrigen Temperatur erreichen, welche bis jetzt noch nicht hat hervorgebracht werden können.

Die Ansicht hat auch Erfahrungen für sich. Denn wenngleich alle Gase, wie die atmosphärische Luft für permanentexpansibel gegolten haben, so sind doch im J. 1823 von Faraday Gase unter niedriger Temperatur und mit hohem Druck zu tropfbaren Flüssigkeiten comprimirt worden. Z. B. kohlensaures Gas bei 0° C. mit einem Druck von 36 Atmosphären. Erwägt man nun, dafs bei jeder Compression Wärme frei wird, die doch nur in dem comprimirten Körper vorhanden gewesen sein kann, die sich in dem kleineren Raum gesammelt hat und hinaustritt oder hinausgetrieben wird, so kann man annehmen, dafs solche Gase immer nur sehr geringe, in Graden nicht anzugebende Wärmemengen bedürfen, um aus dem tropfbar flüssigen Zustand in den luftförmigen überzugehen und darin zu verbleiben, während andere Stoffe bei wahrnehmbaren also höheren Wärmegraden zu Dampf werden. So verschieden die Wärmemengen bei Verdampfung verschiedener Stoffe unter einerlei Druck, als Wasser, Weingeist, Quecksilber uns bekannt sind, so verschieden hat man sich denn auch die Temperaturen bei Dampfwerdung dieser Gase aus Flüssigkeiten zu denken und so könnten der atmosphärischen Luft und dem Sauerstoff so niedrige Wärmegrade entsprechen, bei welchen sie tropfbar flüssig erscheinen müssen.

Für die Nichtannahme dieser Hypothese kann man Dampf von Gas unterscheiden und sagen: dem Dampfe liegt eine Flüssigkeit als Normalzustand des Körpers zum Grunde aus dem er durch Einflufs

von Wärme zu Dampf geworden ist. Das Gas dagegen ist als luftförmiger Körper in seinem Normalzustand und wird aus diesem entweder gar nicht oder nur durch starkes Zusammendrücken zur Flüssigkeit verändert.

5. Dampf mit Flüssigkeit von einer Temperatur besitzt eine bedeutende Wärmemenge, welche thermometrisch nicht wirkt, welche also von dem Stoff zur Bildung der Dampfform aus der Flüssigkeit chemisch gebunden (verschluckt, absorbirt) wird und daher **gebundene** oder **latente Wärme** heifst. Bei dem Wasserdampf beträgt sie im Mittel 550°C., so dafs Dampf von 100° C., welche das Thermometer anzeigt, eine Wärmemenge von 550° + 100° = 650° wirklich enthält.

Früher wurde aus Versuchen abstrahirt, dafs bei einerlei Stoff die latente Wärme in allen Temperaturen in gleicher Menge vorhanden sei, so dafs Wasserdampf von 200° C. thermometrischer Wärme 200° + 550° = 750°, Dampf von 300° C., 300° + 550° = 850° Wärme enthalten sollte.

Nach den Versuchen von Scharpe, von Clément und Desormes befindet sich in dem Dampf eines jeden flüssigen Stoffs eine unabhängig von seiner Temperatur bestimmte Wärmemenge, von welcher derjenige Theil den das Thermometer nicht anzeigt, latent ist. Die Gesammtwärme im Wasserdampf z. B. ist 650°C., demnach hat

Dampf von	0° C.	Therm. =	650°	latente W,
„ „	100° C.	„ =	550°	„ „
„ „	500° C.	„ =	150°	„ „
„ „	650° C.	„ =	0°	„ „

Wenn nun die latente Wärme Characteristik von Dampf ist, so kann Wasserdampf von 650°C. kein Dampf mehr sein, er kann also nur Wasser sein, oder was vielleicht dasselbe ist, der Dampf mufs die Dichtigkeit des Wassers haben, und es wäre diese Dichtigkeit auch vernunftgemäfs das Maximum der möglichen Dichtigkeit eines Dampfes, nämlich die Dichtigkeit der ihm zu Grunde liegenden Flüssigkeit.

Dampf von − 50° C. hätte nach Obigem 700° C. Wärmemenge und man hat hierbei zu erwägen, dafs die Wärme nicht mit dem thermometrischen 0° beginnt, dafs also obige 650° summarische Wärmemenge diejenige ist, welche das Thermometer von 0° ab mifst, und dafs nach einem Thermometer, welches die Grade bei − 50° C von 0° anfinge, (Fahrenheit) die Wärmemenge im Wasserdampf wirklich mit 700° ausgesprochen werden würde.

Ferner ist ermittelt, dafs die Mengen der latenten Wärme in verschiedenartigen Dämpfen in umgekehrtem Verhältnifs stehen mit deren Dichtigkeiten (diese auf einerlei Gewichtseinheit bezogen), also in umgekehrtem Verhältnifs mit den absoluten Gewichten gleicher Quantitäten Dämpfe bei einerlei Temperatur und derselben Spannung. So z. B. verhalten sich die Dichtigkeiten des Wasser- und des Alkoholdampfes wie 100 : 258 und die Mengen der latenten Wärme sind gefunden worden 550 und 214, welche das Verhältnifs 257 : 100 ergeben.

6. Die Wärme erscheint demnach in dem Dampf mit 2 entgegengesetzten Wirkungen, als positiv und als negativ, oder als anziehende und als abstofsende Kraft. Erstere ist die latente Wärme, welche dem Dampf verbleiben will; letztere die thermometrische, die freie W., die Temperatur als diejenige Kraft, mit welcher die *W* den Dampf verlassen will. Man könnte sich den Erscheinungen nach auch denken, dafs in dem Dampf 2 Wärmestoffe sich befinden, der latente und der thermometrische, die in gleichen Quantitäten sich neutralisiren: Kommt thermometrische *W* hinzu (geschieht Erwärmung), so wird diese von der im Dampf befindlichen latenten *W* angezogen und diese wiederum läfst nun eben so viel der von ihr bis dahin gebunden gewesenen thermometrischen *W* los, die nun frei wird und als Temperatur erscheint.

7. Jede Flüssigkeit, welcher unter einem bestimmten Luftdruck Wärme zugeführt wird, kommt endlich unter stärkerer Ausströmung von Dampf in Wallung, d. i. in siedenden Zustand, und dies geschieht mit dem Wärmegrade, bei welchem der Dampf die Spannung hat, welche dem Luftdruck das Gleichgewicht hält. Auf sehr hohen Bergen kocht die Flüssigkeit bei einer geringeren Temperatur als am Meeresspiegel, weil dort der Luftdruck geringer ist und weil Dampf von geringerer Temperatur genügt um dem geringeren Luftdruck das Gleichgewicht zu halten.

Bei einem mittleren Druck der Atmosphäre von 0,76 ᵐ Barometerstand nimmt das Wasser diejenige Temperatur an, die man mit 100° Celsius bezeichnet, folglich hat Wasserdampf von 100° C. die Spannung der atmosphärischen Luft von 0,76 ᵐ Quecksilbersäule, oder eine Atmosphäre Druckkraft oder von 14 Zollpfund auf den preufsischen □Zoll Grundfläche.

Die Spannungen der Dämpfe wachsen in einem weit höheren Maafse als die zu

denselben gehörigen Temperaturen. Bei der Vermehrung der Temperatur von 100° um $21\frac{1}{2}$° also um etwa $\frac{1}{5}$ wird die Spannung das Doppelte von der bei 100° C., sie ist bei $121\frac{1}{2}$° C. = 2 Atmosphären = 28 Zollpfund auf den □″ Grundfläche; bei $145\frac{1}{7}$° C. schon 4 Atmosphären, bei 172° C. = 8 Atmosphären, bei $203\frac{1}{4}$° C. = 16 Atmosphären u. s. w. und in Verhältnissen, die diesen mehr und weniger nahe kommen, wachsen die Spannungen der Dämpfe anderer Flüssigkeiten ebenfalls.

8. Zwischen dem luftförmigen und dem flüssigen Zustand liegt noch ein Mittelzustand, nämlich der in welchem der Körper noch flüssig ist und doch luftförmig zu sein scheint, indem er in die Atmosphäre sichtbar aufsteigt. Besonders wahrnehmbar ist dies bei dem Wasser, welches als sogenannter Wrasen von der Oberfläche erhitzten Wassers sich in die Luft erhebt; ferner bei den Nebeln, Wolken und anderen Dünsten.

Man kann diesen Zustand sich erklären indem man annimmt, dafs jedes Molekül eine Blase bildet, die aus einem Luftkern besteht, der wärmer und also leichter ist als die umliegende Atmosphäre und der von einer sehr dünnen tropfbar flüssigen Wandung eingeschlossen wird. Das Wasser in diesem Zustandn heifst Wasserrauch, Wasserdunst.

9. Wasserdampf.

Der Wasserdampf ist unter den Dämpfen anderer Stoffe am sorgfältigsten untersucht worden und es sind diese Untersuchungen auch äufserst wichtig: Für Dämpfe unter dem gewöhnlichen Siedepunkt für wissenschaftliche Zwecke, für Dämpfe über dem Siedepunkt für gewerbliche Zwecke.

In Betreff der ersteren sind von der Physik und der Chemie Untersuchungen über die Dichtigkeit und die Elasticität der Dämpfe angestellt worden; in Betreff der letzteren hat die Gefahr der Dampfkessel-Explosionen in allen gewerbreichen Ländern Versuche und Beobachtungen darüber veranlafst und unter diesen sind die wichtigsten die auf Veranlassung der französischen Regierung von Arago, Dulong, Girard und de Prony i. J. 1830 beendigten Versuche, und die auf Dampf von 100° C. Temperatur mit 1 Atmosphäre Spannung bis zu Dampf von 224° C. Temperatur mit 24 Atmosphären Spannung sich erstreckt haben. Hierbei ist zu bemerken, dafs an 2 Thermometern beobachtet wurde, die um kleine Längen differirten (bei dem zuletzt angeführten Versuch um 0,27° C.), und dafs die jedesmalige Spannung der Dämpfe an einer Quecksilbersäule abgelesen wurde, die dann zu Druck in Atmosphären (bei dem letzgedachten Versuch in 23,994 Atmosphären) durch Berechnung ermittelt werden konnte.

Dies zum Verständnifs, dafs es darauf ankam, den Zusammenhang der Temperaturen mit den Spannungen auch für die Fälle zu ermitteln, die zwischen den angestellten Beobachtungen liegen und es sind mit Hülfe einer Reihenfolge von Versuchen und gröfstentheils durch Differenzenrechnung Formeln ermittelt worden, bei deren Anwendung die berechneten Resultate den gemachten Erfahrungen sehr nahe kommen, so dafs man auch auf die nahe Richtigkeit der Zwischenfälle schliefsen kann.

10. Es sind mehrere dieser Formeln zur Anwendung gekommen, die nur auf eine zwischen Grenzen eingeschlossene Reihe von niederen oder hohen Temperaturen annähernd richtige Resultate liefern, aufser dieser Reihe aber von den durch Erfahrung ermittelten Elasticitätsgröfsen bedeutend abweichen; als die Formel von Kämtz:

$$\log E = 2{,}5263393 - 0{,}01907612588\, t - 0{,}00010296015\, t^2 - 0{,}00000004731\, t^3$$

wo E die zur Temperatur t gehörende Elasticität (Spannung) des Dampfes in pariser Zoll Quecksilberhöhe und t in Graden Réaumur bedeutet, wo bei Graden unter 80° R. t positiv, über 80° t negativ genommen wird.

Diese Formel ergab nun für t über 80° erweislich sehr unrichtige Resultate und Kämtz änderte sie in die folgende:

$$\log E = 2{,}5263393 - 0{,}01950230219\, t - 0{,}00007404868\, t^2 + 0{,}0000066252\, t^3 + 0{,}00000000399\, t^4$$

womit aber die höheren Temperaturen mit den französischen Versuchen noch nicht genau übereinstimmen.

Die Formel von Dulong

$$E = (1 + 0{,}7153 \cdot t)^5$$

die ferner corrigirt worden ist in

$$E = (1 + 0{,}719 \cdot t)^{4{,}9987}$$

wo E die Elasticität in Atmosphären zu 0,76 ^{m} Quecksilbersäule und t die Temperatur über 100° C. bedeutet, so aber dafs bei einer Temperatur von 150° C. für $t = 0{,}50$ zu setzen ist, stimmt nach dem Zeugnifs der Akademiker am genauesten von 4 Atmosphären Spannung aufwärts gerechnet.

Die Formel, welche Egen mit der Zusammenstellung der Resultate aus den

oben gedachten pariser Versuchen durch Differenzenrechnung ermittelt hat ist

$$t = 100 + 64{,}29512\, log\, E + 13{,}89479\, log\, ^2E + 2{,}909769\, log\, ^3E + 0{,}1742634\, log\, ^4E$$

E in Atmosphären und *t* in Centesimalgraden verstanden.

11. Die Temperatur, bei welcher das Wasser siedet, ist von dem Luftdruck allein abhängig und der Wärmegrad von 100° C. dabei, rührt allein her von dem Luftdruck = 0,76^{m} Quecksilbersäule. Da also der Siedepunkt theoretisch betrachtet willkührlich zu setzen ist, so gibt es für die Dämpfe unter und über dem Siedepunkt keine in der Natur begründete Scheide, und aus diesem Grunde wird behauptet, dafs eine einzige Formel zu Auffindung der Elasticität von Dampf für alle Temperaturen ohne Ausnahme aufzufinden sein müsse.

Der Schlufs ist ganz richtig unter der Bedingung, dafs die Natur keine hindernden Elemente hinzutreten läfst. Allein in dem Art. „Ausdehnung" ist nachgewiesen, dafs das Wasser gegen Stoffe ähnlicher Art, d. h. gegen Stoffe, die mit dem Wasser dieselben physikalischen Eigenschaften haben, in Hinsicht auf Erscheinungen die nach allgemein geltenden Regeln abstrahirt werden könnten, Abweichungen zeigt, und es ist leicht möglich, dafs dies auch beim Wasser in Dampfform statt findet. Aus diesem Grunde halte ich auch die auf Formeln gegründeten Berechnungen von Elasticitäten von Dämpfen, deren Temperatur über den oben gedachten äufsersten Versuch von 224° C. liegen für unzuverlässig.

12. Es folgt nun zunächst eine Tabelle des Zusammenhangs zwischen Temperatur und Elasticität des Wasserdampfes **aus wirklichen Beobachtungen ermittelt**, welche dazu dienen soll, die in den nachfolgenden Tabellen aus Formeln berechneten Elasticitäten bei gegebenen Temperaturen prüfen zu können. Die hier angegebenen Beobachtungen sind gröfstentheils mit Thermometern nach Réaum. geschehen und die Elasticitäten in pariser Zoll Quecksilbersäule gemessen worden. Die No. 9 gedachten Versuche der pariser Academie sind mit Thermometern nach Celsius geschehen und die Elasticitäten in Millimeter Quecksilberhöhe gemessen worden. Jede Beobachtung gibt die Tabelle in allen 4 Maafsen; und zwar ist gerechnet:

1 par. Zoll = 27,06995 Millimeter
1 Millimeter = 0,0369413 par. Zoll.
1° C. = 0,8° R. und 1° R. = 1,25° C.

Tabelle

des Zusammenhangs der Elasticitäten des Wasserdampfs bei verschiedenen Temperaturen desselben. Nach Beobachtungen.

Temperatur		Elasticität in		Beobachter
– C.°	– R.°	Millim.	par. Zoll	
30,350	24,280	0,271	0,010	Regnault
18,750	15,000	2,436	0,090	„
16,800	13,440	1,083	0,040	„
12,500	10,000	2,436	0,090	Muncke
7,550	6,040	24,363	0,900	Regnault
6,612	5,290	2,734	0,101	Magnus
6,250	5,000	3,411	0,126	Muncke
5,312	4,250	2,731	1,109	Magnus
4,362	3,490	3,248	0,120	Regnault
4,451	3,560	4,277	0,158	Ure
3,637	2,910	3,519	0,130	Magnus
0,000	0,000	0,000	0,000	Robison
—	—	0,000	0,000	Schmidt
—	—	5,289	0,188	Dalton
—	—	4,060	0,150	Southern
—	—	5,062	0,187	Ure
—	—	4,602	0,170	Muncke
—	—	4,602	0,170	Magnus
—	—	4,602	0,170	Regnault

Temperatur		Elasticität		Beobachter
+ C.	+ R.	Millim.	par. Zoll	
3,750	3,000	0,000	0,000	Bétancourt
4,450	3,560	2,545	0,094	Robison
—	—	6,334	0,234	Ure
5,000	4,000	0,541	0,020	Bétancourt
—	—	6,497	0,240	Regnault
5,562	4,450	5,847	0,216	Southern
6,250	5,000	0,541	0,020	Bétancourt
—	—	2,978	0,110	Schmidt
—	—	7,525	0,278	Dalton
—	—	7,471	0,276	Muncke
7,500	6,000	1,353	0,050	Bétancourt
—	—	4,060	0,150	Schmidt
8,050	6,440	8,121	0,300	Magnus
8,750	7,000	1,895	0,070	Bétancourt
9,000	7,200	8,392	0,310	Regnault
9,700	7,760	8,933	0,330	„
10,000	8,000	2,707	0,100	Bétancourt
10,012	8,010	5,089	0,188	Robison
—	—	9,123	0,337	Ure
11,125	8,900	8,879	0,328	Southern
11,250	9,000	3,248	0,120	Bétancourt
11,490	9,192	10,016	0,370	Regnault
11,980	9,584	10,016	0,370	Magnus
12,340	9,872	10,557	0,390	Regnault
12,500	10,000	4,060	0,150	Magnus
—	—	4,060	0,150	Bétancourt
—	—	7,580	0,280	Schmidt
—	—	11,072	0,409	Dalton
—	—	12,100	0,447	Muncke
12,750	10,200	10,828	0,400	Regnault
12,775	10,220	3,790	0,140	Watt
12,800	10,240	10,557	0,390	Ure
13,600	10,880	12,452	0,460	Regnault
13,750	11,000	4,873	0,180	Bétancourt
15,000	12,000	5,955	0,220	„
—	—	10,287	0,380	Schmidt
15,560	12,448	13,264	0,490	Regnault
15,575	12,460	8,879	0,328	Robison
—	—	13,102	0,484	Ure
16,250	13,000	7,309	0,270	Bétancourt
—	—	11,911	0,440	Schmidt
16,688	13,350	13,210	0,488	Southern
17,500	14,000	8,121	0,300	Bétancourt
18,362	14,690	15,998	0,591	Ure
18,750	15,000	9,474	0,350	Bétancourt
—	—	14,888	0,550	Schmidt
—	—	15,971	0,590	Dalton
18,750	15,000	18,272	0,675	Muncke
19,120	15,296	16,242	0,600	Regnault
20,000	16,000	10,828	0,400	Bétancourt
—	—	16,513	0,610	Schmidt
20,170	16,136	17,595	0,650	Regnault
20,510	16,408	17,866	0,660	„
21,138	16,910	13,968	0,516	Robison
—	—	18,434	0,681	Ure
21,250	17,000	12,181	0,450	Bétancourt

Temperatur		Elasticität		Beobachter
+ C.	+ R.	Millim.	par. Zoll	
21,400	17,120	18,949	0,700	Regnault
22,250	17,800	18,543	0,685	Southern
22,500	18,000	14,076	0,520	Bétancourt
—	—	20,573	0,760	Schmidt
22,700	18,160	20,573	0,760	Regnault
23,337	18,670	16,513	0,610	Watt
23,750	19,000	15,701	0,580	Bétancourt
23,850	19,080	22,197	0,820	Magnus
23,925	19,140	21,818	0,806	Ure
24,360	19,480	18,678	0,690	Regnault
25,000	20,000	17,595	0,650	Bétancourt
—	—	24,363	0,900	Schmidt
—	—	23,064	0,852	Dalton
—	—	25,933	0,958	Muncke
25,560	20,448	24,092	0,890	Regnault
26,250	21,000	20,302	0,750	Bétancourt
26,712	21,370	21,717	0,769	Robison
—	—	25,635	0,947	Ure
27,225	21,780	20,302	0,750	Watt
27,500	22,000	22,197	0,820	Bétancourt
—	—	27,341	1,010	Schmidt
27,825	22,260	25,906	0,957	Southern
28,750	23,000	24,363	0,900	Bétancourt
28,800	23,040	29,506	1,090	Regnault
29,487	23,590	29,696	1,097	Ure
30,000	24,000	25,552	0,970	Bétancourt
30,960	24,768	33.567	1,240	Regnault
31,250	25,000	28,423	1,050	Bétancourt
—	—	35,191	1,300	Schmidt
—	—	32,673	1,207	Dalton
32,275	25,820	29,966	1,107	Robison
—	—	34,541	1,276	Ure
32,490	25,992	36,003	1,330	Regnault
32,500	26,000	30,318	1,120	Bétancourt
33,387	26,710	36,057	1,332	Southern
33,620	26,896	32,484	1,200	Regnault
33,750	27,000	33,025	1,220	Bétancourt
33,750	27,000	38.439	1,420	Schmidt
35,000	28,000	32,484	1,200	Watt
—	—	35,732	1,320	Bétancourt
35,050	28,040	41,634	1,538	Ure
36,250	29,000	38,439	1,420	Bétancourt
37,500	30,000	41,146	1,520	„
—	—	52,245	1,930	Schmidt
—	—	46,317	1,711	Dalton
—	—	30,670	1,133	Muncke
37,837	30,270	40,633	1,501	Robison
—	—	47,237	1,745	Ure
38,380	30,704	38,439	1,420	Regnault
38,750	31,000	44,665	1,650	Bétancourt
38,950	31,160	49,782	1,839	Southern
40,000	32,000	43.853	1,620	Watt
—	—	48,185	1,780	Bétancourt
40,612	32,490	53,328	1,970	Ure
41,250	33,000	51,433	1,900	Bétancourt
—	—	60,366	2,230	Schmidt

Temperatur		Elasticität		Beobachter
+ C.	+ R.	Millim.	par. Zoll	
42,500	34,000	54,140	2,000	Bétancourt
42,600	34,080	63,073	2,330	Regnault
43,400	34,720	57,145	2,111	Robison
43,400	34,720	62,369	2,304	Ure
43,660	34,928	66,592	2,460	Regnault
43,750	35,000	58,200	1,150	Bétancourt
—	—	72,547	2,680	Schmidt
—	—	65,377	2,415	Dalton
44,080	35,264	68,216	2,520	Regnault
44,512	35,610	67,567	2,496	Southern
44,900	34,920	71,194	2,630	Magnus
45,000	36,000	61,449	2,270	Bétancourt
45,700	36,560	74,442	2,750	Magnus
46,175	36,940	71,356	2,636	Ure
46,230	36,984	75,796	2,800	Regnault
46,250	37,000	66,321	2,450	Bétancourt
47,160	37,728	80,127	2,960	Regnault
47,500	38,000	69,570	2,570	Bétancourt
47,700	38,160	80,127	2,960	Regnault
47,775	38,220	66,051	2,440	Watt
48,750	39,000	74,442	2,750	Bétancourt
48,962	39,170	76,202	2,815	Robison
—	—	83,879	3,096	Ure
48,990	39,192	87,777	3,240	Regnault
49,540	39,632	87,777	3,240	„
49,700	39,760	90,684	3,350	Regnault
50,000	40,000	79,044	2,920	Bétancourt
—	—	98,535	3,640	Schmidt
—	—	88,627	3,274	Dalton
50,080	40,060	90,928	3,359	Southern
51,220	40,980	97,181	3,590	Regnault
51,250	41,000	83,917	3,100	Bétancourt
51,390	41,110	98,264	3,630	Regnault
51,750	41,400	97,262	3,593	Ure
52,500	42,000	88,519	3,270	Bétancourt
53,340	42,670	101,51	3,750	Watt
53,750	43,000	93,933	3,470	Bétancourt
54,530	43,620	100,32	3,706	Robison
—	—	110,88	4,096	Ure
54,740	43,790	114,51	4,230	Magnus
55,000	44,000	100,16	3,700	Bétancourt
55,640	44,510	119,62	4,419	Southern
56,250	45,000	106,93	3,950	Bétancourt
—	—	139,14	5,140	Schmidt
—	—	120,46	4,450	Dalton
56,810	45,450	128,58	4,750	Regnault
57,230	45,780	114,24	4,220	Watt
57,312	45,850	128,74	4,756	Ure
57,380	45,904	128,58	4,750	Regnault
57,500	46,000	115,05	4,250	Bétancourt
58,370	46,696	137,79	5,090	Regnault
58,680	46,944	139,14	5,140	Magnus
58,750	47,000	120,46	4,450	Bétancourt
60,000	48,000	128,58	4,750	„
60,090	48,072	130,87	4,831	Robison
—	—	146,53	5,413	Ure

Temperatur		Elasticität		Beobachter
+ C.	+ R.	Millim.	par. Zoll	
61,112	48,890	136,97	5,060	Watt
61,200	48,960	154,92	5,723	Southern
61,250	49,000	135,35	5,000	Bétancourt
62,040	49,632	163,50	6,040	Regnault
62,400	49,920	163,50	6,040	„
62,500	50,000	144,82	5,350	Bétancourt
—	—	173,25	6,400	Schmidt
—	—	163,15	6,027	Dalton
62,875	50,300	167,62	6,192	Ure
63,750	51,000	154,30	5,700	Bétancourt
64,450	51,560	162,42	6,000	Watt
65,000	52,000	163,77	6,050	Bétancourt
65,650	52,520	170,68	6,305	Robison
65,650	52,520	191,25	7,065	Ure
65,860	52,688	194,63	7,190	Regnault
66,250	53,000	175,95	6,500	Bétancourt
66,300	53,040	194,63	7,190	Regnault
66,762	53,410	200,69	7,412	Southern
67,225	53,780	185,16	6,840	Watt
67,500	54,000	186,79	6,900	Bétancourt
68,437	54,750	215,88	7,975	Ure
68,750	55,000	198,15	7,320	Bétancourt
—	—	231,45	8,550	Schmidt
—	—	216,21	7,987	Dalton
69,450	55,560	208,98	7,720	Watt
70,000	56,000	212,50	7,850	Bétancourt
71,212	56,970	219,70	8,116	Robison
—	—	243,82	9,007	Ure
71,250	57,000	227,39	8,400	Bétancourt
71,662	57,330	233,07	8,610	Watt
72,337	57,870	255,24	9,429	Southern
72,500	58,000	239,57	8,850	Bétancourt
—	—	274,49	10,140	Schmidt
73,337	58,670	254,46	9,400	Watt
73,750	59,000	253,10	9,350	Bétancourt
—	—	282,07	10,420	Schmidt
74,000	59,200	274,22	10,130	Ure
74,830	59,864	284,78	10,520	Magnus
75,000	60,000	279,36	10,320	Watt
—	—	269,35	9,950	Bétancourt
—	—	297,23	10,980	Schmidt
—	—	284,23	10,500	Dalton
75,180	60,144	291,27	10,760	Regnault
75,530	60,424	291,27	10,760	„
76,250	61,000	281,53	10,400	Bétancourt
76,480	61,184	301,29	11,130	Regnault
76,760	61,408	301,29	11,130	„
76,787	61,430	280,66	10,368	Robison
—	—	306,16	11,310	Ure
77,500	62,000	297,77	11,000	Bétancourt
—	—	331,34	12,240	Schmidt
77,775	62,220	299,66	11,070	Watt
77,900	62,320	323,08	11,935	Southern
78,750	63,000	316,72	11,700	Bétancourt
78,950	63,160	350,29	12,940	Regnault
79,210	63,368	350,29	12,940	„

Temperatur + C.	Temperatur + R.	Elasticität Millim.	Elasticität par. Zoll	Beobachter
79,450	63,560	326,73	12,070	Watt
79,562	63,650	344,87	12,740	Ure
80,000	64,000	335,67	12,400	Bétancourt
80,837	64,670	350,56	12,950	Watt
81,250	65,000	357,32	13,200	Bétancourt
—	—	380,87	14,070	Schmidt
—	—	369,02	13,632	Dalton
81,950	65,560	385,48	14,240	Magnus
82,225	65,780	373,57	13,800	Watt
82,250	65,800	387,10	14,300	Magnus
82,350	65,880	356,84	13,182	Robison
—	—	384,93	14,220	Ure
82,500	66,000	373,57	13,800	Bétancourt
83,462	66,770	406,62	15,021	Southern
83,612	66,890	397,93	14,700	Watt
83,750	67,000	392,51	14,500	Bétancourt
84,900	67,920	432,31	15,970	Regnault
85,000	68,000	421,22	15,560	Watt
—	—	412,82	15,250	Bétancourt
85,110	68,088	432,31	15,970	Regnault
85,125	68,100	429,34	15,860	Ure
—	—	430,96	15,920	Magnus
86,112	68,890	441,24	16,300	Watt
86,250	69,000	435,83	16,100	Bétancourt
86,670	69,336	478,60	17,680	Regnault
86,830	69,464	478,60	17,680	„
87,225	69,780	465,60	17,200	Watt
87,500	70,000	457,48	16,900	Bétancourt
—	—	485,09	17,920	Schmidt
—	—	475,10	17,551	Dalton
87,912	70,330	453,37	16,748	Robison
—	—	482,65	17,830	Ure
88,337	70,670	491,86	18,170	Watt
88,750	71,000	481,84	17,800	Bétancourt
—	—	505,13	18,660	Schmidt
89,025	71,220	509,00	18,803	Southern
89,725	71,780	514,33	19,000	Watt
89,750	71,800	519,47	19,190	Regnault
89,900	71,920	519,47	19,190	„
90,000	72,000	506,21	18,700	Bétancourt
—	—	533,55	19,710	Schmidt
90,687	72,550	535,98	19,800	Ure
90,800	72,640	542,48	20,040	Magnus
91,080	72,864	547,89	20,240	Regnault
91,200	72,960	547,89	20,240	„
91,250	73,000	527,86	19,500	Bétancourt
—	—	557,91	20,610	Schmidt
91,350	73,080	563,05	20,800	Watt
91,810	73,448	543,56	20,080	Magnus
92,500	74,000	557,64	20,600	Bétancourt
—	—	590,12	21,800	Schmidt
93,475	74,780	574,51	21,223	Robison
—	—	599,33	22,140	Ure
93,750	75,000	588,77	21,750	Bétancourt
—	—	603,39	22,290	Schmidt
—	—	605,18	22,356	Dalton

Temperatur		Elasticität		Beobachter
+ C.	+ R.	Millim.	par. Zoll	
94,587	75,670	625,05	23,090	Southern
94,850	75,880	628,56	23,220	Regnault
94,930	75.944	628,56	23,220	„
95,000	76,000	619,90	22,900	Bétancourt
96,250	77,000	653,74	24,150	„
—	—	657,80	24,300	Ure
96,840	77,472	678,10	25,050	Regnault
96,880	77,504	678,10	25,050	„
97,500	78,000	690,28	25,500	Bétancourt
98,750	79,000	721,96	26,670	„
98,900	79,120	736,84	27,220	Magnus
99,037	79,230	727,67	26,881	Robison
—	—	733,60	27,100	Ure
99,580	79,664	749,03	27,670	Regnault
99,600	79,680	749,03	27,670	„
100,000	80,000	757,96	28,000	Bétancourt
—	—	757,96	28,000	Schmidt
—	—	758,34	28,014	Biker
—	—	758,09	28,005	Arzberger
—	—	761,75	28,140	Taylor
—	—	759,88	28,071	Dulong
100,15	80,12	761,64	28,147	Robison
—	—	761,96	28,148	Southern
—	—	762,02	28,150	Ure
100,17	80,14	765,00	28,260	Regnault
100,55	80,44	762,02	28,150	Watt
100,74	80,59	776,10	28,670	Regnault
101,25	81,00	801,27	29,600	Bétancourt
101,25	81,00	757,96	28,000	Schmidt
101,66	81,33	795,32	29,380	Watt
102,50	82,00	847,29	31,300	Bétancourt
—	—	840,52	31,050	Schmidt
102,71	82,17	848,37	31,340	Ure
102,78	82,22	810,75	29,950	Watt
103,75	83,00	893,31	33,000	Bétancourt
—	—	881,40	32,560	Schmidt
103,89	83,11	832,40	30,750	Watt
104,60	83,68	909,25	33,589	Robison
—	—	902,78	33,350	Ure
104,68	83,74	903,87	33,390	Magnus
104,73	83,78	862,99	31,880	Watt
105,00	84,00	936,62	34,600	Bétancourt
—	—	923,09	34,100	Biker
—	—	919,84	33,980	Schmidt
105,55	84,44	889,25	32,850	Watt
106,00	84,80	932,48	34,447	Christian
106,25	85,00	986,70	36,450	Bétancourt
—	—	962,23	35,546	Biker
—	—	958,01	35,390	Schmidt
106,39	85,11	913,61	33,750	Watt
107,14	85,71	937,97	34,650	„
107,39	85,91	993,20	36,690	Ure
107,50	86,00	1031,4	38,100	Bétancourt
—	—	999,15	36,910	Schmidt
108,06	86,45	965,04	35.650	Watt
108,11	86,49	1018,4	37,620	Ure

Temperatur		Elasticität		Beobachter
+ C.	+ R.	Millim.	par. Zoll	
108,75	87,00	1082,8	40,000	Bétancourt
—	—	1040,0	38,420	Schmidt
108,89	87,11	989,41	36,550	Watt
109,73	87,78	1015,1	37,500	„
110,00	88,00	1142,4	42,200	Bétancourt
—	—	1093,1	40,370	Biker
—	—	1089,3	40,240	Schmidt
—	—	1050,0	38,788	Christian
110,16	88,13	1130,2	41,751	Robison
—	—	1094,7	40,440	Ure
110,44	88,35	1104,7	40,810	„
110,55	88,44	1040,3	38,430	Watt
111,00	88,80	1083,3	40,020	Christian
111,25	89,00	1199,2	44,300	Bétancourt
—	—	1133,1	41,860	Schmidt
—	—	1112,9	41,114	Arzberger
111,39	89,11	1064,7	39,330	Watt
112,00	89,60	1116,7	41,251	Christian
112,20	89,76	1139,8	45,107	Dulong
112,23	89,78	1088,8	40,220	Watt
112,50	90,00	1256,0	46,400	Bétancourt
—	—	1200,2	44,338	Biker
—	—	1184,9	43,770	Schmidt
112,68	90,14	1188,6	43,910	Ure
112,78	90,22	1115,3	41,200	Watt
112,95	90,36	1199,2	44,300	Ure
113,00	90,40	1156,6	42,728	Christian
113,61	90,89	1143,2	42,230	Watt
113,75	91,00	1310,2	48,400	Bétancourt
—	—	1242,2	45,890	Schmidt
114,00	91,20	1206,6	44,205	Christian
114,17	91,34	1168,1	43,150	Watt
114,73	91,78	1191,1	44,000	„
114,90	91,92	1277,7	47,200	Ure
115,00	92,00	1367,0	50,500	Bétancourt
—	—	1299,7	48,011	Biker
—	—	1299,9	48,020	Schmidt
—	—	1230,0	45,436	Christian
115,55	92,44	1243,3	45,930	Watt
115,73	92,58	1394,4	51,510	Robison
—	—	1313,2	48,510	Ure
116,00	92,80	1286,9	47,539	Christian
116,25	93,00	1434,7	53,000	Bétancourt
—	—	1354,3	50,030	Schmidt
—	—	1386,0	51,200	Mayer
116,84	93,47	1354,0	50,290	Ure
116,94	93,55	1270,4	46,930	Watt
117,00	93,60	1326,6	49,007	Christian
117,50	94,00	1497,0	55,300	Bétancourt
—	—	1403,3	51,840	Schmidt
118,00	94,40	1383,2	51,099	Christian
118,06	94,45	1321,3	48,810	Watt
118,51	94,81	1430,9	52,860	Ure
118,75	95,00	1564,6	57,800	Bétancourt
—	—	1466,6	54,180	Schmidt
—	—	1469,6	54,290	Biker

Temperatur		Elasticität		Beobachter
+ C.	+ R.	Millim.	par. Zoll	
119,00	95,20	1426,6	52,699	Christian
119,45	95,56	1369,7	50,600	Watt
120,00	96,00	1637,7	60,500	Bétancourt
—	—	1535,1	56,710	Schmidt
—	—	1532,4	56,608	Biker
—	—	1472,9	54,422	Christian
—	—	1452,0	53,640	Taylor
120,28	96,22	1421,4	52,510	Watt
120,46	96,37	1534,1	56,670	Ure
120,63	96,50	1483,4	54,797	Arzberger
121,00	96,80	1503,2	55,531	Christian
121,13	96,90	1528,9	56,480	Regnault
121,25	97,00	1716,2	63,400	Bétancourt
—	—	1602,0	59,180	Schmidt
121,29	97,03	1696,6	62,675	Robison
—	—	1523,9	56,295	Southern
—	—	1572,2	58,080	Ure
121,39	97,11	1472,6	54,400	Watt
122,00	97,60	1563,4	57,754	Christian
—	—	1519,8	56,143	Taylor
122,25	97,80	1515,9	56,000	Héron de Villefosse
122,50	98,00	1524,0	56,300	Watt
—	—	1792,0	66,200	Bétancourt
—	—	1671,6	61,750	Schmidt
123,00	98,40	1606,5	59,346	Christian
123,70	98,96	1629,5	60,194	Arago
123,75	99,00	1967,8	69,000	Bétancourt
—	—	1740,1	64,280	Schmidt
123,89	99,11	1575,5	58,200	Watt
123,90	99,12	1668,6	61,640	Regnault
124,00	99,20	1659,8	61,316	Christian
124,08	99,26	1708,1	63,100	Ure
125,00	100,00	1626,9	60,100	Watt
—	—	1804,3	66,654	Biker
—	—	1943,6	71,800	Bétancourt
—	—	1813,7	67,000	Schmidt
—	—	1713,1	63,286	Christian
126,00	100,80	1756,5	64,886	〃
126,11	100,89	1676,4	61,930	Watt
126,25	101,00	2030,2	75,000	Bétancourt
—	—	1882,2	69,530	Schmidt
126,85	101,48	2039,5	75,341	Robison
126,86	101,49	1836,4	67,840	Ure
127,00	101,60	1823,1	67,348	Christian
127,23	101,78	1727,3	63,810	Watt
127,50	102,00	2116,7	78,200	Bétancourt
—	—	1961,5	72,460	Schmidt
128,00	102,40	1883,1	69,564	Christian
128,06	102,45	1775,8	65,600	Watt
128,47	102,78	1915,2	70,750	Regnault
128,50	102,80	1924,2	71,120	〃
128,75	103,00	2192,7	81,000	Bétancourt
—	—	2038,1	75,290	Schmidt
129,00	103,20	1949,7	72,026	Christian
—	—	1899,7	70,178	Taylor
129,18	103,34	1824,5	67,400	Watt

Temperatur		Elasticität		Beobachter
+ C.	+ R.	Millim.	par. Zoll	
129,64	103,71	1982,1	73,220	Ure
130,00	104,00	2273,9	84,000	Bétancourt
—	—	2117,8	78,220	Schmidt
—	—	2092,0	77,280	Biker
—	—	2013,7	74,390	Christian
—	—	1959,1	72,370	Taylor
130,28	104,22	1875,9	69,300	Watt
131,00	104,80	2066,4	76,334	Christian
131,11	104,89	1927,7	71,210	Watt
131,25	105,00	2349,8	86,800	Bétancourt
—	—	2191,3	80,950	Schmidt
—	—	2169,1	80,130	Biker
—	—	2198,1	81,200	Mayer
131,95	105,56	1978,8	73,100	Watt
132,00	105,60	2159,7	79,782	Christian
132,43	105,94	2390,0	88,289	Robison
—	—	2191,9	80,970	Ure
132,50	106,00	2409,2	89,000	Bétancourt
—	—	2300,7	84,990	Schmidt
132,78	106,22	2030,2	75,000	Watt
132,82	106,25	2176,7	80,410	Arago
133,00	106,40	2249,6	83,105	Christian
133,30	106,64	2181,6	80,591	Arago
133,32	106,66	2209,2	81,610	Regnault
133,61	106,89	2080,9	76,870	Watt
133,75	107,00	2471,5	91,300	Bétancourt
—	—	2388,1	88,220	Schmidt
134,00	107,20	2323,0	85,813	Christian
134,38	107,50	2223,8	82,151	Arzberger
135,00	108,00	2531,0	93,500	Bétancourt
—	—	2492,1	92,060	Schmidt
—	—	2479,1	91,580	Biker
—	—	2389,6	88,275	Christian
—	—	2279,7	84,214	Dulong
135,20	108,16	2375,4	87,750	Ure
135,68	108,54	2371,6	87,610	Regnault
136,00	108,80	2479,6	91,598	Christian
136,25	109,00	2587,9	95,600	Bétancourt
—	—	2604,1	96,200	Schmidt
137,00	109,60	2545,4	94,029	Christian
137,50	110,00	2652,9	98,000	Bétancourt
—	—	2726,5	100,720	Schmidt
137,99	110,39	2689,7	99,360	Robison
—	—	2588,2	95,610	Ure
138,00	110,40	2639,5	97,507	Christian
138,30	110,64	2538,6	93,779	Arago
—	—	2561,9	94,640	Regnault
133,75	111,00	2824,7	104,350	Schmidt
138,88	111,10	2273,9	84,000	Héron de Villefosse
138,89	111,11	2599,3	96,020	Regnault
139,00	111,20	2709,4	100,090	Christian
140,00	112,00	2955,5	109,180	Schmidt
—	—	2779,5	102,680	Christian
—	—	2636,1	97,380	Taylor
140,45	112,36	2659,6	98,250	Dulong
140,88	112,70	2850,5	105,300	Ure

Temperatur		Elasticität		Beobachter
+ C.	+ R.	Millim.	par. Zoll	
140,93	112,74	2755,2	101,780	Regnault
141,00	112,80	2856,2	105,510	Christian
141,25	113,00	3061,6	113,100	Schmidt
141,46	113,17	2801,2	103,480	Regnault
142,00	113,60	2926,0	108,090	Christian
142,50	114,00	3170,4	117,120	Schmidt
143,00	114,40	3006,1	111,050	Christian
143,55	114,84	3050,8	112,700	Ure
144,00	115,20	3089,5	114,130	Christian
145,00	116,00	3172,9	117,210	"
145,20	116,16	3039,5	112,285	Dulong
145,44	116,35	3047,8	112,590	Southern
145,98	116,78	3163,7	116,870	Regnault
146,00	116,80	3256,0	120,280	Christian
146,33	117,06	3275,5	121,000	Ure
147,00	117,60	3342,6	123,480	Christian
147,48	117,98	3307,4	122,180	Regnault
148,00	118,40	3439,2	127,050	Christian
148,30	118,64	3361,3	124,170	Regnault
149,00	119,20	3525,9	130,250	Christian
149,11	119,29	3548,9	131,100	Ure
149,70	119,76	3475,9	128,404	Arago
150,00	120,00	3625,7	133,940	Christian
—	—	3511,8	129,730	Taylor
—	—	3419,5	126,321	Dulong
151,00	120,80	3729,2	137,760	Christian
151,63	121,30	3031,8	112,000	Héron de Villefosse
151,90	121,52	3686,8	136,195	Arago
—	—	3825,0	141,300	Ure
152,00	121,60	3859,1	142,560	Christian
153,00	122,40	3926,0	145,030	"
153,70	122,96	3881,0	143,369	Arago
154,00	123,20	4025,8	148,720	Christian
—	—	3799,5	140,357	Dulong
154,68	123,74	4095,7	151,300	Ure
155,00	124,00	4149,0	153,270	Christian
155,79	124,63	4222,9	156,000	Ure
156,00	124,80	4252,4	157,090	Christian
157,00	125,60	4362,3	161,150	"
158,00	126,40	4492,5	165,960	"
—	—	4179,4	154,392	Dulong
159,00	127,20	4598,9	169,890	Christian
160,00	128,00	4748,9	175,430	"
—	—	4559,1	168,420	Taylor
161,00	128,80	4613,0	170,410	Christian
161,25	129,00	4445,4	164,220	Arzberger
161,50	129,20	4559,3	168,428	Dulong
162,00	129,60	4780,3	176,590	Christian
163,40	130,72	4938,3	182,427	Arago
163,50	130,80	4937,6	182,401	Christian
164,70	131,76	4939,3	182,464	Dulong
165,00	132,00	5114,9	188,950	Christian
166,00	132,80	5282,2	195,130	"
167,50	134,00	5449,5	201,310	"
168,00	134,40	5616,7	207,490	"
—	—	5319,2	196,500	Dulong

Temperatur		Elasticität		Beobachter
+ C.	+ R.	Millim.	par. Zoll	
168,50	134,80	5605,4	207,071	Arago
169,00	135,20	5784,0	213,670	Christian
169,40	135,52	5773,7	213,288	Arago
170,00	136,00	5951,3	219,850	Christian
170,50	136,40	5699,2	210,535	Dulong
172,34	137,87	6151,0	227,225	Arago
173,00	138,40	6079,1	224,571	Dulong
173,36	138,69	6095,5	225,180	Southern
180,70	144,56	7505,1	277,248	Arago
183,70	146,96	8032,5	296,731	„
187,10	149,68	8699,5	321,371	„
188,50	150,80	8840,0	326,561	„
188,75	151,00	8147,5	300,980	Arzberger
193,70	154,96	9998,9	369,372	Arago
198,50	158,80	11019,0	407,055	„
201,75	161,40	11862,0	438,198	„
204,17	163,34	12290,3	454,020	„
206,10	164,88	12987,2	479,764	„
206,80	165,44	13061,0	482,490	„
207,40	165,92	13127,6	484,950	„
208,90	167,12	13684,3	505,516	„
209,13	167,30	13761,9	508,382	„
210,50	168,40	14063,4	519,520	„
215,30	172,24	15499,5	572,571	„
217,50	174,00	16152,8	596,705	„
218,40	174,72	16381,3	605,146	„
220,80	176,64	17182,6	632,001	„
222,50	178,00	15552,5	574,53	Arzberger
224,15	179,32	18189,4	671,940	Arago

13. Es folgt nun die Zusammenstellung dreier Tabellen nach Biot, Magnus und Regnault über den Zusammenhang der Elasticitäten mit den Temperaturen des Wasserdampfs, welche nach Formeln berechnet sind.

Biot hat die Formel erfunden:

$$\log E = a - b c^{20+t} - d g^{20+t}$$

hier bedeutet E die Spannung in Millimetern Quecksilbersäule bei 0° C.

$$a = 5{,}96131330259$$
$$\log b = 0{,}82340688193 - 1$$
$$\log c = -\,0{,}01309734295$$
$$\log d = 0{,}74110951837$$
$$\log g = -\,0{,}00212510583$$

t die Temperatur in Centesimalgraden.

Magnus hat die Formel erfunden:

$$E = 4{,}525 \times 10^{\frac{7{,}4475 \times t}{234{,}69 + t}}$$

E und t wie bei Biot.

Regnault hat für Dämpfe unter 0° C. die Formel:

$$E = 0{,}0131765 + 0{,}29682 \times 1{,}0893^{t+32}$$

Für Dämpfe zwischen 0° C. und 100° C. die Formel:

$$\log E = 4{,}738438 + 0{,}013616 \times 1{,}0159329^{t} - 4{,}0878 \times 0{,}992487^{t}$$

Tabelle

des Zusammenhangs der Elasticitäten des Wasserdampfs mit den verschiedenen Temperaturen desselben. Nach den vorstehenden Formeln berechnet.

Temperatur	Nach Biot		Nach Magnus		Nach Regnault	
− C.	Millim.	Differenz	Millim.	Differenz	Millim.	Differenz
32	—		—		0,310	
31	—	—	—	—	0,336	0,026
30	—	—	—	—	0,365	0,029
29	—	—	—	—	0,397	32
28	—	—	—	—	0,431	34
27	—	—	—	—	0,468	37
26	—	—	—	—	0,509	41
25	—	—	—	—	0,553	44
24	—	—	—	—	0,602	49
23	—	—	—	—	0,654	52
22	—	—	—	—	0,711	57
21	—	—	—	—	0,774	63
20	1,333	—	0,916	—	0,841	67
19	—	—	0,999	0,083	0,916	75
18	—	—	1,089	90	0,996	80
17	—	0,546	1,186	97	1,084	88
16	—	—	1,290	104	1,179	95
15	1,879	—	1,403	113	1,284	105
14	—	—	1,525	122	1,398	114
13	—	—	1,655	130	1,521	123
12	—	0,752	1,796	141	1,656	135
11	—	—	1,947	151	1,803	147
10	2,631	—	2,109	162	1,963	160
9	—	—	2,284	175	2,137	174
8	—	0,929	2,471	187	2,327	190
7	—	—	2,671	200	2,533	206
6	—	—	2,886	215	2,758	225
5	3,660	—	3,115	229	3,004	246
4	—	—	3,361	246	3,271	267
3	—	—	3,624	263	3,553	282
2	—	1,399	3,905	281	3,879	326
1	—	—	4,205	300	4,224	345
0	5,059	—	4,525	320	4,600	376

Temperatur	Nach Biot		Nach Magnus		Nach Regnault	
+ C.	Millim.	Differenz	Millim.	Differenz	Millim.	Differenz
0	5,059	0,334	4,525	0,342	4,600	0,340
1	5,393	356	4,867	0,364	4,940	0,362
2	5,749	374	5,231	0,388	5,302	0,385
3	6,123	400	5,619	0,413	5,687	0,410
4	6,523	424	6,032	0,439	6,097	0,437
5	6,947	449	6,471	0,468	6,534	0,464
6	7,396	475	6,939	0,497	6,998	0,494
7	7,871	504	7,436	0,528	7,492	0,525
8	8,375	534	7,964	0,561	8,017	0,557
9	8,909	566	8,525	0,601	8,574	0,591
10	9,475	599	9,126	0,625	9,165	0,627
11	10,074	633	9,751	0,670	9,792	0,665
12	10,707	671	10,421	0,709	10,457	0,705
13	11,378	709	11,130	0,752	11,162	0,746
14	12,087	750	11,882	0,795	11,908	0,791
15	12,837	793	12,677	0,842	12,699	0,837
16	13,630	838	13,519	0,890	13,536	0,885
17	14,468	885	14,409	0,942	14,421	0,936
18	15,353	935	15,351	0,994	15,357	0,989
19	16,288	1,026	16,345	1,051	16,346	1,045
20	17,314	1,003	17,396	1,109	17,391	1,104
21	18,317	1,130	18,505	1,170	18,495	1,164
22	19,447	1,130	19,675	1,234	19,659	1,229
23	20,577	1,228	20,909	1,302	20,888	1,296
24	21,805	1,285	22,211	1,371	22,184	1,366
25	23,090	1,362	23,582	1,444	23,550	1,438
26	24,452	1,429	25,026	1,521	24,988	1,517
27	25,881	1,509	26,547	1,601	26,505	1,596
28	27,390	1,655	28,148	1,684	28,101	1,681
29	29,045	1,598	29,832	1,770	29,782	1,766
30	30,643	1,767	31,602	1,862	31,548	1,858
31	32,410	1,851	33,464	1,955	33,496	1,953
32	34,261	1,927	35,419	2,054	35,359	2,052
33	36,188	2,066	37,473	2,157	37,411	2,154
34	38,254	2,150	39,630	2,263	39,565	2,262
35	40,404	2,339	41,893	2,375	41,827	2,374
36	42,743		44,268		44,201	

Temperatur + C.	Nach Biot Millim.	Nach Biot Differenz	Nach Magnus Millim.	Nach Magnus Differenz	Nach Regnault Millim.	Nach Regnault Differenz
37	45,038	2,295	46,758	2,490	46,691	2,490
38	47,579	2,541	49,368	2,610	49,302	2,611
39	50,147	2,568	52,103	2,735	52,039	2,737
40	52,998	2,851	54,969	2,866	54,906	2,867
41	55,772	2,774	57,969	3,000	57,910	3,004
42	58,792	3,020	61,109	3,140	61,055	3,145
43	61,958	3,266	64,396	3,287	64,346	3,291
44	65,627	3,669	67,833	3,437	67,790	3,444
45	68,751	3,124	71,427	3,594	71,391	3,601
46	72,393	3,642	75,185	3,758	75,158	3,767
47	76,205	3,812	79,111	3,926	79,093	3,935
48	80,195	3,990	83,212	4,101	83,204	4,111
49	84,370	4,175	87,494	4,282	87,499	4,295
50	88,743	4,373	91,965	4,471	91,982	4,483
51	93,301	4,558	96,630	4,665	96,661	4,679
52	98,975	4,774	101,497	4,867	101,543	4,882
53	103,060	4,985	106,572	5,075	106,636	5,093
54	108,270	5,210	111,864	5,292	111,945	5,309
55	113,710	5,440	117,378	5,514	117,478	5,533
56	119,390	5,680	123,124	5,746	123,244	5,766
57	125,310	6,920	129,109	5,985	129,251	6,007
58	131,500	6,190	135,341	6,232	135,505	6,254
59	137,940	6,440	141,829	6,488	142,015	6,510
60	144,660	6,720	148,579	6,750	148,791	6,776
61	151,700	7,040	155,603	7,024	155,839	7,048
62	158,960	7,260	162,908	7,305	163,170	7,331
63	166,560	7,600	170,502	7,594	170,791	7,621
64	174,470	7,910	178,397	7,895	178,714	7,923
65	182,710	8,240	186,601	8,204	186,945	8,231
66	191,270	8,560	195,124	8,523	195,496	8,551
67	200,180	8,910	203,975	8,851	204,376	8,880
68	209,440	9,260	213,166	9,191	213,596	9,220
69	219,060	9,620	222,706	9,540	223,165	9,569
70	229,070	10,010	232,606	9,900	233,093	9,928
71	239,450	10,380	242,877	10,271	243,393	10,300
72	250,230	10,780	253,530	10,653	254,073	10,680
73	261,430	11,200	264,577	11,047	265,147	11,074

Temperatur + C.	Nach Biot Millim.	Nach Biot Differenz	Nach Magnus Millim.	Nach Magnus Differenz	Nach Regnault Millim.	Nach Regnault Differenz
74	273,030	11,600	276,029	11,452	276,624	11,477
75	285,070	12,040	287,898	11,869	288,517	11,893
76	297,570	12,500	300,193	12,295	300,838	12,321
77	310,490	12,950	312,934	12,741	313,600	12,762
78	323,890	13,400	326,127	13,193	326,811	13,211
79	337,760	13,870	339,786	13,659	340,488	13,677
80	352,080	14,320	353,926	14,140	354,643	14,155
81	367,000	14,900	368,558	14,632	369,287	14,644
82	382,380	15,380	383,697	15,139	384,435	15,148
83	398,280	15,900	399,357	15,680	400,101	15,666
84	414,730	16,450	415,525	16,168	416,298	16,197
85	431,710	16,980	432,295	16,770	433,041	16,743
86	449,260	17,550	449,603	17,308	450,344	17,303
87	467,380	18,120	467,489	17,886	468,221	17,877
88	486,090	18,710	485,970	18,481	486,687	18,466
89	505,380	19,290	505,060	19,090	505,759	19,072
90	525,280	19,900	524,775	19,715	525,450	19,691
91	545,800	19,520	545,133	20,358	545,778	20,328
92	566,950	21,150	566,147	21,014	566,757	20,979
93	588,740	21,790	587,836	21,689	588,406	21,649
94	611,180	22,440	610,217	22,381	610,740	22,334
95	634,270	23,090	633,305	23,088	633,778	23,038
96	658,050	23,780	657,120	23,815	657,535	23,757
97	682,590	24,540	681,683	24,563	682,029	24,494
98	707,630	25,040	707,000	25,317	707,280	25,251
99	733,460	25,830	733,100	26,100	733,305	26,025
100	760,000	26,540	760,000	26,900	760,000	26,695

14. Folgende Tabelle, wegen ihres Nutzens für Anlage von Dampfkesseln für gewerbliche Zwecke höchst wichtig, ist den No. 9 gedachten Beobachtungen der Pariser Academie entsprechend berechnet worden und zwar nach Formeln die in dem Sinne abgeleitet worden sind, dafs sie in den Resultaten jenen Beobachtungen möglichst nahe kommen.

Die erste dieser Formel von Tredgold liegt dieser Tabelle für Dämpfe bis zu 4 Atmosphären Spannung zu Grunde. Sie ist

I. $t = 85 \sqrt[6]{e} - 75$

wo t die Temperatur in Centesimalgraden von 0 ab und e die Spannung der Dämpfe in Centimetern Quecksilbersäule bedeutet.

Die zweite Formel von Dulong, schon unter No. 10 aufgeführt, ist

$$E = (1 + 0{,}7153\, T)^5$$

nach welcher es sich bequemer rechnet als mit der daselbst aufgeführten corrigirten Formel und die beide nur geringe Abweichungen geben, hat zu den Däm-

pfen aller höheren Spannungen gedient und nicht erst, wie von einigen Schriftstellern behauptet wird, von der Spannung 24 Atmosphären ab aufwärts, bis wohin die Beobachtungen der Academiker gereicht haben.

Wird E gegeben, so ist die Formel zu schreiben:

$$\text{II.}\quad T = \frac{-1 + \sqrt[5]{E}}{0{,}7153}$$

Es bedeutet hier E die Spannung der Dämpfe in Atmosphären und T die Temperatur über 100° der Art, dafs die Temperatur t für die Tabelle erhalten wird $t = (1 + T)\,100°$.

Beispiele. 1. Für $E = 1$ Atmosphäre ist in Formel I $e = 76$ und man erhält

$t = 85\sqrt[6]{76} - 75 = 174{,}94 - 75 = 99{,}94$ statt 100° in Formel II ist

$$E = 1,\ \text{also}\ -1 + \sqrt[5]{E} = 0 = T$$

folglich $t = (1 + 0)\,100° = 100°$

2. Für $E = 4$ Atmosphären ist in Formel I $e = 4 \times 76 = 304$ daher

$$t = 85\sqrt[6]{304} - 75 = 220{,}41 - 75 = 145{,}41°$$

in Formel II: $E = 4$ gesetzt, erhält man

$$T = \frac{-1 + \sqrt[5]{4}}{0{,}7153} = \frac{0{,}31951}{0{,}7153} = 0{,}44668$$

daher $t = (1 + 0{,}44668)\,100° = 144{,}668°$

In die Tabelle ist $t = 145{,}4°$ gesetzt; es ist bis hierher Formel I. angewendet, Formel II. weicht aber nicht bedeutend ab.

3. Für $E = 5$ Atmosphären hat man nach Formel II.

$$T = \frac{-1 + \sqrt[5]{5}}{0{,}7153} = \frac{0{,}37973}{9{,}7153} = 0{,}530868$$

also $t = 153{,}0868°$

In der Tabelle steht $t = 153{,}08$

Formel I. würde geben:

$$t = 85 \times \sqrt[6]{380} - 75 = 228{,}76 - 75 = 153{,}76°$$

4. Für $E = 40$ Atmosphären hat man nach Formel II.

$$T = \frac{-1 + \sqrt[5]{40}}{0{,}7153} = \frac{1{,}09128}{0{,}7153} = 1{,}52562$$

daher $t = 252{,}562°$

wofür in die Tabelle 252,55° gesetzt ist.

Formel I. würde geben:

$$t = 85\sqrt[6]{3040} - 75 = 323{,}51 - 75 = 248{,}51°$$

welches schon etwas mehr abweicht, nämlich um 4° C., ein Unterschied, der bei einer so hohen Spannung als unbedeutend gelten kann. Zuverlässig ist aber die Tabelle nur bis zu 24 Atmosphären Spannung, bis zu der Grenze der stattgehabten Beobachtungen; jedoch ist meines Wissens von einer so hohen Spannung in der Praxis noch kein Gebrauch gemacht worden.

Die Angaben des Drucks auf 1 preufs. □″ sind von mir noch zugefügt worden:

Es ist $1^m = 3{,}186199$ pr. Fufs $= 38{,}234388$ pr. Zoll.

1 □^{cm} = 0,146187 preufs. □ Zoll.

1 Kilgr. = 2 Zollpfund.

1 preufs. □″ = 6,84056 □^{cm}

Tabelle

des Zusammenhangs der Elasticitäten des Wasserdampfs mit den Temperaturen desselben über 100° C., nach den vorstehenden Formeln berechnet.

Temperatur Celsius	Druck in Atmosphären	Druck in Quecksilbersäule		Druck auf 1 □ centimeter Kilogr.	Druck auf 1 preufs. □″ Zollpfund
		Meter	preufs. Zoll		
100,00	1,0	0,76	29,058	1,033	14,133
112,20	1,5	1,14	43,587	1,549	21,192
121,40	2,0	1,52	58,116	2,066	28,265
128,80	2,5	1,90	72,645	2,582	35,325
135,10	3,0	2,28	87,174	3,099	42,398
140,60	3,5	2,66	101,503	3,615	49,457
145,40	4,0	3,04	116,233	4,132	56,530
149,06	4,5	3,42	130,762	4,648	63,590
153,08	5,0	3,80	145,291	5,165	70,663
156,80	5,5	4,18	159,820	5,681	77,722
160,20	6,0	4,56	174,349	6,198	84,796
163,48	6,5	4,94	188,878	6,714	91,855
166,50	7,0	5,32	203,407	7,231	98,928

Temperatur Celsius	Druck in Atmosphären	Druck in Quecksilbersäule		Druck auf 1 □ centimeter Kilogr.	Druck auf 1 preufs. □″ Zollpfund
		Meter	preufs. Zoll		
169,37	7,5	5,70	217,936	7,747	105,988
172,10	8	6,08	232,465	8,264	113,061
177,10	9	6,84	261,523	9,297	127,193
181,60	10	7,60	290,581	10,330	141,326
186,03	11	8,36	319,639	11,363	155,458
190,00	12	9,12	348,698	12,396	169,591
193,70	13	9,88	377,806	13,429	183,724
197,19	14	10,64	406,814	14,462	197,856
200,48	15	11,40	435,872	15,495	211,989
203,60	16	12,16	464,930	16,528	226,122
206,57	17	12,92	493,987	17,561	240,254
209,40	18	13,68	523,046	18,594	254,387
212,10	19	14,44	552,105	19,627	268,519
214,70	20	15,20	581,163	20,660	282,652
217,20	21	15,96	610,221	21,693	296,785
219,60	22	16,72	639,279	22,726	310,917
221,90	23	17,48	668,337	23,759	325,050
224,20	24	18,24	697,395	24,792	339,212
226,30	25	19,00	726,453	25,825	353,315
236,20	30	22,80	871,744	30,990	423,978
244,85	35	26,60	1017,035	36,155	494,641
252,55	40	30,40	1162,325	41,320	565,304
259,52	45	34,20	1307,616	46,485	635,967
265,89	50	38,00	1452,907	51,650	706,630

15. Die Dichtigkeiten der Dämpfe stehen in geradem Verhältnifs mit den Druckwirkungen, welche auf sie ausgeübt werden und in umgekehrtem Verhältnifs mit ihren Temperaturen; die Volumina der Dämpfe also in umgekehrtem Verhältnifs mit jenen Druckwirkungen und in geradem Verhältnifs mit ihren Temperaturen. Nimmt man daher die Dichtigkeit d und das Volumen v des Wasserdampfs unter 760^{mm} Druck Quecksilbersäule und bei 100° C. Temperatur als Einheiten, so hat man zur Ermittelung der Dichtigkeit D und des Volum V von Wasserdampf unter dem Druck p^{mm} Quecksilbersäule und t° C. Temperatur die Proportionen

1. Abgesehen von den Temperaturen beider Dämpfe

$$d : D = 760 : p$$
$$v : V = p : 760$$

2. Abgesehen von den auf sie einwirkenden Druckkräften (s. Bd. 1, pag. 201 und 214)

$$d : D = 1 + 0{,}00365 \times t : 1 + 0{,}00365 \times 100$$
$$v : V = 1 + 0{,}00365 \times 100 : 1 + 0{,}00365 \times t$$

Mithin hat man überhaupt:

$$d : D = 760\,(1 + 0{,}00365 \times t) : 1{,}365\,p$$
$$v : V = 1{,}365 \times p : 760\,(1 + 0{,}00365 \times t)$$

Um nun d und v zu finden hat nach Gay-Lussac 1 Kubikcentimeter (cub^{cm}) trockene Luft von 0° C. und unter einem Druck von $0{,}76^{m}$ Quecksilbersäule ein Gewicht von 0,001299 Gramme; also nimmt 1 Gramm dieser Luft einen Raum ein von $\frac{1}{0{,}001299} = 769{,}823$ cub^{cm}.

Die Luft dehnt sich aus von 0° bis 100° C. auf 1,365 seines ersten Volumen, also nimmt 1 Gramme trockene Luft von 100° C. einen Raum ein von $1{,}365 \times 769{,}823$ $cub^{cm} = 1050{,}8084$ cub^{cm}.

Ferner ist Wasserdampf nach Gay-Lussac 1,6 mal leichter als trockene Luft, folglich nimmt 1 Gramme Wasserdampf bei 100° C. einen Raum ein von $1{,}6 \times 1050{,}8084 = 1681{,}29$ cub^{cm}.

Nun ist 1 Gramme das Gewicht eines cub^{cm} Wassers in seiner gröfsten Dichtigkeit bei 4° C., welches gegen Wasser von 0° C. eine Dichtigkeit hat von 1,000118 (s. Bd. I, pag. 201); mithin nimmt Wasserdampf von 100° C. einen Raum ein von $\frac{1681{,}29}{1{,}000118} = 1680$ mal den Raum einer gleichen Menge Wasser von 0° C., also

ist $v = 1680$ und $d = \frac{1}{1680}$. Man hat also

$$D = \frac{1}{v} = \frac{1,365}{760 \cdot 1680} \times \frac{p}{1 + 0,00365\,t}$$
$$= \frac{0,00000106908 \times p}{1 + 0,00365 \times t}$$
$$V = \frac{1}{D} = 935384 \times \frac{1 + 0,00365 \times t}{p}$$

oder

$$\log D = 0,0290098 - 6 + \log p - \log(1 + 0,00365 \times t)$$
$$\log V = 5,9709902 - \log p + \log(1 + 0,00365 \times t)$$

Die Dichtigkeiten und Volumina sind also abhängig von der Spannung p des Dampfs, bei dessen Temperatur t und von t, die Spannung p wird aber, wie Tabelle pag. 232 zeigt, von verschiedenen Physikern verschieden angegeben und folglich ist dies auch mit den Dichtigkeiten und den Volumen der Fall.

Ich habe nun aus der Tabelle pag. 232 von den Angaben Biots, Magnus und Regnault's das Mittel für p genommen und die Tabelle pag. 241 berechnet, die Spannungen selbst auch noch in preufsischen Linien Quecksilbersäule ausgedrückt. Damit aber diese Tabelle für andere beliebige p möglichst benutzt werden kann, habe ich in der folgenden Tabelle für alle vorkommenden Temperaturen $\log p$ und $\log(1 + 0,00365 \times t)$ angegeben. Die ersten 3 Versuchsangaben von Biot für $t = -20°$, $-15°$ und $-10°$ sind nicht mit berücksichtigt, weil diese Zahlen wegen ihrer Gröfse gegen die zugehörigen beiden anderen eine Inconsequenz in der Tabelle veranlassen.

Hülfstabelle zur Berechnung der Dichtigkeiten und Volume des Wasserdampfs bei gegebenen Spannungen und Temperaturen von $-32°$ C. bis $100°$ C.

Temperatur − C.	$1 + 0,00365 \times t$ numerus	$1 + 0,00365 \times t$ logarithmus − 10	Spannung p in Millimeter numerus	Spannung p in Millimeter logarithmus
32	0,88320	9,946 0591	0,3100	0,491 3617 − 1
31	0,88685	9,947 8502	0,3360	0,526 3393 − 1
30	0,89050	9,949 6339	0,3650	0,562 2929 − 1
29	0,89415	9,951 4104	0,3970	0,598 7905 − 1
28	0,89780	9,953 1796	0,4310	0,634 4773 − 1
27	0,90145	9,954 9416	0,4680	0,670 2459 − 1
26	0,90510	9,956 6966	0,5090	0,706 7178 − 1
25	0,90875	9,958 4444	0,5530	0,742 7251 − 1
24	0,91240	9,960 1853	0,6020	0,779 6965 − 1
23	0,91605	9,961 9192	0,6540	0,815 5777 − 1
22	0,91970	9,963 6462	0,7110	0,851 8696 − 1
21	0,92335	9,965 3664	0,7740	0,888 7410 − 1
20	0,92700	9,967 0797	0,8785	0,943 7418 − 1
19	0,93065	9,968 7864	0,9575	0,981 1388 − 1
18	0,93430	9,970 4863	1,0425	0,018 0761
17	0,93795	9,972 1797	1,1350	0,064 9959
16	0,94160	9,973 8664	1,2345	0,091 4911
15	0,94525	9,975 5467	1,3435	0,128 2377
14	0,94890	9,977 2204	1,4615	0,164 7988
13	0,95255	9,978 8878	1,5880	0,200 8505
12	0,95620	9,980 5487	1,7260	0,237 0408
11	0,95985	9,982 2034	1,8750	0,273 0013
10	0,96350	9,983 8517	2,0360	0,308 7778
9	0,96715	9,985 4938	2,2105	0,344 4905
8	0,97080	9,987 1298	2,3990	0,380 0302
7	0,97445	9,988 7596	2,6020	0,415 3073
6	0,97810	9,990 3833	2,8220	0,450 5570
5	0,98175	9,992 0009	3,2597	0,513 1776
4	0,98540	9,993 6126	3,3160	0,520 6145
3	0,98905	9,995 2182	3,5885	0,550 9130
2	0,99270	9,996 8180	3,8920	0,590 1728
1	0,99635	9,998 4119	4,2145	0,624 7461
0	1,00000	10,000 0000	4,7280	0,674 6775

Temperatur + C.	1 + 0,00365 × t		Spannung p in Millimeter	
	numerus	logarithmus	numerus	logarithmus
0	1,00000	0,000 0000	4,7280	0,674 6775
1	1,00365	0,001 5823	5,0667	0,704 7252
2	1,00730	0,003 1588	5,4273	0,734 5838
3	1,01095	0,004 7297	5,8097	0,764 1537
4	1,01450	0,006 2521	6,2173	0,793 6038
5	1,01815	0,007 8118	6,6507	0,822 8674
6	1,02180	0,009 3659	7,1110	0,851 9307
7	1,02545	0,010 8680	7,5997	0,880 7964
8	1,02910	0,012 4576	8,1187	0,909 4865
9	1,03285	0,014 0373	8,6693	0,937 9840
10	1,03650	0,015 5693	9,2553	0,966 3905
11	1,04015	0,017 0960	9,8723	0,994 4183
12	1,04380	0,018 6173	10,528	1,022 3459
13	1,04745	0,020 1333	11,223	1,050 1090
14	1,05110	0,021 6440	11,959	1,077 6949
15	1,05475	0,023 1496	12,738	1,105 1012
16	1,05840	0,024 6498	13,562	1,132 3237
17	1,06205	0,026 1450	14,433	1 159 3566
18	1,06570	0,027 6350	15,354	1,186 2215
19	1,06935	0,029 1200	16,326	1,212 8798
20	1,07300	0,030 5997	17,367	1,239 7248
21	1,07665	0,032 0343	18,439	1,265 7374
22	1,08030	0,033 5444	19,594	1,292 1231
23	1,08395	0,035 0093	20,791	1,317 8754
24	1,08760	0,036 4692	22,067	1,343 7433
25	1,09125	0,037 9244	23,407	1,369 3458
26	1,09490	0,039 3745	24,822	1,394 8368
27	1,09855	0,040 8199	26,311	1,419 1374
28	1,10220	0,042 2604	27,880	1,445 2928
29	1,10585	0,043 6963	29,553	1,470 6016
30	1,10950	0,045 1273	31,264	1,495 0445
31	1,11315	0,046 5538	33,093	1,519 7361
32	1,11680	0,047 9754	35,013	1,544 2293
33	1,12045	0,049 3925	37,024	1,568 4833
34	1,12410	0,050 8049	39,150	1,592 7318
35	1,12770	0,052 1936	41,375	1,616 7380
36	1,13140	0,053 6162	43,737	1,640 8490
37	1,13505	0,055 0151	46,162	1,664 2846
38	1,13870	0,056 4093	48,750	1,687 9746
39	1,14235	0,057 7993	51,430	1,711 2165
40	1,14600	0,059 1846	54,291	1,734 7278
41	1,14965	0,060 5657	57,217	1,757 5251
42	1,15330	0,061 9423	60,319	1,780 4541
43	1,15695	0,063 3156	63,567	1,803 2317
44	1,16060	0,064 6826	67,083	1,826 6125
45	1,16425	0,066 0463	70,523	1,848 3308
46	1,16790	0,067 4057	74,245	1,870 6672
47	1,17155	0,068 7609	78,136	1,892 8512
48	1,17520	0,070 1118	82,204	1,914 8930
49	1,17885	0,071 4586	86,454	1,936 7851
50	1,18250	0,072 8011	90,897	1,958 5495
51	1,18615	0,074 1396	95,531	1,980 1443
52	1,18980	0,075 4740	100,37	2,001 6039
53	1,19345	0,076 8042	105,42	2,022 9230
54	1,19710	0,078 1304	110,69	2,044 1084
55	1,20075	0,079 4526	116,19	2,065 1688

Temperatur + C.	1 + 0,00365 × *t*		Spannung *p* in Millimeter	
	numerus	logarithmus	numerus	logarithmus
56	1,20440	0,080 7707	121,92	2,086 0750
57	1,20805	0,082 0849	127,89	2,106 8366
58	1,21170	0,083 3951	134,12	2,127 4935
59	1,21535	0,084 7014	140,59	2,147 9544
60	1,21900	0,086 0037	147,34	2,168 3207
61	1,22265	0,087 3022	154,38	2,188 5910
62	1,22630	0,088 5967	161,69	2,208 6832
63	1,22995	0,089 8875	169,28	2,228 6057
64	1,23360	0,091 1744	177,19	2,248 4392
65	1,23725	0,092 4575	185,42	2,268 1566
66	1,24090	0,093 7368	193,96	2,287 7122
67	1,24455	0,095 0124	202,84	2,307 1536
68	1,24820	0,096 2842	212,07	2,326 4792
69	1,25185	0,097 5523	221,73	2,345 8245
70	1,25550	0,098 8167	231,59	2,364 7198
71	1,25915	0,100 0775	241,91	2,383 6538
72	1,26280	0,101 3346	252,61	2,402 4505
73	1,26645	0,102 5881	263,72	2,421 1431
74	1,27010	0,103 8379	275,23	2,439 6958
75	1,27375	0,105 0842	287,16	2,458 1239
76	1,27740	0,106 3269	299,53	2,476 4403
77	1,28105	0,107 5661	312,34	2,494 6276
78	1,28470	0,108 8017	325,61	2,512 6977
79	1,28835	0,110 0339	339,34	2,530 6351
80	1,29200	0,111 2625	353,55	2,548 4508
81	1,29565	0,112 4877	368,28	2,566 1781
82	1,29930	0,113 7094	383,50	2,583 7654
83	1,30295	0,114 9278	399,25	2,601 2449
84	1,30660	0,116 1427	415,52	2,618 5919
85	1,31025	0,117 3542	432,35	2,635 8355
86	1,31390	0,118 5623	449,74	2,652 9615
87	1,31755	0,119 7671	467,70	2,669 9674
88	1,32120	0,120 9686	486,25	2,686 8596
89	1,32485	0,122 1668	505,40	2,703 6352
90	1,32850	0,123 3616	525,17	2,720 2999
91	1,33215	0,124 5431	545,57	2,736 8505
92	1,33580	0,125 7414	566,62	2,753 2919
93	1,33945	0,126 9265	588,33	2,769 6210
94	1,34310	0,128 1083	610,71	2,785 8350
95	1,34675	0,129 2870	633,78	2,801 9385
96	1,35040	0,130 4624	657,57	2,817 9420
97	1,35405	0,131 6347	682,07	2,833 8289
98	1,35770	0,132 8038	707,30	2,849 6037
99	1,36135	0,133 9698	733,29	2,865 2758
100	1,36500	0,135 2327	760,00	2,880 8136

Hülfstabelle zur Berechnung der Dichtigkeiten und Volume des Wasserdampfs bei gegebenen Spannungen und Temperaturen über 100° C.

Temperatur + C.	1 + 0,00365 × *t*		Spannung *p* in Millimeter	
	numerus	logarithmus	numerus	logarithmus
100,00	1,36500	0,135 1327	760	2,880 8136
112,20	1,40953	0,149 0743	1140	3,056 9049
121,40	1,44311	0,159 2994	1520	3,181 8436

Temperatur + C.	1 + 0,00365 × *t* numerus	1 + 0,00365 × *t* logarithmus	Spannung *p* in Millimeter numerus	Spannung *p* in Millimeter logarithmus
128,80	1,47012	0,167 3528	1900	3,278 7536
135,10	1,49312	0,174 0947	2280	3,357 9384
140,60	1,51319	0,179 8936	2660	3,424 8816
145,40	1,53071	0,184 8929	3040	3,482 8736
149,06	1,54407	0,188 6670	3420	3,534 0261
153,08	1,55874	0,192 7737	3800	3,579 7836
156,80	1,57232	0,196 5409	4180	3,621 1763
160,20	1,58473	0,199 9553	4560	3,658 9648
163,48	1,59670	0,203 2233	4940	3,693 7269
166,50	1,60772	0,206 2104	5320	3,725 9116
169,37	1,61820	0,209 0322	5700	3,755 8749
172,10	1,62817	0,211 6998	6080	3,783 9036
177,10	4,64642	0,216 5407	6840	3,835 0561
181,60	1,66284	0,220 8504	7600	3,880 8136
186,03	1,67901	0,225 0533	8360	3,922 2063
190,00	1,69350	0,228 7852	9120	3,959 9948
193,70	1,70701	0,232 2361	9880	3,994 7569
197,19	1,71974	0,235 4628	10640	4,026 9416
200,48	1,73175	0,238 4852	11400	4,056 9049
203,60	1,74314	0,241 3323	12160	4,084 9336
206,57	1,75398	0,243 7770	12920	4,111 2625
209,40	1,76431	0,246 5749	13680	4,136 0861
212,10	1,77417	0,248 9953	14440	4,159 5672
214,70	1,78366	0,251 3121	15200	4,181 8436
217,20	1,79278	0,253 5270	15960	4,203 0329
219,60	1,80154	0,255 8849	16720	4,223 2363
221,90	1,80994	0,257 6642	17480	4,242 5414
224,20	1,81833	0,259 6727	18240	4,261 0248
226,30	1,82563	0,261 4127	19000	4,278 7536
236,20	1,86213	0,270 0100	22800	4,357 9348
244,85	1,89370	0,277 3112	26600	4,424 8816
252,55	1,92181	0,283 7105	30400	4,482 8736
259,52	1,94725	0,289 1987	34200	4,534 0261
265,89	1,97050	0,294 5764	38000	4,579 7836

Tabelle über Spannung, Dichtigkeit und Volumen des Wasserdampfes bei Temperaturen von – 32° C. bis 100° C.

(Die Spannung in Millimetern in Tabelle pag. 232.)

Temperaturen – C.	Spannung in preufs. Linien Quecksilber	Dichtigkeit	Differenz	Volumen	Differenz
32	0,142	0,00000 0375		2 664 941	
			30		196055
31	0,154	0405		2 468 886	
			33		186279
30	0,167	0438		2 282 607	
			37		175871
29	0,212	0475		2 106 736	
			38		158272
28	0,198	0513		1 948 464	
			42		146750
27	0,215	0555		1 801 714	
			47		138420
26	0,234	0601		1 663 294	

Temperaturen — C.	Spannung in preufs. Linien Quecksilber	Dichtigkeit	Differenz	Volumen	Differenz
			50		126168
25	0,254	0,00000 0651		1 537 126	
			55		119770
24	0,276	0706		1 417 356	
			57		107174
23	0,300	0763		1 310 182	
			63		100234
22	0,326	0826		1 209 948	
			70		94073
21	0,355	0896		1 115 875	
			117		128850
20	0,403	1013		987 025	
			86		77870
19	0,439	1099		909 155	
			94		70853
18	0,468	1193		838 302	
			131		82907
17	0,521	1324		755 395	
			78		41942
16	0,566	1402		713 453	
			118		55342
15	0,616	1520		658 111	
			127		50799
14	0,671	1647		607 312	
			135		46228
13	0,729	1782		561 084	
			148		42883
12	0,792	1930		518 201	
			158		39359
11	0,860	2088		478 842	
			171		36188
10	0,934	2259		442 654	
			164		33400
9	1,014	2443		409 254	
			199		30733
8	1,101	2642		378 521	
			213		28219
7	1,194	2855		350 302	
			159		26100
6	1,295	3014		324 202	
			455		42485
5	1,496	3469		281 717	
			119		3743
4	1,521	3598		277 974	
			245		17781
3	1,646	3843		260 193	
			349		21612
2	1,786	4192		238 581	
			330		17447
1	1,934	4522		221 134	
			533		23295
0	2,169	0,00000 5055		197 839	
+ C.					
0	2,169	0,00000 5055		197 839	
			342		12551
1	2,325	5397		185 288	
			363		11682
2	2,490	5760		173 606	
			384		10839
3	2,665	6144		162 767	
			408		10137
4	2,853	6552		152 630	
			431		9433
5	3,051	6983		143 197	
			457		8789
6	3,263	7440		134 408	
			484		8207
7	3,487	7924		126 201	
			510		7635
8	3,721	8434		118 566	
			529		7125
9	3,977	8973		111 441	

Temperaturen + C.	Spannung in preufs. Linien Quecksilber	Dichtigkeit	Differenz	Volumen	Differenz
			573		6687
10	4,246	0,00000 9546	600	104 754	6179
11	4,529	0,00001 0146	637	98 575	5736
12	4,830	1 0783	662	92 739	5439
13	5,149	1 1445	719	87 300	5088
14	5,487	1 2164	747	82 212	4759
15	5,844	1 2911	788	77 453	4454
16	6,222	1 3699	830	72 999	4169
17	6,622	1 4529	874	68 830	3906
18	7,044	1 5403	919	64 924	3656
19	7,490	1 6322	981	61 268	3476
20	7,968	1 7303	1008	57 792	3180
21	8,460	1 8311	1080	54 612	3040
22	8,990	1 9391	1115	51 572	2805
23	9,539	2 0506	1185	48 767	2665
24	10,124	2 1691	1240	46 102	2494
25	10,739	2 2931	1306	43 608	2348
26	11,388	2 4237	1309	41 260	2115
27	12,071	2 5546	1496	39 145	2166
28	12,791	2 7042	1529	36 979	1978
29	13,559	2 8571	1623	35 001	1806
30	14,344	3 0194	1589	33 195	1731
31	15,183	3 1783	1734	31 464	1628
32	16,064	3 3517	1810	29 836	1529
33	16,987	3 5327	1907	28 307	1450
34	17,962	3 7234	1990	26 857	1363
35	18,983	3 9224	2104	25 494	1297
36	20,066	4 1328	2151	24 197	1197
37	21,179	4 3479	2290	23 000	1151
38	22,366	4 5769	2251	21 849	1073
39	23,596	4 8020	2511	20 776	1002
40	24,909	5 0531	2676	19 774	979
41	26,275	5 3207	2707	18 795	910
42	27,674	5 5914	2825	17 885	860
43	29,143	5 8739	3054	17 025	842
44	30,778	6 1793	2964	16 183	706
45	32,356	6 4757	3206	15 477	763
46	34,063	6 7963		14 714	

Temperaturen + C.	Spannung in preufs. Linien Quecksilber	Dichtigkeit	Differenz	Volumen	Differenz
47	35,849	0,00007 1302	3339	14 025	689
48	37,715	7 4781	3479	13 372	653
49	39,665	7 8403	3622	12 754	618
50	41,704	8 2179	3776	12 169	585
51	43,830	8 6103	3924	11 614	555
52	46,050	9 0186	4083	11 088	526
53	48,367	9 4434	4248	10 589	499
54	50,785	9 8853	4419	10 116	473
55	53,308	0,00010 3449	4596	9666,6	449,4
56	55,937	10 8221	4772	9240,5	426,1
57	58,676	11 3178	4957	8835,6	404,9
58	61,534	11 8331	5153	8450,7	384,9
59	64,503	12 3670	5339	8086,1	364,6
60	67,600	12 9222	2552	7738,8	347,3
61	70,830	13 4989	5767	7408,0	330,8
62	74,183	14 0960	5971	7094,2	313,8
63	77,666	14 7139	6179	6796,3	297,9
64	81,295	15 3559	6420	6512,2	284,1
65	85,071	16 0217	6656	6241,5	270,7
66	88,995	16 7103	6886	5984,3	257,2
67	93,063	17 4241	7138	5739,2	245,1
68	97,269	18 1637	7396	5505,5	233,7
69	101,730	18 9357	7720	5281,0	224,5
70	106,010	19 7203	7846	5071,0	210,0
71	110,988	20 5393	8190	4868,7	202,3
72	115,897	21 3858	8465	4676,0	192,7
73	120,995	22 2620	8762	4491,9	184,1
74	126,275	23 1669	9049	4316,5	175,4
75	131,749	24 1018	9349	4149,1	167,4
76	137 424	25 0682	9664	3989,1	160,0
77	143,302	26 0658	9976	3835,6	153,5
78	149,290	27 0960	10302	3690,6	145,0
79	155,780	28 1586	10626	3551,3	139,3
80	162,209	29 2549	10963	3418,2	133,1
81	168,967	30 3878	11329	3290,9	127,3
82	175,960	31 5548	11670	3169,1	121,8
83	183,176	32 7587	12039	3052,6	116,5

Temperaturen + C.	Spannung in preufs. Linien Quecksilber	Dichtigkeit	Differenz	Volumen	Differenz
84	190,641	0,00033 9984	12397	2941,3	111,3
85	198,362	35 2770	12786	2834,7	106,6
86	206,341	36 5940	13170	2732,7	102,0
87	214,581	37 9499	14559	2635,0	97,7
88	223,092	39 3460	13961	2541,5	93,5
89	231,878	40 7829	14369	2452,0	89,5
90	240,948	42 2627	14789	2366,3	85,7
91	250,308	43 7842	15215	2283,9	82,4
92	259,965	45 3482	15640	2205,1	78,8
93	269,926	46 9574	16092	2129,6	75,5
94	280,194	48 6112	16538	2057,1	72,5
95	290,778	50 3108	16996	1987,2	69,9
96	301,693	52 0582	17474	1920,9	66,3
97	312,934	53 8523	17941	1857,4	63,5
98	324,509	55 6949	18426	1795,6	61,8
99	336,433	57 5858	18909	1736,5	59,1
100	348,688	59 5238	19380	1680,0	56,5

Tabelle über Dichtigkeit und Volumen des Wasserdampfs bei Temperaturen über 100° und den auf Tabelle pag. 236 angegebenen Spannungen.

Temperatur + C.	Dichtigkeit	Volumen	Temperatur + C.	Dichtigkeit	Volumen
100,00	0,0005 9524	1680,0	193,70	0,0061 8772	161,61
112,20	0,0008 6465	1156,5	197,19	0,0066 1437	151,19
121,40	0,0011 2604	888,07	200,48	0,0070 3768	142,09
128,80	0,0013 8169	723,75	203,60	0,0074 5781	134,09
135,10	0,0016 3245	612,56	206,57	0,0078 7944	126,91
140,60	0,0018 7931	532,11	209,40	0,0082 8936	120,64
145,40	0,0021 2320	470,99	212,10	0,0087 0124	114,92
149,06	0,0023 6893	422,31	214,70	0,0091 1048	109,76
153,08	0,0026 0627	383,69	217,20	0,0095 1734	105,07
156,80	0,0028 4214	351,85	219,60	0,0099 1656	100,84
160,20	0,0030 7623	325,07	221,90	0,0103 2490	96,853
163,48	0,0033 0760	302,33	224,20	0,0107 2410	93,248
166,50	0,0035 3762	282,68	226,30	0,0111 2630	89,877
169,37	0,0037 6576	265,55	236,20	0,0130 8980	76,395
172,10	0,0039 9221	250,49	244,85	0,0150 1690	66,591
177,10	0,0044 4145	225,15	252,55	0,0169 1114	59,133
181,60	0,0048 8622	204,66	259,52	0,0187 8612	53,231
186,03	0,0053 2308	187,86	265,89	0,0206 1660	48,505
190,00	0,0057 5731	173,69			

Decimal als Vorwort zeigt an, dafs der Begriff des Hauptworts, vor dem es sich befindet, in einer Beziehung zur Zahl 10 steht.

Decimalbruch ist ein Bruch, dessen Nenner die Zahl 10 oder eine ganze Potenz von 10 ist; als $\frac{1}{10}, \frac{3}{100}, \frac{7}{1000}$ u. s. w. Die Schreibweise und nähere Erklärungen s. Bd. I, pag. 434, No. 4.

Die 4 Species der Decimalbrüche.

1. Die Addition und die Subtraction geschehen wie mit ganzen Zahlen: Es werden Einer unter Einer, Zehntel unter Zehntel u. s. w. gesetzt und addirt oder subtrahirt.

Addition.

$$\begin{array}{r} 0,34 \\ 21,0873 \\ 420,451 \\ \hline 441,8783 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0,3400 \\ 21,0873 \\ 420,4510 \\ \hline 441,8783 \end{array}$$

Bei der zweiten Darstellung sind die fehlenden Decimalstellen durch Nullzeichen ersetzt um in den Summanden gleich viel Stellen zu erhalten.

Subtraction.

$$\begin{array}{r} 0,485 \\ 0,037 \\ \hline 0,448 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 21,89 \\ 15,008 \\ \hline 6,882 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 21,890 \\ 15,008 \\ \hline 6,882 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1,0005 \\ 0,89 \\ \hline 0,1105 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1,0005 \\ 0,8900 \\ \hline 0,1105 \end{array}$$

2. Multiplication.

Regel. Multiplicire Decimalbrüche, als wenn sie ganze Zahlen wären und gebe dem Product so viel Decimalstellen, als die Factoren zusammengenommen haben.

Z. B. 0,34 × 0,86 Rechne:

$$\begin{array}{r} 34 \\ 86 \\ \hline 204 \\ 272 \\ \hline 0,2924 \end{array}$$

10,5 × 0,07 Rechne

$$\begin{array}{r} 105 \\ 7 \\ \hline 0,735 \end{array}$$

Denn es ist

$$0,34 \times 0,86 = \frac{34}{100} \times \frac{86}{100} = \frac{2924}{1000} = 0,2924$$

und

$$10,5 \times 0,07 = \frac{105}{10} \times \frac{7}{100} = \frac{735}{1000} = 0,735$$

Eben so ist

$$\begin{aligned} 0,008 \times 0,04 &= 0,00032 \\ 0,372106 \times 0,0054 &= 0,0020093724 \\ 5,78 \times 34 &= 196,52 \\ 0,000054 \times 3785 &= 0,20439 \end{aligned}$$

Die abgekürzte Multiplication s. Bd. I, pag. 5. Hierbei ist zu bemerken, dafs auch vorgezogen wird, statt mit der letzten Ziffer (6) des Multiplicators, mit der ersten (5) desselben anzufangen, so dafs 1927 die oberste und 23 die unterste Reihe der Partialproducte wird.

4. Division.

Regel. Verrücke das Komma im Divisor um so viele Stellen, dafs derselbe eine ganze Zahl wird; dann das Komma im Dividendus um eben so viele Stellen und dividire. Z. B.

1. Beispiel. 3,45 : 0,2.

Hierfür schreib 34,5 : 2 und dividire.

Denn es ist

$$3,45 : 0,2 = \frac{345}{100} : \frac{2}{10} = \frac{345}{10} : 2 = 34,5 : 2$$

Nun dividirt:

$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ \hline 34,5 & 17,25 \\ 2 & \\ \hline 14 & \\ 14 & \\ \hline 5 & \\ 4 & \\ \hline 10 & \\ 10 & \end{array}$$

Sprich: 2 in 3 geht 1 mal, in 14 geht 7 mal; hinter 17 wird das Komma gesetzt, weil jetzt 34 Ganze dividirt sind. 2 in $\frac{5}{10}$ geht $\frac{2}{10}$ mal, bleibt $\frac{1}{10}$; eine Null hinter 1 gesetzt gibt $\frac{1}{10} = \frac{10}{100}$; 2 in $\frac{10}{100}$ geht $\frac{5}{100}$ mal.

2. Beispiel 0,0005 : 25 = 0,00002

Hier ist der Divisor schon eine ganze Zahl. Also: 25 in 0 Einer geht 0 mal, 0 gesetzt mit Komma dahinter; 25 in $\frac{0}{10}$ geht $0 = \frac{0}{10}$ mal, die 0 als Zehntel gesetzt, 25 in $\frac{0}{100}$, desgleichen in $\frac{0}{1000}$ geht 0 mal, die Nullen als Hundertel und Tausendtel gesetzt, 25 in $\frac{5}{10000}$ geht $0 = \frac{0}{10000}$ mal, diese 0 als 4te Stelle gesetzt, hinter 5 eine 0 gedacht macht $\frac{5}{10000}$ zu $\frac{50}{100000}$, hierin mit 25 dividirt geht $\frac{2}{100000}$ mal.

3. Beispiel 2034 : 0,0018 schreibe 20340000 : 18 gibt 1130000.

So ist

$$400 : 0{,}25 = 1600$$
$$40 : 0{,}25 = 160$$
$$4 : 0{,}25 = 16$$
$$4 : 0{,}025 = 160$$
$$4 : 0{,}0025 = 1600$$
$$0{,}0001 : 0{,}02 = 0{,}005$$
$$45 : 0{,}1 = 450 \text{ u. s. w.}$$

4. Das Ausziehen einer Quadratwurzel s. Bd. I, pag. 241, No. 5; einer Kubikwurzel Bd. I, pag. 242. Dafs die Klassentheilung der Potenz vom Komma ab geschehen mufs ist klar, denn es ist

$$\left(\frac{1}{10}\right)^2 = \frac{1}{100} \text{ oder } 0{,}1^2 = 0{,}01$$
$$\left(\frac{1}{10}\right)^3 = \frac{1}{1000} \text{ oder } 0{,}1^3 = 0{,}001$$

u. s. w.

5. Aus der Lehre von der Division der Decimalbrüche entspringt die Regel zur Verwandlung der gemeinen Brüche in Decimalbrüche, denn man hat nur nöthig, die Division, welche der gemeine Bruch verlangt, auf die obige Weise wirklich auszuführen, indem man mit Beobachtung des Komma dem Zähler Nullen anhängt. Z. B.

$$\frac{1}{2} = \frac{1{,}0}{2} = 0{,}5$$
$$\frac{3}{4} = \frac{3{,}00}{4} = 0{,}75$$
$$\frac{1}{3} = \frac{1{,}000\ldots}{3} = 0{,}3333\ldots$$

Das letzte Beispiel gibt einen Decimalbruch mit einer unbegrenzten Anzahl von Ziffern und dies geschieht bei der Verwandlung eines jeden Bruchs, dessen Nenner aufser der 2 und der 5 noch andere Primfactoren enthält.

Dagegen hat ein solcher Decimalbruch die Eigenschaft, dafs eine gewisse Anzahl von Ziffern in derselben Reihenfolge immer wiederkehrt. Z. B.

$$\frac{1}{11} = 0{,}09\ 09\ 09\ 09\ \ldots\ldots$$
$$\frac{1}{7} = 0{,}142857\ 142857\ 142857\ \ldots\ldots$$
$$\frac{1}{44} = 0{,}02\ 27\ 27\ 27\ 27\ \ldots\ldots$$

Denn mit welcher Zahl und in welche Zahl man auch dividiren mag, so können immer nur so viele verschiedene Reste entstehen als der Divisor Einheiten enthält weniger 1. Z. B. bei der Division mit 6 können nur die Reste 1, 2, 3, 4, 5; bei der Division mit 5 nur die Reste 1, 2, 3, 4 vorkommen, und da die zu dem jedesmaligen Rest genommene Endziffer immer $= 0$ ist, so hat man bei dem Divisor 6 die Partialdividenden 10, 20, 30, 40, 50; bei der Division mit 5 die Partialdividenden 10, 20, 30, 40. Wo also ein Rest zum zweiten Mal vorkommt, mufs eine Wiederkehr von Ziffern im Quotient beginnen.

Bei der Division $\frac{1}{7} = \frac{\overset{3\,2\,6\,4\,5\,1\,3}{1{,}0000000}}{7} = 0{,}142857$ erhält man aufeinanderfolgend die Reste 3, 2, 6, 4, 5, 1; und da der Dividend mit 1 anfängt, so fangen auch die weiteren Reste wieder mit 3 an, werden der Reihenfolge nach dieselben und eben so ist es mit den ferner folgenden Ziffern im Quotienten.

Man hat auch viele Fälle, wo die Entwicklung einer Zahl in einen Decimalbruch bis ins Unendliche fortlaufende Ziffern ohne Wiederkehr erzeugt. Dies findet z. B. statt, wenn eine Wurzel aus einer unvollkommenen Potenz gezogen wird als $\sqrt[2]{5}$; $\sqrt[3]{2}$; $\sqrt[4]{3}$ u. s. w. wie Bd. I, pag. 241, 242 u. f. wo bei dem Gewinn jeder neuen Ziffer in der Wurzel ein Rest entsteht, der noch nicht dagewesen ist und ebenso ein neuer noch nicht da gewesener Divisor hervorgeht.

6. Decimalbrüche mit begrenzter Anzahl von Ziffern heifsen geschlossene D.; mit unbegrenzter Stellenanzahl fortlaufende D. Letztere mit wiederkehrenden Ziffern der Reihenfolge nach heifsen wiederkehrende oder circulirende oder periodische D. Die immer wiederkehrende Reihe von Ziffern heifst Periode. Fängt die Periode mit der ersten Ziffer nach dem Komma an, so heifst der D. vollständig periodisch wie: 0,47 47 47..; gehen nach dem Komma der ersten Periode eine oder mehrere Ziffern voran, so heifst der D. unvollständig periodisch wie 0,31 47 47 47.... Die Perioden heifsen 1ziffrig, 2ziffrig, ...$n$ziffrig, je nachdem sie aus 1, 2, ...n Ziffern bestehen.

7. Ein geschlossener D. wird in einen gemeinen Bruch verwandelt, wenn man ihn als ganze Zahl in den Zähler und den zugehörigen decadischen Nenner darunter schreibt, wonach man wo möglich noch heben kann. Als

$$0{,}575 = \frac{575}{1000} = \frac{23}{40}$$

8. Ein vollständig periodischer D. ist = demjenigen gemeinen Bruch, der die Periode zum Zähler und den zu ihr gehörigen decadischen Nenner weniger 1 zum Nenner hat.

Z. B. $0{,}333\ldots$ ist $= \frac{3}{10-1} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

$$0{,}27\,27\,27\ldots = \frac{27}{100-1} = \frac{27}{99} = \frac{3}{11}$$

$$0{,}296\,296\ldots = \frac{296}{1000-1} = \frac{296}{999} = \frac{8}{27}$$

Denn es sei $0,abcd\ldots n\,abcd\ldots.n\ldots.$ ein D. von n ziffriger Periode, der zu dieser Periode gehörige decadische Nenner also $= 10^n$, sein Werth $= x$, so hat man, wenn man mit 10^n multiplicirt

$$10^n x = a\,b\,c\,d\ldots n,\; abcd\ldots.n\;abcd\ldots.n\ldots\ldots$$

hierzu

$$x = \qquad 0,\; abcd\ldots\; n\,abcd\ldots\; n\ldots\ldots$$

folglich subtrahirt, wobei die Decimalstellen sich aufheben

$$(10^n - 1)\,x = abcd\ldots.n$$

und

$$x = \frac{abcd\ldots n}{10^n - 1}$$

9. Ein unvollständig periodischer D. ist = demjenigen gemeinen Bruch dessen Zähler = ist der Differenz zwischen den Vorziffern + der ersten Periode als ganze Zahl und den Vorziffern allein als ganze Zahl, und dessen Nenner = ist dem Product aus dem zur Periode ohne Vorziffern gehörenden decadischen Nenner weniger 1 multiplicirt mit dem zu den Vorziffern gehörenden dekadischen Nenner. Z. B.

$$0{,}3555\ldots = \frac{35-3}{(10-1)\times 10} = \frac{32}{90} = \frac{16}{45}$$

$$0{,}27\,666\ldots = \frac{276-27}{(10-1)\times 100} = \frac{249}{900} = \frac{83}{300}$$

$$0{,}00\,15\,15\ldots = \frac{15-0}{(100-1)\times 100} = \frac{15}{9900} = \frac{1}{660}$$

Denn es sei

$0,abc\ldots m\,ABC\ldots.\,N\,ABC\ldots.\,N\ldots\ldots$

ein D. dessen Perioden $ABC\ldots N$ aus n Ziffern bestehen, welchen m Ziffern $abc\ldots m$ voranstehen, sein Werth sei x so ist

$$10^m x = abc\ldots m,\qquad ABC\ldots.N\,ABC\ldots.N\ldots.$$

$$10^n\cdot 10^m x = abc\ldots m\,ABC\ldots N,\; ABC\ldots.N\,ABC\ldots.N\ldots.$$

folglich subtrahirt, wobei die Decimalstellen sich aufheben

$$10^m(10^n-1)x = abc\ldots m\,ABC\ldots N - abc\ldots.m$$

und

$$x = \frac{abc\ldots m\,ABC\ldots N - abc\ldots.m}{(10^n-1)\,10^m}$$

Anmerk. Sollte es nicht angemessen gefunden werden, dafs man Buchstaben in dekadischer Ordnung wie Ziffern schreibt, so kann man den Beweisen ad 8 und 9 auch folgende Form geben: Der Werth einer $n$ziffrigen Periode als ganze Zahl sei A so ist der Werth des vollständigen D.

$$x = \frac{A}{10^n} + \frac{A}{10^{2n}} + \frac{A}{10^{3n}} + \frac{A}{10^{4n}} + \ldots.$$

mit 10^n multiplicirt gibt

$$10^n x = A + \frac{A}{10^n} + \frac{A}{10^{2n}} + \frac{A}{10^{3n}} + \frac{A}{10^{4n}} + \ldots\ldots$$

subtrahirt gibt, da sämmtliche Glieder der oberen Reihe gegen die ihnen gleichen Glieder der unteren Reihe sich aufheben

$$10^n x - x = A$$

woraus

$$x = \frac{A}{10^n - 1}$$

Es sei bei dem unvollständig periodischen D. der Werth der m Vorziffern, diese als ganze Zahl $= B$, so ist der Werth des Bruchs =

$$x = \frac{B}{10^m} + \frac{A}{10^{m+n}} + \frac{A}{10^{m+2n}} + \frac{A}{10^{m+3n}} + \ldots$$

mit 10^m multiplicirt gibt

$$10^m x = B + \frac{A}{10^n} + \frac{A}{10^{2n}} + \frac{A}{10^{3n}}$$

Diese Gleichung mit 10^n multiplicirt gibt

$$10^m\cdot 10^n x = 10^n B + A + \frac{A}{10^n} + \frac{A}{10^{2n}} + \frac{A}{10^{3n}} + \ldots.$$

Die zweite Gleichung von der 3ten abgezogen

$$10^m 10^n x - 10^m x = 10^n B + A - B$$

woraus $x = \frac{10^n B + A - B}{(10^n - 1)\, 10^n}$

Rechnung mit periodischen Decimalbrüchen.

10. Da alle geschlossene und alle periodische D. auf bestimmte in gemeinen Brüchen darstellbare Werthe zurückgeführt werden, alle übrigen D. aber irrational sind, so mufs aus den Rechnungen mit geschlossenen und mit periodischen D. wiederum ein geschlossener oder ein periodischer Decimalbruch als Resultat hervorgehen, sobald man nicht abgekürzt rechnet und die vielleicht schriftlich weggelassenen nächst folgenden Ziffern der Periode unberücksichtigt läfst.

Addition: Beispiele

1) 0, 254
0, 777 77...
1, 031 77....

2) 0, 38
0, 056 56....
0, 43 65 65....

3) 0, 24 24...
0, 75 75...
0, 99 99... = 1

4) 0, 24 24....
0, 55 55...
0, 79 79...

5) 0, 25 25 25..
0, 00 77 77...
0, 26 03 03....

6) 0, 22 222...
0, 34 777...
0, 56 99.... = 0,57

7) 0, 253 253 253...
0, 65 65 65 65 65...
0, 909 818 909 818....

Subtraction: Beispiele

1) 1, 254
0, 77 77...
0, 476 222....

2) 0, 38
0, 056 56...
0, 32 343 343....

3) 1, 24 24 24....
0, 75 75 75.....
0, 48 48 48....

4) 1, 24 24...
0, 55 55...
0, 78 78 78....

5) 0, 25 25 25...
0, 00 77 77..
0, 24 47 47....

6) 0, 568 55....
0, 555 55...
0, 013

7) 0, 56 56....
0, 243
0, 322 65 65...

Multiplication:

1. Beispiel 3879 × 0,777.....

Multiplicire 7 × 3879 so erhält man 27153 als Partialprodukt jeder einzelnen Multiplicationsreihe. Jede vollständige senkrechte Ziffernreihe besteht aber aus der Summe der Ziffern dieses Partialproducts = 3 + 5 + 1 + 7 + 2 = 18, hierzu von der vorherigen senkrechten Reihe die Zehnerzahl 1 addirt gibt 19, betrachte die 19 als die Summe der letzten vollständigen senkrechten Reihe so schreib 9

1 (im Sinn) + 5 + 1 + 7 + 2 = 16;
6 vor die 9 geschrieben 69

1 (im Sinn) + 1 + 7 + 2 = 11;
1 vor die 6 geschrieben 169

1 (im Sinn) + 7 + 2 = 10;
0 vor die 6 geschrieben 0169

1 (im Sinn) + 2 = 3;
3 vor die 0 geschrieben 30169..

und es ist

3879 × 0,777.... = 3016,999 ...... = 3017

Die wirklich ausgeführte Multiplication hat die Gestalt.

2(7153)
27(153)
271(53)
2715(3)
27153
27153
3016,99

Das Komma bestimmt sich aus dem gleich bleibenden Partialproduct 27153, welches man als 0,7 × 3879 betrachtet, so dafs eine Decimalstelle abgeschnitten wird.

2. Beispiel.

305217 × 0,341 341 .....

Die Periode besteht aus mehreren Ziffern.

Multiplicire mit nur einer Periode die Zahl. Man erhält 305217 × 341 = 104078997.

Nun liefse sich hier dieselbe Regel wie bei dem ersten Beispiel anwenden, man hätte nur zu beachten, dafs wenn die Producte aus den folgenden Perioden hinzutreten, die auf einander folgenden vollständigen senkrechten Reihen bestehen
aus der 1. + 4. + 7. Ziffer = 1 + 0 + 9 = 0
aus der 2. + 5. + 8. Ziffer = 0 + 7 + 9 = 16
aus der 3. + 6. + 9. Ziffer = 4 + 8 + 7 = 19

Um nun bei Anwendung der Regel keinen Irrthum zu begehen ist es besser, wenn man die Reihen wirklich untereinander setzt und addirt, nämlich

104(078 997)
104078(997)
104078997
104078997
104183,180 180 180...

Das Komma bestimmt sich wieder aus dem Partialproduct der ersten Periode
$305217 \times 0{,}341 = 104078{,}997$

3. Beispiel. Ist der D. ein unvollständig periodischer D., stehen z. B. in dem vorigen Beispiel der Periode noch die Ziffern 76 voran, ist also die Aufgabe:
$305217 \times 0{,}76341\ 341\ldots$
so hat man aus dem vor. Bsp.

$$\begin{array}{lll} & 305217 \times 0{,}00\,341\,341\ldots & = \ \ 1041{,}83\,180\,180\ldots \\ \text{hierzu} & 305217 \times 0{,}76 & = 231964{,}92 \\ & \text{Product} & = 233006{,}75\,180\,180\ldots \end{array}$$

Hat man periodische D. mit periodischen D. zu multipliciren so geschieht dies einfacher wenn man dieselben in gemeine Brüche verwandelt; desgleichen bei Division durch periodische D.

11. Ein D., der weder geschlossen noch periodisch ist, kann in seinem Werth nicht angegeben werden, z. B. der D., welcher $\sqrt[7]{15}$ ausdrückt und der als eine irrationale Zahl aus unbegrenzt vielen Ziffern besteht, ohne Perioden zu enthalten Man gibt dessen Werth also näherungsweise auf eine bestimmte Anzahl Decimalstellen an, wobei man mit deren Anzahl, wie bei den Logarithmen geschieht, den Grad der Genauigkeit beliebig feststellt oder wahrnimmt.

Decimalfufs ist der Fufs als der 10te Theil der Ruthe, wenn diese, wie in Preufsen, das Normallängenmaafs ist, und er wird wieder in 10 Decimalzoll, der Zoll wieder in 10 Decimallinien eingetheilt Decimalruthe sagt man nicht, sondern schlechtweg Ruthe, weil das Vorwort: Decimal nur auf diejenige Gröfse sich bezieht, welche der 10te Theil einer anderen Gröfse ist und weil dieselbe Ruthe auch andere Eintheilungen erhält, wie in Preufsen für Werkmaafs in 12 Fufse, so dafs die Ruthe als Werkmaafs unnützer Weise Duodecimalruthe genannt werden würde. Ist der Fufs das Normalmaafs, so nennt man ihn aus demselben Grunde schlechtweg Fufs.

Decimallinie s. u. Decimalfufs.

Decimalmaafs ist ein Maafs mit Decimal-Eintheilung, wie in Preufsen für Feldmesser die Längen- und Flächenmaafse, wenigstens die Ruthe und die □Ruthe; die Meile gehört schon nicht mehr dazu, denn sie hat 2000 Ruthen; der Morgen auch nicht, denn dieser enthält 180 □Ruthen. Mit den Kubikmaafsen und den Münzen haben wir ebenfalls nicht Decimalmaafse, jedoch sind die neuesten Gewichte, das Zollgewicht, in Centnern und Pfunden wenigstens, nach dem Decimalsystem eingerichtet; das unmittelbar hierauf folgende Loth ist wieder, statt $^1/_{10}$ oder $^1/_{100}$ Pfund zu sein, $^1/_{30}$ desselben.

In Frankreich ist die Decimaltheilung ganz allgemein eingeführt. Das Normallängenmaafs, das Meter (etwa 3′ 2″ preufs) ist in 10tel, 100tel, 1000tel, in Decimeter, Centimeter und Millimeter getheilt; auch die gröfseren Längenmaafse sind 10fache, 100fache, 1000fache und 10000 fache des Meters; nämlich das Decameter, das Hectometer, das Kilometer und das Miriameter.

Desgleichen die Feldmaafse: Die Are ist = 100□^{m} = 1 □Decameter, sie ist eingetheilt in 100 Centiaren zu 1□^{m}, 100 Aren sind = der Hectare

Desgleichen die Körpermaafse: die Stère, eingetheilt in 10 Decisteren, ist der Cubikmeter. Das Liter, zu 10 Deciliter zu 10 Centiliter zu 10 Milliliter ist = dem Kubikdecimeter = $^1/_{1000}$ Cubikmeter; 10 Liter sind der Decaliter, 10 Decaliter der Hectoliter, 10 Hectoliter der Kiloliter.

Desgleichen die Gewichte: das Gramm ist das Gewicht eines Cubikdecimeters destillirten Wassers bei seiner gröfsten Dichtigkeit. Es wird eingetheilt in 10 Decigramme zu 10 Centigramme zu 10 Milligramme. 10 Gramme sind das Decagramm, 10 Decagramme sind das Hektogramm, 10 Hectogramm das Kilogramm. (2 Zollpfund), 10 Kilogramme sind das Miriagramm.

Endlich haben die Münzen ebenfalls Decimalsystem: 1 Franc ist = 100 Centimes.

Das Decimalsystem bei Maafsen gewährt eine grofse Erleichterung beim Rechnen, weil jedes kleinere Maafs als Decimalbruch geschrieben werden kann, so dafs nur immer wie mit ganzen Zahlen zu rechnen ist.

Decimalstellen oder Decimalen sind die Ziffern, welche zu einem Decimalbruch gehören.

Decimalsystem ist im Allgemeinen jedes System, bei welchem alle Graduirungen nach Zehnteln und Zehnfachen gesche-

hen. Im Besondern ist D. gleichbedeutend mit dem dekadischen Zahlensystem.

Decimalzahlen sind die nach dem dekadischen System geschriebenen Zahlen.

Deckung in der Geometrie s. v. w. Congruenz (s. d.)

Declination eines Gestirns s. v. w. Abweichung eines Gestirns (s. d.). Sie ist für die Gestirne oder die Orte des Himmels das, was für die Orte der Erdoberfläche nördliche und südliche geographische Breite ist

Declinationskreis s. v. w. Abweichungskreis (s. d.).

Decrement ist der Unterschied zweier aufeinander folgender Glieder einer abnehmenden Reihe, im Gegensatz von Increment, dem Unterschied derselben bei einer zunehmenden Reihe. Für beide sagt man jetzt allgemein: Differenz.

Definition ist die Darstellung aller wesentlichen Merkmale eines Gegenstandes zu seinem Begriff. (s. d.) Dieser entsteht also durch die Zusammenstellung aller Vorstellungen, sowohl der die dem Gegenstande mit noch anderen von ihm verschiedenen gemeinsam sind als der, die ihm allein zukommen.

Bei mathematischen D. darf man keine Eigenschaften als Merkmale angeben, deren Vorhandensein oder Möglichkeit erst erwiesen werden mufs. Dafs ein Quadrat diejenige 4seitige Figur ist, welche lauter gleiche Seiten und 4 rechte Winkel hat, hätte Euklid in No. 30 nicht voranstellen sollen; erst mufste bewiesen werden, dafs in jedem Viereck die Summe aller 4 Winkel = 4 Rechten ist, dafs also 4 rechte Winkel in einem Viereck möglich sind. Desgleichen war die 27te Erklärung, dafs Triangel rechtwinklig heifsen wenn sie einen rechten Winkel haben, nicht voranzustellen; es mufste erst erwiesen werden, dafs ein Dreieck nicht 2 und nicht 3 rechte Winkel haben kann, wenn man die Frage nicht hören will, wie ein Dreieck mit zweien oder dreien Rechten Winkeln heifse. Können doch in spärischen Dreiecken alle 3 Winkel rechte sein.

Dehnbar ist ein Fossil, wenn es sich durch einen Hammer oder zwischen Walzen strecken läfst.

Dekadik, dekadisches System, zehntheiliges System nämlich Zahlensystem ist das System nach welchem die Zahlen, d. h. die verschiedenen ganzen Vielfachen der Einheit ausgesprochen und geschrieben werden. Das System besteht darin, dafs die Zahlen von der Einheit ab aufwärts in Klassen gebracht sind, von denen jede als höchstes Vielfaches die 9fache Einheit derselben Klasse enthält, so dafs die 10fache Einheit derselben Klasse schon die Einheit der folgenden Klasse ausmacht; und zwar wie in der mündlichen so in der schriftlichen Bezeichnungsweise.

Wie nämlich die grofse Anzahl von Wörtern, aus welchen eine Sprache besteht, nur wenige Urlaute hat und mit nur wenigen verschiedenen Buchstaben geschrieben wird, so sind für jede noch so grofse Zahl nur wenige Urzahlwörter erforderlich und nur 9 verschiedene Zahlzeichen reichen aus, (Null ist keine Zahl und also ist das Nullzeichen kein Zahlzeichen) um sie lesbar darzustellen.

Die Urzahlwörter sind die ersten 10 Zahlen von 1 ab bis 10, also die 9 verschiedenen Vielfache der ersten Klasse und die darauf folgende Einheit der zweiten Klasse, nach welcher das ganze System den Namen führt. Dann die Zahl Hundert, die Zahl Tausend und die Million, welches eine neuere Bezeichnung ist. Alle übrigen Zahlen werden mit abgeleiteten Zahlwörtern bezeichnet: Zweizig, Dreizig (Zwanzig, Dreifsig sind Sprachausnahmen), Vierzig... Neunzig sind die 2, 3, 4, ... 9fachen der Zahl 10, der Einheit der zweiten Klasse; die Hunderte werden gezählt, desgleichen die Tausende und die Millionen. Alle zwischen liegende und die aus allen Klassen zusammengesetzten Zahlen werden als Rechenexempel ausgesprochen. Z. B.

98765321

Acht und Neunzig Millionen, sieben mal hundert fünf und sechzigtausend drei hundert und ein und zwanzig. D. h. man rechne das Exempel aus:

$$(8+9\times 10)\,1000000+(7\times 100+5+6\times 10)\times 1000+3\times 100+1+2\times 10.$$

Wie man aus den alten Sprachen ersieht war schon das dekadische System bei den gebildeten Völkern des Alterthums in Gebrauch, aber auch wilde Völker zählen nach Zehnfachen, was jedenfalls von den 10 Fingern herkommt, die an beiden Händen eines Menschen sich befinden, wie auch heut bisweilen noch bei uns an Fingern abgezählt wird. Die dekadische Schreibart dagegen ist mit den dekadischen Sprachweisen nicht zugleich erfunden worden: die Griechen bedienten sich der Buchstaben ihres Alphabets, die beschwerliche Zahlschreibung der Römer ist bekannt. Das jetzt allgemein gebräuchliche dekadische Schreibsystem ist eine Erfindung und zwar eine uralte Erfindung

der Inder (auch ein Nullzeichen hatten sie), von denen die Araber es uns erst spät herüber gebracht haben, so dafs das System im 13ten Jahrhundert noch erst wenig bekannt war.

Dekadische Brüche sind Brüche, deren Zähler 1 und deren Nenner dekadische Zahlen sind als $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}$.

Dekadische Ergänzung einer Zahl ist der Rest, wenn man die Zahl von der zunächst gröfseren dekadischen Zahl abzieht. Die dekadische E von der Zahl 44 ist $100 - 44 = 56$.

Dekadische Ganze nennt man die dekadischen Zahlen im Gegensatz zu dekadischen Brüchen

Dekadische Zahlen sind die Eins und die ganzen Potenzen von Zehn, näml. 1, 10, 100, 1000 u. s. w.

Dekadisches Zahlensystem s. v. w. Dekadik.

Dekagon ist das reguläre Zehneck.

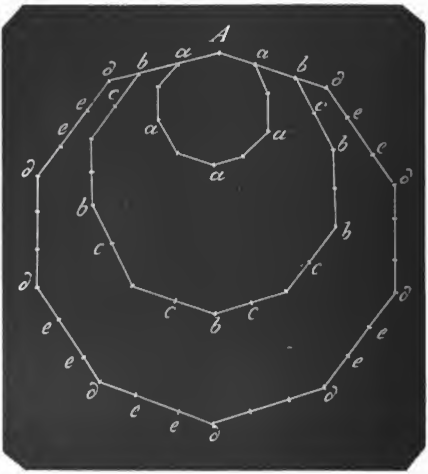
Dekagonalzahl, zehneckige Zahl ist diejenige Polygonalzahl deren zu Grunde liegendes Polygon das Zehneck ist. Die Zahlen sind nämlich die Anzahl der Punkte, welche die Ecken und die Seiten in gleichbleibenden Entfernungen von einander aufnehmen, wenn die Seiten des Polygons ein, zwei, drei, ... $n$mal vergröfsert werden. Fig. 556 macht dies anschaulich. $Aa..A$ ist das Zehneck, dessen Seite = 1 ist; die Ecken enthalten in Summa 10 Punkte, mithin ist 10 die Grundzahl der Reihe für die D zahlen.

Indem man sich vorstellt, dafs das Zehneck bis zu dem Punkt A, von dem man bei der Construction sämmtlicher die Reihe erzeugenden Polygone ausgeht, wenn man die Seiten immerfort kleiner nimmt, verschwindet, so dafs das Polygon in dem Punkt A nur einen Punkt bildet, ist 1 die erste Zahl der Reihe, 10 die zweite Zahl.

Verlängert man nun die beiden Seiten Aa bis b um dieselbe Länge Aa und construirt das Zehneck, dessen Seiten von der Länge Ab sind, so erhält jede Seite des zweiten Polygons noch einen Punkt in der Mitte. Zu den schon aufgezählten 10 Punkten kommen nun hinzu: 9 Punkte b in den Ecken und 8 Punkte c in den Mitten von noch 8 Seiten, zusammen also 17 Punkte, und die 3te D. ist $= 10 + 17 = 27$.

Verlängert man wiederum die beiden Seiten Ab bis d um die Länge $Aa = 1$, so erhält jede der beiden Seiten 2 Punkte in der Mitte; construirt man nun das zu diesen Seiten Ad gehörige Zehneck, so kommen zu den schon aufgezählten 27 Punkten noch 9 Punkte d in den neuen Ecken hinzu und 2 Punkte e in jeder der noch nicht aufgezählten 8 Seiten, also 16 Punkte, in Summa kommen $9 + 16 = 25$ Punkte hinzu und die 4te D. ist $= 27 + 25 = 52$ u. s. w.

Fig. 556.



Die erste D. ist = 1
die zweite D.
$= 1 + (9) = 10$
die dritte D.
$= 10 + (9 + 1 \cdot 8) = 27$
die vierte D.
$= 27 + (9 + 2 \cdot 8) = 52$
die fünfte D.
$= 52 + (9 + 3 \cdot 8) = 85$
. . . .

die $n$te D.

$= x + [9 + (n - 2)\,8] = x + (8n - 7) = y$ wenn man mit x die $(n - 1)$te D. bezeichnet.

Die eingeklammerten Zahlen bilden also die erste Differenzenreihe der Dreihe und es ist dieselbe

$1 \cdot 9 \cdot 17 \cdot 25 \cdot 33 \cdot 41 \ldots\ldots 8n - 7$

bildet man von dieser Reihe die Differenzen, so erhält man dieselben einander gleich, $= 8$. Es ist also die Reihe der D. eine Reihe der zweiten Ordnung, von welcher das erste Glied der ersten Differenzenreihe $= 1$ und von der wieder die Differenz $= 8$ ist. Man erhält das $n$te Glied der Dreihe aus der Summe der ersten n Glieder der Differenzenreihe

$$= \frac{1 + (8n - 7)}{2} \cdot n = n\,(4n - 3)$$

(s. Arithmetische Reihe, pag. 120, No. 7, Formel 7).

Man hat also die arithmetische Darstellung der Reihe

Differenz

8 8 8 8 8 8

Differenzenreihe

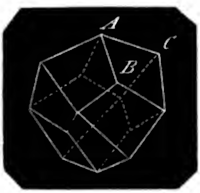
1 9 17 25 33 41 .... $8n - 7$

Dekagonalzahlen

1 10 27 52 85 126 .... $n(4n - 3)$

Deltoiddodekaeder, Hemitriakisoktaeder, Halbdreimalachtflächner, Trapezoiddodekaeder, ein Krystall von 12 Flächen, 24 Kanten und 14 Ecken. Die Flächen sind symmetrische Trapezoide. Von den Kanten sind 12 schärfere und längere, 12 stumpfere und kürzere. Von den Ecken sind 6 vierflächige symmetrische A, 4 dreiflächige stumpfe B und 4 dreiflächige spitze C.

Fig. 557.



Demonstration s. v. w. Beweis, und zwar besonders ein unwiderlegbarer, ein apodiktischer Beweis.

Depressionswinkel ist der Winkel in einer Vertikalebene von der Horizontallinie als dem festen Schenkel abwärts, im Gegensatz von Elevationswinkel, der von der Horizontalen aufwärts gemessen wird.

Descension eines Gestirns s. v. w. Absteigung eines Gestirns s. d.

Descensional-Differenz s. v. w. Absteigungs-Unterschied, s. d.

Deviation ist die Abweichung eines in Bewegung befindlichen Punkts von einer vorherigen Richtung.

Diakaustische Linie, Diakaustica s. u. Brennlinie.

Diagonal (*διά* durch, hinüber; *γωνία* Ecke). Von einer Ecke zur andern hinüber.

Diagonale, Diagonallinie ist eine gerade Linie, welche von einer Ecke einer ebenen Figur nach einer anderen, mit jener nicht zu derselben Seite der Figur gehörenden Ecke gezogen wird. Dieselbe kann auch aufserhalb der Figur fallen und dies geschieht wenn die beiden Seiten einer Ecke einen convexen Winkel bilden.

Hat die Figur n Seiten, also auch n Ecken, so ist die Summe aller möglichen D. in derselben $= \frac{1}{2}n(n - 3)$. Denn von jeder Ecke aus kann man $(n - 3)$ D. ziehen; von allen n Ecken aus also $n(n - 3)$ D. Nun ist aber jede dieser $n(n - 3)$ D. doppelt gerechnet, weil sie eine Ecke zum Anfangspunkt und eine zum Endpunkt hat, folglich nur die Hälfte derselben $= \frac{1}{2}n(n - 3)$ D. vorhanden.

Das Dreieck hat $\frac{1}{2}3\,(3 - 3) = 0$ D.
das Viereck hat $\frac{1}{2}4\,(4 - 3) = 2$ D.
das Fünfeck hat $\frac{1}{2}5\,(5 - 3) = 5$ D.
u. s. w.

Diagonalebene ist eine Ebene die durch 3 nicht in einerlei Umfangsebene liegenden Ecken eines Körpers gelegt wird.

Diameter, Durchmesser einer krummen Linie ist eine gerade Linie, durch welche irgend ein System von parallelen Sehnen dieser krummen Linie halbirt wird; ist das System der Sehnen rechtwinklig mit dem D., so heifst der D. auch Axe. In der Regel gebraucht man die Bezeichnung: Durchmesser, und nur beim Kreise sagt man auch Diameter, so wie man den Durchmesser des gröfsten Kreises einer Kugel, also jede durch den Mittelpunkt liegende zwischen zweien Punkten der Kugeloberfläche befindliche gerade Linie auch Diameter der Kugel nennt.

Dichtigkeit eines Körpers ist das Ver-

hältnifs seiner Masse zu dem Raum, den er einnimmt, also wenn man ein kubisches Maafs als Einheit festsetzt, die in dieser Kubikeinheit befindliche Masse selbst. Ist M die Masse, V das Volumen eines Körpers, so ist seine D. $= \frac{M}{V}$. Beträgt $V = n$ Kubikfufs, so ist $\frac{M}{n}$ die in einem Kubikfufs Raum befindliche Masse und D. $= \frac{M}{n}$.

Die Masse eines Körpers besteht in der unzählbaren Menge seiner materiellen Theile; man hat von derselben nur einen relativen Begriff und zwar dadurch, dafs man sie den gleichen physikalischen Erscheinungen nach mit der Masse eines andern Körpers vergleicht und dies ermöglicht die Anziehungskraft unsres Erdkörpers, indem diese auf jedes einzelne Massenelement eines jeden Körpers eine gleich grofse Einwirkung ausübt, womit die Erde dafür von jedem einzelnen Massenelement einen gleich grofsen Druck empfängt, welcher sich durch Gewicht ausspricht.

Haben 2 verschiedene Stoffe von einerlei Volumen die Gewichte Q, q; die Massen M, m und beträgt der Druck eines Massenelements auf den Erdkörper, d. h. das Gewicht des Elements g Gewichtseinheiten so ist $gM = Q$ und $gm = q$

also $$M : m = \frac{Q}{g} : \frac{q}{g} = Q : q$$

d. h. die Massen zweier Körper verhalten sich wie deren Gewichte bei einerlei Volumen.

Ist das Volumen beider Körper $= V$, so sind die Dichtigkeiten D, d beider Stoffe $= \frac{M}{V}$ und $\frac{m}{V}$, daher hat man

$$D : d = \frac{M}{V} : \frac{m}{V} = M : m = Q : q$$

und die Dichtigkeiten beider Stoffe verhalten sich wie deren Gewichte bei einerlei Volumen.

Versteht man unter S, s die Gewichte der Volumeneinheit dieser Stoffe, d. h. die specifischen Gewichte, wenn man das Gewicht eines bestimmten Stoffes wieder als Gewichtseinheit festsetzt, so ist $Q = S \cdot V$ und $q = s \cdot V$

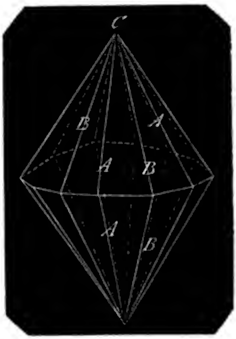
Also $D : d = M : m = Q : q = S : s$ also die Dichtigkeiten zweier Stoffe verhalten sich wie deren specifische Gewichte.

Aus diesem Grunde wählt man auch zur Einheit für die D. der Körper denselben Stoff, den man zur Einheit der specifischen Gewichte nimmt, nämlich das destilirte Wasser in dem Zustande seiner gröfsten Dichtigkeit bei 4° C. Nur bei den Gasen legt man auch die trockene atmosphärische Luft bei $0{,}76^m$ Druck Quecksilbersäule und 0° C. zu Grunde. Es wird demnach die Dichtigkeit und das specifische Gewicht eines Körpers durch einerlei abstracte Zahl ausgedrückt.

Dicke ist die dritte der drei Dimensionen eines körperlichen Raumes oder eines Körpers. Man sagt: Länge, Breite, Höhe und für Höhe auch Stärke oder Dicke.

Didodekaeder (δίς zweimal) Zweimalzwölfflächner, Sechs und sechskantner ist ein Krystall von 24 Flächen, 36 Kanten in 14 Ecken in nebenstehender Form, bestehend aus zwei Pyramiden

Fig. 558.



mit gemeinschaftlicher symmetrischer 12-seitiger Basis. Die Flächen sind ungleichseitige Dreiecke, daher die Kanten und Ecken dreierlei. Von den Kanten sind 24 Scheitel- oder Endkanten, von denen abwechselnd je 2 und 2 einander gleich sind A und A, B und B, ferner 12 Seitenkanten D in der Ebene der Basis. Von den Ecken sind 2 symmetrische 12flächige Ecken C und 12 vierflächige Ecken von denen die, welche die Kanten A und die, welche die Kanten B verbinden untereinander symmetrisch sind. Die Ebene, welche durch 2 Paar einander gegenüberliegende Endkanten gelegt werden sind Rhomben, die Hauptaxe verbindet die Ecken C.

Ein Mehreres über diese Krystallform kann erst später erfolgen.

Differenz ist das Resultat einer Subtraction, oder auch der Theil, um welchen eine Gröfse vermehrt oder vermindert werden mufs, oder auch die Menge der Theile oder Einheiten, welche man einer Gröfse hinzufügen oder von ihr hinwegnehmen mufs um diese einer anderen Gröfse derselben Art gleich zu machen.

Die Differenzen gewähren einen ganz besonderen Nutzen beim practischen Rechnen, namentlich bei der Ausrechnung auf einander folgender Werthe gegebener Reihen und Formeln. So ist z. B. Bd. 1, in dem Art. „Briggische Logarithmen", No. 2, pag. 427 gezeigt, wie man mit Hülfe der Differenzen Logarithmen von Zahlen erhält, für die sie in den Tafeln nicht aufgeführt sind. In dem Art. Cubiktafeln pag. 154 ist angegeben, wie man diese für die aufeinander folgenden ganzen Zahlen mit Hülfe der beiden Differenzenreihen erhält

Band I, pag. 201 ist die zur Berechnung der Volumen des Wassers bei den verschiedenen Temperaturen von 0° C. bis 30° von Hallström aufgestellte Formel von der Form:

$$V = 1 - At + Bt^2 - Ct^3$$

Die Werthe der Constanten sind:

$A = 0{,}000057577$
$B = 0{,}0000075601$
$C = 0{,}000000035091.$

Nachdem ich die nach vorstehender Formel berechnete Tabelle in den meisten Zahlen unrichtig gefunden, indem nämlich die Differenzen der aufeinander folgenden Werthe auffallend unregelmäfsige Intervalle zeigten, berechnete ich die pag. 201 stehende Tabelle mit Hülfe der Differenzen nach folgendem Verfahren, wobei zu bemerken, dafs die mir vorgelegene Tabelle sämmtliche Zahlen auf 6 Decimalstellen enthält und dafs mithin eine Rechnung bis auf 9 Decimalstellen genügte, wenn die neue Tabelle 6 Stellen richtig haben sollte. Ist nach obiger Tabelle V für t berechnet, so erhält man für $t = (t+1)$

$$V^1 = 1 - A(t+1) + B(t+1)^2 - C(t+1)^3$$

hiervon V abgezogen, gibt

$$V^1 - V = (-A + B - C) + (2B - 3C - 3Ct)t$$

oder

$$V^1 = V + (-A + B - C) + (2B - 3C - 3Ct)t$$

Nach den oben angegebenen Werthen von A, B, C hat man

$$-A + B - C = -0{,}000050052$$
$$2B - 3C = +0{,}000015015$$
$$-3C \times t = -0{,}000000105 \times t$$

Nun ist nach der Formel für $t = 1$

$$\begin{array}{rl} V = & +1 \\ & -0{,}000057577 \\ & +0{,}0000075601 \\ & -0{,}0000000351 \\ \hline V = & +0{,}999949948 \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} \text{hierzu} & 0{,}999949948 \\ -A + B - C = & 0{,}000050052 \\ 2B - 3C - 3C \times 1 = & 0{,}000014910 \\ \hline \text{gibt } V (\text{für } t = 2) = & +0{,}999914806 \\ \text{hierzu} & -0{,}000050052 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \text{und} & +0{,}000015015 \\ 2 \times 0{,}000000105 = & -0{,}000000210 \\ \hline 2 \times & 0{,}000014805 = +0{,}000029610 \\ \hline & \text{gibt } V (\text{für } t = 3) = +0{,}999894364 \end{array}$$

u. s. w.

Um die Tabelle für t von 30° bis 100° fortzusetzen, mufste V für $t = 30°$ nach beiden Formeln berechnet werden und ich erhielt, wie pag. 201 angegeben $V(\text{für } t = 30°) = 1{,}004184$.

Da nun dieser Werth beiden Formeln angehört, so kann er für die Berechnung der folgenden Volumen, die allein der zweiten Formel angehören, nicht Summand sein. Demnach mufste V für $t = 31°$ nach der zweiten Formel speciell berechnet werden.

In dieser Formel ist

$A = 0{,}0000094178$
$B = 0{,}00000533661$
$C = 0{,}0000000104086$

Man hat also

$$\begin{array}{lr} -0{,}0000094178 \times 31 = & -0{,}000291952 \\ +0{,}00000533661 \times 31^2 = & +0{,}005128482 \\ -0{,}0000000104086 \times 31^3 = & -0{,}000310083 \\ \hline \text{gibt } V (\text{für } t = 31°) = & +1{,}004526447 \end{array}$$

Nun verfährt man weiter mit Hülfe der obigen Differenzen und zwar ist

$$-A + B - C = -0{,}000004092$$
$$2B - 3C = +0{,}000010642$$
$$-3C = -0{,}000000031$$

Also für V (bei $t = 32^\circ$)

$$-3C \times 31 = -0{,}000000961$$
$$+2B - 3C = +0{,}000010642$$
$$\text{Summa} = +0{,}000009681$$
$$\text{diese} \times 31 = +0{,}000300111$$
$$-A + B - C = -0{,}000004092$$
hierzu $V(t = 31^\circ) = +1{,}004526447$

giebt $V(t = 32^\circ) = +1{,}004822466$

Auf diese Weise ist nun bis V für $t = 100^\circ$ fortgefahren worden.

2. Die Differenzen sind von großer Bedeutung, wenn sie sich auf veränderliche Größen beziehen, die von einander abhängig sind. Der gegenseitige Zusammenhang dieser Differenzen begründet die höhere Analysis, nämlich die Differenzialrechnung und die Integralrechnung, wie dies in dem Art. „Analysis" kurz gezeigt worden ist. Ausführlicheres darüber s. zunächst in den folgenden Artikeln: „Differenzial, u. s. w.

Differenzengleichung ist eine Gleichung zwischen den Differenzen zusammengehöriger Werthe zweier von einander abhängiger veränderlicher Größen.

Ist $y = x^3$

und es wird y zu $y + \triangle y$ wenn x zu $x + \triangle x$ wird, so hat man

$$y + \triangle y = (x + \triangle x)^3$$
$$= x^3 + 3x^2 \triangle x + 3x \cdot \triangle x^2 + \triangle x^3$$

hiervon $y = x^3$

gibt die zwischen y und x bestehende Differenzengleichung

$$\triangle y = 3x^2 \triangle x + 3x \triangle x^2 + \triangle x^3$$

Anmerk. Die Bezeichnung $\triangle$ für Differenz, als $\triangle x$, die D. zwischen $x + \triangle x$ und $\triangle x$ ist allgemein, sie ist der Anfangsbuchstabe des Worts Διαφορα, Unterschied.

Differenzenquotient ist der Quotient oder dessen Werth, wenn man die Differenzen zusammengehöriger Werthe zweier von einander abhängiger variablen Größen durch einander dividirt. In dem Beispiel des vor. Art. ist der D zwischen y und x:

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = 3x^2 + 3x \triangle x + \triangle x^2$$

Differenzenreihen sind die Reihen, welche entstehen, wenn man in einer arithmetischen Reihe (s d. pag. 118 No. 1 und 2) die Differenzen der aufeinander folgenden Glieder bildet.

Differenzenzeichen oder Minuszeichen (–) s. algebraische Zeichen.

Differenzial einer Function ist in dem Art. Analysis als Grenzwerth des Differenzenquotien der Function erklärt und der Begriff durch ein Beispiel erläutert. Die Erklärung des D. soll nur hier gründlicher erfolgen:

Es sei y eine Größe, die dadurch veränderlich wird, daß sie von der veränderlichen Größe x abhängt, also y als abhängig Veränderliche eine Function der Urveränderlichen x. Man bezeichnet dies abhängige Verhältniß allgemein mit $y = fx$ oder $y = Fx$ oder $y = \varphi x$ u. s. w.

Für jeden besonderen Werth, den man für x der Reihe nach nehmen kann, hat y ebenfalls einen besonderen Werth. Nimmt man nun für x zwei auf einander folgende Werthe x, x' und bezeichnet die zu diesen gehörenden Werthe von y mit y und y', so ist $y = fx$ und $y' = fx'$.

Bezeichnet man den Unterschied $x' - x$ mit $\triangle x$ und $y' - y$ mit $\triangle y$, so kann man die beiden Werthe von x auch bezeichnen mit x und $x + \triangle x$, die von y mit y und $y + \triangle y$ und man hat

$$y = fx$$
und
$$y + \triangle y = F(x + \triangle x)$$

Zieht man die erste Gleichung von der zweiten ab, so erhält man die Gleichung für den Unterschied der Function

$$\triangle y = F(x + \triangle x) - fx$$

Man nennt den Unterschied zweier aufeinander folgender Werthe der Veränderlichen den Zuwachs der Veränderlichen, also ist $\triangle x$ der Zuwachs der Urveränderlichen und $\triangle y$ der Zuwachs der Function, und da man übereingekommen ist, immer den ersten Werth von dem zweiten abzuziehen, so ist der Zuwachs entweder additiv oder subtractiv, je nachdem der zweite Werth größer oder kleiner ist als der erste.

Z. B. es sei $y = ax^2$

so ist $y + \triangle y = a(x + \triangle x)^2$

also

$$\triangle y = a(x + \triangle x)^2 - ax^2 = 2ax \triangle x + a \triangle x^2$$

2. Es liegt aber daran, das Verhältniß zwischen dem jedesmaligen Zuwachs der Function und dem Zuwachs der Urveränderlichen zu erfahren, weil der Ausdruck dafür den Zusammenhang beider Aenderungen am entsprechendsten darstellt; also

$$\triangle y : \triangle x \text{ oder } \frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{F(x + \triangle x) - fx}{\triangle x}$$

In dem obigen Beispiel ist

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = 2ax + a \triangle x$$

Den Zuwachs der Function durch den Zuwachs der Urveränderlichen dividirt nennt man den Zuwachsquotient oder den Differenzenquotient.

3. Mit diesem letzten Begriff wird der Begriff des Differenzials begründet. Wenn nämlich der Zuwachs $\triangle x$ der Urveränderlichen x beliebig klein, oder wie man auch sagt, unendlich klein wird, so hat der Zuwachsquotient $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ einen Grenzwerth und dieser macht das Differenzial der Function y aus.

Nimmt man z. B. in dem obigen Beispiel $\triangle x$ kleiner als jede noch so kleine angebbare Gröfse, oder vielmehr nimmt man $a \triangle x$ kleiner, also $\triangle x$ um so viel mehr kleiner, als irgend eine noch so klein denkbare Gröfse, so wird auch die Differenz

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} - 2ax = a \triangle x$$

kleiner als jede noch so kleine angebbare Gröfse, $2ax$ ist also der Grenzwerth von $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ und zugleich das Differenzial von $y = ax^2$.

Das Differenzial einer Function ist also der Grenzwerth des Zuwachsquotienten der Function bei beliebiger Abnahme des Zuwachses $\triangle x$ der Urveränderlichen, oder für den Fall, dafs dieser Zuwachs unendlich klein wird.

4. Nach einer andern Begründung des Begriffs Differenzial läfst man $\triangle x$ nicht unendlich klein werden, sondern man setzt $\triangle x = 0$; dann ist $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ ganz streng $= 2ax$. Da mit $\triangle x$ auch $\triangle y = 0$ wird, so erscheint der Differenzenquotient unter dieser Annahme in der Form $\frac{0}{0}$, eine unbestimmte Gröfse, die hier zu der bestimmten Gröfse $2ax$ wird.

5. Der Name Differenzial, den Leibnitz eingeführt hat, kommt natürlich daher, weil bei Bestimmung desselben zusammengehörige Differenzen auf einander folgender Werthe der Functionen und ihrer Urveränderlichen vorkommen.

Lagrange nennt den Grenzwerth des Zuwachsquotient Ableitung oder abgeleitete Function. Das Differenzial in dem obigen Beispiel enthält die Urvariable x, ist also eine Function von x; auch eine abgeleitete, weil sie aus der ursprünglichen Function entwickelt ist; ist aber das D. eine unveränderliche Gröfse, wie dies vorkommt, so ist diese keine Function und kann nur Ableitung genannt werden. Es ist jedoch die Benennung Ableitung unbestimmt, da jede Function oder jede Gröfse, die aus einer anderen Function entwickelt wird, gleich viel auf welche Weise, eine Ableitung genannt werden kann.

6. Die einfachste Bezeichnung des D. einer Function ist offenbar die, dafs man dem Functionszeichen den Anfangsbuchstaben des D. vorsetzt, also in dem obigen Beispiel $dy = 2ax$. Um aber das Zeichen dy von dem eines Products zu unterscheiden nimmt man, wie zuerst von Euler geschehen ist, ein ∂ von einiger Abänderung und schreibt $\partial y = 2ax$.

Da es nun auch Functionen mit mehreren Urveränderlichen gibt $f(x, y, z)$ und da man die Differenziale dieser Functiotionen bald in Beziehung auf die eine, bald auf die andere Urvariable zu nehmen hat, indem man die übrigen als unveränderlich betrachtet, da man ferner das D. einer Function (y) in Beziehung auf die nächste Veränderliche (x), hierauf auf eine folgende Veränderliche (z), von der wieder x unmittelbar abhängt, zu bestimmen hat, so mufs man aus dem Differenzial selbst ersehen können, auf welche Urveränderliche es sich bezieht.

In dem obigen Beispiel bezeichnet y die Function, x die Urveränderliche und $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ ist der Differenzenquotient; um nun den Ursprung des D. aus diesem Quotient mit zu bezeichnen hat man für die Bezeichnung des D. die Form des Quotient beibehalten und man schreibt das D. der Function $\frac{\partial y}{\partial x}$, bei welchem man sich aber nicht mehr einen Quotient zu denken hat, welches vielmehr nur vergegenwärtigen soll, dafs diese Gröfse aus dem Quotient der Zuwachse zweier Veränderlichen entstanden ist, von welchen das obere Zeichen y die Function, das untere x die Urveränderliche bedeutet.

Eine dritte Bezeichnung ist $\partial y = 2ax\,\partial x$ indem man den Zuwachs der Urveränderlichen bei dem D. als Factor sich denkt. In dem obigen Beispiel war

$$\triangle y = 2ax \triangle x + a \triangle x^2$$

$\triangle x$ als gemeinschaftlichen Factor hintergestellt gibt die Form

$$\triangle y = (2ax + a \triangle x) \triangle x$$

und für $\triangle x$ beliebig klein entsteht die Differenzialformel

$$\partial y = 2ax\,\partial x$$

Eine vierte Bezeichnungsart ist

$$\partial y_x = 2ax$$

7. Enthält das D. noch die Urveränderliche, so ist dasselbe ebenfalls eine Function der Urveränderlichen und es läfst sich mithin auch von dieser Function das D. bestimmen.

Das D. von $2ax$ erhält man bei dem

oben angezeigten Verfahren $= 2a$

es ist also $\frac{\partial 2ax}{\partial x} = 2a$

Will man nun bezeichnen, dafs dies D. das D. eines D. der Function y ist, so schreibt man $2a = \frac{\partial^2 y}{\partial x}$ und nennt dies D. ein D. der zweiten Ordnung.

Das D. $= 2a$ enthält nicht mehr die Urveränderliche x, bei jedem Zuwachs von x bleibt das D. $= 2a$ unverändert, $2a$ wächst nicht mit, es gibt also keinen Zuwachsquotient und kein D. von $2a$; wie überhaupt keine Constante ein Differenzial hat.

Enthält dagegen ein D. zweiter Ordnung, auch zweites Differenzial genannt, noch die Urveränderliche, und man nimmt von dem zweiten D. wieder ein D., so wird dies ein D. dritter Ordnung oder ein drittes D.

Man schreibt es: $\frac{\partial^3 y}{\partial x}$ und so kann man Differenziale beliebig vieler Ordnungen von einer Function bestimmen, wenn diese es zuläfst.

Man bezeichnet die D. verschiedener Ordnungen also:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x} = A \text{ oder } \partial^2 y = A\,\partial x \text{ oder } \partial^2 y_x = A$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x} = A \text{ oder } \partial^3 y = A\,\partial x \text{ oder } \partial^3 y_x = A$$

. . . .

$$\frac{\partial^n y}{\partial x} = A \text{ oder } \partial^n y = A\,\partial x \text{ oder } \partial^n y_x = A$$

Hängt die Function (y) von mehreren Urveränderlichen (x, z) ab, und man hat dieselbe in Beziehung auf jede von beiden differenzirt, so schreibt man

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x \cdot \partial z} = P \text{ oder } \partial^2 y = P\,\partial x \cdot \partial z \text{ oder } \partial^2 y_{x,z} = P$$

das D., nachdem y in Beziehung auf x, n mal, in Beziehung auf z, m mal differenzirt ist schreibt man

$$\frac{\partial^{n+m} y}{\partial x^n \cdot \partial z^m} = Q \text{ oder } \partial^{n+m} y = Q\,\partial x^n \cdot \partial z^m = \partial^{n,m} y_{x,z}$$

Wegen der exponentiellen Bezeichnung der Urveränderlichen bei mehreren derselben in einer Function beobachtet man auch bei nur einer Urveränderlichen diese Bezeichnungsart, und schreibt das $n$te D:

$$\frac{\partial^n y}{\partial x^n} = R \text{ oder } \partial^n y = R\,\partial x^n$$

Wie man in der Algebra, um die unbekannten Gröfsen von den bekannten mit dem Auge leicht unterscheiden zu können, jene mit den letzten Buchstaben, diese mit den ersten Buchstaben des Alphabets bezeichnet, so bezeichnet man auch in der Analysis die variablen Gröfsen mit den letzten und die constanten Gröfsen mit den ersten Buchstaben des Alphabets; eine äufsere Uebereinstimmung, die zu keiner Verwechselung Veranlassung geben darf.

8. Eine nützliche Anwendung der Differenziale ist in dem Art. berührende Linie, Bd. I, pag. 340 gegeben worden. Zuerst ist die Aufgabe: An einer krummen Linie eine berührende gerade Linie zu ziehen, elementar gelöst und die Subtangente s gefunden worden durch die allgemeine Formel

$$s = y_1 \frac{x - x_1}{y - y_1}$$

mit der Vorschrift, bei jedem besonderen Beispiel für die gegebenen Gröfsen x; x_1; y; y_1 die Werthe aus der Figur zu entnehmen und nach Reduction des Ausdrucks $y_1 = y$ und $x_1 = x$ zu setzen, welches wie aus den dortigen Beispielen zu entnehmen, eine weitläufige Arbeit ist. Nun sind $x - x_1$ und $y - y_1$ die Differenzen zweier aufeinander folgenden Werthe von x und von y, also die obigen Δx und Δy; y_1 einer der Werthe von y also das obige $y + \Delta y$; folglich ist

$$s = (y + \Delta y)\frac{\Delta x}{\Delta y}$$

Nun wird pag. 344 dieselbe Aufgabe mit Hülfe der Differenzialrechnung gelöst und gezeigt, dafs $s = \frac{y}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}$ ist.

Da nun $y_1 \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{y_1}{\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)}$, so hat man das Uebereinstimmende beider Resultate anschaulich, wenn man für $y_1 = y$ setzt, wie geboten wird, und für Δy und Δx die Grenzwerthe, welche aber wirklich mit der Gleichsetzung von x_1 mit x und von y_1 mit y hervorgehen.

Es ist aus diesem Beispiele ersichtlich, dafs in dem Fall, wo die Differenzialrech-

nung eintreten kann, die elementare Behandlung der Aufgabe Differenzenquotienten und deren Grenzwerthe erst schaffen mufs, während die Differenzialrechnung sie ohne Weiteres in den Differenzialen liefert.

Entwickelung der Differenziale aus Functionen von verschiedener Art und Form.

I. Differenziale algebraischer Functionen.

9. Ist eine veränderliche Gröfse die algebraische Summe mehrerer veränderlichen Gröfsen derselben Art, von welchen jeder einzelnen ein D. zukommt, so ist das D. der Summe = der algebraischen Summe der D. der einzelnen Summanden.

Denn es sei $y = u \pm v \pm w \pm z + \ldots.$ welche Gröfsen alle von der Urveränderlichen x abhängig sind. Für den Zuwachs $\triangle x$ von x seien die Zuwachse derselben $\triangle y, \triangle u, \triangle v, \triangle w, \triangle z \ldots.$ so ist

$$y + \triangle y = u + \triangle u \pm (v + \triangle v) \pm (w + \triangle w) \pm (z + \triangle z) + \ldots.$$

hiervon $y = u \pm v \pm w \pm z$

giebt $\triangle y = \triangle u \pm \triangle v \pm \triangle w \pm \triangle z$

Da nun jedem einzelnen der Summanden der gegebenen Summe ein D. zukommt, so kann der Zuwachs einer jeden beliebig klein werden, folglich auch deren algebraische Summe $\triangle y$ und noch viel mehr $\triangle x$ kann beliebig klein werden. Für die beliebige Abnahme der Zuwachse sind aber die Differenzenquotienten

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{\triangle u}{\triangle x} \pm \frac{\triangle v}{\triangle x} \pm \frac{\triangle w}{\triangle x} \pm \frac{\triangle z}{\triangle x}$$

zwischen den Veränderlichen und den Urveränderlichen die Grenzwerthe der Quotienten, d. h. die Differenziale der Veränderlichen.

Also $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} \pm \frac{\partial v}{\partial x} \pm \frac{\partial w}{\partial x} \pm \frac{\partial z}{\partial x} + \ldots..$

10. Ist eine Function das Product aus einer Constanten mit einer Veränderlichen, der ein D. zukommt, so kommt auch der Function ein D. zu und dieses ist das Product der Constanten mit dem D. des veränderlichen Factors.

Denn es sei $y = Az$ und z eine Function der Veränderlichen x, so ist bei der Annahme ad 9

$$y + \triangle y = A(z + \triangle z)$$

hiervon $y = Az$

bleibt $\triangle y = A\triangle z$

da der Gröfse z ein D. zukommt, so kann $\triangle z$ unendlich klein werden, folglich auch $A\triangle z = \triangle y$ und $\triangle x$. Für die unendlich kleinen Zuwachse werden aber die Differenzenquotienten

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = A\frac{\triangle z}{\triangle x}$$

zwischen den Functionen und der Urvariablen die Differenziale der Functionen folglich hat man

$$\frac{\partial y}{\partial x} = A\frac{\partial z}{\partial x}$$

11. Ist eine Function das Product zweier Veränderlichen, von denen jeder ein D. zukommt, so ist das D. der Function = dem ersten Factor mal dem D. des zweiten Factors + dem zweiten Factor mal dem D. des ersten Factors.

Wenn also $y = u \cdot z$

so ist $\frac{\partial y}{\partial x} = u \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + z \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$

Denn es ist

$$(y + \triangle y) = (u + \triangle u)(z + \triangle z)$$
$$= uz + u\triangle z + z\triangle u + \triangle u \cdot \triangle z$$

hiervon $y = uz$

bleibt $\triangle y = (u + \triangle u)\triangle z + z\triangle u$

also $\frac{\triangle y}{\triangle x} = (u + \triangle u)\frac{\triangle z}{\triangle x} + z\frac{\triangle u}{\triangle x}$

Für die beliebige Abnahme der 4 Zuwachse $\triangle y$, $\triangle z$, $\triangle u$ und $\triangle x$ werden die Differenzenquotienten die Differenziale und u ist der Grenzwerth von $u + \triangle u$

folglich ist $\frac{\partial y}{\partial x} = u\frac{\partial z}{\partial x} + z\frac{\partial u}{\partial x}$

Man kann auch erklären: Für $\triangle y = \triangle u = \triangle z = \triangle x = 0$ entstehen die Differenziale $u + \triangle u = u + 0 = u$ u. s. w.

Anmerk. Ist $y = Auz$

so hat man $\frac{1}{A} \cdot y = uz$

und endlich

$$\frac{1}{A} \cdot \frac{\triangle y}{\triangle x} = (u + \triangle u)\frac{\triangle z}{\triangle x} + z\frac{\triangle u}{\triangle x}$$

$$\frac{1}{A} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = u \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + z\frac{\triangle u}{\triangle x}$$

woraus $\frac{\partial y}{\partial x} = Au\frac{\partial z}{\partial x} + Az\frac{\partial u}{\partial x}$

12. Ist eine Function das Product beliebig vieler (n) Veränderlichen, von denen jeder ein D. zukommt, so ist das D. der Function = einer Summe von n Factoren, von denen jedes Glied das D. eines Factors der Function multiplicirt mit dem Product der übrigen $(n-1)$ Factoren ist. Wenn also $y = u \cdot v \cdot w \ldots. z$

so ist $$\frac{\partial y}{\partial x} = u \cdot v \cdot w \ldots \frac{\partial z}{\partial x} + uv \ldots . z \frac{\partial w}{\partial x} + uw \ldots z \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + vw \ldots . z \frac{\partial u}{\partial x}$$

Denn betrachtet man zunächst das Product aus 2 Factoren bestehend, nämlich aus $(uvw \ldots .)$ und z, so ist nach No. 11

$$\frac{\partial y}{\partial x} = uvw \ldots \frac{\partial z}{\partial x} + z \cdot \frac{\partial (uvw \ldots)}{\partial x}$$

Nun ist wieder $$z \frac{\partial (uvw \ldots)}{\partial x} = zuv \ldots . \frac{\partial w}{\partial x} + zw \frac{\partial (uv \ldots .)}{\partial x}$$

$$zw \frac{\partial (uv \ldots .)}{\partial x} = zwu \ldots . \frac{\partial v}{\partial x} + zwv \frac{\partial (u \ldots .)}{\partial x}$$

u. s. w. Also

$$\frac{\partial y}{\partial x} = uvw \ldots . \frac{\partial z}{\partial x} + uv \ldots . z \frac{\partial w}{\partial x} + uw \ldots .. z \frac{\partial u}{\partial x} + \ldots ..$$

13. Ist eine Function der Quotient zweier Veränderlichen von denen jede ein D. hat, so ist das D. der Function = dem Nenner mal dem D. des Zählers weniger dem Zähler mal dem D. des Nenners, diese Differenz dividirt durch das Quadrat des Nenners. Wenn also

$$y = \frac{u}{w}$$

so ist $$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{w\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) - u\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)}{w^2}$$

Denn es ist $y + \triangle y = \dfrac{u + \triangle u}{w + \triangle w}$

mithin

$$\triangle y = \frac{u + \triangle u}{w + \triangle w} - \frac{u}{w} = \frac{w \triangle u - u \triangle w}{w(w + \triangle w)}$$

also $$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{w\left(\frac{\triangle u}{\triangle x}\right) - u\left(\frac{\triangle w}{\triangle x}\right)}{w(w + \triangle w)}$$

Für die beliebige Abnahme der Zuwachse entsteht mithin die obige Formel für $\frac{\partial y}{\partial x}$.

Anmerk. Ist der Zähler constant, ist z. B.

$$y = \frac{A}{w}$$

so ist $$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{w\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right) - A\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)}{w^2} = \frac{0 - A\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)}{w^2} = -\frac{A}{w^2} \cdot \frac{\partial w}{\partial x}$$

14. Ist eine Function eine Potenz einer Veränderlichen mit constantem Exponenten, so ist das D. der Function gleich dem Exponenten mal der Potenz mit dem um Eins verminderten Exponenten mal dem D. der Veränderlichen.

Wenn also

$$y = z^n$$

so ist $$\frac{\partial y}{\partial x} = nz^{n-1} \frac{\partial z}{\partial x}$$

Denn es ist

$$\begin{aligned}\triangle y &= (z + \triangle z)^n - z^n \\ &= \frac{n}{1} z^{n-1} \triangle z + \frac{n \cdot n - 1}{1 \cdot 2} z^{n-2} (\triangle z)^2 + \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} z^{n-3} (\triangle z)^3 + \ldots .. \\ &= \triangle z \left[nz^{n-1} + \frac{n \cdot n - 1}{1 \cdot 2} z^{n-2} \triangle z + \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot z^{n-3} (\triangle z)^2 + \ldots . \right]\end{aligned}$$

und $$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{\triangle z}{\triangle x} \left[nz^{n-1} + \frac{n \cdot n - 1}{1 \cdot 2} z^{n-2} \triangle z + \ldots \ldots \right]$$

Mit der beliebigen Abnahme von $\triangle x$, $\triangle z$ und $\triangle y$ wird jedes einzelne Glied in der Klammer von dem zweiten Gliede an gerechnet beliebig klein, also auch deren Summe wird beliebig klein, und das erste Glied nz^{n-1} ist der Grenzwerth der Klammergröfse und $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ und $\frac{\triangle z}{\triangle x}$ werden die D. der Veränderlichen, folglich ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = nz^{n-1} \frac{\partial z}{\partial x}$$

Dem binomischen Lehrsatz zufolge (Bd. I, pag. 374) ist das Gesetz des Fortschritts der Reihe bei der Entwickelung der Potenz $(z + \triangle z)^n$ ganz dasselbe, n mag ganz oder gebrochen, positiv oder negativ sein.

Für $n = \frac{p}{q}$ erhält man zuletzt

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta z}{\Delta x}\left[\frac{p}{q} z^{\frac{p}{q}-1} + \frac{\frac{p}{q}\cdot\frac{p}{q}-1}{1\cdot 2}\cdot z^{\frac{p}{q}-2}\Delta z + \dots\right]$$

wo wieder $\frac{p}{q} z^{\frac{p}{q}-1}$ der Grenzwerth der Klammergröfse ist und man hat

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial z^{\frac{p}{q}}}{\partial x} = \frac{p}{q} z^{\frac{p}{q}-1}\frac{\partial z}{\partial x}$$

Desgleichen ist für $n = -\frac{p}{q}$ der Grenzwerth der Klammergröfse $= -\frac{p}{q} z^{-\frac{p}{q}-1}$

und man hat

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial z^{-\frac{p}{q}}}{\partial x} = \left(-\frac{p}{q}\right) z^{-\frac{p}{q}-1}\frac{\partial z}{\partial x}$$

Hat man daher das D. einer Function zu bestimmen, welche eine Wurzel aus einer Veränderlichen ist, so darf man diese nur in eine Potenz mit gebrochenem Exponenten verwandeln und nach der Formel verfahren.

Beispiele.

Beispiel 1. $y = \sqrt{z}$ gibt $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial \sqrt{z}}{\partial x} = \frac{\partial z^{\frac{1}{2}}}{\partial x} = \frac{1}{2} z^{\frac{1}{2}-1}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{z}}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}$

Ist die Veränderliche eine Potenz im Nenner, so verfährt man entweder nach No. 13 oder man setzt die Veränderliche als Potenz mit subtractivem Exponenten in den Zähler und verfährt wie vorher: z. B.

Beispiel 2. $y = \frac{A}{x^3}$ gibt nach No. 13 Anmerkung:

$$\partial y = -\frac{A}{x^6}\cdot 3x^2 = -\frac{3A}{x^4}$$

nach No. 14:

$$\partial y = \partial A x^{-3} = A(-3)x^{-3-1} = \frac{-3A}{x^4}$$

Beispiel 3. $y = \frac{A}{\sqrt[5]{x^2}}$ gibt nach No. 13, Anmerk.:

$$\partial y = -\frac{A}{\sqrt[5]{x^4}}\cdot\frac{\partial\sqrt[5]{x^2}}{\partial x} = -\frac{A}{\sqrt[5]{x^4}}\cdot\partial x^{\frac{2}{5}} = -\frac{A}{\sqrt[5]{x^4}}\cdot\frac{2}{5}x^{\frac{2}{5}-1}$$

$$= -\frac{2}{5}\cdot\frac{A}{\sqrt[5]{x^4}}\cdot x^{-\frac{3}{5}} = -\frac{2}{5}\frac{A}{\sqrt[5]{x^4\cdot x^3}} = -\frac{2}{5}\frac{A}{x\sqrt[5]{x^2}}$$

nach No. 14:

$$\partial y = A\partial x^{-\frac{2}{5}} = -\frac{2}{5}\cdot A\partial x^{-\frac{2}{5}-1} = -\frac{2}{5}\cdot A\partial x^{-\frac{7}{5}} = -\frac{2}{5}\frac{A}{x^{\frac{7}{5}}} = -\frac{2}{5}\frac{A}{x\sqrt[5]{x^2}}$$

Beispiel 4. $y = (a + bx^m)^n$

Setze $a + bx^m = z$, so ist $y = z^n$

daher $\frac{\partial y}{\partial x} = nz^{n-1}\frac{\partial z}{\partial x}$

Nun ist $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial(a + bx^m)}{\partial x} = \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial bx^m}{\partial x} = 0 + b\frac{\partial x^m}{\partial x} = mbx^{m-1}$

folglich $\frac{\partial y}{\partial x} = n(a + bx^m)^{n-1}\times mbx^{m-1} = nmbx^{m-1}(a + bx^m)^{n-1}$

Beispiel 5. $y = \frac{(a + bx^m)^n}{(A + Bx^p)^q}$

Setze $(a + bx^m)^n = z$

$(A + Bx^p)^q = u$

so ist $y = \frac{z}{u}$ und $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{u\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) - z\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{u^2}$

Nun ist nach Beispiel 4

$$\frac{\partial z}{\partial x} = nmbx^{m-1}(a + bx^m)^{n-1}$$

und $\frac{\partial u}{\partial x} = qpBx^{p-1}(A + Bx^p)^{q-1}$

folglich $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{(a + bx^m)^{n-1}}{(A + Bx^p)^{q+1}}[nmb(A + Bx^p)x^{m-1} - qpB(a + bx^m)x^{p-1}]$

Beispiel 6. $y = \frac{x\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}}$

Setzt man den Zähler $= u$, den Nenner $= z$ so ist

$$y = \frac{u}{z}$$

und nach No. 13: $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{z \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) - u\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{z^2}$

Nun ist $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial(x\sqrt{a-x})}{\partial x} = x \cdot \partial\sqrt{a-x} + \sqrt{a-x} \times 1$

$$= \frac{-x}{2\sqrt{a-x}} + \sqrt{a-x} = \frac{2a - 3x}{2\sqrt{a-x}}$$

ferner ist $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial\sqrt{a+x}}{\partial x} - \frac{\partial\sqrt{a-x}}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{a+x}} \cdot \frac{\partial(a+x)}{\partial x} - \frac{1}{2\sqrt{a-x}} \cdot \frac{\partial(a-x)}{\partial x}$

$$= \frac{1}{2\sqrt{a+x}} + \frac{1}{2\sqrt{a-x}} = \frac{\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}}{2\sqrt{a^2-x^2}}$$

Diese Werthe in die obere Differenzialgleichung gesetzt, gibt den Zähler

$$(\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x})\frac{2a-3x}{2\sqrt{a-x}} - x\sqrt{a-x}\,\frac{\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}}{2\sqrt{a^2-x^2}}$$

Diesen Zähler unter einerlei Benennung gebracht und mit z^2 dividirt gibt

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{(a + x - \sqrt{a^2-x^2})(2a-3x) - x(\sqrt{a^2-x^2} + a - x)}{2\sqrt{a^2-x^2}(\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x})^2}$$

Beispiel 7. $y = \sqrt[q]{d + \sqrt[p]{c + \sqrt[n]{a + bx^m}}}$

Zur Bestimmung des D.

Setze $d + \sqrt[p]{c + \sqrt[n]{a + bx^m}} = z$

so ist $y = \sqrt[q]{z} = z^{\frac{1}{q}}$

und

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{q}z^{\frac{1}{q}-1} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{q\sqrt[q]{z^{q-1}}}\frac{\partial z}{\partial x}$$

Setze $\sqrt[p]{c + \sqrt[n]{a + bx^m}} = w$

so ist $z = d + w$

folglich $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x}$

Setze $c + \sqrt[n]{a + bx^m} = v$

so ist $w = \sqrt[p]{v}$

und $\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{p\sqrt[p]{v^{p-1}}}\frac{\partial v}{\partial x}$

Setze endlich $a + bx^m = u$

so ist $v = c + \sqrt[n]{u}$

und $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial\sqrt[n]{u}}{\partial x} = \frac{1}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}\frac{\partial u}{\partial x}$

Da nun $\frac{\partial u}{\partial x} = mbx^{m-1}$

so hat man

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{mbx^{m-1}}{q\sqrt[q]{z^{q-1}} \cdot p\sqrt[p]{v^{p-1}} \cdot n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$$

worein für z, v und u die obigen Werthe zu setzen sind.

Von dem 4ten Beispiel ab sind für zusammengesetzte Gröfsen einfache Zeichen gesetzt worden, um das jedesmalige Beispiel einer vorher entwickelten allgemeinen Differenzialformel anzupassen. In diesen zusammengesetzten Gröfsen befindet sich die eigentliche Veränderliche x

mit Constanten algebraisch verwickelt, sie sind also Functionen von x, und eben so wie y, sind auch dort z, u, v Functionen von x.

Man beachte, dafs bisher immer nur $\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}$ u. s. w. vorgekommen sind, und nur für diese Fälle, nämlich wo in Beziehung auf die Urveränderliche x differenzirt worden ist, sind bisher die D. ermittelt.

Es kommen aber auch Fälle vor, wo das D. einer Function nicht unmittelbar auf die Urveränderliche genommen werden kann; wenn nämlich die Stammfunction y die Function einer vermittelnden u und u als Function der Urvariablen x, also $u = \varphi x$ gegeben wird und wenn zugleich die Function y auf u transcendent ist:

Wenn $y = a^x$, $y = arc\ (cos = x)$, $y = log n\ x$, dann ist die Function eine unmittelbare von x, wenn aber $y = a^{mx}$, $y = log n\ (a + nx)$ u. s. w. so sind $mx = u$, $a + nx = z$ die Variablen und es ist durch Bildung der Differenzenquotienten und deren Grenzwerthe nur $\frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial z}$, nicht aber $\frac{\partial y}{\partial x}$ zu ermitteln. Damit nun diese Functionen auf die Urveränderliche differenzirt werden können ist ein allgemeines Verfahren dafür zu ermitteln erforderlich und hiervon handeln die 3 folgenden Sätze.

15. Ist eine veränderliche Gröfse y von einer veränderlichen Gröfse z abhängig, diese wieder von einer dritten Veränderlichen x und die erste y hat ein D. in Beziehung auf ihre nächste Veränderliche z, diese ein D. in Beziehung auf x, so hat sie auch ein D. in Beziehung auf die eigentliche Urveränderliche x, und zwar ist dies D. = dem Product ihres D. in Beziehung auf z mal dem D., welches z in Beziehung auf x hat, d. h. es ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial z} \times \frac{\partial z}{\partial x}$$

Denn sind die mit y, z, x zusammengehörigen Zuwachse Δy, Δz und Δx, also noch endliche Gröfsen, so ist offenbar

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta z} \times \frac{\Delta z}{\Delta x}$$

bei beliebiger Abnahme von Δx nehmen auch Δy und Δz beliebig ab und alle 3 können ∞ klein werden. Für diesen Fall verwandeln sich die 3 Differenzenquotienten in ihre Grenzwerthe; folglich ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial z} \times \frac{\partial z}{\partial x}$$

16. Sind 2 veränderliche Gröfsen y, z von einer 3ten veränderlichen x abhängig, in Beziehung auf welche beide Differenziale haben, so ist der Quotient dieser D. = dem D. der einen Veränderlichen y in Beziehung auf die zweite z, wenn das D. dieser zweiten den Nenner des Quotient ausmacht, oder es ist

$$\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)} \text{ und } \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}$$

Denn wie in No. 15 ist hier:

$$\frac{\Delta y}{\Delta z} = \frac{\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)}{\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)} \text{ und } \frac{\Delta z}{\Delta y} = \frac{\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)}{\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)}$$

und es werden diese Differenzenquotienten zu ihren Grenzwerthen, wenn Δx, Δy, Δz beliebig abnehmen.

17. Ist eine veränderliche Gröfse y von einer veränderlichen Gröfse x abhängig, so ist es auch diese von jener und das D. der ersten y in Beziehung auf die zweite x ist = dem Quotient 1 dividirt durch das D. der zweiten in Beziehung auf die erste.

Also ist $$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)}$$

Denn es ist wie No. 15

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)}$$

Bei beliebiger Abnahme der Differenzen Δx, Δy verwandeln sich aber die Differenzenquotienten in deren Grenzwerthe.

II. Differenziale transcendenter Functionen.

A. Exponential- und logarithmische Funtionen.

18. Ist die Function eine einfache Exponentialfunction, deren Grundzahl eine Constante, also

$$y = a^x$$

so hat man $y + \Delta y = a^{x + \Delta x}$

folglich $\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x\,[a^{\Delta x} - 1]$

und $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

Der Grenzwerth des Zuwachsquotienten der Function ist also a^x mal dem Grenzwerth von $\frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$ für die beliebige Abnahme von Δx.

Nun enthält diese letzte Gröfse die Urvariable x nicht, mithin mufs $\frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$ zum Grenzwerth eine Constante haben,

die durch die Basis a der Exponentialgröfse bestimmt wird.

Denn da man sich unter Δx als Zuwachs einer variablen Zahl x jede beliebige constante Zahl vorstellen kann, eine Constante aber (s. No. 7) keinen Grenzwerth hat, so hat auch Δx keinen Grenzwerth; allein der Quotient $\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}$ selbst wird zu einem Grenzwerth, wenn man die Constante Δx unendlich klein wählt [oder nach No. 4, wenn man $\Delta x=0$ setzt, wo dann $\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x} = \frac{a^0-1}{0} = \frac{0}{0}$ wird, ist $a^x \cdot \frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}$ das D. von a^x] und setzt man für diesen constanten Grenzwerth die beliebige Zahl k, so hat man unter der Bedingung, dafs Δx unendlich klein ist

$$\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=k$$

oder wenn man $\Delta x = \frac{1}{n}$ setzt, unter der Bedingung, dafs n unendlich grofs wird:

$$\frac{a^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}=k \tag{1}$$

oder a entwickelt

$$a=\left(1+\frac{1}{n}k\right)^n \tag{2}$$

Aus Gleichung 1 erhält man eine Entwickelung von k in eine Reihe nach fortlaufenden Potenzen von a und aus Gleichung 2 eine Entwickelung von a nach Potenzen von k.

Aus Gleichung 1 hat man

$$k=n(a-1)\left[a^{\frac{1}{n}}+a^{\frac{1}{n}-1}+a^{\frac{1}{n}-2}+\ldots.\right]$$

ein Ausdruck, welcher zu einer brauchbaren Reihe nicht umgeformt werden kann.

Setzt man dagegen $a=1+b$ so erhält man nach dem binomischen Satz

$$a^{\frac{1}{n}}=(1+b)^{\frac{1}{n}}=1+\frac{1}{n}b+\frac{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}-1}{1\cdot 2}b^2+\frac{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}-1\cdot\frac{1}{n}-2}{1\cdot 2\cdot 3}b^3+\ldots..$$

mithin

$$a^{\frac{1}{n}}-1=\frac{1}{n}b+\frac{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}-1}{1\cdot 2}\cdot b^2+\frac{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}-1\cdot\frac{1}{n}-2}{1\cdot 2\cdot 3}b^3+\ldots$$

und wenn man beiderseits mit $\frac{1}{n}$ dividirt

$$k=\frac{a^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}=b+\frac{\frac{1}{n}-1}{1\cdot 2}b^2+\frac{\frac{1}{n}-1\cdot\frac{1}{n}-2}{1\cdot 2\cdot 3}b^3+\ldots..$$

$$+\frac{\frac{1}{n}-1\cdot\frac{1}{n}-2\ldots..\frac{1}{n}-m+1}{2\cdot 3\ldots. m}b^m$$

Läfst man nun n beliebig wachsen, also $\frac{1}{n}$ beliebig abnehmen, (nach No. 4: setzt man $\frac{1}{n}=0$) so entstehen für alle Glieder deren Grenzwerthe und es ist

$$k=b-\tfrac{1}{2}b^2+\frac{(-1)(-2)}{2\cdot 3}b^3+\frac{(-1)(-2)(-3)}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots.$$

also

$$k=b-\tfrac{1}{2}b^2+\tfrac{1}{3}b^3-\tfrac{1}{4}b^4+\tfrac{1}{5}b^5-\ldots.$$

und wenn man für b seinen Werth $(a-1)$ setzt:

$$k=(a-1)-\tfrac{1}{2}(a-1)^2+\tfrac{1}{3}(a-1)^3+\tfrac{1}{4}(a-1)^4+\ldots. \tag{3}$$

Diese Reihe ist der in dem Art. „Basis eines Logarithmensystems" pag. 327 entwickelte Zähler in dem Ausdruck des Logarithmus der Zahl a. Wenn man also, wie dort, den Modul des Logarithmensystems mit M bezeichnet, so hat man

$$\log a = k\cdot M$$

und

$$k=\frac{\log a}{M} \tag{4}$$

Nun ist nach der Voraussetzung

$$\frac{\partial a^x}{\partial x}=k\cdot a^x$$

folglich ist das D. einer Exponentialgröfse = dieser Exponentialgröfse selbst, multiplicirt mit dem nach irgend einem System genommenen Logarithmus der Basis der Exponentialgröfse und dividirt durch den Modul desselben Systems.

Nimmt man die Basis a der Exponentialgröfse zur Basis des Logarithmensystems, so ist $log\, a = 1$ und

$$\frac{\partial a^x}{\partial x} = k a^x = \frac{a^x}{M} \qquad (5)$$

Nimmt man das natürliche Logarithmensystem (s. Bd. I, pag. 327), so ist $M = 1$, $log\, a$ wird $logn\, a$ und man hat nach (4)

$$\frac{\partial a^x}{\partial x} = k \cdot a^x = a^x \, logn\, a \qquad (6)$$

Hat die Exponentialfunction zur Grundzahl die Grundzahl e der natürlichen Logarithmen so ist

$$\frac{\partial e^x}{\partial x} = e^x \cdot ln\, e = e^x \qquad (7)$$

Die Function e^x hat also das Eigenthümliche, dafs ihr D. die Function selbst ist.

Der Modul eines Systems ist = dem nach demselben System genommenen Logarithmus der Basis e der natürlichen Logarithmen (Bd. I, pag. 327) mithin hat man nach Formel 4

$$k = \frac{log\, a}{log\, e} \text{ und } \frac{\partial a^x}{\partial x} = a^x \cdot \frac{log\, a}{log\, e} \qquad (8)$$

aus welchem System auch diese Logarithmen genommen werden mögen. Ist a selbst die Basis des Systems so ist

$$\frac{\partial a^x}{\partial x} = \frac{a^x}{log^a e} \qquad (9)$$

Aus Gleichung 2 die Grundzahl in eine Reihe nach Potenzen von k fortlaufend entwickelt gibt

$$a = \left(1 + \frac{1}{n}k\right)^n = 1 + \frac{n}{1}\,\frac{k}{n} + \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2}\left(\frac{k}{n}\right)^2 + \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3}\left(\frac{k}{n}\right)^3 + \dots$$
$$= 1 + k + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{k^2}{1 \cdot 2} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\frac{k^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$
$$+ \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{m-1}{n}\right)\frac{k^m}{1 \cdot 2 \dots m} + \dots$$

Für $\frac{1}{n} = 0$ oder ∞ klein erhält man von jedem Gliede der Reihe den Grenzwerth und jeder deren Coefficienten wird = 1, mithin hat man

$$a = 1 + k + \frac{k^2}{1 \cdot 2} + \frac{k^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots \frac{k^m}{1 \dots m} \qquad (10)$$

Für jeden Werth von k entsteht ein zugehöriger von a, und der einfachste, der natürlichste Werth, den man für die allgemeine Gröfse k setzen kann ist offenbar = 1.

Nun hat man nach Formel 6: $k = logn\, a$ und es wird, diesen Werth in die Reihe 10 gesetzt

$$a = 1 + \frac{ln\, a}{1} + \frac{(ln\, a)^2}{1 \cdot 2} + \frac{(ln\, a)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

folglich wenn $k = logn\, a = 1$ gesetzt wird, $a = e =$ der Basis des natürlichen Logarithmensystems (s. Bd. I, pag. 327) und man erhält dieselbe

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{(2)} + \frac{1}{(3)} + \frac{1}{(4)} + \dots \frac{1}{(m)}$$
$$= 2{,}71828\ 18284 \dots$$

Ist der Exponent der Exponentialfunction y wieder eine Function von x, nämlich $z = fx$ so hat man nach No. 15:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial a^z}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial z} \times \frac{\partial z}{\partial x} = k \cdot a^z \times \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{a^z}{M} \times \frac{\partial z}{\partial x} = a^z\, logn\, a \cdot \times \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{a^z}{log^a e} \times \frac{\partial z}{\partial x} \qquad (11)$$

$$\frac{\partial e^z}{\partial x} = e^z \times \frac{\partial z}{\partial x} \qquad (12)$$

19. Ist die Function eine logarithmische Grundfunction,

$$y = log^a x$$

so hat man $\qquad x = a^y$

Mithin nach No. 18, Formel 5

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \partial a^y = k a^y$$

und nach No. 17

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{k a^y}$$

und da $a^y = x$ ist, so ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial\, log^a x}{\partial x} = \frac{1}{kx} = \frac{1}{x\, logn\, a} = \frac{M}{x} = \frac{log^a e}{x} \qquad (1)$$

Für den natürlichen Logarithmus ist nach 18, $k = 1$, also

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial\, logn\, x}{\partial x} = \frac{1}{x} \qquad (2)$$

Ist der Numerus der logarithmischen Function eine Function von x, $= fx = z$, so ist nach No. 15

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial\, log^a(fx)}{\partial x} = \frac{1}{k fx} \cdot \frac{\partial fx}{\partial x} = \frac{1}{kz} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \qquad (3)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial\, logn\,(fx)}{\partial x} = \frac{1}{fx} \cdot \frac{\partial fx}{\partial x} = \frac{1}{z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \qquad (4)$$

B. Kreisfunctionen.

20. Ist die Veränderliche der Sinus, der Bogen die Urveränderliche, also

$$y = sin\, x$$

so hat man bei dem beliebigen $\triangle x$ als Zuwachs von x

$$y + \triangle y = sin\,(x + \triangle x)$$

und $\triangle y = sin\,(x + \triangle x) - sin\, x$

$$= sin\, x \cdot cos \triangle x + cos\, x \cdot sin \triangle x - sin\, x$$

daher $\dfrac{\triangle y}{\triangle x} = cos\, x \cdot \dfrac{sin \triangle x}{\triangle x} - sin\, x \cdot \dfrac{1 - cos \triangle x}{\triangle x}$

Bei beliebiger Abnahme von $\triangle x$ kommt $cos \triangle x$ immer näher dem Werthe 1 folglich ist 1 der Grenzwerth von $cos \triangle x$ und folglich der Grenzwerth von

$$1 - cos \triangle x = 0$$

Daher der Grenzwerth von

$$sin\, x \cdot \frac{1 - cos \triangle x}{\triangle x} = 0$$

Nun ist $\quad sin \triangle x < \triangle x < tg \triangle x$

hierzu $\quad sin \triangle x = sin \triangle x = sin \triangle x$

gibt $\quad \dfrac{sin \triangle x}{sin \triangle x} > \dfrac{sin \triangle x}{\triangle x} > \dfrac{sin \triangle x}{tg \triangle x}$

oder $\quad 1 > \dfrac{sin \triangle x}{\triangle x} > cos \triangle x$

Für $x = 0$ wird $cos\, x = 1$, durch beliebige Abnahme von $\triangle x$ kann also $cos \triangle x$ dem Werth 1 beliebig nahe gebracht werden und folglich ist der Werth 1 auch der Grenzwerth von $\dfrac{sin \triangle x}{\triangle x}$, weil er von dem Grenzwerth 1 und der Constanten 1 eingeschlossen ist.

Daher ist für die beliebige Abnahme von $\triangle x$ der Grenzwerth von

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = cos\, x \cdot 1 + 0$$

und

$$\frac{\partial y}{\partial x} = cos\, x$$

21. Ist die Veränderliche der Cosinus, der Bogen die Urveränderliche,

also $\quad y = cos\, x$

so hat man $\quad cos\, x = sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$

Setzt man $\quad \dfrac{\pi}{2} - x = z$

so ist $\quad y = sin\, z$

und nach No 19 und 15

$$\frac{\partial y}{\partial x} = cos \cdot z \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \frac{\partial\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\partial x} = -\, cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\, sin\, x$$

22. Ist die Veränderliche die Tangente, der Bogen die Urveränderliche, also

$$y = tg\, x$$

so ist $\quad \triangle y = tg\,(x + \triangle x) - tg\, x = \dfrac{sin\,(x + \triangle x)}{cos\,(x + \triangle x)} - \dfrac{sin\, x}{cos\, x}$

$$= \frac{sin\,(x + \triangle x)\, cos\, x - cos\,(x + \triangle x)\, sin\, x}{cos\,(x + \triangle x)\, cos\, x} = \frac{sin\,(x + \triangle x - x)}{cos\,(x + \triangle x)\, cos\, x}$$

$$= \frac{sin \triangle x}{cos\,(x + \triangle x)\, cos\, x}$$

also $\dfrac{\triangle y}{\triangle x} = \dfrac{1}{cos\,(x + \triangle x)\, cos\, x} \cdot \dfrac{sin \triangle x}{\triangle x}$

Für die beliebige Abnahme von $\triangle x$ ist $cos\, x$ der Grenzwerth von $cos\,(x + \triangle x)$ und nach No. 19 der Grenzwerth von $\dfrac{sin \triangle x}{\triangle x} = 1$, daher hat man den Grenzwerth von $\dfrac{\triangle y}{\triangle x} = \dfrac{1}{cos\, x \cdot cos\, x} \cdot 1$

oder

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial\, tg\, x}{\partial x} = \frac{1}{cos^2 x} = sec^2 x = 1 + tg^2 x$$

23. Ist die Veränderliche die Cotangente, der Bogen die Urveränderliche, also

$$y = cot\, x$$

so ist $\quad cot\, x = tg\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$

und setzt man $\quad \dfrac{\pi}{2} - x = z$

so ist $\quad z + \triangle z = \dfrac{\pi}{2} - (x + \triangle x)$

und $\quad \triangle z = -\triangle x$

also $\quad \dfrac{\triangle z}{\triangle x} = -1$

Nun ist $\dfrac{\triangle y}{\triangle x} = \dfrac{tg\,(z + \triangle z) - tg\, z}{\triangle z} \cdot \dfrac{\triangle z}{\triangle x}$

$$= -\, \frac{tg\,(z + \triangle z) - tg\, z}{\triangle z}$$

Für die beliebige Abnahme von $\triangle z$ ist aber der Grenzwerth des letzten Quotient $= \frac{\partial\, tg\, z}{\partial z} = sec^2 z$

folglich $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial\, cot\, x}{\partial x} = -\, sec^2 z = -\, sec^2\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = -\, cosec^2 x$

$$= -(1 + cot^2 x) = -\frac{1}{sin^2 x}$$

24. Ist die Veränderliche die Secante, der Bogen die Urveränderliche, also

$$y = sec\, x$$

so ist
$$\triangle y = sec\,(x + \triangle x) - sec\, x = \frac{1}{cos\,(x + \triangle x)} - \frac{1}{cos\, x}$$

$$= \frac{cos\, x - cos\,(x + \triangle x)}{cos\,(x + \triangle x) \cdot cos\, x} = \frac{2\, sin\, \frac{x + \triangle x + x}{2} \cdot sin\, \frac{x + \triangle x - x}{2}}{cos\,(x + \triangle x) \cdot cos\, x}$$

$$= \frac{2 \cdot sin\left(x + \frac{\triangle x}{2}\right) \cdot sin\, \frac{\triangle x}{2}}{cos\,(x + \triangle x) \cdot cos\, x}$$

folglich $\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{sin\left(x + \frac{\triangle x}{2}\right)}{cos\,(x + \triangle x) \cdot cos\, x} \cdot \frac{sin\, \frac{\triangle x}{2}}{\frac{\triangle x}{2}}$

Für die beliebige Abnahme von $\triangle x$ ist der Grenzwerth von

$$sin\left(x + \frac{\triangle x}{2}\right) = sin\, x$$

von $cos\,(x + \triangle x) = cos\, x$ und nach No. 19

von $\frac{sin\, \frac{\triangle x}{2}}{\frac{\triangle x}{2}} = 1$; daher hat man

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial\, sec\, x}{\partial x} = \frac{sin\, x}{cos^2 x} = tg\, x \cdot sec\, x$$

Anmerk. Man kann, um $\frac{\partial\, sec\, x}{\partial x}$ zu ermitteln auch $sec\, x = \frac{1}{cos\, x}$ setzen.

Dann hat man nach No. 13, Anmerk.

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{1}{cos^2 x} \cdot \frac{\partial\, cos\, x}{\partial x}$$

Nach No. 20 ist $\frac{\partial\, cos\, x}{\partial x} = -\, sin\, x$

daher $\frac{\partial\, sec\, x}{\partial x} = \frac{sin\, x}{cos^2 x}$

25. Ist die Veränderliche die Cosecante, der Bogen die Urveränderliche, also

$$y = cosec\, x = \frac{1}{sin\, x}$$

so ist $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial\, cosec\, x}{\partial x} = -\frac{1}{sin^2 x} \cdot \frac{\partial\, sin\, x}{\partial x}$

also nach No. 19

$$\frac{\partial\, cosec\, x}{\partial x} = -\frac{cos\, x}{sin^2 x} = -\, cot\, x \cdot cosec\, x$$

Oder man setzt $cosec\, x = sec\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

so ist

$$\frac{\partial\, cosec\, x}{\partial x} = \frac{\partial\, sec\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\partial\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} \cdot \frac{\partial\left(\frac{\pi}{x} - x\right)}{\partial x} = tg\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot sec\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot (-1) = -\, cot\, x \cdot cosec\, x$$

26. Ist die Veränderliche der Sinus versus, der Bogen die Urveränderliche, also

$$y = sinv\, x$$

so ist
$$\triangle y = sinv\,(x + \triangle x) - sinv\, x = 1 - cos\,(x + \triangle x) - (1 - cos\, \triangle x)$$
$$= cos\, \triangle x - cos\,(x + \triangle x)$$

und
$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = -\frac{cos\,(x + \triangle x) - cos\, x}{\triangle x}$$

Nun ist der zweite Quotient der Zuwachsquotient des Cosinus, also dessen Grenzwerth das D. des Cosinus $= -\, sin\, x$, daher ist

$$\frac{\partial\, sinv\, x}{\partial x} = +\, sin\, x = \sqrt{1 - cos^2 x} = \sqrt{1 - (1 - sinv\, x)^2} = \sqrt{2\, sinv\, x - sinv^2 x} = \sqrt{2y - y^2}$$

27. Ist die Veränderliche der Cosinus versus, der Bogen die Urveränderliche, also $y = cosv\, x$

so ist, da $\quad cosv\, x = 1 - sin\, x$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = - \frac{sin\,(x + \Delta x) - sin\, x}{\Delta x}$$

und $$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial\, cosv\, x}{\partial x} = - \frac{\partial\, sin\, x}{\partial x} = - cos\, x = - \sqrt{1 - sin^2 x}$$

$$= - \sqrt{2\, cosv\, x - cosv^2 x} = - \sqrt{2y - y^2}$$

28. Ist die Veränderliche ein Kreisbogen, der Sinus des Bogens die Urveränderliche, also

$$y = arc\,(sin = x)$$

also gegenseitig $x = sin\, y$

so ist $\quad \Delta x = \Delta sin\, y$

und $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta\, sin\, y} = \frac{1}{\left(\frac{\Delta\, sin\, y}{\Delta y}\right)}$$

von diesen Differenzenquotienten zu den Grenzwerthen übergegangen gibt nach No. 20

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{\left(\frac{\partial\, sin\, y}{\partial y}\right)} = \frac{1}{cos\, y} = \frac{1}{\sqrt{1 - sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

folglich ist $$\frac{\partial\, arc\,(sin = x)}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

29. Ist die Veränderliche ein Kreisbogen, der Cosinus des Bogens die Urveränderliche, also

$$y = arc\,(cos = x)$$

und gegenseitig $x = cos\, y$

so hat man wie No. 28

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta\, cos\, y} = \frac{1}{\left(\frac{\Delta\, cos\, y}{\Delta y}\right)}$$

und zu den Grenzwerthen übergegangen nach No. 21

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{\left(\frac{\partial\, cos\, y}{\partial y}\right)} = \frac{1}{- sin\, y} = \frac{-1}{\sqrt{1 - cos^2 y}} = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

also $$\frac{\partial\, arc\,(cos = x)}{\partial x} = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

30. Ist die Veränderliche der Kreisbogen, die Tangente des Bogens die Urveränderliche, also $y = arc\,(tg = x)$

und gegenseitig $x = tg\, y$

so ist $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta\, tg\, y} = \frac{1}{\left(\frac{\Delta\, tg\, y}{\Delta y}\right)}$$

und zu den Grenzwerthen übergegangen nach No. 22

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{\left(\frac{\partial\, tg\, y}{\partial y}\right)} = \frac{1}{sec^2 y} = \frac{1}{1 + tg^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$$

also $$\frac{\partial\, arc\,(tg = x)}{\partial x} = \frac{1}{1 + x^2}$$

31. Ist die Veränderliche der Kreisbogen, die Cotangente des Bogens die Urveränderliche, also

$$y = arc\,(cot = x)$$

und gegenseitig $x = cot\, y$

so ist $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta\, cot\, y} = \frac{1}{\left(\frac{\Delta\, cot\, y}{\Delta y}\right)}$$

und zu den Grenzwerthen übergegangen, nach No. 23

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{\left(\frac{\partial\, cot\, y}{\partial y}\right)} = \frac{1}{- cosec^2 y} = \frac{-1}{1 + cot^2 y} = \frac{-1}{1 + x^2}$$

und $$\frac{\partial\, arc\,(cot = x)}{\partial x} = \frac{-1}{1 + x^2}$$

32. Ist die Veränderliche der Kreisbogen, die Secante des Bogens die Urveränderliche, also

$$y = arc\,(sec = x)$$

und gegenseitig $x = sec\, y$

so ist $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta\, sec\, y} = \frac{1}{\left(\frac{\Delta\, sec\, y}{\Delta y}\right)}$$

und zu den Grenzwerthen übergegangen, nach No. 24

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial\, sec\, y} = \frac{1}{tg\, y \cdot sec\, y} = \frac{1}{sec\, y \sqrt{sec^2 y - 1}} = \frac{1}{x \sqrt{x^2 - 1}}$$

also $\frac{\partial\, arc\,(sec = x)}{\partial x} = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$

33. Ist die Veränderliche der Kreisbogen, die Cosecante des Bogens die Urveränderliche, also

$$y = arc\,(cosec = x)$$

und gegenseitig $x = cosec\, y$

so ist $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta\, cosec\, y} = \frac{1}{\left(\frac{\Delta\, cosec\, y}{\Delta y}\right)}$

und zu den Grenzwerthen übergegangen, nach No. 25

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{\left(\frac{\partial\, cosec\, y}{\partial y}\right)} = \frac{1}{-cot\, y \cdot cosec\, y} = \frac{-1}{cosec\, y\sqrt{cosec^2 y - 1}} = \frac{-1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

folglich $\frac{\partial\, arc\,(cosec = x)}{\partial x} = \frac{-1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$

34. Ist die Veränderliche der Kreisbogen, der Sinus versus des Bogens die Urveränderliche, also

$$y = arc\,(sinv = x)$$

und gegenseitig $x = sinv\, y$

so ist $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{sinv\, y} = \frac{1}{\left(\frac{sinv\, y}{\Delta y}\right)}$

und zu den Grenzwerthen übergegangen, nach No. 26

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{\left(\frac{\partial\, sinv\, y}{\Delta y}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2\, sinv\, y - sinv^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{2x - x^2}}$$

daher $\frac{\partial\, arc\,(sinv = x)}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{2x - x^2}}$

35. Ist die Veränderliche der Kreisbogen, der Cosinus versus des Bogens die Urveränderliche, also

$$y = arc\,(cosv = x)$$

und gegenseitig $x = cosv\, y$

so ist $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta\, cosv\, y} = \frac{1}{\left(\frac{\Delta\, cosv\, y}{\Delta y}\right)}$

und zu den Grenzwerthen übergegangen, nach No. 27

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{\left(\frac{\partial\, cosv\, y}{\partial y}\right)} = \frac{1}{-\sqrt{2\, cosv\, y - cosv^2 y}} = \frac{-1}{\sqrt{2x - x^2}}$$

daher $\frac{\partial\, arc\,(cosv = x)}{\partial x} = \frac{-1}{\sqrt{2x - x^2}}$

Ist die Veränderliche x wieder von einer Veränderlichen z abhängig, so hat man in jedem der vorstehenden Fälle nach No. 15 zugleich

$$\frac{\partial y}{\partial z} = \partial f x \cdot \frac{\partial x}{\partial z}$$

Zusammengesetzte transcendente Functionen.

36. Ist die Veränderliche der natürliche Logarithmus des natürl. Log. der Urveränderlichen, also

$$y = logn\,(logn\, x)$$

so setze $logn\, x = z$, und man hat nach No. 19, Formel 2

$$\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{\partial\, logn\, z}{\partial z} = \frac{1}{z}$$

und $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial\, logn\, x}{z\, \partial x} = \frac{1}{x\, z}$

also $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial\, logn\,(logn\, x)}{\partial x} = \frac{1}{x\, logn\, x}$

37. Ist die Veränderliche der Briggische Log. des Briggischen Log. der Urveränderlichen, also

$$y = l \cdot br\,(l \cdot br\, x)$$

so setze $l \cdot br\, x = z$ und man hat

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial\, l \cdot br\, z}{\partial x} = \frac{\partial z}{z}\, log \cdot br\, e = \frac{\partial\, log \cdot br\, x}{log\, br \cdot x} \cdot log\, br \cdot e = \frac{log\, br\, e}{x\, log \cdot br\, x} \cdot log\, br \cdot e$$

also $\frac{\partial y}{\partial x} = log \cdot br \cdot (log\, br\, x) = \frac{(log\, br\, e)^2}{x\, log \cdot br\, x}$

38. Ist die Veränderliche

$$y = logn\,(sin\, x)$$

so setze $sin\, x = z$, und man hat

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial\, ln\, z}{\partial x} = \frac{\partial z}{z} = \frac{\partial\, sin\, x}{sin\, x} = \frac{cos\, x}{sin\, x} = cot\, x$$

daher $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial\, logn\, sin\, x}{\partial\, x} = cot\, x$

39. Ist die Veränderliche

$$y = logn\,(cos\, x)$$

so hat man

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial logn(cos x)}{\partial\, x} = \frac{\partial\, cos\, x}{cos\, x} = -\frac{sin\, x}{cos\, x} = -tg\, x$$

40. Ist die Veränderliche

$$y = logn\,(tg\, x)$$

so hat man

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial\, logn\, tg\, x}{\partial\, x} = \frac{\partial\, tg\, x}{tg\, x} = \frac{sec^2 x}{tg\, x} = \frac{2}{sin\, 2\, x}$$

41. Ist die Veränderliche

$$y = logn\,(cot\, x)$$

so hat man

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial logn(cot\, x)}{\partial\, x} = \frac{\partial\, cot\, x}{cot\, x} = \frac{-\,cosec^2 x}{cot\, x} = \frac{-2}{sin\, 2x}$$

42. Ist die Veränderliche

$$y = logn\,(sec\, x)$$

so hat man

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial logn(sec\, x)}{\partial\, x} = \frac{\partial\, sec\, x}{sec\, x} = \frac{tg\, x \cdot sec\, x}{sec\, x} = tg\, x$$

43. Ist die Veränderliche

$$y = logn\,(cosec\, x)$$

so hat man

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial logn(cosec\, x)}{\partial\, x} = \frac{\partial\, cosec\, x}{cosec\, x} = \frac{-\,cot\, x \cdot cosec\, x}{cosec\, x} = -\,cot\, x$$

Differenziale von Functionen die von mehreren Veränderlichen abhangen.

44. Wenn eine Function von mehreren Veränderlichen abhängt, so ist dies nur möglich, wenn alle diese Veränderlichen wieder Functionen einer und derselben Urveränderlichen sind, welche auch eine der eben gedachten Veränderlichen selbst sein kann.

Es sei $y = f(u, v, w, z \ldots.)$ so ist jede der Veränderlichen $u, v, w, z \ldots$ wiederum eine Function einer Urveränderlichen x, und welche man um dies zu bezeichnen in die obige allgemeine Darstellung als Veränderliche mit einführen kann und schreiben:

$$y = f\,(u, v, w, z \ldots . x)$$

Das D. dieser Function (y) in Beziehung auf die eigentliche Urveränderliche (x) ist nun gleich der Summe der Produkte aus den Differenzialen der Function (y) in Beziehung auf jede der Veränderlichen als Urvariable genommen, multiplicirt mit dem D. dieser letzten in Beziehung auf die eigentliche Urveränderliche (x) oder

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} + \ldots.. \quad (1)$$

Um dies zu beweisen, soll zuerst der einfachste Fall genommen werden, nämlich der dafs y nur von 2 Veränderlichen u, z abhängt.

Also $y = F(u, z)$

und es sei $u = fx$, $z = \varphi x$

so ist $u + \triangle u = f(x + \triangle x)$

$z + \triangle z = \varphi(x + \triangle x)$

$$y + \triangle y = F(u + \triangle u, z + \triangle z)$$

woraus $\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{F(u+\triangle u, z+\triangle z) - F(u, z)}{\triangle x}$

Um nun die Function nach beiden Veränderlichen differenziren zu können, differenzirt man sie nach jeder von beiden einzeln, indem man jedesmal die andere sich constant denkt. Demnach schreibt man den Differenzenquotient

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{F(u + \triangle u, z + \triangle z) - F(u, z + \triangle z) + F(u, z + \triangle z) - F(u, z)}{\triangle x}$$

$$= \frac{F(u + \triangle u, z + \triangle z) - F(u, z + \triangle z)}{\triangle u}\cdot\frac{\triangle u}{\triangle x} + \frac{F(u, z + \triangle z) - F(u, z)}{\triangle z}\cdot\frac{\triangle z}{\triangle x}$$

Der erste Factor des ersten Summand ist nun der Differenzenquotient der Veränderlichen u, indem $z + \triangle z$ constant genommen wird, und der erste Factor des zweiten Summand der Differenzenquotient der Veränderlichen z, indem u constant gesetzt ist.

Mit der beliebigen Abnahme von $\triangle x$ nehmen $\triangle u$ und $\triangle z$ beliebig ab, der erste Differenzenquotient für die Abnahme von $\triangle u$ wird also zum Differenzial der Function $F(u, z + \triangle z)$, welchen Werth auch $z + \triangle z$ haben möge. Da aber mit $\triangle x$ auch $\triangle z$ beliebig abnimmt, so nähert sich mit diesen Abnahmen die Gröfse $z + \triangle z$ ihrem Grenzwerthe z. Man hat also, um den Grenzwerth des ersten Factors zu bestimmen, die Function $F(u, z + \triangle z)$ nach u als Urvariablen zu differenziren, wobei $z + \triangle z$ als constant betrachtet wird und in dem Resultat $\triangle z = 0$ zu setzen. Da es aber gleichgültig ist, ob man erst nach u differenzirt und dann $\triangle z = 0$ setzt oder erst $\triangle z = 0$ setzt und dann nach u differenzirt, weil nämlich z und $\triangle z$ bei der Operation des Differenzirens nach u wie Constanten behandelt werden, so erhält man als Grenzwerth des ersten Factors im ersten Summand das Differenzial

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial F(u, z)}{\partial u}$$

der Grenzwerth des zweiten Factors $\frac{\triangle u}{\triangle x}$ ist das D. von u in Beziehung auf $x = \frac{\partial u}{\partial x}$ und folglich wird der erste Summand

$$\frac{\partial F(u, z)}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$$

Eben so ist der erste Factor des zweiten Summand der Zuwachsquotient der Function $F(u, z)$ wenn z variabel und u constant ist, dessen Grenzwerth das D. dieser Function

$$\frac{\partial F(u, z)}{\partial z} = \frac{\partial y}{\partial z}$$

und der Grenzwerth des zweiten Factors $= \frac{\partial z}{\partial x}$, mithin der Grenzwerth des zweiten Summand:

$$\frac{\partial F(u, z)}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}$$

also
$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \qquad (2)$$

Ist zweitens die Function von 3 Veränderlichen abhängig,

oder $\qquad y = F(u, z, v)$

so hat man die zusammengehörigen Aenderungen

$$x + \triangle x,\; y + \triangle y,\; z + \triangle z,\; v + \triangle v$$

Also
$$\begin{aligned}\triangle y &= F(u + \triangle u, z + \triangle z, v + \triangle v) - F(u, z, v) \\ &= F(u + \triangle u, z + \triangle z, v + \triangle v) - F(u, z, v + \triangle v) + F(u, z, v + \triangle v) - F(u, z, v)\end{aligned}$$

woraus der Zuwachsquotient

$$\frac{F(u + \triangle u, z + \triangle z, v + \triangle v) - F(u, z, v + \triangle v)}{\triangle x} + \frac{F(u, z, v + \triangle v) - F(u, z, v)}{\triangle x}$$

und das gesuchte D. von y ist der Grenzwerth dieser Summe, also die Summe der Grenzwerthe beider Summanden für die beliebige Abnahme von $\triangle x$.

Nun ist der erste Summand der Zuwachsquotient der Function $F(u, z, v + \triangle v)$, wenn u und z sich ändern, $v + \triangle v$ aber constant ist. Man kann daher den Grenzwerth dieses Summanden nach dem eben geführten Beweis bestimmen; da nun $v + \triangle v$ wie constant sich verhält und in beiden Gliedern des Zuwachses mit demselben Werth $v + \triangle v$ vorkommt, so hat diese Gröfse auf das D. nach u und v keinen Einflufs. Da aber mit beliebiger Abnahme von $\triangle x$ auch $\triangle v$ beliebig abnimmt und $v + \triangle v$ seinen Grenzwerth v erhält, indem $\triangle v = 0$ wird, so kann man eben so gut vor wie nach dem Differenziren $\triangle v = 0$ setzen und man hat den Grenzwerth des ersten Summanden

$$\frac{\partial F(u, z, v)}{\partial x} = \frac{\partial F(u, z, v)}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F(u, z, v)}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}$$

In dem zweiten Summand sind u und z als constant betrachtet und nur v ist veränderlich; dieser Summand ist also der Zuwachsquotient der Function y in welcher v die Variable ist. Setzt man diesem noch den Factor $\frac{\triangle v}{\triangle v}$ hinzu, so erhält man ihn:

$$\frac{F(u, z, v + \triangle v) - F(u, z, v)}{\triangle v} \cdot \frac{\triangle v}{\triangle x}$$

Der Grenzwerth des ersten Factors ist also das D. der Function y in Beziehung auf die Variable v und der des zweiten Factors das D. der Variablen v in Beziehung auf die eigentliche Urvariable x, mithin der Grenzwerth des zweiten Summand

$$= \frac{\partial F(u, z, v)}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

mithin das D. der Function $y =$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3)$$

Man sieht, daſs das Gesetz nun auch für 4 Variable eben so erwiesen wird, indem man 2 Summanden bildet, deren erster der Zuwachsquotient der Function wird, wenn die ersten 3 Variablen sich ändern, die vierte constant bleibt und dessen Grenzwerth nach dem 2ten Theil des Beweises aus den 3 Summanden der Formel 3 besteht. Bezeichnet man die 4te Variable mit w, so wird der 4te Summand im D. $= \frac{\partial y}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial x}$ analog mit dem 3ten Summand $\frac{\partial y}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$ im 2ten Theil des Beweises bestimmt u. s. f. für beliebig viele Veränderliche.

Beispiele.

1. Es sei $y = u^z = (fx)^{\varphi x}$ so ist nach Formel 2

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}$$

Nun ist in der Forderung, welche der erste Summand ausspricht, z constant, folglich hat man nach No. 14:

$$\frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = z \cdot u^{z-1} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$$

In der Forderung des zweiten Summand ist u constant und z variabel, also nach No. 18:

$$\frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = u^z \cdot logn\, u \frac{\partial z}{\partial x}$$

folglich $\frac{\partial u^z}{\partial x} = z u^{z-1} \frac{\partial u}{\partial x} + u^z \, ln\, u \frac{\partial z}{\partial x}$

2. Es sei (nach diesem 1. Beispiel)

$$y = x^x$$

so ist

$$\frac{\partial x^x}{\partial x} = x \cdot x^{x-1} + x^x \, ln\, x = x^x (1 + ln\, x)$$

3. Es sei (nach demselben 1. Beispiel)

$$y = (x^m)^{x^n} = x^{mx^n}$$

Setze $mx^n = z$

so ist $$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial x^z}{\partial x} = z x^{z-1} + x^z \, ln\, x \frac{\partial z}{\partial x} = mx^n \cdot x^{mx^n - 1} + x^{mx^n} \, ln\, x \cdot nmx^{n-1}$$
$$= mx^{mx^n + n - 1} [1 + n\, ln\, x]$$

4. Es sei

$$y = sin^m x \cdot (ax^n + b)^p \cdot logn\, (a^x + c)$$

Setzt man

$$sin\, x = u; \; ax^n + b = z; \; a^x + c = v$$

so erhält man die mittelbare Function

$$y = Fu \cdot fz \cdot \varphi v = u^m \cdot z^p \cdot ln\, v$$

Nun ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial Fu} \cdot \frac{\partial Fu}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial fz} \cdot \frac{\partial fz}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \varphi v} \cdot \frac{\partial \varphi v}{\partial x}$$

$\frac{\partial y}{\partial Fu}$ besagt, daſs in diesem D. sowohl fz als φv constant ist, demnach da Fu als die Urvariable gilt ist

$$\frac{\partial y}{\partial Fu} = fz \cdot \varphi v = z^p \cdot ln\, v$$

eben so ist

$$\frac{\partial y}{\partial fz} = Fu \cdot \varphi v = u^m \cdot ln\, v$$

und $$\frac{\partial y}{\varphi v} = Fu \cdot fz = u^m \cdot z^p$$

Man hat also, diese Werthe in die Differenzialformel gesetzt:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = z^p \, ln\, v \cdot \frac{\partial u^m}{\partial x} + u^m \cdot ln\, v \cdot \frac{\partial z^p}{\partial x} + u^m z^p \cdot \frac{\partial\, ln\, v}{\partial x}$$

Nun ist nach No. 15, 14 und 20

$$\frac{\partial u^m}{\partial x} = \frac{\partial u^m}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = mu^{m-1} \cdot \frac{\partial\, sin\, x}{\partial x} = m\, sin^{m-1} x \cdot cos\, x$$

Nach No. 15, 14 und 1

$$\frac{\partial z^p}{\partial x} = \frac{\partial z^p}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = p z^{p-1} \cdot \frac{\partial (ax^n + b)}{\partial x} = p (ax^n + b)^{p-1} \cdot an\, x^{n-1} = pna\, x^{n-1} (ax^n + b)^{p-1}$$

Nach No. 15, 19 und 18

$$\frac{\partial\, ln\, v}{\partial x} = \frac{\partial\, ln\, v}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{v} \cdot \frac{\partial (a^x + c)}{\partial x} = \frac{1}{a^x + c} \cdot a^x \cdot ln\, a$$

Setzt man alle diese Werthe in die Differenzialgleichung so erhält man:

$$\frac{\partial y}{\partial x}=(ax^n+b)^p\cdot ln(a^x+c)\cdot m\sin^{m-1}x\cdot\cos x+\sin^m x\, ln(a^x+c)pnax^{n-1}(ax^n+b)^{p-1}$$
$$+\sin^m x\cdot(ax^n+b)^p\cdot\frac{a^x}{a^x+c}\,ln\,a$$
$$=(ax^n+b)^{p-1}\sin^{m-1}x\Big[m(ax^n+b)\,ln(a^x+c)\cos x+pna\,x^{n-1}ln(a^x+c)\sin x$$
$$+(ax^n+b)\frac{a^x}{a^x+c}\sin x\,ln\,a\Big]$$

45. Wenn man die Differenziale einer Function in Beziehung auf eine Veränderliche so nimmt, als wenn die anderen Veränderlichen constant wären, so nennt man diese D. Theil-Differenziale oder Partial-Differenziale der Function. Nimmt man dagegen das D. in Beziehung auf die gemeinschaftliche Urveränderliche für alle in der Formel vorkommenden Veränderlichen, so heifst das D. Total-Differenzial oder Gesammt-Differenzial.

In der No. 44 gegebenen Function

$$y=F(u,v,w,z\ldots.x)$$

sind $\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial v}$, $\frac{\partial y}{\partial w}$, $\frac{\partial y}{\partial z}$ Partial-Differenziale, weil in dem ersten $v, w, z\ldots$, in dem zweiten $u, w, z\ldots$, in dem dritten $u, v, z\ldots$ und in dem vierten $u, v, w\ldots$ constant genommen sind. Dagegen ist $\frac{\partial(y)}{\partial x}$ das Gesammtdifferenzial, bei welchem nach allen Veränderlichen u, v, w, z in Beziehung auf x als die Urveränderliche differenzirt ist.

Differenziale höherer Ordnungen.

46. Der Begriff und die Schreibweise der höheren D. sind in No. 7 angegeben.

Ist $y=x^4$ die Function, so ist

$$\frac{\partial y}{\partial x}=4x^3$$
$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=3\cdot4\cdot x^2$$
$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}=2\cdot3\cdot4\cdot x$$
$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}=1\cdot2\cdot3\cdot4$$

Höhere D. sind für die Function y unmöglich weil eine constante Gröfse kein D. hat.

Die Bildung der höheren D. aus den ihnen unmittelbar vorhergehenden D. geschieht wie die der ersten D. aus der Function. Jedoch sind einige Entwickelungen von Formeln als Erleichterungsmittel für die Auffindung der höheren D. in speciellen Fällen und Regeln aufzustellen erforderlich, die mit Beispielen begleitet werden sollen.

Da man die höheren D. und deren Grade in Beziehung auf die Function nimmt, so mufs bei den Regeln und Formeln auch die Function selbst zu Grunde gelegt werden. Denn wollte man von dem zunächst vorherstehenden D. ausgehen, so hätte man (von diesem D. nämlich als Function) ein erstes D. und kein höheres D. zu nehmen.

47. Besteht die Function aus einer algebraischen Summe von Veränderlichen (No. 9), so erhält man als D. die algebraische Summe der D. aller einzelnen Glieder, als D. dieser Function also als zweites D. wieder die algebr. Summe der D. des ersten D. u. s. w. Es ist also das höhere D. einer algebraischen Summe von Veränderlichen = der algebraischen Summe der höheren D. der Glieder, oder wenn

$$y=fx\pm\varphi x\pm\psi x\pm\ldots.$$

so ist

$$\frac{\partial^n y}{\partial x^n}=\frac{\partial^n fx}{\partial x^n}\pm\frac{\partial^n\varphi x}{\partial x^n}\pm\frac{\partial^n\psi x}{\partial x^n}\pm\ldots.$$

Ist $y=3x^3+4x^2+5x+1$

so ist $$\frac{\partial y}{\partial x}=9x^2+8x+5$$
$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=18x+8$$
$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}=18$$
$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}=0$$

Man kann aber auch schreiben

$$\frac{\partial y^2}{\partial x^2}=\frac{\partial^2(3x^3)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2(4x^2)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2(5x)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2(1)}{\partial x^2}$$

worin die 2 letzten Glieder = 0 werden und

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2(3x^3)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2(4x^2)}{\partial x^2}=18x+8$$

u. s. w.

48. Ist die Function ein Product von 2 Veränderlichen, so ergibt sich die Regel für die Bildung der D. höherer Ordnungen aus Folgendem.

Es sei allgemein

$$y=u\cdot z$$

so ist $$\frac{\partial y}{\partial x}=u\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+z\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\qquad\text{(No. 11)}$$

Nun ist nach No. 47

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial\left(u \cdot \frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(z \cdot \frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial x} = u \cdot \frac{\partial \frac{\partial z}{\partial x}}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + z \frac{\partial \frac{\partial u}{\partial x}}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$= u \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + z \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Nun hat man als D. dieses D. die Summe der D. der vorstehenden 3 Producte, mithin

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = u \cdot \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + z \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$= u \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + 3 \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 3 \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + z \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$$

Setzt man die Schlüsse so fort, so erhält man immer in dem $n$ten D. zu den beiden äufseren Gliedern $u \frac{\partial^n z}{\partial x^n}$ und $z \frac{\partial^n u}{\partial x^n}$, die mittleren Glieder enthalten der Reihe nach

$$\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-1}} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^{n-2} z}{\partial x^{n-2}} \ldots\ldots \frac{\partial^{n-2} u}{\partial x^{n-2}} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^{n-1} u}{\partial x^{n-1}} \cdot \frac{\partial z}{\partial u}$$

also die Exponenten nach der Ordnung der binomischen Reihe; und auch die Coefficienten sind die dazu gehörigen Binomial-Coefficienten. Von der Allgemeingültigkeit dieses Gesetzes überzeugt man sich, wenn man das Gesetz für $\frac{\partial^n y}{\partial x^n}$ als richtig annimmt und die Reihe noch einmal differenzirt, woraus $\frac{\partial^{n+1} y}{\partial x^{n+1}}$ entsteht.

Die erste Reihe ist:

$$\frac{\partial^n y}{\partial x^n} = u \cdot \frac{\partial^n z}{\partial x^n} + n_1 \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-1}} + n_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^{n-2} z}{\partial x^{n-2}} + \ldots\ldots$$

$$+ n_m \frac{\partial^m u}{\partial x^m} \cdot \frac{\partial^{n-m} z}{\partial x^{n-m}} + \ldots n_{n-1} \frac{\partial^{n-1} n}{\partial x^{n-1}} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^n u}{\partial x^n} \cdot z$$

und man erhält

$$\frac{\partial^{n+1} y}{\partial x^{n+1}} = u \frac{\partial^{n+1} z}{\partial x^{n+1}} + (n+1)_1 \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial^n z}{\partial x^n} + (n+1)_2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-1}} + \ldots$$

$$+ (n+1) \frac{\partial^n u}{\partial x^n} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^{n+1} u}{\partial x^{n+1}} \cdot z$$

49. Ist die Function ein Quotient zwischen 2 Veränderlichen, so ergiebt sich die Regel für die Bildung der höheren D. aus Folgendem:

Es sei $y = \frac{u}{z}$

so ist nach No. 13

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{z^2}\left[z \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial z}{\partial x}\right]$$

Nun erhält man

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{z^4}\left[z^2 \partial\left(z \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial z}{\partial x}\right) \frac{1}{\partial x} - \left(z \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial z}{\partial x}\right) \frac{\partial z^2}{\partial x}\right]$$

$$= \frac{1}{z^4}\left[z^2\left(z \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - u \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}\right) - 2 z \frac{\partial z}{\partial x}\left(z \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial z}{\partial x}\right)\right]$$

$$\frac{1}{z^3}\left[z^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - zu \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2z \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + 2u \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right]$$

Beispiel.

Es sei $u = x^2$
$z = a + bx^3$

so ist $\frac{u}{z} = \frac{x^2}{a + bx^3}$

Nun ist

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial z}{\partial x} = 3bx^2 \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6 \cdot bx$$

und man hat

$$\frac{\partial^2 \frac{u}{z}}{\partial x^2} = [2(a+bx^3)^2 - 6bx(a+bx^3)x^2 - 2(a+bx^3)\cdot 3bx^2\cdot 2x + 2x^2(3bx^2)^2] \times \frac{1}{(a+bx^3)^3}$$

oder reducirt $\frac{\partial^2 \frac{u}{z}}{\partial x^2} = \frac{2(a^2 - 7abx^3 + b^2x^6)}{(a+bx^3)^3}$

Nimmt man u und z in x ausgedrückt den Quotient $\frac{x^2}{a+bx^3}$, und differenzirt nach No. 13, so hat man

$$\frac{\partial \frac{u}{z}}{\partial x} = \frac{(a+bx^3)\,2x - x^2\cdot 3bx^2}{(a+bx^3)^2} = \frac{2ax - bx^4}{(a+bx^3)^2}$$

und wieder differenzirt, gibt

$$\frac{\partial^2 \frac{u}{z}}{\partial x^2} = \frac{(a+bx^3)^2 \times (2a - 4bx^3) - (2ax - bx^4)\times 2(a+bx^3)\cdot 3bx^2}{(a+bx^3)^4}$$

und reducirt

$$\frac{2(a^2 - 7abx^3 + b^2x^6)}{(a+bx^3)^3}$$

Die Formeln für die folgenden höheren D. gewähren noch weniger Vortheile gegen eine directe zweimalige Differenzirung.

50. Die höheren D. von Potenzen mit constantem Exponent sind am einfachsten herzuleiten wie schon No. 46 angegeben ist. Ist die Wurzel Function einer anderen Veränderlichen, so hat man

$$\frac{\partial z^n}{\partial x} = nz^{n-1}\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 z^n}{\partial x^2} = \partial\left(nz^{n-1}\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

und dieses D. mufs nach No. 11 bestimmt werden, wenn man bei gegebener Function z nicht die directe Herleitung von $\partial^2 z = \partial^2 \varphi x$ vorzieht. Nach No. 11 hat man

$$\left.\begin{aligned} \partial\left(nz^{n-1}\frac{\partial z}{\partial x}\right) &= nz^{n-1}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + n(n-1)z^{n-2}\frac{\partial z}{\partial x} \\ \text{oder} \quad \frac{\partial^2 z^n}{\partial x^2} &= nz^{n-2}\left[z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + (n-1)\frac{\partial z}{\partial x}\right] \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Beispiel.

Es sei $y = z^4 = (a+bx^3)^4$

so hat man $\frac{\partial z}{\partial x} = 3bx^2$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6bx$$

Nach der Formel ist, da $n = 4$ ist

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 4\cdot(a+bx^3)^2[(a+bx^3)\cdot 6bx + 3\cdot 3bx^2]$$
$$= 12bx(a+bx^3)^2(2a+3x+2bx^3)$$

Differenzirt man zweimal hintereinander direct, so hat man

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 4(a+bx^3)^3 \times 3bx = 12bx^2(a+bx^3)^3$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 12\cdot bx^2\cdot 3(a+bx^3)^2 + (a+bx^3)^3 \times 2\cdot 12\cdot bx$$
$$= 12\cdot bx(a+bx^3)^2(2a+3x+2bx^3)$$

51. Differenzirt man Formel 1 noch einmal, so erhält man

$$nz^{n-1}\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot n\cdot(n-1)z^{n-2}\frac{\partial z}{\partial x} + n(n-1)z^{n-2}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial z}{\partial x}\cdot n(n-1)(n-2)z^{n-3}\frac{\partial z}{\partial x}$$

oder reducirt und geordnet

$$\frac{\partial^3 z^n}{\partial x^3} = nz^{n-1}\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + n(n-1)z^{n-2}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x} + 1\right) + n(n-1)(n-2)z^{n-3}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2$$

Wird nach dieser Formel das 3te D. des Beispiels No. 50 gebildet, so erhält man, da $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = 6b$ ist

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = 4(a+bx^3)^3 \cdot 6b + 4 \cdot 3 \cdot (a+bx^3)^2 \cdot bx\,(3bx^2+1) + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot (a+bx^3)(3bx^2)^2$$
$$= 24 \cdot b\,(a+bx^3)(a^2+3ax+11abx^3+12bx^4+10b^2x^6)$$

Differenzirt man das zweite D. in No. 50 direct, so erhält man

$$12 \cdot bx\,(a+bx^3)^2(3+6bx^2) + (3x+2a+2bx^3)(a+bx^3)^2 \cdot 12 \cdot b$$
$$+ 12bx\,(3x+2a+2bx^3) \cdot 2(a+bx^3) \cdot 3bx^2$$

gibt reducirt das eben angegebene $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}$

52. Die höheren Differenziale der trigonometrischen Functionen sind aus den vorhergehenden leicht abzuleiten, wenn der Bogen als Urvariabel gegeben ist, weil die ersten D. ebenfalls trig. Functionen sind.

Es ist $\partial\, sin\, x = x$

also
$$\partial^2 sin\, x = \partial\, cos\, x = -\,sin\, x$$
$$\partial^3 sin\, x = \partial(-\,sin\, x) = -\,cos\, x$$
$$\partial^4 sin\, x = \partial(-\,cos\, x) = +\,sin\, x$$

u. s. w.

So ist bei allen übrigen Functionen, dem *cos*, der *tg* u. s. w. zu verfahren; Formeln abzuleiten ist ebenfalls nicht schwierig.

Ist dagegen der Bogen wieder Function einer anderen Urveränderlichen, dann erhält man

$$\frac{\partial\, sin\, z}{\partial x} = cos\, z \cdot \frac{\partial z}{\partial x}$$
$$\frac{\partial^2 sin\, z}{\partial x^2} = \partial\left(cos\, z \cdot \frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

also das D. aus einem Product; man hat nach No. 11, und für höhere D. nach No. 48 zu verfahren.

53. Ist die Function eine Exponentialgröſse mit constanter Grundzahl, so finden sich die höheren D. folgender Art.

Es ist $\frac{\partial e^x}{\partial x} = e^x$ (pag. 265 No. 7)

folglich sind bei dieser deshalb so merkwürdigen Function alle höheren D. einander gleich und deren Anzahl ist unzählbar.

Es ist $\frac{\partial a^x}{\partial x} = a^x\, logn\, a$ (pag. 265 No. 6)

mithin $\frac{\partial^2 a^x}{\partial x^2} = logn\, a \cdot \frac{\partial a^x}{\partial x} = a^x\,(logn\, a)^2$

also $\frac{\partial^3 a^x}{\partial a^3} = a^x\;(logn\, a)^3$

überhaupt $\frac{\partial^n a^x}{\partial x^n} = a^x\,(logn\, a)^n$

Ist der Exponent eine abhängig Veränderliche und es sollen in Beziehung auf die Urvariable die höheren D. genommen werden, so hat man

$$\frac{\partial e^z}{\partial x} = e^z\,\frac{\partial z}{\partial x} \text{ (pag. 265, No 12)}$$

also nach No. 48

$$\frac{\partial^2 e^z}{\partial x^2} = e^z \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial e^z}{\partial x}$$
$$= e^z\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right]$$

und so hat man auch für die weiteren höheren D. nach No. 48 zu verfahren.

Ein Gleiches gilt von a^z.

Es ist

$$\frac{\partial a^z}{\partial x} = a^z\,\frac{\partial z}{\partial x}\, logn\, a \text{ (pag. 265, No. 11)}$$

also

$$\frac{\partial^2 a^z}{\partial x^2} = a^z\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 logn\, a\right] logn\, a$$

$$\text{oder} = a^z\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\, ln \cdot a + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\, ln\, a\right)^2\right]$$

u. s. w.

54. Die höheren D. von logarithmischen Gröſsen entstehen folgender Art:

Es ist

$$\frac{\partial\, logn\, x}{\partial x} = \frac{1}{x} \text{ (pag. 266, Formel 2)} \qquad (1)$$

also

$$\frac{\partial^2 ln\, x}{\partial x^2} = \partial\,\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2} \qquad (2)$$
$$\frac{\partial^3 ln\, x}{\partial x^3} = \partial\left(-\frac{1}{x^2}\right) = +2\,\frac{1}{x^3} \qquad (3)$$
$$\frac{\partial^4 ln\, x}{\partial x^4} = 2\,\partial\,\frac{1}{x^3} = -6\,\frac{1}{x^4} \qquad (4)$$

u. s. w.

Es ist (pag. 265, Formel 1) $a = 10$ gesetzt

$$\frac{\partial\, log \cdot br\, x}{\partial x} = \frac{1}{x\, ln\, 10} \qquad (5)$$

also

$$\frac{\partial^2 l \cdot br\, x}{\partial x^2} = \frac{1}{ln\, 10} \cdot \partial\,\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2\, ln\, 10} \qquad (6)$$
$$\frac{\partial^3 l \cdot br\, x}{\partial x^3} = +2\,\frac{1}{x^3\, ln\, 10} \qquad (7)$$

u. s. w.

Ist die Veränderliche $z = fx$ von einer Urveränderlichen x abhängig, so ist

$$\frac{\partial\, ln\, z}{\partial x} = \frac{1}{z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \text{ (pag. 266, Formel 4)} \qquad (8)$$

Man hat also für die höheren D. wie No. 53 nach No. 48 zu verfahren. Man erhält

$$\frac{\partial^2 ln\, z}{\partial x^2} = \frac{1}{z} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \partial\,\frac{1}{z} = \frac{1}{z}\,\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{1}{z^2}\,\frac{\partial z}{\partial x} \text{ u. s. w.} \qquad (9)$$

Es ist $\frac{\partial \log br\, z}{\partial x} = \frac{1}{k z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{z\, ln\, 10} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}$ (pag. 266, Formel 3) (10)

also $\frac{\partial^2 \log \cdot br \cdot z}{\partial x^2} = \frac{1}{z\, ln\, 10} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \partial \frac{1}{z\, ln\, 10} = \frac{1}{z\, ln\, 10} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{1}{z^2 ln\, 10} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}$ (11)

u. s. w.

Hiermit sollen die Regeln zur Bildung höherer D. von einfachen Functionen in Beziehung auf die Urveränderliche abgeschlossen sein.

55. Ist eine Function y in Beziehung auf eine Veränderliche z gegeben, die wieder von einer Urveränderlichen x abhängt, sind ferner die ersten und zweiten Differenziale von y und z in Beziehung auf x gegeben, und man will das zweite D. von y in Beziehung auf z durch die gegebenen D. ausdrücken so hat man nach No. 16 zuerst

$$\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}$$

Um aus dieser Formel das zweite D., also $\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}$ zu bilden hat man das D. des rechts stehenden Quotient in Beziehung auf x nach No. 13

$$= \frac{\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}}{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}$$

Soll dieses D. dem D. von $\frac{\partial y}{\partial z}$ = sein, so hat man dasselbe ebenfalls in Beziehung auf x zu nehmen, nämlich

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)}{\partial x} = \partial \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right) \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \text{ (pag. 263, No. 15)}$$

Es ist also $$\partial \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right) \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}}{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}$$

folglich beiderseits mit $\frac{\partial z}{\partial x}$ dividirt

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = \frac{\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}}{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^3}$$

Beispiel.

Es sei $y = z^2$

$z = a + bx^2$

folglich $y = (a + bx^2)^2$

Nun ist also

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 4bx\,(a + bx^2)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 4b\,(a + 3bx^2)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2bx$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2b$$

Nach der Formel hat man nun

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = \frac{2bx \times 4b\,(a + 3bx^2) - 4bx\,(a + bx^2) \times 2b}{(2bx)^3} = \frac{16\,b^3 x^3}{8\,b^3 x^3} = 2$$

Zur Probe hat man

$$\frac{\partial y}{\partial z} = \partial z^2 = 2z$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = \partial 2z = 2$$

Noch 2 Beispiele über diesen Satz finden sich in den beiden Art. Cycloide No. 6 pag. 198 und No. 5 pag. 205.

56. Enthält eine Function 2 Veränderliche und wird dieselbe zuerst nach der einen als Urveränderlichen differenzirt, während die andere als constant betrachtet wird (s. No. 44, 45), und dann mit dem erhaltenen D. in Beziehung auf die andere Veränderliche eben so verfahren, so erhält man das zweite D. der Function von 2 Veränderlichen (s. No. 7), und dies 2te D. ist dasselbe, man mag erst die eine und dann die andere oder erst die zweite und dann die erste als alleinige Urveränderliche ansehen.

Also wenn $y = f(x, z)$ ist, so ist

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}{\partial z} = \frac{\partial \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)}{\partial x}$$

oder $$\frac{\partial^2 y}{\partial x \cdot \partial z} = \frac{\partial^2 y}{\partial z \cdot \partial x}$$

Denn ändert man zuerst x in $x + \triangle x$, läfst z constant, so entsteht der Zuwachsquotient

$$\frac{f(x + \triangle x, z) - f(x, z)}{\triangle x} \qquad (1)$$

Der Grenzwerth hiervon ist das D. von y in Beziehung auf x nämlich

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$$

Betrachtet man nun die beiden Werthe x und $x + \triangle x$ als Constanten und gibt z einen zweiten Werth $z + \triangle z$, so ändert sich der Zuwachsquotient in

$$\frac{f(x + \triangle x, z + \triangle z) - f(x, z + \triangle z)}{\triangle x} \qquad (2)$$

Zieht man hiervon den ersten Zuwachsquotient ab, so erhält man den Zuwachs des Zuwachsquotienten als Function von z; in welcher die Gröfsen x und $x + \triangle x$ constant sind, und diesen Zuwachs mit $\triangle z$ dividirt, den Zuwachsquotient der eben gedachten Function:

$$\frac{\dfrac{f(x + \triangle x, z + \triangle z) - f(x, z + \triangle z)}{\triangle x} - \dfrac{f(x + \triangle x, z) - f(x, z)}{\triangle x}}{\triangle z} \qquad (3)$$

Nimmt man hierin zuerst z und $\triangle z$ constant und läfst $\triangle x$ beliebig abnehmen, so entstehen folgende Grenzwerthe: Der erste Quotient des Zählers wird zu dem Grenzwerthe der Function $f(x, z + \triangle z)$ wenn $z + \triangle z$ constant bleibt also wird

$$= \frac{\partial f(x, z + \triangle z)}{\partial x}$$

und der 2te Quotient des Zählers wird zu dem Grenzwerthe der Function $f(x, z)$ wenn z constant bleibt, also wird

$$= \frac{\partial f(x, z)}{\partial x}$$

mithin entsteht aus dem Zuwachsquotient (3) bei constant bleibendem z und $\triangle z$ dessen Grenzwerth:

$$\frac{\dfrac{\partial f(x, z + \triangle z)}{\partial x} - \dfrac{\partial (x, z)}{\partial x}}{\triangle z} \qquad (4)$$

Dieser Grenzwerth ist aber der Zuwachsquotient der Function $\frac{\partial f(x, z)}{\partial x}$, wenn man darin x constant setzt, und z um $z + \triangle z$ sich ändern läfst, mithin ist der Grenzwerth des Zuwachsquotienten (4) das D. der Function $\frac{\partial f(x, z)}{\partial x}$, in Beziehung auf die Veränderliche z, also

$$= \frac{\partial \left(\dfrac{\partial f(x, z)}{\partial x}\right)}{\partial z} \qquad (5)$$

Da nun der Zuwachsquotient (3) durch beliebige Abnahme von $\triangle x$ dem Zuwachsquotient (4) beliebig nahe kommen kann, dieser aber durch beliebige Abnahme von $\triangle z$ dem Differenzial (5), so kann auch der Zuwachsquotient (3) diesem D. beliebig nahe kommen, wenn in ihm $\triangle x$ und $\triangle z$ zugleich beliebig abnehmen. Folglich ist das D. (5) der Grenzwerth des Quotient (3) bei gleichzeitiger Abnahme von $\triangle x$ und $\triangle z$ in ihm.

Vertauscht man in dem Zuwachsquotient (3) die Mittelglieder, so erhält man

$$\frac{f(x + \triangle x, z + \triangle z) - f(x + \triangle x, z)}{\triangle x \triangle z} - \frac{f(x, z + \triangle z) - f(x, z)}{\triangle x \triangle z}$$

oder $$\frac{\dfrac{f(x + \triangle x, z + \triangle z) - f(x + \triangle x, z)}{\triangle z} - \dfrac{f(x, z + \triangle z) - f(x, z)}{\triangle z}}{\triangle x} \qquad (6)$$

Hieraus entsteht bei beliebiger Abnahme von $\triangle z$, während $\triangle x$ und x constant bleiben, statt der Formel 4, der Grenzwerth

$$\frac{\dfrac{\partial f(x + \triangle x, z)}{\partial z} - \dfrac{\partial (x, z)}{\partial z}}{\triangle x} \qquad (7)$$

und dieser Grenzwerth ist wieder der Zuwachsquotient der Function $\frac{\partial f(x, z)}{\partial z}$ wenn man darin z constant setzt und x um $x + \triangle x$ sich ändern läfst, mithin ist der Grenzwerth dieses Quotient (7) das D. der Function $\frac{\partial f(x, z)}{\partial z}$ in Beziehung auf die Veränderliche x also

$$= \frac{\partial \left(\dfrac{\partial f(x, z)}{\partial z}\right)}{\partial x} \qquad (8)$$

Da nun wieder der Zuwachsquotient

(6) durch beliebige Abnahme von $\triangle z$ dem Zuwachsquotient (7) beliebig nahe kommen kann, dieser aber durch beliebige Abnahme von $\triangle x$ dem Differenzial (8), so kann auch der Zuwachsquotient (6) dem D. (8) beliebig nahe kommen wenn in ihm gleichzeitig $\triangle z$ und $\triangle x$ abnehmen, und folglich ist das D. (8) der Grenzwerth des Quotient 6.

Da nun die beiden Ausdrücke 3 und 6 eine und dieselbe Gröfse sind, so sind auch deren Grenzwerthe einander gleich; aus der gleichzeitigen beliebigen Abnahme von $\triangle x$ und $\triangle z$ entstehen also die Differenziale

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial f(x,z)}{\partial x}\right)}{\partial z} = \frac{\partial\left(\frac{\partial f(x,z)}{\partial z}\right)}{\partial x}$$

oder

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}{\partial z} = \frac{\partial\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)}{\partial x}$$

oder

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x \cdot \partial z} = \frac{\partial^2 y}{\partial z \cdot \partial x}$$

womit die Richtigkeit des Satzes erwiesen ist.

57. Aus No. 56 erfolgt leicht, dafs es gleichgültig ist in welcher Reihenfolge höhere als zweite D. in Beziehung auf beide Veränderliche differenzirt werden, und es ist allgemein

$$\frac{\partial^{m+n} u}{\partial^m x \cdot \partial^n y} = \frac{\partial^{m+n} u}{\partial^n y \cdot \partial^m x} = \frac{\partial^{m+n} u}{\partial x^p \cdot \partial y^q \cdot \partial x^{m-p}\, \partial y^{n-q}}$$

Differenzialformel ist ein Ausdruck, der das Differenzial einer veränderlichen Gröfse oder Function von bestimmter Form angiebt. Die geordnete Zusammenstellung von D.formeln, wie hier eine solche erfolgt, hat einen zweifachen Nutzen. Erstens hat man nicht nöthig die Differenziale zusammengesetzter Functionen aus den Elementarformeln erst abzuleiten. Zweitens kann man gegenseitig die Functionen als die Integrale der ermittelten Differenziale erkennen, Differenziale, die zu integriren gegeben sind, mit diesen vergleichen und beurtheilen, welche Transformationen man mit dem gegebenen Differenzial vornehmen mufs um es einem hier aufgeführten ähnlichen D. vollkommen gleich zu machen, so dafs dann das Integral in der dem D. hier vorgeschriebenen Function gefunden ist. Uebrigens ist, um Raum zu ersparen, die Schreibart $\partial y = z\,\partial x$ statt $\frac{\partial y}{\partial x} = z$ gewählt und x als Urvariabel angesehen, so dafs $\partial x = 1$ als Factor fortgelassen ist.

1.	$y = a = ax^0 = az^0$	$\partial y = 0$
2.	$y = x$	$\partial y = 1$
3.	$y = z$	$\partial y = \partial z$
4.	$y = a + x$	$\partial y = 1$
5.	$y = a + z$	$\partial y = \partial z$
6.	$y = fx$	$\partial y = \partial fx$
7.	$y = fz$	$\partial y = \partial fz \cdot \partial z$
8.	$y = ax$	$\partial y = a$
9.	$y = afx$	$\partial y = a\partial fx$
10.	$y = afz$	$\partial y = a\,\partial fz \cdot \partial z$
11.	$y = Fx \pm fx \pm \varphi x\,..$	$\partial y = \partial Fx \pm \partial fx \pm \partial \varphi x$
12.	$y = fz \pm \varphi z$	$\partial y = \partial fz \cdot \partial z \pm \partial \varphi z \cdot \partial z$
13.	$y = fx \cdot \varphi x$	$\partial y = fx \cdot \partial \varphi x + \varphi x \cdot \partial fx$
14.	$y = u \cdot z$	$\partial y = u\partial z + z\partial u$
15.	$y = u \cdot z \cdot v$	$\partial y = uz\,\partial v + uv\,\partial z + zv \cdot \partial u$
16.	$y = \frac{fx}{\varphi x}$	$\partial y = \frac{\varphi x \cdot \partial fx - fx \cdot \partial \varphi x}{(\varphi x)^2}$
17.	$y = \frac{fz}{\varphi u}$	$\partial y = \frac{\varphi u \cdot \partial fz \cdot \partial z - fz \cdot \partial \varphi u \cdot \partial u}{(\varphi u)^2}$
18.	$y = \frac{a}{\varphi x}$	$\partial y = -a\frac{\partial \varphi x}{(\varphi x)^2}$
19.	$y = \frac{a}{fz}$	$\partial y = -a\frac{\partial fz \cdot \partial z}{(fz)^2}$
20.	$y = \frac{a + bz}{\alpha + \beta z}$	$\partial y = \frac{b\alpha - a\beta}{(\alpha + \beta z)^2}\partial z$
21.	$y = \frac{a - bz}{\alpha - \beta z}$	$\partial y = \frac{-b\alpha + a\beta}{(\alpha - \beta z)^2}\partial z$
22.	$y = \frac{a + bz}{\alpha - \beta z}$	$\partial y = \frac{b\alpha + a\beta}{(\alpha - \beta z)^2}\partial z$
23.	$y = \frac{a - bz}{\alpha + \beta z}$	$\partial y = \frac{-b\alpha - a\beta}{(\alpha + \beta z)^2}\partial z$
24.	$y = x^n$	$\partial y = nx^{n-1}$
25.	$y = (\varphi x)^n$	$\partial y = n(\varphi x)^{n-1}\partial \varphi x$
26.	$y = (\varphi z)^n$	$\partial y = n(\varphi z)^{n-1}\partial \varphi z \cdot \partial z$

27. $\begin{cases} y = z^{\frac{1}{n}} \\ y = \sqrt[n]{z} \end{cases}$ $\quad \partial y = \frac{1}{n} z^{\frac{1}{n} - 1} \partial z$, $\quad \partial y = \frac{1}{n} \frac{\partial z}{\sqrt[n]{z^{n-1}}}$

28. $\begin{cases} y = z^{\frac{m}{n}} \\ y = \sqrt[n]{z^m} \end{cases}$ $\quad \partial y = \frac{m}{n} z^{\frac{m}{n} - 1} \partial z$, $\quad \partial y = \frac{m}{n} \frac{\partial z}{\sqrt[n]{z^{n-m}}}$

29. $\begin{cases} y = z^{-n} \\ y = \frac{1}{z^n} \end{cases}$ $\quad \partial y = -n z^{-(n+1)} \partial z$, $\quad \partial y = -n \frac{\partial z}{z^{n+1}}$

30. $\begin{cases} y = z^{-\frac{1}{n}} \\ y = \frac{1}{\sqrt[n]{z}} \end{cases}$ $\quad \partial y = -\frac{1}{n} z^{-\left(\frac{1}{n}+1\right)} \partial z$, $\quad \partial y = -\frac{1}{n} \frac{\partial z}{\sqrt[n]{z^{n+1}}}$

31. $\begin{cases} y = z^{-\frac{m}{n}} \\ y = \frac{1}{\sqrt[n]{z^m}} \end{cases}$ $\quad \partial y = -\frac{m}{n} z^{-\left(\frac{m}{n}+1\right)} \partial z$, $\quad \partial y = -\frac{m}{n} \frac{\partial z}{\sqrt[n]{z^{n+m}}}$

---

32. $y = z^3$ $\quad \partial y = 3z^2 \partial z$
33. $y = z^2$ $\quad \partial y = 2z\, \partial z$
34. $y = z^1$ $\quad \partial y = \partial z$
35. $y = z^{-1}$ $\quad \partial y = -z^{-2} \partial z$
36. $y = z^{-2}$ $\quad \partial y = -2z^{-3} \partial z$
37. $y = z^{-3}$ $\quad \partial y = -3z^{-4} \partial z$

Anmerk.
$\partial y = z^{-1}$ s. $y = logn\, z$ (No. 84)

---

38. $y = z^{\frac{1}{4}}$ $\quad \partial y = \frac{1}{4} z^{-\frac{3}{4}} \partial z$
39. $y = z^{\frac{1}{3}}$ $\quad \partial y = \frac{1}{3} z^{-\frac{2}{3}} \partial z$
40. $y = z^{\frac{1}{2}}$ $\quad \partial y = \frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}} \partial z$
41. $y = z^{-\frac{1}{2}}$ $\quad \partial y = -\frac{1}{2} z^{-\frac{3}{2}} \partial z$
42. $y = z^{-\frac{1}{3}}$ $\quad \partial y = -\frac{1}{3} z^{-\frac{4}{3}} \partial z$
43. $y = z^{-\frac{1}{4}}$ $\quad \partial y = -\frac{1}{4} z^{-\frac{5}{4}} \partial z$

---

44. $y = z^{\frac{3}{4}}$ $\quad \partial y = \frac{3}{4} z^{-\frac{1}{4}} \partial z$
45. $y = z^{\frac{2}{3}}$ $\quad \partial y = \frac{2}{3} z^{-\frac{1}{3}} \partial z$
46. $y = z^{-\frac{2}{3}}$ $\quad \partial y = -\frac{2}{3} z^{-\frac{5}{3}} \partial z$
47. $y = z^{-\frac{3}{4}}$ $\quad \partial y = -\frac{3}{4} z^{-\frac{7}{4}} \partial z$

---

48. $y = \frac{1}{z}$ $\quad \partial y = -\frac{\partial z}{z^2}$
49. $y = \frac{1}{z^2}$ $\quad \partial y = -2 \frac{\partial z}{z^3}$
50. $y = \frac{1}{z^3}$ $\quad \partial y = -3 \frac{\partial z}{z^4}$
51. $y = \frac{1}{z^4}$ $\quad \partial y = -4 \frac{\partial z}{z^5}$

---

52. $y = \sqrt{z}$ $\quad \partial y = \frac{1}{2} \frac{\partial z}{\sqrt{z}}$
53. $y = \sqrt[3]{z}$ $\quad \partial y = \frac{1}{3} \frac{\partial z}{\sqrt[3]{z^2}}$
54. $y = \sqrt[4]{z}$ $\quad \partial y = \frac{1}{4} \frac{\partial z}{\sqrt[4]{z^3}}$

---

55. $y = \sqrt{z^3} (= z\sqrt{z})$ $\quad \partial y = \frac{3}{2} \frac{\partial z}{\sqrt{z^{-1}}} = \frac{3}{2} \sqrt{z} \cdot \partial z$

56. $y \sqrt[3]{z^2}$ $\quad \partial y = \frac{2}{3} \frac{\partial z}{\sqrt[3]{z}}$

57. $y = \sqrt[4]{z^5} (= z\sqrt[4]{z})$ $\quad \partial y = \frac{5}{4} \frac{\partial z}{\sqrt[4]{z^{-1}}} = \frac{5}{4} \sqrt[4]{z}\, \partial z$

58. $y = \sqrt[5]{z^3}$ $\quad \partial y = \frac{3}{5} \frac{\partial z}{\sqrt[5]{z^2}}$

---

59. $y = \frac{1}{\sqrt{z}}$ $\quad \partial y = -\frac{1}{2} \frac{\partial z}{\sqrt[2]{z^3}} = -\frac{1}{2} \frac{\partial z}{z\sqrt{z}}$

60. $y = \frac{1}{\sqrt[3]{z}}$ $\quad \partial y = -\frac{1}{3} \frac{\partial z}{\sqrt[3]{z^4}} = -\frac{1}{3} \frac{\partial z}{z\sqrt[3]{z}}$

61. $y = \frac{1}{\sqrt[4]{z}}$ $\quad \partial y = -\frac{1}{4} \frac{\partial z}{\sqrt[4]{z^5}} = -\frac{1}{4} \frac{\partial z}{z\sqrt[4]{z}}$

---

62. $y = \frac{1}{\sqrt[3]{z^2}}$ $\quad \partial y = -\frac{2}{3} \frac{\partial z}{\sqrt[3]{z^5}} = -\frac{2}{3} \frac{\partial z}{z\sqrt[3]{z^2}}$

63. $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^5}} = \frac{1}{x\sqrt[3]{x^2}}$ $\qquad \partial y = -\frac{5}{3}\,\frac{\partial z}{\sqrt[3]{z^8}} = -\frac{5}{3}\,\frac{\partial z}{z^2\sqrt[3]{z^2}}$

64. $y = \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$ $\qquad \partial y = -\frac{3}{4}\,\frac{\partial z}{\sqrt[4]{z^7}} = -\frac{3}{4}\,\frac{\partial z}{z\sqrt[4]{z^3}}$

---

65. $y = (a + bz^n)^m$ $\qquad \partial y = mnbz^{n-1}(a + bz^n)^{m-1}\,\partial z$

66. $y = (a + bz^n)^{-m} = \frac{1}{(a - bz^n)^m}$ $\qquad \partial y = -mnbz^{n-1}(a + bz^n)^{-(m+1)}\,\partial z = -\frac{mnbz^{n-1}\,\partial z}{(a + bz^n)^{m+1}}$

67. $y = (a + bz^n)^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a + bz^n}$ $\qquad \partial y = \frac{n}{m}\,bz^{n-1}(a + bz^n)^{\frac{n}{m} - 1}\,\partial z = \frac{n}{m}\,\frac{bz^{n-1}\,\partial z}{\sqrt[m]{(a + bz^n)^{m-1}}}$

68. $y = (a + bz^n)^{-\frac{1}{m}} = \frac{1}{\sqrt[m]{a + bz^n}}$ $\qquad \partial y = -\frac{n}{m}\,z^{n-1}(a + bz^n)^{-\left(\frac{1}{m}+1\right)}\,\partial z = -\frac{n}{m}\,\frac{b \cdot z^{n-1}\,\partial z}{\sqrt[m]{(a + bz^n)^{m+1}}}$

69. $y = (a + bz^n)^{\frac{m}{q}} = \sqrt[q]{(a + bz^n)^m}$ $\qquad \partial y = \frac{mn}{q}\,bz^{n-1}(a + bz^n)^{\frac{m}{q} - 1}\,\partial z = \frac{mn}{q}\,bz^{n-1}\sqrt[q]{(a + bz^n)^{m-q}}\,\partial z$

70. $y = (a + bz^n)^{-\frac{m}{q}} = \frac{1}{\sqrt[q]{(a + bz^n)^m}}$ $\qquad \partial y = -\frac{mn}{q}\,bz^{n-1}(a + bz^n)^{-\left(\frac{m}{q}+1\right)}\,\partial z = -\frac{mn}{q}\,\frac{bz^{n-1}\,\partial z}{\sqrt[q]{(a + bz^n)^{m+q}}}$

---

71. $y = \sqrt{a + bz^2}$ $\qquad \partial y = \frac{bz \cdot \partial z}{\sqrt{a + bz^2}}$

72. $y = \frac{1}{\sqrt{a + bz^2}}$ $\qquad \partial y = -\frac{bz\,\partial z}{\sqrt{(a + bz^2)^3}}$

73. $y = \sqrt[3]{(a + bz^2)}$ $\qquad \partial y = \frac{2}{3} \cdot \frac{bz\,\partial z}{\sqrt[3]{(a + bz^2)^2}}$

74. $y = \frac{1}{\sqrt[3]{(a + bz^2)}}$ $\qquad \partial y = -\frac{2}{3}\,\frac{bz\,\partial z}{\sqrt[3]{(a + bz^2)^4}}$

---

75. $y = z^p(a + bz^n)^m$ $\qquad \partial y = pz^{p-1}(a + bz^n)^m\,\partial z + mnbz^{n+p-1}(a + bz^n)^{m-1}\,\partial z = z^{p-1}(a + bz^n)^{m-1}[p(a + bz^n) + mnbz^n]\,\partial z$

76. $y = z^p(a + bz)^m$ $\qquad \partial y = z^{p-1}(a + bz)^{m-1}[p(a + bz) + mnbz]$

77. $y = z\sqrt{a + bz^2}$ $\qquad \partial y = \frac{a + 2bz^2}{\sqrt{a + bz^2}}\,\partial z$

78. $y = \frac{\sqrt{a + bz^2}}{z}$ $\qquad \partial y = -\frac{a\,\partial z}{z^2\sqrt{a + bz^2}}$

79. $y = \frac{z}{\sqrt{a + bz^2}}$ $\qquad \partial y = \frac{a\,\partial z}{\sqrt{(a + bz^2)^3}}$

80. $y = \frac{1}{z\sqrt{a + bz^2}}$ $\qquad \partial y = -\frac{a + 2bz^2}{z^2(a + bz^2)^{\frac{3}{2}}}\,\partial z$

e die Basis des natürlichen Systems $= 2{,}7182\ 81828\ldots$
m den Modul des Briggschen Systems $= log\ br\ e = 0{,}43429448\ldots.$
$$= \frac{1}{logn\ 10} = \frac{1}{2{,}3025\ 8509\ldots}$$

so ist

81. $y = e^z$ $\qquad \partial y = e^z\, \partial z$
82. $y = a^z$ $\qquad \partial y = a^z\, logn\ a\, \partial z$
83. $y = 10^z$ $\qquad \partial y = a^z\, \partial z\, ln\,10 = 2{,}3025\ 8509\ldots a^z\, \partial z = \frac{a^z\,\partial z}{0{,}43429448\ldots}$
84. $y = logn\ z$ $\qquad \partial y = \frac{\partial z}{z} = z^{-1}\,\partial z$
85. $y = log\ br\ z$ $\qquad \partial y = m\,\partial\, logn\ z = \frac{\partial z}{z\, ln\,10} = \frac{\partial z}{2{,}3024\,85\ldots z}$
$$= log\ br\ e \cdot \frac{\partial z}{z} = 0{,}43429\ldots \frac{\partial z}{z}$$

---

86. $y = ln\,(a \pm bz)$ $\qquad \partial y = \frac{\pm b\,\partial z}{a \pm bz}$
87. $y = ln\,(az \pm bz^2)$ $\qquad \partial y = \frac{(a \pm 2bz)\,\partial z}{az \pm bz^2}$
88. $y = ln\left(z + \sqrt{a^2 + z^2}\right)$ $\qquad \partial y = \frac{\partial z}{\sqrt{a^2 + z^2}}$
89. $y = ln\left(z + \sqrt{z^2 - a^2}\right)$ $\qquad \partial y = \frac{\partial z}{\sqrt{z^2 - a^2}}$
90. $y = ln\left(z - \sqrt{z^2 - a^2}\right)$ $\qquad \partial y = \frac{-\partial z}{\sqrt{z^2 - a^2}}$
91. $y = ln\,\frac{1}{z}\left(a + \sqrt{a^2 + z^2}\right)$ $\qquad \partial y = -\frac{a\,\partial z}{z\sqrt{a^2 + z^2}}$
92. $y = ln\,\frac{1}{z}\left(a - \sqrt{a^2 - z^2}\right)$ $\qquad \partial y = \frac{a\,\partial z}{z\sqrt{a^2 - z^2}}$

---

93. $y = ln\,(a + z)(b + z)$ $\qquad \partial y = \frac{\partial z}{a + z} + \frac{\partial z}{b + z} = \frac{a + b + 2z}{(a + z)(b + z)}\,\partial z$
94. $y = ln\,(a - z)(b - z)$ $\qquad \partial y = -\frac{\partial z}{a - z} - \frac{\partial z}{b - z} = -\frac{a + b - 2z}{(a - z)(b - z)}\,\partial z$
95. $y = ln\,\frac{a + z}{a - z}$ $\qquad \partial y = \frac{2a\,\partial z}{a^2 - z^2}$
96. $y = ln\,\frac{a - z}{a + z}$ $\qquad \partial y = -\frac{2a\,\partial z}{a^2 - z^2}$
97. $y = ln\,\frac{z - a}{z + a}$ $\qquad \partial y = \frac{2a\,\partial z}{z^2 - a^2}$
98. $y = ln\,\frac{z + a}{z - a}$ $\qquad \partial y = -\frac{2a\,\partial z}{z^2 - a^2}$

---

99. $y = (ln\,z)^n$ $\qquad \partial y = (ln\,z)^{n-1} \cdot \frac{\partial z}{z}$
100. $y = z^m\, ln\,z$ $\qquad \partial y = [m\, ln\,z + 1]\, z^{m-1}\,\partial z$
101. $y = \frac{1}{m}\, z^m\left(ln\,z - \frac{1}{m}\right)$ $\qquad \partial y = z^{m-1}\, ln\,z\,\partial z$
102. $y = ln\,(ln\,z)$ $\qquad \partial y = \frac{\partial z}{z\, ln\,z}$
103. $y = l \cdot br\,(l \cdot br \cdot z)$ $\qquad \partial y = \frac{(log \cdot br\ e)^2}{z \cdot log \cdot br\ z}\,\partial z$

---

104. $y = sin\,z$ $\qquad \partial y = cos\,z \cdot \partial z$
105. $y = cos\,z$ $\qquad \partial y = -\,sin\,z\,\partial z$
106. $y = tg\,z$ $\qquad \partial y = sec^2 z\,\partial z = (1 + tg^2 z)\,\partial z$

107. $y = cot\, z \qquad \partial y = -cosec^2 z\, \partial z = -(1 + cot^2 z)\, \partial z$

108. $y = sec\, z \qquad \partial y = tg\, z \cdot sec\, z \cdot \partial z$

109. $y = cosec\, z \qquad \partial y = -cot\, z \cdot cosec\, z \cdot \partial z$

110. $y = sinv\, z \qquad \partial y = \sqrt{2y - y^2}\, \partial z = \sqrt{2\, sinv\, z - sinv^2 z}\, \partial z$

111. $y = cosv\, z \qquad \partial y = \sqrt{2y - y^2} \cdot \partial z = -\sqrt{2\, cosv\, z - cosv^2 z}\, \partial z$

---

112. $y = sin^2 z \qquad \partial y = 2\, sin\, z\, cos\, z\, \partial z = sin\, 2z \cdot \partial z$

113. $y = cos^2 z \qquad \partial y = -2\, cos\, z \cdot sin\, z \cdot \partial z = -sin\, 2z \cdot \partial z$

114. $y = tg^2 z \qquad \partial y = 2\, tg\, z\, (1 + tg^2 z)\, \partial z$

115. $y = cot^2 z \qquad \partial y = -2\, cot\, z\, (1 + cot^2 z)\, \partial z$

116. $y = sec^2 z \qquad \partial y = \partial\, tg^2 z = 2\, tg\, z\, (1 + tg^2 z)\, \partial z$

117. $y = cosec^2 z \qquad \partial y = \partial\, cot^2 z = -2\, cot\, z \cdot (1 + cot^2 z)\, \partial z$

---

118. $y = arc\,(sin = z) \qquad \partial y = \frac{\partial z}{\sqrt{1 - z^2}}$

119. $y = arc\,(cos = z) \qquad \partial y = -\frac{\partial z}{\sqrt{1 - z^2}}$

120. $y = arc\,(tg = z) \qquad \partial y = \frac{\partial z}{1 + z^2}$

121. $y = arc\,(cot = z) \qquad \partial y = -\frac{\partial z}{1 + z^2}$

122. $y = arc\,(sec = z) \qquad \partial y = \frac{\partial z}{z\sqrt{z^2 - 1}}$

123. $y = arc\,(cosec = z) \qquad \partial y = -\frac{\partial z}{z\sqrt{z^2 - 1}}$

124. $y = arc\,(sinv = z) \qquad \partial y = \frac{\partial z}{\sqrt{2z - z^2}}$

125. $y = arc\,(cosv = z) \qquad \partial y = -\frac{\partial z}{\sqrt{2z - z^2}}$

Für Formel 118 bis 125 kann man auch schreiben:

126. $\partial\,(\text{Bogen}\ \varphi) = \frac{\partial\, sin\, y}{cos\, y}$

127. $\partial \varphi = -\frac{\partial\, cos\, y}{sin\, y}$

128. $\partial \varphi = \frac{\partial\, tg\, y}{sec^2 y} = cos^2 y \cdot \partial\, tg\, y$

129. $\partial \varphi = -\frac{\partial\, cot\, y}{cosec^2 y} = -sin^2 y \cdot \partial\, cot\, y$

130. $\partial \varphi = \frac{\partial\, sec\, y}{sec\, y \cdot tg\, y} = \frac{cos^2 y}{sin\, y} \cdot \partial\, sec\, y$

131. $\partial \varphi = -\frac{\partial\, cosec\, y}{cosec\, y \cdot cot\, y} = -\frac{sin^2 y}{cot\, y} \cdot \partial\, cosec\, y$

132. $\partial \varphi = \frac{\partial\, sinv\, y}{\sqrt{2\, sinv\, y - sinv^2 y}}$

133. $\partial \varphi = -\frac{\partial\, cosv\, y}{\sqrt{2\, cosv\, y - cosv^2 y}}$

---

134. $y = logn\, sin\, z \qquad \partial y = cot\, z \cdot \partial z$

135. $y = logn\, cos\, z \qquad \partial y = -tg\, z \cdot \partial z$

136. $y = logn\, tg\, z \qquad \partial y = \frac{2\, \partial z}{sin\, 2z}$

137. $y = logn\, cot\, z \qquad \partial y = \frac{-2\, \partial z}{sin\, 2z}$

138. $y = logn\, sec\, z \qquad \partial y = tg\, z \cdot \partial z$

139. $y = logn\, cosec\, z \qquad \partial y = -cot\, z \cdot \partial z$

140. $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial z} \times \frac{\partial z}{\partial x}$

141. $\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}$

142. $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)}$

---

143. $\frac{\partial f(u, z)}{\partial x} = \frac{\partial f(u, z)}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f(u, z)}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}$

144. $\frac{\partial f(u, z, v)}{\partial x} = \frac{\partial f(u, z, v)}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f(u, z, v)}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial f(u, z, v)}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$ u. s. w.

---

145. $y = u^z \qquad \partial y = z u^{z-1}\, \partial u \cdot + u^z\, ln\, u \cdot \partial z$

146. $y = x^x \qquad \partial y = x^x\, (1 + ln\, x)$

147. $y = (x^m)^{x^n} \qquad \partial y = m x^{m x^n + n - 1} [1 + n\, ln\, x]$

148. $\frac{\partial^2 (u \times z)}{\partial x^2} = u \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + z \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

149. $\frac{\partial^2 z^n}{\partial x^2} = n z^{n-1} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + n(n-1(z^{n-2} \frac{\partial z}{\partial x}$

150. $\frac{\partial^n e^x}{\partial x^n} = e^x$

151. $\frac{\partial^n a^x}{\partial x^n} = a^x\, (logn\, a)^n$

152. $\frac{\partial^2 e^z}{\partial x^2} = e^z \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right]$

153. $\frac{\partial^2 a^z}{\partial x^2} = a^z \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot ln\, a + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\, ln\, a\right)^2\right]$

154. $\frac{\partial^2 \ln x}{\partial x^2} = -\frac{1}{x^2}$

155. $\frac{\partial^2 \log\cdot br\cdot x}{\partial x^2} = -\frac{1}{x^2 \log n 10} = -\frac{\log br\, e}{x^2}$

156. $\frac{\partial^2 \ln z}{\partial x^2} = \frac{1}{z}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x} - \frac{1}{z^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}$

157. $\frac{\partial^2 \log\cdot br\, z}{\partial x^2} = \left[\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x} - \frac{1}{x^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\right] \log\cdot br\, e$

158. $\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = \frac{\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}}{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^3}$

2. Ausdrücke von höchst einfacher Form geben oft auffallend zusammengesetzte transcendente Integrale. Um sich von der Richtigkeit des Integrirens zu überzeugen, differenzirt man das erhaltene Integral zurück. Die folgenden Differenzial-Beispiele sollen dergleichen bedenklich scheinende Integrale sein.

1. Beispiel. Man erhalte

$$\int \frac{x}{x^4 - a^4}\,\partial x = -\frac{1}{4a^2}\log n \frac{x^2 + a^2}{x^2 - a^2}$$

so ist $y = -\frac{1}{4a^2}\log n \frac{x^2 + a^2}{x^2 - a^2}$

und $\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{1}{4a^2}\,\partial\, \ln \frac{x^2 + a^2}{x^2 - a^2}\cdot\frac{1}{\partial x} = -\frac{1}{4a^2}\,\partial\left[\frac{\ln(x^2 + a^2)}{\partial x} - \frac{\ln(x^2 - a^2)}{\partial x}\right]$

$$= -\frac{1}{4a^2}\left[\frac{1}{x^2 + a^2}\cdot\frac{\partial(x^2 + a^2)}{\partial x} - \frac{1}{x^2 - a^2}\cdot\frac{\partial(x^2 - a^2)}{\partial x}\right]$$

$$= -\frac{1}{4a^2}\cdot\left(\frac{2x}{x^2 + a^2} - \frac{2x}{x^2 - a^2}\right) = \frac{x}{x^4 - a^4}$$

2. Beispiel. Man erhalte $\int \frac{\partial x}{x^4 - a^4} = -\frac{1}{4a^3}\left[\log n \frac{x + a}{x - a} + 2\, Arc\left(tg = \frac{x}{a}\right)\right]$

so ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{1}{4a^3}\cdot\left[\partial\, \ln \frac{x + a}{x - a}\cdot\frac{1}{\partial x} + 2\,\partial\, Arc\left(tg = \frac{x}{a}\right)\frac{1}{\partial x}\right]$$

$$= -\frac{1}{4a^3}\left[\frac{\partial \ln(x + a)}{\partial x} - \frac{\partial \ln(x - a)}{\partial x} + 2\,\frac{\partial\, Arc\left(tg = \frac{x}{a}\right)}{\partial x}\right]$$

$$= \frac{-1}{4a^3}\left[\frac{1}{x + a} - \frac{1}{x - a} + \frac{2\,\partial\left(\frac{x}{a}\right)}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2}\right]$$

$$= -\frac{1}{4a^3}\left[\frac{-2a}{x^2 - a^2} + \frac{1}{a}\cdot\frac{2a^2}{x^2 + a^2}\right] = +\frac{1}{x^4 - a^4}$$

3. Beispiel. Man erhalte

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{a + bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}}\log n \left[x\sqrt{\frac{b}{a}} + \sqrt{\frac{a + bx^2}{a}}\right]$$

Setzt man $x\sqrt{\frac{b}{a}} + \sqrt{\frac{a + bx^2}{a}} = z$

so hat man $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{b}}\cdot\frac{\partial \ln z}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}$

Nun ist $\frac{\partial z}{\partial x} = \sqrt{\frac{b}{a}} + \frac{1}{2\sqrt{\frac{a + bx^2}{a}}}\cdot\frac{\partial \frac{a + bx^2}{a}}{\partial x} = \sqrt{\frac{b}{a}} + \frac{1}{2\sqrt{\frac{a + bx^2}{a}}}\cdot\frac{2b}{a}\cdot x$

$$= \frac{a\sqrt{\frac{b}{a}}\cdot\sqrt{\frac{a + bx^2}{a}} + bx}{a\sqrt{\frac{a + bx^2}{a}}}$$

und $\frac{\partial \ln z}{\partial z} = \frac{1}{x\sqrt{\frac{b}{a}} + \sqrt{\frac{a + bx^2}{a}}}$

folglich

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{a\sqrt{\frac{b}{a}}\cdot\sqrt{\frac{a + bx^2}{a}} + bx}{a\sqrt{\frac{a + bx^2}{a}}\times\left(x\sqrt{\frac{b}{a}} + \sqrt{\frac{a + bx^2}{a}}\right)\sqrt{b}}$$

um in dem Zähler $a\sqrt{\frac{b}{a}}$ als gemeinschaftlichen Factor zu erhalten, dividire bx mit $a\sqrt{\frac{b}{a}}$, so erhält man $x\sqrt{\frac{b}{a}}$, folglich hat man

$$\frac{\sqrt{\frac{a+bx^2}{a}}+x\sqrt{\frac{b}{a}}}{x\sqrt{\frac{b}{a}}+\sqrt{\frac{a+bx^2}{a}}}\cdot\frac{a\sqrt{\frac{b}{a}}}{a\sqrt{\frac{a+bx^2}{a}}\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{\frac{b}{a}}}{\sqrt{\frac{a+bx^2}{a}}\sqrt{b}}=\frac{1}{\sqrt{a+bx^2}}$$

3. Das in der Form so sehr einfache Differenzial

$$\frac{\partial x}{a+bx+cx^2}$$

läfst 2 Integrale zu: Man kann erhalten

$$\int\frac{\partial x}{a+bx+cx^2}=\frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\times Arc\,tg\,\frac{b+2cx}{\sqrt{4ac-b^2}} \qquad (1)$$

und

$$\int\frac{\partial x}{a+bx+cx^2}=\frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\times logn\,\frac{b+2cx-\sqrt{b^2-4ac}}{b+2cx+\sqrt{b^2-4ac}} \qquad (2)$$

Man ersieht hieraus, dafs der so grofse Unterschied beider Resultate allein in der Wahl liegt, ob man, um eine reelle Wurzel zu erhalten, $4ac >$ oder $<$ als b^2 ansieht.

Differenzirt man zur Prüfung beide Integrale, so setze man in dem ersten I. vorläufig

$$\sqrt{4ac-b^2}=k$$
$$b+2cx=z$$

so hat man

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{2}{k}\,\partial\,Arc\,tg\,\frac{z}{k}=\frac{2}{k}\,\frac{\partial\frac{z}{k}}{1+\left(\frac{z}{k}\right)^2}=\frac{2}{k}\,\frac{\frac{1}{k}\,\partial z}{\frac{1}{k^2}(k^2+z^2)}=\frac{2\,\partial z}{k^2+z^2}$$

nun ist $\frac{\partial z}{\partial x}\;2c$

ferner die Werthe von k und z gesetzt

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{4c}{4ac-b^2+(b+2cx)^2}$$

und reducirt

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{1}{a+bx+cx^2}$$

Setzt man in dem 2ten I. dagegen

$$\sqrt{b^2-4ac}=k$$
$$b+2cx=z$$

so hat man

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{1}{k}\,\partial\,ln\,\frac{z-k}{z+k}\,\partial z$$

also nach Formel 97

$$=\frac{1}{k}\,\frac{2k\cdot\partial z}{z^2-k^2}=\frac{2\cdot 2c}{(b+2cx)^2-(b^2-4ac)}=\frac{1}{a+bx+cx^2}$$

4. Die Aehnlichkeit zwischen den Differenzialen der natürlichen Logarithmen und denen der Bogen in Beziehung auf ihre trigonometrischen Linien ist aber auch sehr grofs. So z. B. ist Formel No. 89

$$\partial\,logn\,(z+\sqrt{z^2-a^2})=\frac{\partial z}{\sqrt{z^2-a^2}}$$

Setzt man $a=1$, so erhält man

$$\partial\,logn\,(z+\sqrt{z^2-1})=\frac{\partial z}{\sqrt{z^2-1}}$$

Nach Formel No. 118 ist aber

$$\partial\,arc\,sin\,z=\frac{\partial z}{\sqrt{1-z^2}}=\frac{\partial z}{\sqrt{z^2-1}\,\sqrt{-1}}=\frac{\partial z}{\sqrt{z^2-1}}\,\sqrt{-1}$$

Demnach ist

$$\partial\,ln\,(z+\sqrt{z^2-1})=\partial\,arc\,sin\,z\cdot\sqrt{-1}$$

Es ist nach Formel No. 97

$$\partial\,ln\,\frac{z-a}{z+a}=\frac{2a\,\partial z}{z^2-a^2}$$

Für $a=1$ gesetzt entsteht

$$\partial\, ln \frac{z-1}{z+1} = \frac{2\,\partial z}{z^2-1}$$

Setzt man $z\sqrt{-1}$ für z, so erhält man

$$\partial\, ln \frac{z\sqrt{-1}-1}{z\sqrt{-1}+1} = \frac{2\,\partial z\sqrt{-1}}{(z\sqrt{-1})^2-1} = \frac{2\,\partial z\sqrt{-1}}{-z^2-1} = -\frac{2\,\partial z}{z^2+1}\sqrt{-1}$$

Nun ist Formel 120

$$\partial\, arc\, tg\, z = \frac{\partial z}{z^2+1}$$

folglich ist

$$\partial\, ln \frac{-1+z\sqrt{-1}}{+1+z\sqrt{-1}} = -2\,\partial\, arc\, tg\, z \cdot \sqrt{-1}$$

Setzt man also in dem Beispiel No. 3, während der Operation des Integrirens

$$\sqrt{4ac-b^2} = \sqrt{b^2-4ah}\sqrt{-1}$$

so erhält man statt des ersten Integrals das zweite, und setzt man

$$\sqrt{b^2-4ac} = \sqrt{4ac-b^2}\sqrt{-1}$$

so erhält man statt des zweiten Integrals das erste.

Differenzialgleichung ist eine Gleichung die aufser der Veränderlichen noch Differenziale derselben enthält, also eine implicite Function zwischen der Veränderlichen und ihrem Differenzial mit der Urveränderlichen; oder eine Gleichung, in welcher das Differenzial einer Function y in Beziehung auf die Urveränderliche x sowohl als eine Function von der Function y wie von der Urveränderlichen x erscheint. Z. B.

$$(2ay+bx)\frac{\partial y}{\partial x} + by + 2cx = 0 \qquad (1)$$

ist eine D., in welcher x als Urveränderliche bezeichnet ist. Schreibt man die Gleichung

$$(2ay+bx)\,\partial y + (by+2cx)\,\partial x = 0 \qquad (2)$$

so ist nach Wahl y oder x als urveränderlich festzusetzen.

Die D.gleichungen entstehen dadurch, dafs man Gleichungen, die den Zusammenhang zweier Veränderlichen ausdrükken, differenzirt, um eine Gleichung zwischen den Veränderlichen und deren Differenzialen in gegenseitiger Beziehung zu einander zu erhalten, wie die vorstehende D.gleichung durch Differenzirung der Stamm- oder Integralgleichung

$$u = ay^2 + bxy + cx^2 = 0 \qquad (3)$$

entstanden ist.

Es ist nämlich nach dem Art.: Differenzial

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2ay\frac{\partial y}{\partial x} + bx\frac{\partial y}{\partial x} + by + 2cx = 0$$

woraus Gleichung 1 zusammengezogen wird; so wie man durch Integriren dieser D.gleichung wieder die Integralgleichung erhält.

Man hat nun das Differenzial von y in Beziehung auf x

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{by+2cx}{2ay+bx} \qquad (4)$$

und das D. von x in Beziehung auf y

$$\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{2ay+bx}{by+2cx} \qquad (5)$$

Will man diese Differenziale für einen bestimmten Werth von z oder y angeben, so hat man y oder x aus der Stammgleichung 3 zu entwickeln und die erhaltenen Werthe in Gleichung 4 oder 5 einzusetzen.

2. Wenngleich nun die Differenzirung einer gegebenen Gleichung nach der in den vor. Art. gezeigten Weise immer zum Ziele führt, so hat man in der Anwendung von Theildifferenzialen (s. Differenzial No. 45) und nach deren Ermittelung in einer Formel zu Einsetzung derselben eine leichtere und schnellere Auffindung von $\frac{\partial y}{\partial x}$ oder $\frac{\partial x}{\partial y}$, besonders wenn eine complicirte Stammformel gegeben ist. Es ist nämlich

$$\frac{\partial u}{\partial y} \times \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad (5)$$

$\frac{\partial u}{\partial y}$ ist das D. der Formel für u wenn x constant und y veränderlich gesetzt wird.

$\frac{\partial u}{\partial x}$ das D. der Formel für u, wenn darin y constant und nur x veränderlich gesetzt wird.

Demnach hat man für Gleichung 3

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2ay + bx$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = by + 2cx$$

und es ist

$$(2ay+bx)\frac{\partial y}{\partial x} + by + 2cx = 0$$

wie schon No. 1 angiebt.

3. Um die Richtigkeit der Formel 5 allgemein zu erweisen, sei

$$u = f(x, y) = 0$$

eine Gleichung, der für alle zusammengehörigen Werthe von x und y Genüge geschehen mufs. Setzt man daher die folgenden zusammengehörigen Werthe $y + \triangle y$, $x + \triangle x$, $u + \triangle u$, so ist

$$u + \Delta u = f(x + \Delta x, y + \Delta y) = 0$$

mithin auch

$$\Delta u = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = 0$$

und folglich ist auch

$$\Delta u = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y) + f(x + \Delta x, y) - f(x + y) = 0$$

Eben so, wenn man jedes Glied der Gleichung durch eine beliebige Gröfse, z. B. mit Δx dividirt, besteht die Gleichung

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y)}{\Delta x} + \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = 0$$

Mit beliebiger Abnahme von Δx und demgemäfs auch von Δy haben die 2ten Werthe $x + \Delta x$ und $y + \Delta y$ die Grenzwerthe x und y. Der zweite Summand der Gleichung ist aber der Zuwachsquotient der Formel $f(x, y)$ wenn y constant und nur x veränderlich ist, folglich ist sein Grenzwerth das Differenzial

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

d. h. das D. der Gleichungsformel in Beziehung auf x genommen und y constant gesetzt.

Der Zähler des ersten Summand ist die Differenz zweier aufeinander folgenden Werthe der Formel, wenn $x + \Delta x$ constant gesetzt wird; soll also der erste Summand ein Zuwachsquotient werden, so mufs Δy statt Δx in dem Nenner stehen, weil y allein veränderlich ist. Demnach schreibe man für Δx die Gröfse $\frac{\Delta y}{\Delta y} \Delta x$ und gebe dem ersten Summand die Form

$$\frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y)}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Indem nun Δy abnimmt wird y der Grenzwerth von $y + \Delta y$ und der Zuwachsquotient wird zum Differenzial

$$\frac{\partial f(x + \Delta x, y)}{\partial y}$$

mit der beliebigen Abnahme von Δy nimmt aber ebenfalls Δx ab und x wird der Grenzwerth von $x + \Delta x$ folglich entsteht das Differenzial

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

D. h. das D. der Gleichungsformel in Beziehung auf y genommen und x constant gesetzt.

Der zweite Factor $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ist der Zuwachsquotient der Function y, x als urvariabel gedacht, er wird also mit der beliebigen Abnahme beider Zuwachse zum Differenzial der Function y in Beziehung auf $x = \frac{\partial y}{\partial x}$.

Es ist mithin

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

Vertauscht man die allgemeinen Bezeichnungen x und y mit einander, so erhält man die gleichgeltende Formel

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial y} = 0 \qquad (6)$$

Zu dieser letzten Formel kommt man auch direct, wenn man statt der behufs der Entwickelung eingeschobenen Glieder $-f(x + \Delta x, y) + f(x + \Delta x, y)$ die Glieder $-f(y + \Delta y, x) + f(y + \Delta y, x)$ einschiebt.

4. Nicht immer liegt einer D. gleichung eine Stammfunction zu Grunde; es gibt Fälle, wo solche aus einer D. gleichung gar nicht herzüleiten ist. Um dies zu erkennen, hat man in dem Satz 56 Art. Differenzial ein sicheres Mittel. Denn die Formel

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \cdot \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \cdot \partial x}$$

gilt nur für wirkliche Differenziale, also auch nur für D. gleichungen, welche aus Stammformeln abgeleitet sind.

Gleichung 2:

$$(2ay + bx)\,\partial y + (by + 2cx)\,\partial x = 0$$

ist durch Differenzirung der algebraischen Formel 3 entstanden. Gesetzt man wüfste dies nicht, wollte es aber untersuchen, so denke man sich, dafs die etwaige Stammformel nach x differenzirt worden. Dann haben die Glieder derselben, aus welchen der erste Summand $(2ay + bx)\,\partial y$ hervorgegangen ist, den (constanten) Factor y gehabt, ∂y ist $= 0$ und es ist

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (by + 2cx)\,\partial x$$

und da $\partial x = 1$ ist

$$\frac{\partial u}{\partial x} = by + 2cx$$

Differenzirt man nun $\frac{\partial u}{\partial x}$ nach y, so ist x constant und man erhält

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \cdot \partial y} = b$$

Denkt man sich dagegen, dafs die D. gleichung durch die Differenzirung einer Stammfunction nach y entstanden ist,

so enthalten die Glieder derselben, aus welchen der zweite Summand $(by + 2cx)\partial x$ hervorgegangen ist den constanten Factor x, ∂x ist = 0 und es ist

$$\frac{\partial u}{\partial y} = (2ay + bx)\,\partial y$$

und da ∂y der Urvariablen $y = 1$ ist

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2ay + bx$$

Dieses D. nach x differenzirt, also y constant gesetzt, gibt

$$\frac{\partial u}{\partial y \cdot \partial x} = b$$

Die beiden zweiten D. sind also einander gleich, $= b$ und es liegt der gegebenen D.gleichung eine Stammformel zu Grunde.

Man darf in der gegebenen D.gleichung 2 nur einen Coefficient mit einem andern vertauschen und man erhält eine Gleichung, die aus keiner Stammfunction abgeleitet worden ist. Z. B.

$$\partial u = (2ay + gx)\,\partial y + (by + 2cx)\,\partial x = 0$$

ergibt zwei ungleiche D. der 2ten Ordnung.

Differenzialgleichungen, denen Stammformeln zugehören heifsen unmittelbare, solche aus welchen keine Stammformel zurückzuleiten ist heifsen mittelbare D.gleichungen.

Differenzialrechnung ist die Rechnung mit Differenzialen, die Anwendung der in den 3 vorigen Art. entwickelten Gesetze für die Bildung der Differenziale als Hülfswissenschaft zur Ermittelung anderweitiger Gesetze im Gebiet der mathematischen Wissenschaften, und diese kann überall eintreten, wo Grenzwerthe von veränderlichen Gröfsen vorkommen. Dagegen lassen sich die vielen verschiedenen Fälle der Anwendbarkeit von Differenzialen in Disciplinen bringen.

I. Anwendung der Differenzialrechnung zur Entwickelung der Functionen in Reihen.

Die Entwickelung einer Function in eine Reihe ist die Verwandlung der Function in eine Reihe, deren Glieder nach einem bestimmten Gesetz in Beziehung auf die Urveränderliche fortschreiten, der Art, dafs für jeden beliebigen Werth der Urveränderlichen der zugehörige Werth der Function gleich der Summe der Reihe wird.

Die Reihe heifst convergirend, wenn die algebraische Summe beliebig vieler ersten Glieder der Reihe einem bestimmten Grenzwerth immer näher und näher kommt, indem die Werthe der aufeinander folgenden Glieder immer kleiner werden; in dem entgegengesetzten Fall heifst die Reihe divergirend.

Die Function $y = \frac{a}{a - x}$ läfst sich durch Partialdivision in die Reihe umformen

$$y = 1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \ldots\ldots \frac{x^n}{a^n}$$

Für $x < a$ ist $\frac{x}{a}$ ein ächter Bruch, und jedes Glied der Reihe ist kleiner als das ihm zunächst vorhergehende, daher kommt die Summe einer beliebigen Anzahl erster Glieder dem Werth der Function y immer näher. Bleibt man bei dem Gliede $\frac{x^n}{a^n}$ mit der Division stehen, so ist der bleibende Rest $= \frac{x^{n+1}}{a^n}$, dieser durch $a - x$ dividirt und als Ergänzungsglied der Reihe hinzugefügt, gibt den vollständigen Werth von

$$y = 1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \ldots\ldots \frac{x^n}{a^n} + \frac{x^{n+1}}{a^n(a - x)}$$

das Ergänzungsglied

$$\frac{x^{n+1}}{a^n(a-x)} \text{ ist} = \frac{x^{n+1}}{a^{n+1}} \cdot \frac{a}{a-x} = \frac{a}{a-x}\left(\frac{x}{a}\right)^{n+1}$$

ein Product, welches mit der Vergröfserung von n immer kleiner wird und beliebig klein werden kann. Die Reihe ist also convergirend und für einen Werth von $x < a$ der Werth der Function = der Summe der unendlichen Menge von Gliedern gleich, die Reihe also eine Entwickelung der Function y.

Für $x > a$ wird die Reihe divergirend.

2. Da die Entwickelung der Function in eine Reihe allein den Zweck hat, dafs man mit Hülfe derselben und zwar mit der Summirung mehrerer ersten Glieder dem Werth der Function bei gegebener Urvariablen möglichst nahe kommt, so sind auch nur convergirende Reihen von Nutzen, und von um so gröfserem Nutzen, je convergirender sie sind, je weniger erste Glieder man also nöthig hat um dem Werth der Function bis zu einem bestimmten Grade nahe zu kommen. Da man nun statt der ursprünglichen Urveränderlichen wenn sie nicht geeignet sein sollte, durch Transformation eine andere Variable substituiren kann, bei deren beliebigen Abnahme jedes Glied kleiner wird als die Summe aller ihm nachfolgenden Glieder, so schränkt man den Begriff von Reihenentwickelung auch dahin ein, und versteht unter der Reihe eine solche, die nach ganzen Potenzen einer in der Function vorkommenden Veränderlichen fortschreitet und in welcher mit beliebiger Abnahme dieser Ver-

änderlichen jedes Glied gröfser wird als die absolute Summe sämmtlicher ihm nachfolgenden Glieder, so dafs man mit der 2maligen Aufnahme eines $m$ten Gliedes der Reihe einen zu grofsen Werth für die Function erhalten würde.

3. Es soll eine beliebige Function der Urveränderlichen in eine Reihe entwickelt werden, die nach ganzen positiven Potenzen der Urveränderlichen fortschreitet und convergirt.

Die allgemeine Darstellung der Forderung ist demnach

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots + Nx^n$$

worin die noch unbekannten Constanten A, B, C... so zu bestimmen sind, dafs jedes folgende Glied kleiner wird als das vorhergehende. Da die Exponenten der Urveränderlichen die natürlich auf einander folgenden Zahlen sind, so ist die Convergenz der Reihe um so gröfser, je kleiner x genommen wird.

Da nun die Differenziale von Potenzen ebenfalls mit ganzen Exponenten fortschreiten, so bilden die Differenziale der Reihe wiederum convergirende Reihen; man hat also die Zusammenstellung folgender Reihen

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots + Nx^n$$
$$\frac{\partial y}{\partial x} = B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + \ldots n\,Nx^{n-1}$$
$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = + 2C + 2 \cdot 3\,Dx + 3 \cdot 4\,Ex^2 + \ldots n(n-1)\,Nx^{n-2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{\partial^n y}{\partial x^n} = n \cdot n-1 \cdot n-2 \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1\,N + n+1 \cdot n \cdot n-1 \ldots 2 \cdot 1\,Px + \ldots$$

Soll nun die Reihe

$$A + Bx + Cx^2 + \ldots Nx^n$$

eine Entwickelung von y sein, so mufs auch die Reihe

$$Bx + Cx^2 + \ldots Nx^n$$

eine Entwickelung der Function $y - A$ sein, und da mit beliebiger Abnahme von x jedes Glied dieser Reihe beliebig klein werden kann, folglich auch die Summe der Reihe, und folglich auch $y - A$ beliebig klein werden kann, so ist A der Grenzwerth der Function y bei beliebiger Abnahme von x, oder für $x = \infty$ klein, oder für $x = 0$, oder $A = [y]_0$ wenn $[y]_0$ den Werth der Function y bezeichnet, wenn man in derselben $x = 0$ setzt.

Es ist also

$$y - [y]_0 = Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots + Nx^n + \ldots$$

Nun soll aber die Reihe der ersten Differenziale eine Entwickelung von $\frac{\partial y}{\partial x}$ sein, folglich die Reihe

$$2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + \ldots + n\,Nx^{n-1}$$

eine Entwickelung der Function $\frac{\partial y}{\partial x} - B$

Man hat also bei den vorherigen Schlüssen B als den Grenzwerth von $\frac{\partial y}{\partial x}$, wenn man in dem Ausdruck dafür $x = 0$ setzt, oder

$$B = \left[\frac{\partial y}{\partial x}\right]_0$$

und eben so $2C = \left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right]_0$

oder $C = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right]_0$,

u. s. w.

Demnach erhält man die verlangte Reihenentwickelung

$$y = fx = [y]_0 + \left[\frac{\partial y}{\partial x}\right]_0 \cdot \frac{x}{1} + \left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right]_0 \cdot \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \left[\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right]_0 \cdot \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots \left[\frac{\partial^n y}{\partial x^n}\right]_0 \cdot \frac{x^n}{(x)} + \ldots$$

Diese Reihe heifst nach ihrem Erfinder die **Mac Laurinsche Reihe.**

Beispiel. Die Function $y = (a + x)^m$ in eine Reihe zu entwickeln, die nach ganzen Potenzen der Urveränderlichen x fortschreitet.

Man hat zur Anwendung der Mac Laurinschen Reihe

$$y = (a + x)^m$$
$$\frac{\partial y}{\partial x} = m(a + x)^{m-1}$$
$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = m(m-1)(a + x)^{m-2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}} = m(m-1)\ldots(m-n+2)(a+x)^{m-n+1}$$
$$\frac{\partial^n y}{\partial x^n} = m(m-1)\ldots(m-n+1)(a+x)^{m-n}$$

Setzt man in diesen Gleichungen $x = 0$, so erhält man

$$[y]_0 = a^m$$

$$\left[\frac{\partial y}{\partial x}\right]_0 = ma^{m-1}$$

$$\left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right]_0 = m(m-1)\,a^{m-2}$$

. . . .

$$\left[\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}}\right]_0 = m(m-1)\ldots.(m-n+2)a^{m-n+1}$$

$$\left[\frac{\partial^n y}{\partial x^n}\right]_0 = m(m-1)\ldots.(m-n+1)a^{m-n}$$

Diese Werthe in die allgemeine Mac Laurinsche Reihe gesetzt gibt

$$y = a^m + ma^{m-1}\frac{x}{1} + m(m-1)\,a^{m-2}\frac{x^2}{1\cdot 2} + \ldots\ldots\ldots$$
$$+ m(m-1)\ldots..(m-n+2)\,a^{m-n+1}\frac{x^{n-1}}{(n-1)} + m(m-1)\ldots.(m-n+1\;a^{m-n}\frac{x^n}{(n)}$$

welche die Binomische Reihe ist.

4. Eine Function in eine Reihe zu entwickeln, die nach steigenden Potenzen des Zuwachses der Veränderlichen fortschreitet.

Es sei $y = fx$ die gegebene Function einer veränderlichen Gröſse x, der man einen Zuwachs z gibt, so daſs $y' = f(x+z)$ wird. Bezeichnet man $x+z$ mit u so ist $y' = fu$ und nach der Mac Laurinschen Reihe ist

$$y' = fu = [y']_0 + \left[\frac{\partial y'}{\partial u}\right]_0 \frac{u}{1} + \left[\frac{\partial^2 y'}{\partial u^2}\right]_0 \frac{u^2}{1\cdot 2} + \ldots.$$

Da in den mit 0 bezeichneten Gröſsen u nicht vorkommt, also auch nicht x und z, so sind diese Gröſsen Constanten, und bezeichnet man diese mit den ihnen zugehörigen Zahlenfactoren $\frac{1}{1}, \frac{1}{(2)}, \frac{1}{(3)}\ldots$ multiplicirt, mit $a, b, c, \ldots.$ so erhält man allgemein

$$y' = fu = a + bu + cu^2 + du^3 + \ldots\ldots$$

Nimmt man von dieser Gleichung die auf einander folgenden Differenziale, so erhält man

$$\frac{\partial y'}{\partial u} = \frac{\partial fu}{\partial u} = b + 2cu + 3du^2 + 4eu^3 + \ldots$$

$$\frac{\partial^2 y'}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 fu}{\partial u^2} = 2c + 2\cdot 3\cdot u + 3\cdot 4\cdot eu^2 + \ldots.$$

. . . .

oder

$$f(x+z) = a + bu + cu^2 + \partial u^3 + \ldots.$$

$$\frac{\partial f(x+z)}{\partial u} = b + 2cu + 3du^2 + ..$$

$$\frac{\partial^2 f(x+z)}{\partial u} = 2c + 2\cdot 3\partial u + 3\cdot 4\cdot eu^2 + \ldots..$$

. . . .

Die rechten Seiten der Gleichungen bleiben ungeändert, man mag auf der linken Seite x variabel und z constant oder z variabel und x constant annehmen.

Es sei, für x variabel $f(x+z) = Fx$
für z variabel $f(x+z) = \varphi z$

so ist $\frac{\partial f(x+z)}{\partial x} = \frac{\partial f(x+z)}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}$

Da nun $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial(x+z)}{\partial x} = 1$

so hat man $\frac{\partial(x+z)}{\partial x} = \frac{\partial(x+z)}{\partial u}$

und eben so $\frac{\partial(x+z)}{\partial z} = \frac{\partial(x+z)}{\partial u}$

desgleichen

$$\frac{\partial^2(x+z)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2(x+z)}{\partial z^2} = \frac{\partial^2(x+z)}{\partial u^2}$$

u. s. w. für alle höheren Differenziale.

Es ist demnach

$$\varphi z = f(x+z) = a + b(x+z) + c(x+z)^2 + d(x+z)^3 + \ldots. \quad (1)$$

$$\frac{\partial\varphi z}{\partial z} = \frac{\partial f(x+z)}{\partial u} = b + 2c(x+z) + 3d(x+z)^2 + \ldots.$$

$$\frac{\partial^2\varphi z}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 f(x+z)}{\partial u^2} = 2c + 2\cdot 3\cdot d(x+z) + \ldots\ldots$$

Setzt man in diese Gleichungen $z = 0$, so entsteht

$$(\varphi z)_0 = fx = a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots \quad (2)$$

$$\left(\frac{\partial\varphi z}{\partial y}\right)_0 = \frac{\partial fx}{\partial x} = b + 2cx + 3dx^2 + 4ex^3 + \ldots \quad (3)$$

$$\left(\frac{\partial^2\varphi z}{\partial z^2}\right)_0 = \frac{\partial^2 fx}{\partial x^2} = 2c + 2\cdot 3\cdot dx + 3\cdot 4\cdot ex^2 + .. \quad (4)$$

. . . .

Nun ist nach der Mac Laurinschen Reihe

$$\varphi z = (\varphi z)_0 + \left(\frac{\partial \varphi z}{\partial z}\right)_0 \frac{z}{1} + \left(\frac{\partial^2 \varphi z}{\partial z^2}\right)_0 \frac{z^2}{(2)} + \ldots\ldots \quad (5)$$

Aus den Gleichungen 1, 2, 3, 4, die gleichgeltenden Werthe eingesetzt erhält man:

$$f(x+z) = fx + \frac{\partial fx}{\partial x} \cdot \frac{z}{1} + \frac{\partial^2 fx}{\partial x^2} \cdot \frac{z^2}{(2)} + \frac{\partial^3 fx}{\partial x^3} \cdot \frac{z^3}{(3)} + \ldots \quad (6)$$

Diese Reihe heifst nach ihrem Erfinder die Taylorsche Reihe.

Beispiel. $y = (x+a)^m$.

Es ist hier $fx = x^m$, die Differenziale dieser Function sind No. 3 in dem Beispiel $y = (a+x)^m$ angegeben, wenn man dort $a = 0$ setzt. Demnach hat man

$$(x+a)^m = x^m + mx^{m-1}\frac{a}{1} + m(m-1)a^{m-2} \cdot \frac{a^2}{(2)} + m(m-1)(m-2)x^{m-3}\frac{a^3}{(3)} + \ldots\ldots$$

5. Eine Function zweier Urveränderlichen in eine Reihe zu entwickeln, die nach steigenden ganzen Potenzen beider Zuwachse der Urveränderlichen und deren Producte fortschreitet, in die verlangte Reihe zu entwickeln.

Es sei $y = f(x, z)$

so ist $y + \Delta y = f(x + \Delta x, z + \Delta z)$

Betrachtet man zunächst z als constant, während x den Zuwachs Δx erhält, und bezeichnet den zugehörigen Werth der Function mit y' so hat man

$$y' = f(x + \Delta x, z) = f(x, z + \Delta x)$$

und nach der Taylorschen Reihe

$$y' = f(x + \Delta x, z) = y + \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\Delta x}{1} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \frac{\Delta x^2}{(2)} + \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \cdot \frac{\Delta x^3}{(3)} + \ldots\ldots \quad (1)$$

Setzt man nun $z + \Delta z$ für z, so hat man die obige Function

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x, z + \Delta z) = f(x, z + \Delta z + \Delta x)$$

Bezeichnet man die Function $f(x, z + \Delta z)$ mit y_1 so ist x ungeändert geblieben, und nur die Constante z ist in $z + \Delta z$ übergegangen, daher hat man wie Gleichung 1:

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x, z + \Delta z) = y_1 + \frac{\partial y_1}{\partial x}\frac{\Delta x}{1} + \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} \cdot \frac{\Delta x^2}{(2)} + \frac{\partial^3 y_1}{\partial x^3} \cdot \frac{\Delta x^3}{(3)} + \ldots\ldots \quad (2)$$

Da nun y_1 die Function $y = f(x, z)$ mit dem Zuwachs Δz ist, so kann man die in Gleichung 2, y_1 enthaltenden Gröfsen wieder nach der Taylorschen Reihe entwickeln indem man nach z differenzirt und man hat demnach

$$y_1 = y + \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\Delta z}{1} + \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \cdot \frac{\Delta z^2}{(2)} + \frac{\partial^3 y}{\partial z^3} \cdot \frac{\Delta z^3}{(3)} + \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\Delta z}{1} + \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \cdot \frac{\Delta z^2}{(2)} + \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial^3 y}{\partial z^3} \cdot \frac{\Delta z^3}{(3)} + \ldots\ldots \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\Delta z}{1} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \cdot \frac{\Delta z^2}{(2)} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^3 y}{\partial z^3} \cdot \frac{\Delta z^3}{(3)} + \ldots \quad (5)$$

. . . .

Substituirt man die hier erhaltenen Werthe in Gleichung 2 für $y + \Delta y$ so erhält man

$$y + \Delta y = \text{Reihe}\,(3) + \frac{\Delta x}{1} \times \text{Reihe}\,(4) + \frac{\Delta x^2}{(2)} \times \text{Reihe}\,5 + \text{u. s. w. oder}$$

$$\begin{aligned} y + \Delta y = y &+ \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\Delta z}{1} + \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \cdot \frac{\Delta z^2}{(2)} + \frac{\partial^3 y}{\partial z^3} \cdot \frac{\Delta z^3}{(3)} + \ldots\ldots \\ &+ \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\Delta x}{1} + \frac{\partial^2 y}{\partial x \cdot \partial z} \cdot \frac{\Delta x}{1} \cdot \frac{\Delta z}{1} + \frac{\partial^3 y}{\partial x \cdot \partial z^2} \cdot \frac{\Delta x}{1} \cdot \frac{\Delta z^2}{(2)} + \frac{\partial^4 y}{\partial x \cdot \partial z^3} \cdot \frac{\Delta x}{1} \cdot \frac{\Delta z^3}{(3)} + \ldots \\ &+ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \frac{\Delta x^2}{(2)} + \frac{\partial^3 y}{\partial x^2 \cdot \partial z} \cdot \frac{\Delta x^2}{(2)} \cdot \frac{\Delta z}{1} + \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \cdot \partial z^2} \cdot \frac{\Delta x^2}{(2)} \cdot \frac{\Delta z^2}{(2)} + \frac{\partial^5 y}{\partial x^2 \cdot \partial z^3} \cdot \frac{\Delta x^2}{(2)} \cdot \frac{\Delta z^3}{(3)} + \ldots \\ &+ \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \cdot \frac{\Delta x^3}{(3)} + \frac{\partial^4 y}{\partial x^3 \cdot \partial z} \cdot \frac{\Delta x^3}{(3)} \cdot \frac{\Delta z}{1} + \frac{\partial^5 y}{\partial x^3 \cdot \partial z^2} \cdot \frac{\Delta x^3}{(3)} \cdot \frac{\Delta z^2}{(2)} + \frac{\partial^6 y}{\partial x^3 \cdot \partial z^3} \cdot \frac{\Delta x^3}{(3)} \cdot \frac{\Delta z^3}{(3)} + \ldots \end{aligned}$$

. . . .

und nach den Dimensionen der Zuwachse geordnet

$$y + \Delta y = y + \frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\Delta x}{1} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\cdot\frac{\Delta x^2}{(2)} + \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\cdot\frac{\Delta x^3}{(3)} + \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}\cdot\frac{\Delta x^4}{(4)} + \ldots$$

$$+ \frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\Delta z}{1} + \frac{\partial^2 y}{\partial x\cdot\partial z}\cdot\frac{\Delta x\cdot\Delta z}{1\cdot 1} + \frac{\partial^3 y}{\partial x\cdot\partial z^2}\cdot\frac{\Delta x\cdot\Delta z^2}{1\cdot(2)} + \frac{\partial^4 y}{\partial x\,\partial z^3}\cdot\frac{\Delta x\cdot\Delta z^3}{1\cdot(3)} + \ldots$$

$$+ \frac{\partial^2 y}{\partial z^2}\cdot\frac{\Delta z^2}{(2)} + \frac{\partial^3 y}{\partial x^2\cdot\partial z}\cdot\frac{\Delta x^2\cdot\Delta z}{(2)\cdot 1} + \frac{\partial^4 y}{\partial x^2\,\partial z^2}\cdot\frac{\Delta x^2\cdot\Delta z^2}{(2)\cdot 1} + \ldots$$

$$+ \frac{\partial^3 y}{\partial z^3}\cdot\frac{\Delta z^3}{(3)} + \frac{\partial^4 y}{\partial x^3\,\partial z}\cdot\frac{\Delta x^3\cdot\Delta z}{(3)\cdot 1} + \ldots$$

$$+ \frac{\partial^4 y}{\partial z^4}\cdot\frac{\Delta z^4}{(4)} + \ldots$$

6. Es bleibt nun noch übrig, die Bedingungen für die Convergenz der vorstehenden 3 verschiedenen Reihen festzustellen.

Es ist zuerst erforderlich die Bedingungen kennen zu lernen, unter welchen die Mac Laurinsche Reihe convergirt. Nimmt man dieselbe bis zu ihrem $(n+1)$ten Gliede, so ist die Differenz D zwischen der Function y und der Summe dieser $(n+1)$ Glieder = der Summe der dem $(n+1)$ten Gliede nachfolgenden Glieder.

Also $$D = y - A - Bx - Cx^2 - Dx^3 - \ldots\ldots nNx^n$$

Differenzirt man diese Reihe $n$mal hinter einander, so erhält man

$$\frac{\partial D}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial x} - B - 2Cx - 3Dx^2 - \ldots\ldots nNx^{n-1}$$

$$\frac{\partial^2 D}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - 2C - 2\cdot 3\,Dx - \ldots\ldots (n-1)\,n\,Nx^{n-2}$$

. . . .

$$\frac{\partial^{n-1} D}{\partial x^{n-1}} = \frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}} - 1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)\,M - 1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)\,n\,Nx$$

$$\frac{\partial^n D}{\partial x^n} = \frac{\partial^n y}{\partial x^n} - 1\cdot 2\cdot 3\ldots.(n-1)\,n\,N$$

Diese Reihen gelten für alle Werthe von x. Läfst man nun x von $x=0$ bis zu einem bestimmten Werthe $= X$ fortdauernd wachsen, so sei der kleinste Werth, den $\frac{\partial^n D}{\partial x^n}$ bei irgend einem Werthe von x zwischen $x=0$ und $x=X$ annehmen kann $= K$, und der gröfste Werth bei irgend einem anderen Werthe von x zwischen 0 und $X = G$, so ist bei

$$K = \frac{\partial^n y}{\partial x^n} - 1\cdot 2\cdot 3\ldots.nN$$

$\frac{\partial^n y}{\partial x^n} - K$ immer positiv; nur in dem Fall, dafs $\frac{\partial^n y}{\partial x^n}$ selbst der kleinste Werth K ist, wird

$$\frac{\partial^n y}{\partial x^n} - K = 0 \text{ und } N = 0$$

Setzt man für den unbestimmten Coefficient N den Werth $\frac{K}{1\cdot 2\ldots.n}$, so ist die Differenz

$$\frac{\partial^n D}{\partial x^n} = \frac{\partial^n y}{\partial x^n} - K$$

und diese ist zugleich das Differenzial der Function $\frac{\partial^{n-1} D}{\partial x^{n-1}}$

Wenn aber irgend eine Function y von x mit dem Wachsthum von x ebenfalls wächst, so wird, wenn der Wachsthum Δx von x positiv ist, auch der Wachsthum Δy von y positiv, der Zuwachsquotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ wird positiv und folglich auch das Differenzial $\frac{\partial y}{\partial x}$ wird positiv. Gegenseitig wenn $\frac{\partial y}{\partial x}$ positiv ist, so mufs auch wenn x positiv ist y positiv sein. Deshalb ist also

$$\frac{\partial^{n-1} D}{\partial x^{n-1}} = \frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}} - Kx \text{ positiv.}$$

Von diesem Integral als Differenzial des nächst vorherstehenden Ausdrucks auf diesen, und so weiter zurück bis auf die Reihe für D geschlossen, erhält man

das Resultat, dafs

$$D = y - A - Bx - \ldots\ldots - \frac{K}{1 \cdot 2 \ldots n} x^n$$

eine positive Gröfse ist.

Setzt man dagegen den gröfsten Werth G, also

$$G = \frac{\partial^n y}{\partial x^n} - 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n N$$

und schliefst wie vorhin, so erhält man das entgegengesetzte Resultat, nämlich dafs

$$D' = y - A - Bx - \ldots\ldots - \frac{G}{1 \cdot 2 \ldots n} x^n$$

eine negative Gröfse ist.

Man hat also, beide Fälle zusammengestellt

$$y - A - Bx - Cx^2 - \ldots\ldots - \frac{K}{(n)} x^n > 0$$

$$y - A - Bx - Cx^2 - \ldots\ldots - \frac{G}{(n)} x^n < 0$$

aber

$$y - A - Bx - Cx^2 - \ldots\ldots - Nx^n$$

ist immer zwischen beiden Gröfsen begriffen, daher ist

$$y - A - Bx - Cx^2 - \ldots\ldots - Nx^n < \frac{G-K}{(n)} x^n$$

Kann also für den gehörigen Wachsthum von n dieser Unterschied beliebig klein werden, so ist die Mac Laurinsche Reihe convergirend und eine Entwickelung der Function y.

Da G der gröfste und K der kleinste Werth ist, den $\frac{\partial^n y}{\partial x^n}$ annehmen kann, wenn x von 0 bis X wächst, so wird bei diesen verschiedenen Werthen von x ein Werth für $\frac{\partial^n y}{\partial x^n}$ statt finden, der statt N gesetzt, die Reihe

$$y - A - Bx - Cx^2 - \ldots\ldots Nx^n = 0$$

macht. Bezeichnet man X mit x selbst als den bestimmten Werth von x, bis zu dem x von 0 ab wachsen soll dürfen, und es sei λ die Zahl zwischen 0 und 1, welche mit x multiplicirt, denjenigen Werth von x angibt, bei welchem die Reihe $= 0$ wird, so hat man, den zu λx gehörenden Werth von $\frac{\partial^n y}{\partial x^n}$ mit $\left[\frac{\partial^n y}{\partial x^n}\right]_{\lambda x}$ bezeichnet, y in einer begrenzten Reihe für vollkommene Gleichheit:

$$y = fx = [y]_0 + \left[\frac{\partial y}{\partial x}\right]_0 \cdot \frac{x}{1} + \left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right]_0 \cdot \frac{x^2}{(2)} + \ldots\ldots \left[\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}}\right]_0 \frac{x^{n-1}}{(n-1)} + \left[\frac{\partial^n y}{\partial x^n}\right]_{\lambda x} \frac{x^n}{(n)}$$

In den wenigsten Fällen wird der Zahlenwerth von λ zu ermitteln sein. Es ist aber Hauptsache zu erfahren, ob für ein bestimmtes x die Mac Laurinsche Reihe convergirt oder nicht; wenn man daher für λ die beiden Werthe nimmt, für welche das Ergänzungsglied den gröfsten und den kleinsten Werth annimmt, und beide Werthe des Gliedes können mit Vergröfserung von n beliebig klein werden, so convergirt die Reihe und man kann die Function mit beliebiger Annäherung bestimmen.

8. Anwendung des Ergänzungsgliedes.

In dem Beispiel No. 3:

$y = (a + x)^m$ ist das $n + 1$te Glied

$$= \left[\frac{\partial^n y}{\partial x^n}\right]_0 \frac{x^n}{(n)} = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)a^{m-n} \cdot \frac{x^n}{(n)}$$

Wird nun $x = \lambda x$ statt 0 gesetzt, dann entsteht für dieses Glied

$$m(m-1)\ldots\ldots(m-n+1)(a+\lambda x)^{m-n} \frac{x^n}{(n)}$$

Ist m ganz und positiv und man nimmt $n = m + 1$ so wird der letzte Factor des Coefficienten, nämlich $m - n + 1 = 0$ und also das Ergänzungsglied $= 0$. Die Reihe drückt die Function y vollständig aus, das $m$te Glied ist das letzte, und heifst

$$\frac{m \cdot m - 1 \ldots\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \ldots\ldots m - 2 \cdot m - 1 \cdot m} a^{m-m} x^m = x^m$$

Die Reihe ist die binomische Reihe für den ganzen positiven Exponenten $= m$.

Ist m positiv gebrochen, so wird der Coefficient eines Ergänzungsgliedes nie $= 0$, und es tritt der Fall ein, wo zu bestimmen ist, für welche Werthe von x dieses Ergänzungsglied mit dem Wachsthum von n beliebig klein werden kann, damit die Mac Laurinsche Reihe convergirend werde.

Die veränderliche Gröfse $(a + \lambda x)^{m-n} x^n$ kann unter der Bedingung, dafs $n > m$ ist, was bei $m =$ einem ächten Bruch immer der Fall ist, geschrieben werden

$$\frac{x^n}{(a+\lambda x)^{n-m}} = \left(\frac{x}{a+\lambda x}\right)^{n-m} \cdot x^m$$

Für $\lambda = 0$ wird der Werth dieses Ausdrucks am gröfsten

$$= \left(\frac{x}{a}\right)^{n-m} \cdot x^m$$

und dieser Werth wird mit dem Wachsthum von n immerfort kleiner, wenn $x < a$.

Nimmt man für λ den gröfsten Werth 1, so wird der Werth des Ausdrucks am kleinsten $= \left(\frac{x}{a+x}\right)^{n-m} \cdot x^m$ und kann um so mehr mit dem Wachsthum von n immerfort kleiner werden wenn $x < a$ ist. In beiden Fällen convergirt die Reihe um so mehr je kleiner x gegen a ist.

Der Coefficient $\frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \ldots\ldots m-n+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots n}$ ist bei ächt gebrochenem m immer ein ächter Bruch und für ein ungerades n positiv, für ein gerades negativ, er wird mit dem Wachsthum von n immer kleiner, wenn gleich die aufeinander folgenden Abnahmen immer geringer werden. Ist $m > 1$ so wird bei $n = m$ der Coefficient sehr nahe an 1; von hier ab nimmt er mit dem Wachsthum von n in derselben Weise immerfort ab, wie bei ächt gebrochenem m.

Es ist mithin die Reihe für $x < a$ convergirend und es läfst sich auch darthun, dafs wenn m negativ gebrochen gröfser oder kleiner als 1 ist, für $x < a$ die Reihe convergirt.

9. Die Taylorsche Reihe, No. 4 ist mit Hülfe der Mac Laurinschen entwickelt, das $(n+1)$te Glied derselben ist in Reihe No. 5

$$\left(\frac{\partial^n \varphi z}{\partial^n z}\right)_0 \cdot \frac{z^n}{(n)}$$

Es ist folglich der erste Factor dieses Gliedes, welcher in dieser Mac Laurinschen Reihe durch Umgestaltung das $(n+1)$te Glied zum Ergänzungsgliede macht, nämlich zu dem Gliede:

$$\left[\frac{\partial^n \varphi z}{\partial^n z}\right]_{\lambda z} \cdot \frac{z^n}{(n)}$$

Nun ist aber in der Taylorschen Reihe das $(n+1)$te Glied (Reihe 6)

$$\left(\frac{\partial^n f x}{\partial x^n}\right) \cdot \frac{z^n}{(n)}$$

und der erste Factor dieses Gliedes ist dadurch entstanden, dafs bei dem vorhergedachten $(n+1)$ten Gliede der Mac Laurinschen Reihe in dem ersten Factor

$$\left(\frac{\partial^n \varphi z}{\partial^n z}\right)$$

nach ausgeführter Differenzirung in Beziehung auf z, $z = 0$ gesetzt worden ist, und es bleibt mithin der Factor

$$\left(\frac{\partial^n f x}{\partial x^n}\right)$$

mit ungeändertem x stehen, oder es bleibt zunächst das $(n+1)$te Glied

$$\left[\frac{\partial^n f x}{\partial x^n}\right]_x \cdot \frac{z^n}{(n)}$$

Um nun dieses $(n+1)$te Glied zum Ergänzungsgliede zu machen wird λz eingeführt und das Ergänzungsglied ist

$$\left[\frac{\partial^n f x}{\partial x^n}\right]_{x+\lambda z} \cdot \frac{z^n}{(n)}$$

d. h. es wird von fx das $n$te Differenzial genommen, in dieses dann $x + \lambda z$ für x gesetzt und mit $\frac{z^n}{(n)}$ multiplicirt. Z. B. $(x+z)^m$

Das $n+1$te Glied der Reihe ist

$$m \cdot (m-1)(m-2) \ldots (m-n+1) x^{m-n} \frac{z^n}{(n)}$$

als Ergänzungsglied wird es

$$m(m-1)(m-2) \ldots (m-n+1)(x+\lambda z)^{m-n} \cdot \frac{z^n}{(n)}$$

10. Die Reihe für $y + \Delta y$, No. 5, wenn $y = f(x, z)$ ist, besteht aus eben so vielen Reihen, als man Dimensionen von Δz nehmen will + noch einer. Diese Reihen sind sämmtlich Taylorsche, und man hat in jeder das Ergänzungsglied, in welchem der erste Factor das $n$te Differenzial von y ist.

Für die erste Reihe

$$\left[\frac{\partial^n y}{\partial x^n}\right]_{x+\lambda x} \frac{\Delta x^n}{(n)}$$

für die zweite Reihe

$$\frac{\Delta x}{1}\left[\frac{\partial^n y}{\partial x \cdot \partial^{n-1} z}\right]_{z+\lambda z} \cdot \frac{\Delta z^{n-1}}{(n-1)}$$

für die dritte Reihe

$$\frac{\Delta x^2}{(2)}\left[\frac{\partial^n y}{\partial x^2 \cdot \partial^{n-2} z}\right]_{z+\lambda z} \cdot \frac{\Delta z^{n-2}}{(n-2)}$$

II. Bestimmung der Werthe von Functionen die für bestimmte Werthe der Urveränderlichen in der Form $\frac{0}{0}$ erscheinen und unbestimmt werden.

Wenn eine Function in der Form eines Quotient dargestellt ist, so gibt es Fälle, wo für bestimmte Werthe der Urveränderlichen Dividend und Divisor zugleich 0 werden. Z. B.

$$y = \frac{x^2 - a^2}{x - a}$$

wo y für $x = a$ den Werth $\frac{a^2 - a^2}{a - a} = \frac{0}{0}$ erhält, der unbestimmt ist. Man mufs daher den Ausdruck erst dergestalt umformen, dafs Dividendus und Divisor be-

stimmte Werthe erhalten. Dafs in dem vorstehenden Beispiel mit dem Werthe a für x diese Unbestimmtheit eintritt, liegt darin, dafs der Ausdruck nicht in der einfachsten Gestalt gegeben ist, er enthält nämlich im Zähler und Nenner die gleichen Factoren $x-a$, denn es ist

$$\frac{x^2-a^2}{x-a}=\frac{(x+a)(x-a)}{x-a}=x+a$$

wenn man nun $x=a$ setzt, so erhält man $y=2a$.

Bei algebraischen Functionen ist eine solche Umformung jederzeit möglich; man hat nur nöthig, Zähler und Nenner durch einander zu dividiren und so zu verfahren wie bei der Aufsuchung des gröfsten gemeinschaftlichen Theilers zwischen 2 Zahlen, der dann auch in allen Fällen gefunden wird (vergl. No. 9). Bei transcendenten Functionen dagegen ist das Verfahren nicht anwendbar, z. B. die Function $\frac{x^x-x}{1-x+\log n\, x}$ erhält für $x=1$ den unbestimmten Werth $\frac{0}{0}$ und man ist nur im Stande mit Hülfe der Differenzialrechnung den wirklichen Werth der Function für $x=1$ aufzufinden.

Stellt man sich nämlich vor, der vorstehende transcendente Ausdruck als Function von x könne so umgeformt werden, dafs bei Einsetzung des Werthes 1 für x sein wirklicher Werth daraus entnommen werden kann, so ist der umgeformte Ausdruck ebenfalls eine Function von x, und für jeden Werth von x der gegebenen Function gleich. Da nun die umgeformte Function für den Werth von x, bei welchem die gegebene Function unbestimmt wird, einen bestimmten Werth annimmt, so ist dieser Werth der Grenzwerth der Function für den Fall, dafs die Urveränderliche x dem zum Einsetzen gegebenen Werthe sich beliebig nähert und man hat also nur nöthig, diesen Grenzwerth der gegebenen Function aufzusuchen um die erforderliche Umformung der Function zu erhalten.

In dem ersten Beispiel ist $x+a$ der umgeformte Ausdruck für die Auffindung des Werths der gegebenen Function für $x=a$, und es ist wirklich $2a$ die Grenze von $x+a$ also auch von $\frac{x^2-a^2}{x-a}$ wenn x dem Werthe a sich beliebig nähert.

2. Die vorstehende Betrachtung führt also zu folgendem allgemeinen Verfahren:

Es sei $$y=\frac{fx}{\varphi x}$$

so ist $$y+\Delta y=\frac{fx+\Delta fx}{\varphi x+\Delta\varphi x}$$

Für den Fall nun, dafs für x ein Werth a gesetzt wird, werde $fx=0$ und $\varphi x=0$ so bleibt

$$y+\Delta y=\frac{\Delta fx}{\Delta\varphi x}$$

Zähler und Nenner durch Δx dividirt gibt

$$y+\Delta y=\frac{\left(\frac{\Delta x}{\Delta fx}\right)}{\left(\frac{\Delta x}{\Delta\varphi x}\right)}$$

Mit der beliebigen Abnahme von Δx nimmt auch Δy beliebig ab, und $y+\Delta y$ nähert sich seinem gesuchten Werthe y als Grenze. Folglich ist auch der rechts stehende Quotient bei beliebiger Abnahme von $\Delta x=$ dem Werthe y. Bei beliebiger Abnahme werden aber Zähler und Nenner als Differenzenquotienten die Differenziale und es ist

$$y=\frac{\left(\frac{\partial x}{\partial fx}\right)}{\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi x}\right)}$$

allerdings nur für den Werth a von x, für welchen fx und $\varphi x=0$ werden, aber wie verlangt wird. Demnach ist der Werth der Function für $x=a$, bei welchem sie als $\frac{0}{0}$ erscheint = dem Differenzial des Zählers dividirt durch das D. des Nenners, und hiernach für x der Werth a gesetzt.

Bei dem ersten Beispiel $y=\frac{x^2-a^2}{x-a}$ hat man
$\frac{\partial(x^2-a^2)}{\partial(x-a)}=\frac{2x}{1}=2x$, also für $x=a$ gesetzt $y=2a$.

Hat man $y=\frac{x^4-a^4}{x-a}$, so erhält man für $x=a$:

$$y=\frac{4x^3}{1}$$

und $x=a$ gesetzt $y=4a^3$
dividirt man Zähler und Nenner von y durch $x-a$, so erhält man

$$y=x^3+ax^2+a^2x+a^3$$

ein Ausdruck, der für $x=a$ den Werth von y unmittelbar $=4a^3$ angibt.

3. Wenn der Factor $(x-a)$, welcher für $x=a$, Null wird, in dem Zähler und dem Nenner mehrere Male vorkommt, so erhält man, nachdem differenzirt worden, mit Einsetzung von a für x wie-

derum $\frac{0}{0}$ für y, und man mufs, wenn $(x-a)^2$ der gemeinschaftliche Factor in Zähler und Nenner ist, noch einmal differenziren um den reellen Werth der Function für $x = a$ zu erfahren.

Es sei $y = \frac{5x^3 - 11ax^2 + 7a^2x - a^3}{x^2 - 2ax + a^2}$

so erhält man den Quotient der Differenziale

$$= \frac{15x^2 - 22ax + 7a^2}{2x - 2a}$$

folglich für $x = a$ den Werth von y abermals $= \frac{0}{0}$.

Aber noch einmal differenzirt

$$\frac{30x - 22a}{2} = 15x - 11a$$

also für $x = a$; $y = 4a$.

Von der Richtigkeit überzeugt man sich elementar, wenn man Zähler und Nenner der gegebenen Function durch den Nenner dividirt, man erhält

$$\frac{5x^3 - 11ax^2 + 7a^2x - a^3}{x^2 - 2ax + a^2} = (5x - a)\frac{x^2 - 2ax + a^2}{x^2 - 2ax + a^2} = (5x - a)\frac{(x-a)(x-a)}{(x-a)(x-a)}$$

Eine solche Eigenschaft hat die als zweites Beispiel (No. 1) aufgeführte Function, welche $\frac{0}{0}$ für $x = 1$ wird:

$$\frac{x^x - x}{1 - x + logn\, x}$$

Den Quotient der Differenziale erhält man nach den Differenzialformeln 146 und 84:

$$\frac{x^x[1 + ln\, x] - 1}{-1 + \frac{1}{x}} = -\frac{x^{x+1}(1 + ln\, x) - x}{x - 1}$$

und auch dieser Quotient wird für $x = 1$,

$$\frac{1^2(1+0) - 1}{-1 + 1} = \frac{0}{0}$$

Differenzirt man noch einmal, so erhält man

$$\frac{x^x \cdot \frac{1}{x} + (1 + ln\, x)^2 x^x}{-\frac{1}{x^2}} = -x^{x+1}[1 + (1 + ln\, x)^2 x]$$

Für $x = 1$ also ist

$$y = -1^2[1 + (1+0)^2 1] = -2$$

Dieses Resultat liegt nun offenbar darin, dafs wenn man in der gegebenen Function $\frac{x^x - x}{1 - x + ln\, x}$ Zähler und Nenner mit $x - 1$ dividiren könnte, den Werth $-\frac{x^{x+1}(1 + ln\, x) - x}{x - 1}$ erhalten würde, weil Zähler wie Nenner die Gröfse $(x - 1)$ als Factor enthält und dafs wiederum der Zähler des letzten Quotient = ist $(x - 1)\, x^{x+1}[1 + (1 + ln\, x)^2 x]$.

So kann in dem Zähler und in dem Nenner einer gegebenen Function der Null machende Factor $(x - a)$ $n$mal enthalten sein; alsdann erhält man erst mit den $n$ten Differenzialen des Zählers und des Nenners den reellen Grenzwerth der Function für $x = a$.

4. Befindet sich der Factor $(x - a)$, der die Function für den Werth von $x = a$ zu $\frac{0}{0}$ macht, in dem Zähler $n$mal, in dem Nenner $(n - m)$mal, wo $m < n$ ist, so erhält man nach $(m - n)$maligem Differenziren, wenn man dann $x = a$ setzt, einen reellen Nenner, der Zähler aber, welcher den Null machenden Factor noch einoder mehrmal enthält, bleibt Null. Mithin ist die gegebene Function $= 0$ für $x = a$.

Z. B. die Function $\frac{b(x-a)^3}{x(x-a)^2}$ hat für $x = a$ den Grenzwerth $\frac{b}{x}(x - a)$ und für $x = a$ ist derselbe $= 0$.

Befindet sich der Null machende Factor öfter in dem Nenner als in dem Zähler, so wird nach $(n - m)$maligem Differenziren der Zähler reell, der Nenner bleibt Null, der Quotient also unendlich; d. h. für $x = a$ existirt die Function nicht.

Z. B. $y = \frac{x^2 - a^2}{x^3 - ax^2 - a^2x + a^3}$

wird (für $x = a$) $= \frac{0}{0}$.

Man erhält den Quotient der Differenziale

$$\frac{2x}{3x^2 - 2ax - a^2}$$

für x den Werth a gesetzt entsteht

$\frac{2a}{0}$ mithin ist die gegebene Function für den Werth $x = a$ nicht vorhanden.

5. Der Ausdruck einer Function wird auch dadurch unbestimmt, daſs für einen bestimmten Werth a der Urveränderlichen x, Zähler und Nenner ∞ anstatt 0 werden, indem die Factoren $\frac{1}{x-a}$ statt $(x-a)$ in ihnen sich befinden. Dann muſs man den Ausdruck durch Transformation auf eine Form $\frac{0}{0}$ für $x = a$ zurückbringen. Z. B.

$$y = \frac{tg\,(\pi - x)}{tg\,x}$$

für $x = \frac{\pi}{2}$ wird $y = \frac{\infty}{\infty}$. Schreibt man nun $\frac{sin}{cos}$ für tg so erhält man

$$y = \frac{sin\,(\pi - x) \cdot cos\,x}{cos\,(\pi - x) \cdot sin\,x}$$

und es entsteht für $x = \frac{\pi}{2}$ der Werth $\frac{1 \cdot 0}{0 \cdot 1} = \frac{0}{0}$.

Nun Zähler und Nenner differenzirt, gibt

$$\frac{-sin\,(\pi - x)\,sin\,x - cos\,x\,cos\,(\pi - x)}{cos\,(\pi - x)\,cos\,x + sin\,x\,sin\,(\pi - x)}$$

für $x = \frac{\pi}{2}$ hat man nun

$$y = \frac{-1 \cdot 1 - 0 \cdot 0}{0 \cdot 0 + 1 \cdot 1} = -1$$

6. Erscheint der Werth einer Function für $x = a$ in der Form $\frac{0}{\infty}$ oder $\frac{\infty}{0}$, so sind dies keine unbestimmten Werthe mehr: in dem ersten Fall ist die Function $= 0$, im zweiten Fall ist sie unmöglich. Z. B. $\frac{cot\,x}{tg\,(\pi - x)}$ für $x = \frac{\pi}{2}$ wird $\frac{0}{\infty}$ und ist $= 0$. Transformirt man zur Probe den Ausdruck in $sin\,x$ und $cos\,x$, so erhält man ihn $= \frac{-cos^2 x}{sin^2 x} = -cot^2 x$, welches für $x = \frac{\pi}{2}$ den Werth $= 0$ gibt. So wird für $x = \frac{\pi}{2}$ der Werth des umgekehrten Bruchs $= -tg^2 x = -\infty$.

7. Auch ein Product als Function wird unbestimmt, indem der eine Factor 0, der andere ∞ wird. Es liegt dies wieder darin, daſs in dem ersten Factor der Factor $(x-a)$, in dem zweiten der Factor $\frac{1}{x-a}$ enthalten ist. Alsdann ist eine Transformation der Art erforderlich, daſs der zweite Factor in dem Quotient $\frac{1}{0}$ umgewandelt wird, so daſs die Function die Form $\frac{0}{0}$ annimmt. Z. B.

$$y = tg\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \times tg\,x$$

für $x = \frac{\pi}{2}$ wird $y = 0 \times \infty$

ändert man nun $tg\,x$ in $\frac{1}{cot\,x}$ so hat man

$$y = \frac{tg\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{cot\,x}$$

wo für $x = \frac{\pi}{2}$ die Function $y = \frac{0}{0}$ entsteht.

Nun differenzirt wird

$$y = \frac{-sec^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{-cosec^2 x} = \frac{-1}{-1} = 1$$

8. Es gibt Fälle, in welchen man die vorgetragene Methode nicht anwenden kann, nämlich da wo die Differenziale des Zählers und des Nenners von jeder Ordnung $= 0$ oder ∞ werden.

Z. B. $(x-a)^r$ hat die Differenziale $(x-a)^r\,lna$, $(x-x)^r\,ln^2 a$ u. s. w., welche sämmtlich für $x = a$ zu Null werden.

$\sqrt{x-a}$ hat die Differenziale

$$\frac{1}{2\sqrt{x-a}}; \quad -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{(x-a)^3}}$$

u. s. w. die für $x = a$ sämmtlich unendlich werden.

Für solchen Fall setzt man in dem Ausdruck für y den Werth $x = a +$ einem Zuwachs $\triangle x$, entwickelt Zähler und Nenner in Reihen, die nach Potenzen des Zuwachses fortschreiten, und dividirt hierauf Zähler und Nenner durch die höchste Potenz des Zuwachses, die in allen Gliedern gemeinschaftlich ist, wo dann Glieder entstehen, die den Zuwachs nicht mehr enthalten. Setzt man hierauf $\triangle x = 0$, so erhält man den reellen Werth von y für $x = a$.

Z. B. $$y = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

Für $x = a$ entsteht $y = \frac{0}{0}$ und die Quotienten der Differenziale werden sämmtlich $= \frac{\infty}{\infty}$.

Setzt man nun $x = a + \triangle x$, so hat man

$$y + \triangle y = \frac{(a + \triangle x)^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}} + \triangle x^{\frac{1}{2}}}{(2a \triangle x + \triangle x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

und nach dem Binomialsatz entwickelt

$$= \frac{a^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}a^{-\frac{1}{2}} \cdot \triangle x + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1)}{1 \cdot 2} a^{-\frac{3}{2}} \triangle x^2 + \ldots - a^{\frac{1}{2}} + \triangle x^{\frac{1}{2}}}{\triangle x^{\frac{1}{2}} \left[(2a)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(2a)^{-\frac{1}{2}} \triangle x - \frac{1}{8}(2a)^{-\frac{3}{2}} \triangle x^2 + \ldots\right]}$$

und reducirt

$$= \frac{\triangle x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}a^{-\frac{1}{2}} \triangle x - \frac{1}{8}a^{-\frac{3}{2}} \triangle x^2 + \ldots}{\triangle x^{\frac{1}{2}} \left[(2a)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(2a)^{-\frac{1}{2}} \triangle x - \frac{1}{8}(2a)^{-\frac{3}{2}} \triangle x^2 + \ldots\right]}$$

Zähler und Nenner mit $\triangle x^{\frac{1}{2}}$ dividirt gibt

$$y + \triangle y = \frac{1 + \frac{1}{2}a^{-\frac{1}{2}} \triangle x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{8}a^{-\frac{3}{2}} \triangle x^{\frac{3}{2}} + \ldots}{(2a)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(2a)^{-\frac{1}{2}} \triangle x - \frac{1}{8}(2a)^{-\frac{3}{2}} \triangle x^2 + \ldots}$$

Mit der beliebigen Abnahme von $\triangle x$ nimmt auch $\triangle y$ beliebig ab, der Ausdruck links nähert sich beliebig seinem Grenzwerth y und der Quotient rechts nähert sich seiner Grenze $\frac{1}{(2a)^{\frac{1}{2}}}$ mithin ist für $x = a$ die Function $y = \frac{1}{(2a)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{2a}}{2a}$

9. Es ist No. 1 angegeben, dafs man in algebraischen Functionen der Beschaffenheit, dafs Zähler und Nenner für $x = a$ zu Null werden, die analystische Methode nicht anzuwenden nöthig habe, weil eine einfache Division des Zählers und des Nenners mit dem Null machenden Factor genüge. In dem Beispiel 8 ist dies natürlich auch der Fall. Es ist nämlich

$$\sqrt{x} - \sqrt{a} = (\sqrt{x} - \sqrt{a}) \times \frac{\sqrt{x} + \sqrt{a}}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = \frac{x - a}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}$$

$$\sqrt{x - a} = \sqrt{x - a} \times \frac{\sqrt{x - a}}{\sqrt{x - a}} = \frac{x - a}{\sqrt{x - a}}$$

folglich ist der Zähler dividirt durch $(x - a)$, oder

$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x - a}}{x - a} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{x - a}} = \frac{\sqrt{x - a} + \sqrt{x} + \sqrt{a}}{\sqrt{x - a}\,(\sqrt{x} + \sqrt{a})}$$

der Nenner $\sqrt{x^2 - a^2}$ ist durch $(x - a)$ dividirt $= \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x - a} = \sqrt{\frac{x + a}{x - a}}$ der Quotient ist demnach nach ausgeführter Division

$$\frac{\left(\frac{\sqrt{x - a} + \sqrt{x} + \sqrt{a}}{\sqrt{x - a}\,(\sqrt{x} + \sqrt{a})}\right)}{\sqrt{\frac{x + a}{x - a}}} = \frac{\sqrt{x - a} + \sqrt{x} + \sqrt{a}}{(\sqrt{x} + \sqrt{a})\sqrt{x + a}}$$

und für $x = a$ gesetzt

$$y = \frac{0 + \sqrt{a} + \sqrt{a}}{(\sqrt{a} + \sqrt{a})\sqrt{2a}} = \frac{1}{\sqrt{2a}} = \frac{\sqrt{2a}}{2a}$$

In complicirten algebraischen Ausdrücken möchte die analytische Methode vorzuziehen sein, besonders da man für jede Reihe nur die beiden ersten Glieder zu entwickeln hat.

III. Bestimmung der gröfsten und kleinsten Werthe von Functionen.

Wenn der Werth einer Function y für einen Werth X der Urveränderlichen x gröfser oder kleiner wird, als alle Werthe derselben, welche entstehen wenn man den Werth X bis zu bestimmten Grenzen hin vermehrt oder vermindert, so heifst jener Werth von y für X im ersten Fall ein gröfster Werth oder ein Maximum der Function, im zweiten Fall ein kleinster Werth oder ein Minimum der Function. Diese gröfsten und kleinsten Werthe der Function bedeuten absolute Zahlen, ohne dafs Vorzeichen dabei in Betracht kommen. In Beziehung auf die Vorzeichen nennt man subtractive Minima auch Maxima und subtractive Maxima, Minima. Die Werthe der Urveränderlichen, welche innerhalb der oben gedachten Grenzen liegen so wie die zugehörigen Werthe der Function, bis zu welchen die Maxima und Minima als solche gelten, heifsen benachbarte Werthe. Aufserhalb dieser benachbarten Werthe kann die Function Werthe annehmen, die gröfser sind als das zu

jenen benachbarten Werthen gehörende Maximum und kleiner als das zu demselben gehörende Minimum der Function.

Betrachtet man diejenigen gröfsten und kleinsten Werthe, die gröfser und kleiner sind als alle übrigen nur möglichen Werthe, welche die Function annehmen kann, so heifsen diese gröfsten und kleinsten Werthe **absolute Maxima** und **Minima**, jene nur bis zu bestimmten Grenzwerthen sich erstreckenden heifsen dann in Beziehung auf diese, **relative** Maxima und Minima.

2. Es sei $y = fx$ eine Function von x für den Werth X von x werde y ein Maximum Y; läfst man dann X um $\triangle x$ zunehmen und abnehmen, d. h. substituirt man für X die Werthe $X + \triangle x$ und $X - \triangle x$, so sind die zu diesen Werthen gehörigen Werthe von y beide kleiner als Y, so klein man $\triangle x$ auch nehmen mag, d. h.

$$Y + \triangle y < Y \text{ oder } f(X + \triangle x) < Y$$
$$\text{und } Y - \triangle y < Y \text{ oder } f(X + \triangle x) < Y$$

Nach dem Taylorschen Satz hat man

$$Y + \triangle y = f(X + \triangle x) = Y + \frac{\partial y}{\partial x}\triangle x + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\cdot\frac{\triangle x^2}{1\cdot 2} + \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\cdot\frac{\triangle x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \dots \quad (1)$$

und wenn man $-\triangle x$ für $\triangle x$ setzt

$$Y - \triangle y = f(X - \triangle x) = Y - \frac{\partial y}{\partial x}\cdot\triangle x + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\cdot\frac{\triangle x^2}{1\cdot 2} - \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\cdot\frac{\triangle x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \dots \quad (2)$$

Hat nun für den bestimmten Werth X das erste Differenzial $\frac{\partial y}{\partial x}$ von y ebenfalls einen bestimmten additiven oder subtractiven Werth, so kann man dessen Factor, den Zuwachs $\triangle x$ so klein nehmen, dafs das zweite Glied $\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\triangle x}{1}$ in jeder der beiden Reihen gröfser wird als die Summe aller von dem 3ten Gliede $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\cdot\frac{\triangle x^2}{1\cdot 2}$ ab nachfolgenden Glieder, oder wenn man diese Summen als den zu den vollständigen Ausdrücken für $y \pm \triangle y$ gehörenden Reste mit R und R' bezeichnet, man kann $\triangle x$ so klein nehmen, dafs R und R' gegen $\frac{\partial y}{\partial x}\triangle x$ beliebig klein werden. Es mögen also R und R' additiv oder subtractiv sein so bleiben $\frac{\partial y}{\partial x}\triangle x + R$ und $\frac{\partial y}{\partial x}\triangle x + R'$ mit dem zweiten Gliede $\frac{\partial y}{\partial x}\triangle x$ übereinstimmend additiv oder subtractiv.

Nun ist $Y + \triangle y = Y + \frac{\partial y}{\partial x}\triangle x + R$ (3)

und $Y - \triangle y = Y - \frac{\partial y}{\partial x}\triangle x + R'$ (4)

Ist daher $\frac{\partial y}{\partial x}$ additiv, so hat man

$$Y + \triangle y > Y$$
$$\text{und } Y - y < Y$$

Von den beiden benachbarten Werthen ist also der eine gröfser und der andere kleiner als Y, folglich ist Y kein Maximum von y.

Ist $\frac{\partial y}{\partial x}$ subtractiv, so hat man

$$Y + \triangle y < Y$$
$$\text{und } Y - \triangle y > Y$$

es ist also wiederum Y kein Maximum von y, weil die benachbarten Werthe nicht **beide** kleiner als Y sind.

Es kann also kein Maximum Y für die Function y entstehen, wenn für diesen Werth Y und den dazu gehörigen Werth X der Urveränderlichen das erste Differenzial von y einen bestimmten additiven oder subtractiven Werth annimmt. **Es mufs also für ein Maximum Y der Function der Werth des ersten Differenzials entweder $= 0$ oder $= \infty$ sein.**

3. Für den ersten Fall, dafs für die zusammengehörigen Werthe Y und X das erste Differenzial $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ wird, hat man die beiden Reihen

$$Y + \triangle y = Y + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\cdot\frac{\triangle x^2}{1\cdot 2} + \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\cdot\frac{\triangle x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \dots \quad (5)$$

$$Y - \triangle y = Y + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\cdot\frac{\triangle x^2}{1\cdot 2} - \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\cdot\frac{\triangle x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \dots \quad (6)$$

Nun kann man wiederum $\triangle x$ so klein nehmen, dafs die Summe aller dem zweiten Gliede $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\cdot\frac{\triangle x}{1\cdot 2}$ nachfolgenden Glie-

der kleiner wird als das zweite Glied selbst, oder wenn man diese Summen in den beiden Reihen mit R und R' bezeichnet, dafs

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \frac{\triangle x^2}{1 \cdot 2} > R$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \frac{\triangle x^2}{1 \cdot 2} > R' \text{ ist.}$$

Nun hat man

$$Y + \triangle y = Y + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \frac{\triangle x^2}{1 \cdot 2} + R$$

und $$Y - \triangle y = Y + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \frac{\triangle x^2}{1 \cdot 2} + R'$$

In beiden Ausdrücken ist nun das zweite Glied additiv. Nimmt also das zweite Differenzial für den Werth X der Urvariablen, für welchen das erste Differenzial = 0 geworden ist, einen bestimmten additiven oder subtractiven Werth an, so sind beide zweiten Glieder entweder zugleich additiv oder zugleich subtractiv.

Für den ersten Fall ist

$$Y + \triangle y > Y$$

und $$Y - \triangle y > Y$$

Für den zweiten Fall ist

$$Y + \triangle y < Y$$

und $$Y - \triangle y < Y$$

In dem ersten Fall ist also Y ein Minimum, in dem zweiten Fall ein Maximum der Function.

4. Wird für denselben Werth X der Urveränderlichen, für welchen das erste Differenzial der Function = 0 geworden ist, auch das zweite Differenzial = 0, so ändern sich die Reihen in die folgenden

$$Y + \triangle y = Y + \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \cdot \frac{\triangle x^3}{(3)} + \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \cdot \frac{\triangle x^4}{(4)} + \ldots\ldots$$

$$Y - \triangle y = Y - \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \cdot \frac{\triangle x^3}{(3)} + \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \cdot \frac{\triangle x^4}{(4)} - \ldots\ldots$$

Diese Reihen sind also der Form nach dieselben wie die ersten beiden, und folglich existirt kein Maximum und kein Minimum der Function, wenn das dritte Differenzial einen bestimmten positiven oder negativen Werth annimmt; wird dagegen dieses dritte Differenzial = 0, so erhält man die Reihen

$$Y + \triangle y = Y + \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \cdot \frac{\triangle x^4}{(4)} + \frac{\partial^5 y}{\partial x^5} \cdot \frac{\triangle x^5}{(5)} + \ldots\ldots$$

und $$Y - \triangle y = Y + \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \cdot \frac{\triangle x^4}{(4)} - \frac{\partial^5 y}{\partial x^5} \cdot \frac{\triangle x^5}{(5)} + \ldots\ldots$$

und man erhält wie vorhin für y' ein Maximum Y bei dem Werth X der Urveränderlichen, wenn $\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}$ einen bestimmten subtractiven Werth und ein Minimum Y, wenn $\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}$ einen bestimmten additiven Werth annimmt.

Setzt man diese Schlüsse weiter fort, so ersieht man aus den bisherigen Untersuchungen;

Erstens, dafs von der Function y nur ein Maximum und ein Minimum existiren kann für denjenigen Werth X der Urvariablen X, für welchen das erste Differenzial $\frac{\partial y}{\partial x}$ der Function = 0 wird.

Zweitens: Setzt man diesen Werth X in die höheren Differenziale und dasjenige Differenzial, welches zuerst einen bestimmten Werth annimmt, ist ein D. gerader Ordnung, so ist der Werth der Function für den Werth X der Urveränderlichen ein Maximum, wenn das höhere D. subtractiv ist, ein Minimum, wenn das höhere D. additiv ist.

Drittens: Ist dasjenige höhere D., welches zuerst einen bestimmten Werth annimmt, von ungrader Ordnung, so existirt für die Function y weder ein Maximum noch ein Minimum, weder für $x = X$ noch für irgend einen anderen Werth der Urvariabeln.

5. Aus der Entwickelung der Regeln zur Erkennung der Maxima und Minima ersieht man, dafs immer nur die absoluten Werthe entscheiden, dafs also jede Gröfse, die auf ein Maximum oder Minimum zu untersuchen ist, als positive Gröfse gedacht werden mufs. Ist aber eine solche Gröfse der Lage nach negativ oder der Zahl nach subtractiv, so mufs ihr, damit sie an sich gröfser werde, etwas Negatives oder Subtractives zugesetzt werden; eben so mufs von ihr etwas

Negatives oder Subtractives fortgenommen werden, wenn sie an sich kleiner werden soll.

Drückt man nun das Negative, welches einer Gröfse y anhaftet algebraisch aus, so entstehen in den obigen für Y entwickelten Reihen die entgegengesetzten Vorzeichen, und es finden also bei dem negativen Maximum und dem negativen Minimum die entgegengesetzten Kennzeichen statt. Aus diesem Grunde nennt man auch die negativen Maxima, Minima und die negativen Minima, Maxima.

6. Für den Werth X der Urveränderlichen x, welcher entsteht, wenn man $\frac{\partial y}{\partial x} = \infty$ setzt, kann nach No. 2 ebenfalls ein Maximum oder Minimum entstehen. In solchem Fall mufs man direct untersuchen, ob ein solches und welches von beiden stattfindet, indem man in die Function $(\infty + k)$ und $(\infty - k)$ für x hintereinander einsetzt, entwickelt und erfährt, ob diese benachbarten Werthe beliebig klein genommen, beide gröfser oder beide kleiner werden als Y für $x = \infty$.

Für die richtige Auffassung der vorgetragenen Begriffe und Verfahrungsarten eignen sich ganz besonders die trigonometrischen Functionen, und es sollen daher an diesen die nothwendigen Erläuterungen angeknüpft werden.

7. Beispiele.

1. $\sin x$ wird für $x = \frac{\pi}{2}$ zu dem Maximum 1, denn $\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right)$ ist < 1; ferner für $x = \frac{3}{2}\pi$ ein negatives Maximum $= -1$; denn $\sin(\frac{3}{2}\pi \pm \alpha)$ ist negativ und absolut kleiner als 1. $Sin(x = 0) = 0$ ist kein Minimum, denn $\sin(0 + x) = + \sin \alpha$ ist > 1 und $\sin(0 - \alpha) = - \sin \alpha$ ist < 1. Desgleichen ist $\sin \pi = 0$ aus demselben Grunde kein Minimum. Gesetzt man wüfste dies nicht, und wollte die Function $y = \sin x$ auf Maxima und Minima analytisch untersuchen, so hat man:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \cos x$$
$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = - \sin x$$
$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = - \cos x$$
. . . .

Es kann nun $\sin x$ für dasjenige X, mit welchem $\cos x = 0$ wird, ein Max. oder ein Min. werden. Dies ist aber $x = \frac{\pi}{2}$, und da zugleich $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = - \sin \frac{\pi}{2}$, also ein subtractiver Werth wird, so ist $\sin \frac{\pi}{2}$ ein Max. Aber auch für $x = \frac{3\pi}{2}$ wird $\cos x = 0$, also kann auch $\sin \frac{3\pi}{2}$ ein Max. oder ein Min. sein. Nun liegt aber $\sin \frac{3\pi}{2}$ zwischen dem 3ten und 4ten Quadrant, ist negativ und $- \sin \frac{3\pi}{2}$ ist eine positive Gröfse; folglich ist $\sin \frac{3\pi}{2}$ entweder ein Minimum oder ein negatives Maximum, und letzteres ganz bestimmt, weil dessen benachbarte Werthe negativ sind.

Auch für dasjenige x, für welches $\cos x = \infty$ wird, kann $\sin x$ ein Max. oder ein Min. werden, ein solches x existirt aber nicht. Mithin sind nur die obigen 2 Maxima für $\sin x$ möglich und ein Minimum existirt nicht.

2. $y = \cos x$

Es ist
$$\frac{\partial y}{\partial x} = - \sin x$$
$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = - \cos x$$

Für $x = 0$ wird $\frac{\partial y}{\partial x} = - \sin x = 0$, und da $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = - \cos x$ subtractiv ist, so ist $\cos(x = 0)$ ein Maximum; es ist auch $\cos(0 \pm \alpha) = + \cos \alpha$, so dafs beide benachbarten Werthe $< \cos 0 = 1$ sind. Für $x = \pi$ wird $- \sin x$ ebenfalls $= 0$; da aber $\cos \pi$ zwischem dem zweiten und dritten Quadrant liegt, so ist $\cos \pi$ negativ, folglich $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = - \cos x$ eine positive Gröfse und $\cos \pi$ entweder ein Minimum oder ein negatives Maximum, und ausschliefslich letzteres, weil die benachbarten Werthe von $\cos \pi$ negativ sind Für $\cos x = \infty$ gibt es kein x. Ein Minimum entsteht nicht: bei $x = \frac{\pi}{2}$ nämlich wird $\cos x = 0$, allein $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$ ist negativ und $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ ist positiv mithin der erste Werth kleiner, der zweite gröfser als $\cos \frac{\pi}{2} = 0$.

3. $y = tg\, x$

Es ist
$$\frac{\partial y}{\partial x} = sec^2 x$$
$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 2\, tg\, x \cdot sec^2 x$$
. . . .

Für $sec^2 x = 0$ gibt es kein x, weil der kleinste Werth von $sec\ x = 1$ ist. Es mufs also $sec^2 x = \infty$ versucht werden, und dafür ist $x = \frac{\pi}{2}$. Nun ist $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ für $x = \frac{\pi}{2}$ ebenfalls $= \infty$ und man ersieht, dafs alle noch höheren Differenziale von y ebenfalls für $\frac{\pi}{2} = \infty$ werden. Demnach ist eine directe Untersuchung erforderlich. Man hat die Reihe

$$tg\,\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 + \frac{2}{3\cdot 5}\left(\frac{\pi}{2}\right)^5 + \ldots\ldots$$

Hieraus entstehen also

$$tg\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \tfrac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)^3 + \ldots.$$

und

$$tg\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \tfrac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)^5 + \ldots..$$

Die vorstehenden Reihen eignen sich nicht zur Untersuchung ob für $x = \frac{\pi}{2}$ ein Maximum oder ein Minimum entsteht; geht man daher zu der trigonometrischen Formel über

$$tg\,(\alpha \pm \beta) = \frac{tg\,\alpha \pm tg\,\beta}{1 \mp tg\,\alpha \cdot tg\,\beta}$$

so hat man, für α den Werth $\frac{\pi}{2}$ gesetzt

$$tg\left(\frac{\pi}{2} \pm \beta\right) = \frac{tg\,\frac{\pi}{2} \pm tg\,\beta}{1 \mp tg\,\frac{\pi}{2} \cdot tg\,\beta}$$

und Zähler und Nenner durch $tg\,\frac{\pi}{2}$ dividirt

$$tg\left(\frac{\pi}{2} \pm \beta\right) = \frac{1 \pm \frac{tg\,\beta}{tg\,\frac{\pi}{2}}}{\frac{1}{tg\,\frac{\pi}{2}} \mp tg\,\beta}$$

Nun ist $tg\,\frac{\pi}{2} = \infty$ daher ist

$$tg\left(\frac{\pi}{2} \pm \beta\right) = \frac{1 \mp 0}{0 \mp tg\,\beta}$$

folglich $\quad tg\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right) = \frac{1}{-tg\,\beta} = -\,cot\,\beta$

und $\quad tg\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \frac{1}{tg\,\beta} = +\,cot\,\beta$

Die gleich weit von $tg\,\frac{\pi}{2}$ entfernten benachbarten Werthe sind also beide gleich grofs aber einander entgegengesetzt. Nun ist zwar $tg\,\frac{\pi}{2} = \infty$ und als solche ein Max. für jeden endlichen Werth, also $> (+\,cot\,\beta)$ und $> (-\,cot\,\beta)$. Allein $-\,cot\,\beta$ gehört einer Reihe von Werthen an, denen ein anderes Max. zukommt, nämlich das für $x = \frac{3}{2}\pi$.

$tg\,\frac{\pi}{2}$ ist das **absolute Maximum** der Tangenten für Bogen von $x = 0$ bis $x = \frac{\pi}{2}$ und von $x = \pi$ bis $x = \frac{3}{2}\pi$. Ein Minimum hat $tg\,x$ ebenfalls nicht, weil zwar $tg\,(x = 0) = 0$ ist, aber $tg\,(+\,\alpha)$ positiv und > 0, $tg\,(-\,\alpha)$ negativ und < 0 ist.

4. $y = cot\,x$ gibt dasselbe Resultat in Beziehung auf Maxima und Minima: Es existiren nur 2 absolute Maxima und kein Minimum für $cot\,x$.

5. $y = sec\,x$

Es ist $\quad \frac{\partial y}{\partial x} = tg\,x \cdot sec\,x$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = sec\,x\,(tg^2 x + sec^2 x)$$

Für $x = 0$ ist $\frac{\partial y}{\partial x} = tg\,x \cdot sec\,x = 0 \times 1 = 0$

für $x = 0$ wird $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 1\,(0 + 1) = +\,1$

Es wird also, da $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ eine bestimmte positive Gröfse ist, $sec\,x$ für $x = 0$ ein Minimum $= 1$; und es ist auch $sec\,(0 \pm \alpha) + sec\,\alpha$ so dafs beide benachbarte Secanten positiv und gröfser als 1 sind.

Für $x = \pi$ wird ebenfalls

$$\frac{\partial y}{\partial x} = tg\,x \cdot sec\,x = 0$$

Nun ist $sec\,\pi$ zwischen dem zweiten und dritten Quadrant belegen, also negativ $= -\,1$, und

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\,1\,[0 + (-\,1)^2] = -\,1$$

mithin wird $sec\,x$ für $x = \pi$ entweder ein Maximum oder ein negatives Minimum, und letzteres findet statt, weil $sec\,\pi$ zwischen benachbarten negativen Secanten liegt.

Für $\quad x = \frac{\pi}{2}$ wird $\frac{\partial y}{\partial x} = \infty$

Es kann also $sec\,\frac{\pi}{2}$ ein Maximum und ein Minimum sein. Aber $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ ist für $x = \frac{\pi}{2}$ ebenfalls ∞, und wenn man mit Hülfe der trigonometrischen Formel für

$sec\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\frac{1}{cos\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)}$ die weitere Untersuchung anstellt, so ergiebt sich, dafs $sec\frac{\pi}{2}$ ein **absolutes Maximum** ist, wie auch $sec\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ positiv und $sec\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$ negativ ist.

6. $y = cosec\, x$

Es ist $\frac{\partial y}{\partial x} = -cot\, x \cdot cosec\, x$

$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = +cosec\, x\,(cot^2 x + cosec^2 x)$

Für $x=\frac{\pi}{2}$ wird $\frac{\partial y}{\partial x} = -0 \times 1 = 0$

$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 1\,(0+1^2) = +1$

folglich entsteht für $x=\frac{\pi}{2}$ wie bei der Secante ein Minimum = 1, und es ist auch $cosec\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right) = +cosec\,\alpha$. Das Maximum für $x=0$ ist ein **absolutes Maximum**.

8. Man kann für die Beurtheilung, ob eine Function y mit dem Nullwerth des ersten Differenzials für x und y, ein Maximum oder ein Minimum oder keines von beiden wird, die höheren Differenziale ganz ignoriren.

Wächst nämlich eine Function y mit dem Wachsthum ihrer Urveränderlichen x und nimmt mit ihr ab, so wachsen auch die Zuwachse $\triangle y$ und $\triangle x$ mit einander und nehmen mit einander ab. Zu einem positiven $\triangle x$ gehört also immer ein positives $\triangle y$ und zu einem negativen $\triangle x$ immer ein negatives $\triangle y$, es ist mithin jederzeit der Zuwachsquotient $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ positiv und somit auch das Differenzial $\frac{\partial y}{\partial x}$ positiv.

Wächst hingegen die Function y mit der Abnahme der Urveränderlichen x und nimmt ab mit der Zunahme von x, so findet beides auch zwischen deren Zuwachsen $\triangle y$ und $\triangle x$ statt. Es ist also jederzeit absolut genommen $y+\triangle y$ mit $x-\triangle x$ oder $y-\triangle y$ mit $x+\triangle x$ verbunden, der Differenzenquotient $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ und mit demselben das Differenzial $\frac{\partial y}{\partial x}$ ist jederzeit negativ. Ist gegenseitig das Differenzial $\frac{\partial y}{\partial x}$ für irgend zusammengehörige Werthe y, x positiv, so wächst y von hier ab mit dem Wachsthum von x und nimmt ab mit der Abnahme von x. Ist dagegen jenes Differenzial negativ, so wächst y von hier ab mit der Abnahme von x und nimmt ab mit der Zunahme von x.

Ist nun für irgend einen Werth X von x das erste Differenzial $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ und es wird $\frac{\partial y}{\partial x}$ für den Werth $X+\triangle x$ positiv, so wachsen die Werthe der Function y von Y ab nach der positiv benachbarten Seite hin; wird ferner auch $\frac{\partial y}{\partial x}$ für den Werth $X-\triangle x$ positiv, so nehmen die Werthe der Function y von Y für X nach der negativ benachbarten Seite hin ab und es ist also Y für $x=X$ weder ein Maximum noch ein Minimum.

Wird das Differenzial $\frac{\partial y}{\partial x}$ für $X+\triangle x$ negativ, so werden die Werthe der Function von y ab nach der positiven Seite hin kleiner; wird $\frac{\partial y}{\partial x}$ für $X-\triangle x$ eben falls negativ, so werden die Werthe der Function von Y ab nach der negativen Seite hin gröfser und Y ist wiederum weder ein Maximum noch ein Minimum.

Wird dagegen $\frac{\partial y}{\partial x}$ für $X+\triangle x$ **positiv** und $\frac{\partial y}{\partial x}$ für $X-\triangle x$ **negativ**, so wachsen die Werthe der Function y von Y ab nach der positiven Seite hin, und wachsen mit der Abnahme von X und $\triangle x$ auch nach der negativen Seite hin. Beide benachbarten Werthe von y rechts und links von Y $\left(\text{für } x=X \text{ oder für } \frac{\partial y}{\partial x}=0\right)$ werden gröfser als Y und **folglich ist Y ein Minimum.**

Wird endlich $\frac{\partial y}{\partial x}$ für $X+\triangle x$ negativ und $\frac{\partial y}{\partial x}$ für $X-\triangle x$ positiv, so nehmen die Werthe der Function ab, welche auf der positiven Seite liegen und die Werthe der Function auf der negativen Seite nehmen ebenfalls ab. Beide benachbarten Werthe zur Linken und zur Rechten von Y werden kleiner als Y, **und Y ist ein Maximum.**

Um also den Werth von x zu finden, für welches y ein Maximum und ein Minimum werden kann setze $\frac{\partial y}{\partial x}=0$ und

entwickele x so ist X der verlangte Werth. Um nun aber beurtheilen zu können, ob für X die Function y ein Maximum oder ein Minimum oder keins von beiden wird, setze in dasselbe Differenzial $\frac{\partial y}{\partial x}$ für X nach einander die Werthe $X + \triangle x$ und $X - \triangle x$ (oder $X + \alpha$ und $X - \alpha$).

Wird dann $\frac{\partial y}{\partial (X+\triangle x)}$ positiv, $\frac{\partial y}{\partial (X-\triangle x)}$ negativ, so ist Y ein Minimum.

Wird $\frac{\partial y}{\partial (X+\triangle x)}$ negativ, $\frac{\partial y}{\partial (X-\triangle x)}$ positiv, so ist Y ein Maximum.

Wird $\frac{\partial y}{\partial (X+\triangle x)}$ und zugleich $\frac{\partial y}{\partial (X-\triangle x)}$ positiv oder negativ, so ist Y weder ein Maximum noch ein Minimum.

9. Beispiele.

1. Eine gegebene Zahl in 2 Theile zu zerlegen, dafs das Product bestimmter Potenzen dieser Theile ein Maximum oder Minimum werde.

Ist a die gegebene Zahl, x der eine Theil, also $(a - x)$ der andere, so soll $x^m (a - x)^n = M$ sein.

Nun ist

$$\begin{aligned}\frac{\partial y}{\partial x} &= \partial x^m (a-x)^n = x^m \cdot n (a-x)^{n-1}(-1) + (a-x)^n \cdot m x^{m-1} \\ &= x^{m-1} \cdot (a-x)^{n-1} [m(a-x) - nx] \\ &= x^{m-1} \cdot (a-x)^{n-1} [ma - (m+n)x]\end{aligned}$$

$\frac{\partial y}{\partial x}$ kann nun $= 0$ werden für den ersten Factor $x^{m-1} = 0$, d. h. für $x = 0$, welcher Werth für ein M nicht möglich ist; für den zweiten Factor $(a - x)^{n-1}$, also für $(a - x) = 0$, welcher Werth ebenfalls der Aufgabe widerspricht; daher kann nur der dritte Factor $= 0$ gesetzt werden, also

$$ma - (m + n)x = 0$$

woraus
$$x = \frac{ma}{m + n}$$

Da nun das 2te Differenzial substractiv wird, so entsteht für $x = \frac{ma}{m+n}$ ein Maximum, und die beiden Theile von a sind $\frac{ma}{m+n}$ und $\left(a - \frac{ma}{m+n}\right)$, das Product der Potenzen, das Maximum

$$= \left(\frac{ma}{m+n}\right)^m \times \left(\frac{na}{m+n}\right)^n = \frac{m^m \cdot n^n}{(m+n)^{m+n}} \times a^{m+n}$$

Für $m = n$ sind beide Theile der Zahl einander gleich und jede $\frac{1}{2}a$.

Die Zahl 10 in 2 Theile zerlegt, dafs $x^3 \times (10 - x)^2$ ein Maximum wird, gibt 6 und 4 und das Maximum $= 6^3 \times 4^2 = 3456$.

2. Von einem Cylinder ist der Inhalt A^3 gegeben, seine Abmessungen so zu bestimmen, dafs seine gesammte Oberfläche ein Minimum werde.

Bezeichnet man mit x den Durchmesser der Grundebene, mit y die Höhe des Cylinders, so ist
der Inhalt des Cylinders $= \frac{1}{4}\pi x^2 y = A^3$
der Inhalt jeder Endfläche $= \frac{1}{4}\pi x^2$
der Flächeninhalt des Mantels $= \pi x y$.

Die Gröfse, welche ein Minimum werden soll ist also

$$\pi x y + 2 \cdot \tfrac{1}{4}\pi x^2 = M$$

Nun ist aus der ersten Gleichung

$$y = \frac{4A^3}{\pi x^2} \qquad (1)$$

also
$$\frac{4A^3}{x} + \tfrac{1}{2}\pi x^2 = M \qquad (2)$$

Nun ist

$$\frac{\partial M}{\partial x} = -\frac{4A^3}{x^2} + \pi x = \frac{-4A^3 + \pi x^3}{x^2} = 0$$

woraus
$$x = A\sqrt[3]{\frac{4}{\pi}} \qquad (3)$$

Das zweite D. von M wird positiv, mithin entsteht für diesen Werth von x ein Minimum.

Man erhält nun (aus 1 und 3)

$$y = \frac{4A^3}{\pi} \cdot \frac{1}{A^2} \cdot \sqrt[3]{\frac{\pi^2}{16}} = A\sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}$$

Es mufs also für das Minimum der gesammten Oberfläche die Höhe des Cylinders = dem Durchmesser der Grundfläche genommen werden.

Je kleiner man die Höhe nimmt, desto gröfser werden die beiden Endflächen und man kann mit beliebiger Abnahme der Höhe den Inhalt beider Endflächen beliebig grofs erhalten, so dafs mit diesen auch die gesammte Oberfläche beliebig grofs wird und somit ein Maximum unmöglich ist. Gegenseitig wird durch Vergröfserung der Höhe die Grundfläche immer kleiner, der Mantel wird immerfort gröfser und mit diesem kann die gesammte Oberfläche des Cylinders jede beliebige Gröfse erhalten. Beides drücken auch die Formeln für den Mantel und die Grundflächen aus, nämlich $\frac{4A^3}{x}$ und $\frac{1}{2}\pi x^2$. Es ist daher auch die Aufgabe

unmöglich, den Cylinder von dem Inhalt A^3 so zu bestimmen, daſs der Mantel allein, oder eine oder beide Grundflächen allein Maxima oder Minima werden.

Soll eine Grundfläche vom Minimo ausgeschlossen werden, so hat man

$$M = \frac{4A^3}{x} + \tfrac{1}{4}\pi x^2$$

und $$\frac{\partial M}{\partial x} = -\frac{4A^3}{x^2} + \tfrac{1}{2}\pi x = 0$$

woraus $$x = \frac{2A}{\sqrt[3]{\pi}}$$

und $$y = \frac{4A^3}{\pi} \cdot \frac{\sqrt[3]{\pi}}{4A^2} = \frac{A}{\sqrt[3]{\pi}}$$

so daſs der Durchmesser der Grundfläche doppelt so groſs als die Höhe sein muſs.

3. Aus der vorigen Aufgabe erhellt, daſs unter allen Cylindern von gleich groſser Gesammtoberfläche derjenige den gröſsten körperlichen Inhalt hat, bei welchem Durchmesser der Grundebene und Höhe = groſs sind. Dies soll hier direct untersucht werden.

Bei derselben Bezeichnung soll der Inhalt

$$A^3 = \tfrac{1}{4}\pi x^2 y = \text{Max. werden.}$$

Die gegebene Gesammtoberfläche ist

$$F = \pi x y + \tfrac{1}{2}\pi x^2$$

hieraus $$y = \frac{F - \frac{1}{2}\pi x^2}{\pi x} = \frac{F}{\pi x} - \tfrac{1}{2}x$$

Also $$M = \tfrac{1}{4}\pi x^2\left(\frac{F}{\pi x} - \tfrac{1}{2}x\right) = \tfrac{1}{4}Fx - \tfrac{1}{8}\pi x^3$$

daher $$\frac{\partial M}{\partial x} = \tfrac{1}{4}F - \tfrac{3}{8}\pi x^2$$

und $$x = \sqrt{\frac{2F}{3\pi}}$$

Nun ist

$$y = \frac{F - \frac{1}{2}\pi \cdot \frac{2F}{3\pi}}{\pi\sqrt{\frac{2F}{3\pi}}} = \frac{2F}{3\pi} \cdot \sqrt{\frac{3\pi}{2F}} = \sqrt{\frac{2F}{3\pi}}$$

Daſs der vorstehende Ausdruck für x ein Maximum ist, ersieht man natürlich daraus, daſs $\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}$ einen negativen Werth erhält.

4. In einem ebenen Viereck sind die 4 Seiten a, b, c, d gegeben; das Viereck so zu bestimmen, daſs der Inhalt desselben ein Maximum werde.

Wenn man in dem nebenstehenden Viereck $ABCD$ die Seiten BC und CD sich unverrückbar denkt, so kann man die Seiten $BA = c$ und $DA = d$ auch in die Lage BED bringen, endlich kann man durch Verminderung des $\angle BCD$ das Viereck $ABCD$ auf jeden noch so

Fig. 559.



kleinen Inhalt bringen und man sieht, daſs die Aufgabe kein Minimum zuläſst.

Als Maximum ferner kann das Viereck keinen ausspringenden Winkel E haben.

Zieht man die Diagonale BD, setzt die $\angle A$ und $E = \varphi$ und ψ, so ist

$$\triangle ABD = \tfrac{1}{2}c \cdot d \cdot \sin\varphi$$
$$\triangle CBD = \tfrac{1}{2}a \cdot b \cdot \sin\psi$$

mithin der Inhalt des Vierecks

$$M = \tfrac{1}{2}(ab\sin\psi + cd\sin\varphi) \qquad (1)$$

Das Differenzial vom M soll $= 0$ gesetzt werden; es sind 2 Veränderliche ψ und φ, nimmt man φ als urveränderlich und differenzirt, so erhält man

$$\frac{\partial M}{\partial\varphi} = ab\cos\psi\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} + cd\cos\varphi = 0 \qquad (2)$$

Setzt man die Diagonale $BD = x$, so hat man für die beiden Veränderlichen die Gleichung

$$x^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\psi = c^2 + d^2 - 2cd\cos\varphi$$

woraus

$$\cos\psi = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2ab} + \frac{cd}{ab}\cos\varphi \qquad (3)$$

und $$\frac{\partial\cos\psi}{\partial\varphi} = \frac{cd}{ab}\,\partial\cos\varphi$$

oder $$-\sin\psi\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} = -\frac{cd}{ab}\sin\varphi$$

woraus $$\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} = \frac{cd}{ab} \cdot \frac{\sin\varphi}{\sin\psi}$$

Diesen Werth in das Differenzial (2) von M gesetzt, gibt

$$\frac{\partial M}{\partial\varphi} = ab\cos\psi \cdot \frac{cd}{ab} \cdot \frac{\sin\varphi}{\sin\psi} + cd\cos\varphi = 0$$

oder

$$\frac{\partial M}{\partial\varphi} = cd\,\frac{\sin\varphi \cdot \cos\psi + \cos\varphi \cdot \sin\psi}{\sin\psi} = 0$$

oder $$\sin(\varphi + \psi) = 0 \qquad (3)$$

Es ist mithin

entweder $\varphi + \psi = 0$

oder $\varphi + \psi = 180° = \pi$

Der erste Werth ist nicht möglich, folglich gilt nur der zweite Werth $\varphi + \psi = \pi$.

Das verlangte Viereck ist also dasjenige, dessen gegenüberliegende Winkel

= zweien Rechten sind, d. h. das in einen Kreis beschriebene Viereck, und das Maximum selbst, wenn man $a + b + c + d = s$ setzt ist

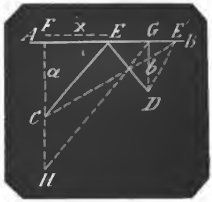
$$M = \tfrac{1}{4}\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

Dafs M ein Maximum und kein Minimum ist geht auch aus den Formeln hervor. Denn Gleichung 2 zeigt, dafs $\cos\psi$ mit $\cos\varphi$, also auch dafs ψ mit φ zunimmt und abnimmt. Setzt man also $\varphi = \varphi - \alpha$, so wird auch $\psi = \psi - \beta$, $\varphi + \psi - (\alpha + \beta)$ sind kleiner als 180° und $\sin[\varphi + \psi - (\alpha + \beta)]$ wird positiv. Für $\varphi + \alpha$ wird ψ zu $\psi + \beta$ und $\varphi + \psi + (\alpha + \beta) > 180°$ folglich $\sin(\varphi + \psi + \alpha + \beta)$ wird negativ (vergl. No. 8).

5. Es ist eine grade Linie AB und aufser ihr aber in derselben Ebene sind 2 Punkte C und D gegeben. Man soll den Punkt E in der geraden Linie finden, so dafs die von C und D nach E gezogenen graden Linien zusammengenommen die kleinste Länge haben.

Fällt man die Lothe CF und DG auf AB, so mufs der Punkt E zwischen F und G liegen. Denn gesetzt E' wäre mit

Fig. 560.



E gleichweit von G entfernt,

so wäre $DE' = DE$,

aber $CE' > CE$

also kann nur $DE + CE$ ein Minimum werden.

Da E' unendlich weit von G genommen werden kann, so läfst die Aufgabe kein Maximum zu.

Bezeichnet man FG mit c, FE mit x, CF mit a, DG mit b, so hat man

$$M = CE + DE = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (c-x)^2}$$

Nun ist $$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{a^2 + x^2}} + \frac{-2(c-x)}{2\sqrt{b^2 + (c-x)^2}} = \frac{x\sqrt{b^2 + (c-x)^2} - (c-x)\sqrt{a^2 + x^2}}{\sqrt{a^2 + x^2} \times \sqrt{b^2 + (c-x)^2}} = 0$$

oder $$x\sqrt{b^2 + (c-x)^2} = (c-x)\sqrt{a^2 + x^2}$$

woraus $$x^2 - \frac{2a^2cx}{a^2 - b^2} + \frac{a^2c^2}{a^2 - b^2} = 0$$

und $$x = \pm\frac{ac}{a \pm b}$$

Also $$x = \frac{ac}{a+b} \text{ oder } \frac{ac}{b-a}$$

Für die erste Formel verlängere FC bis H, so dafs $FH = a + b$, ziehe HG und aus C die mit HG parallele CE so ist E der gesuchte Punkt. Denn es ist

$$FH : FC = FG : FE$$

oder $$a + b : a = c : x$$

also $$x = \frac{ac}{a+b}$$

Die zweite Formel gilt für den Fall, dafs beide Punkte C und D auf entgegengesetzten Seiten von AB liegen. Es versteht sich, dafs die grade Linie zwischen C und D die kleinste Summe beider Linien gibt, und dafs also deren Durchschnittspunkt mit AB der verlangte Punkt ist, und dies drückt auch die Formel aus. Denn es ist Fig. 561:

Fig. 561.



$$CF : DG = EF : EG$$

oder $$a : b = x : c - x$$

woraus $$x = \frac{ac}{b-a}$$

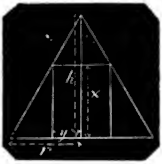
Aus der Function ersieht man, dafs das 2te Differenzial positiv werden mufs, denn das D. des ersten Gliedes $\sqrt{a^2 + x^2}$ bleibt in allen Ordnungen positiv, die Differenziale des zweiten Gliedes $\sqrt{b^2 + (c-x)^2}$ werden wegen des $(-x)$ und der daraus erfolgenden $(-\partial x)$ abwechselnd negativ und positiv und somit wird das D. von $-\frac{2(c-x)}{2\sqrt{b^2 + (c-x)^2}}$ positiv. Der Werth $x = \pm\frac{ac}{a \pm b}$ ist also ein Minimum.

6. In einen geraden Kegel einen Cylinder zu zeichnen, der den gröfsten Cubikinhalt hat.

Wenn man die Höhe des Cylinders sehr klein nimmt, so nähert sich die

Grundfläche desselben der des Kegels und kann mit Verminderung der Höhe derselben immer näher gebracht werden, aber der Inhalt des Cylinders wird immer kleiner und sein Grenzwerth ist $= 0$.

Fig. 562.



Eben so wird der Inhalt des Cylinders immerfort kleiner und verschwindet endlich in eine gerade Linie wenn man die obere Endfläche der Spitze des Kegels immer näher bringt, deshalb eignet sich die Aufgabe nicht zur Auffindung eines Minimums.

Setzt man den Halbmesser des Kegels $= r$, desen Höhe $= h$, den Halbmesser des Cylinders $= y$, dessen Höhe $= x$, so ist das gesuchte Maximum

$$M = \pi y^2 x$$

Nun ist $h : r = h - x : y$

hieraus $y = \frac{r}{h}(h - x)$

also $M = \pi \frac{r^2}{h^2}(h - x)^2 x$

oder die constanten Factoren fortgelassen

$$M = (h - x)^2 x = h^2 x - 2hx^2 + x^3$$

also $\frac{\partial M}{\partial x} = h^2 - 4hx + 3x^2 = 0$

oder $h(h - x) - 3x(h - x) = 0$

oder $(h - x)(h - 3x) = 0$

Nun ist für $h - x = 0$; $x = h$, der Cylinder wird $= 0$ und folglich mufs $h - 3x = 0$ sein.

Man hat demnach für das Maximum des Kubikinhalts

$$x = \tfrac{1}{3}h$$

und der Inhalt des Cylinders selbst

$$= \frac{4}{27}\pi h r^2$$

der Kegel hat den Inhalt

$$\tfrac{1}{3}\pi h r^2 = \frac{9}{27}\pi h r^2$$

folglich verhalten sich beide Körper, der Cylinder und der Kegel wie $4 : 9$

7. In einem graden Kegel einen Cylinder zu zeichnen, der den gröfsten Mantel hat.

Mit der beliebigen Abnahme der Höhe des Cylinders nähert sich der Mantel immer mehr dem Grenzwerthe $= 0$, dasselbe geschieht mit der Zunahme der Höhe des Cylinders bis zu deren Grenze h, wo der Mantel ebenfalls $= 0$ wird. Es mufs also einen Cylinder geben, dessen Mantel den gröfsten Werth erhält. Bei der vorigen Bezeichnung hat man das Maximum

$$M = 2\pi y \cdot x = 2\pi \cdot \frac{r}{h}(h - x)x$$

und die constanten Factoren fortgelassen

$$M = (h - x)x = hx - x^2$$

also $\frac{\partial M}{\partial x} = h - 2x = 0$

woraus $x = \tfrac{1}{2}h$

der Mantel ist also

$$2\pi \cdot \frac{r}{h} \cdot \tfrac{1}{2}h \cdot \tfrac{1}{2}h = \tfrac{1}{2}\pi r h$$

8. In einen graden Kegel einen Cylinder zu zeichnen, der den gröfsten Gesammtumfang hat.

Mit der Zunahme der Höhe des Cylinders bis zur Höhe h des Kegels nimmt die Gesammt-Oberfläche des Cylinders immerfort ab, und wird mit der Höhe $h = 0$. Mit der Abnahme der Höhe nähert sich die Gesammtoberfläche immerfort der doppelten Kegelgrundfläche. Ist nun diese doppelte Grundfläche ein absolutes Maximum für die Gesammtoberflächen aller in den Kegel eingezeichneten Cylinder, so gibt es für dieselben kein Maximum. Mit Beibehaltung der vorigen Bezeichnung ist das verlangte Maximum

$$M = 2\pi y \cdot x + 2\pi y^2 = 2\pi \frac{r}{h}(h - x)x + 2\pi \frac{r^2}{h^2}(h - x)^2 = 2\pi \frac{r}{h}\left[(h - x)x + \frac{r}{h}(h - x)^2\right]$$

$$= 2\pi \frac{r}{h^2}[(r - h)x^2 - h(2r - h)x + rh^2] \qquad (1)$$

folglich $\frac{\partial M}{\partial x} = 2\pi \frac{r}{h^2}[2(r - h)x - h(2r - h)] = 0$

woraus $x = \frac{h(2r - h)}{2(r - h)}$

Nun ist

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = 2\pi \frac{r}{h^2} \times 2(r - h) = 4\pi \frac{r}{h^2}(r - h)$$

Ist $r > h$ so wird dies zweite D. posi-

tiv und M ein Minimum. Da aber nach dem Obigen ein Minimum nicht möglich ist, so mufs $h > r$ sein, und dies ist die Bedingung, dafs ein Maximum entstehe, weil dann diese gesammte Oberfläche des Cylinders gröfser ist als die doppelte Kegelgrundebene. Dieses Resultat aber geht auch ohne Analysis aus der Formel I für M hervor. Denn da die doppelte Kegelgrundfläche = ist $2\pi r^2$ so hat man zur Bedingung

$$2\pi r^2 < 2\pi \frac{r}{h^2}\left[(r-h)x^2 - h(2r-h)x + rh^2\right]$$

woraus die Klammern aufgelöst und die Nenner fortgeschafft und reducirt, die Bedingung hervorgeht

$$(r-h)x - h(2r-h) > 0$$

oder $$(r-h)x > h(2r-h)$$

Da nun x immer kleiner ist als h, so mufs $(r-h) > (2r-h)$ sein, d. h. es müssen $(r-h)$ und $(2r-h)$ subtractiv sein.

Es ist demnach

$$x = \tfrac{1}{2}h \cdot \frac{h-2r}{h-r}$$

hieraus $$y = \tfrac{1}{2}h \cdot \frac{r}{h-r}$$

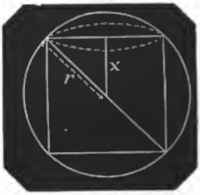
und der hierzu gehörige Cylinder der verlangte.

8. In einer Kugel den gröfsten Cylinder zu zeichnen.

Bezeichnet man nach Figur 563 mit r den Halbmesser der Kugel, mit x die halbe Höhe des Cylinders, d. i. die Entfernung des Mittelpunkts der Kugel von jedem Grundkreise des Cylinders, so ist der Inhalt des Cylinders

$$M = \pi \cdot (r^2 - x^2) \cdot 2x = 2\pi(r^2x - x^3)$$

Fig. 563.



$$\frac{\partial M}{\partial x} = 2\pi r^2 - 6\pi x^2 = 0$$

woraus $$x = \frac{r}{\sqrt{3}}$$

daher die Höhe des Cylinders $= \frac{2}{3}r\sqrt{3}$ und der Durchmesser seiner Grundebene

$$= 2r\sqrt{\tfrac{2}{3}} = \tfrac{2}{3}r\sqrt{6}$$

die Höhe verhält sich zum Durchmesser wie $$\sqrt{3} : \sqrt{6} = 1 : \sqrt{2}$$

d. h. wie die Seite eines Quadrats zu dessen Diagonale, und der Inhalt des Cylinders ist $= \frac{4}{9}\pi r^3\sqrt{3}$

9. In einer Kugel den Cylinder zu zeichnen, der die gröfste Gesammtoberfläche hat.

Bei derselben Bezeichnung hat man das verlangte Maximum

$$M = 2\pi(r^2 - x^2) + 4\pi x\sqrt{r^2 - x^2}$$

wo das erste Glied die Summe beider Grundebenen und das zweite Glied den Mantel vorstellt. Dies M hat mit beliebiger Abnahme von x den Grenzwerth $2\pi r^2$ nämlich die doppelte Fläche des gröfsten Kreises der Kugel.

Nun ist

$$\frac{\partial M}{\partial x} = 4\pi\left[-x - \frac{x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} + \sqrt{r^2 - x^2}\right] = 4\pi\left[-x + \frac{r^2 - 2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right] = 0$$

Da x nur mit dem subtractiven Vorzeichen in der Formel sich befindet, so ersieht man sofort, dafs mit der Vergröfserung von x der Ausdruck kleiner als Null also subtractiv und mit der Verminderung von x der Ausdruck gröfser als Null also additiv wird und dafs somit das Differenzial ein Maximum enthält.

Nun hat man entwickelt

$$-x\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - 2x^2 = 0$$

woraus $$x^2 = \tfrac{1}{2}r^2\left(1 \pm \sqrt{\tfrac{1}{5}}\right)$$

und $$x = \pm r\sqrt{\frac{1 \pm \sqrt{\frac{1}{5}}}{2}}$$

das subtractive Vorzeichen ist unmöglich, mithin ist

$$x = r\sqrt{\frac{1 \pm \sqrt{\frac{1}{5}}}{2}}$$

Da nun in dem obigen Differenzial

$$-x + \frac{r^2 - 2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} = 0$$

r immer $> x$, also $\sqrt{r^2 - x^2}$ positiv ist, das zweite Glied aber wegen des subtractiven ersten Gliedes additiv sein mufs, so ist auch der Zähler $(r^2 - 2x^2)$ additiv, folglich $r^2 > 2x^2$.

Aus diesem Grunde kann in dem Ausdruck für x nur $-\sqrt{\frac{1}{5}}$ gelten, weil für

$$x = r\sqrt{\frac{1 + \sqrt{\frac{1}{5}}}{2}}$$

$$x^2 = r^2\left[\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{5}}\right]$$

also $2x^2 > r^2$ werden würde, und man hat den Werth für das Maximum

$$x = r \cdot \sqrt{\frac{1 - \sqrt{\frac{1}{5}}}{2}} = r\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}}$$

10. Den Werth von x zu finden für welches x^x ein Minimum wird.

Es ist nach Formel 146

$$\frac{\partial x^x}{\partial x} = x^x\,[1 + logn\, x] = 0$$

Und es kann nur für den Factor

$$1 + logn\, x = 0$$

x^x zum Minimum werden, wenn x nicht $= 0$ sein soll.

Es ist mithin $\quad ln\, x = -1$

und $\quad x = e^{-1} = \frac{1}{e}$

Wenn man in dem ersten Differenzial x vermehrt, so wird x^x gröfser und lnx wird gröfser, also > 0; wenn man aber darin x vermindert, so wird x^x kleiner und $ln\, x$ wird kleiner, also < 0 und folglich gibt $x = \frac{1}{e}$ ein Minimum von

$$x^x = \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}} = \frac{1}{\sqrt[e]{e}} \cdot = \frac{1}{\sqrt[2{,}71828\ldots]{2{,}71828\ldots}} = \frac{1}{1{,}41466}$$

Man überzeugt sich von der Richtigkeit des Resultats, nämlich dafs $\frac{1}{\sqrt[e]{e}}$ ein Minimum aller x^x ist (ein ächter Bruch kann x nur sein) wenn man nach einander wie z. B. folgende Logarithmen aufsucht:

$log \sqrt[2{,}718\ldots]{2{,}718\ldots} = 0{,}159768$

$log \sqrt[1]{1} = 0{,}0000000$

$log \sqrt[2]{2} = 0{,}1505150$

$log \sqrt[3]{3} = 0{,}1597071$

$log \sqrt[4]{4} = 0{,}1505150$

$log \sqrt[10]{10} = 0{,}1000000$

$log \sqrt[100]{100} = 0{,}0200000$

Für einen Bruch, dessen Zähler $= 1$ ist, gibt also unter allen Wurzeln von der Form $\sqrt[x]{x}$ die Zahl $\sqrt[e]{e}$ den gröfsten Nenner, den Bruch selbst also als die kleinste Zahl.

10. **Eine implicite Function ist gegeben, die Maxima und Minima derselben zu bestimmen.**

Ist $\quad u = f(y, x) = 0 \qquad (1)$

eine Gleichung zwischen den Veränderlichen x und y (s. Differenzialgleichung I, Formel 3), so hat man (nach demselben Art. No. 3)

$$\frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad (2)$$

oder $$\frac{\partial f(y, x)}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial f(y, x)}{\partial x} = 0 \qquad (3)$$

Soll nun y ein Maximum oder ein Minimum werden, so mufs x einen solchen Werth X erhalten, für welchen $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ wird. Mithin reducirt sich Gleichung 2 auf die Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Es können also nur diejenigen Werthe von x Maxima oder Minima der Function erzeugen, für welche $\frac{\partial y}{\partial x}$ und $\frac{\partial u}{\partial x}$ einzeln $= 0$ sind. Oder was dasselbe sagt, für welche das D. der Gleichung, x als alleinige Variable angesehen, $= 0$ wird. Die beiden Bedingungsgleichungen für ein M sind daher

$$u = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

und aus diesen können die beiden zusammengehörigen Werthe von x und y entwickelt werden.

Z. B. $\quad u = y^3 - axy + x^3 = 0 \qquad (4)$

so ist noch

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -ay + 3x^2 = 0 \qquad (5)$$

Diese zweite Gleichung ergibt

$$y = \frac{3x^2}{a} \qquad (6)$$

und dieser Werth in die Gleichung für u substituirt

$$\left(\frac{3x^2}{a}\right)^3 - ax\frac{3x^2}{a} + x^3 = 0$$

ergibt $$x^3\left(\frac{27}{a^3}x^3 - 2\right) = 0$$

oder $$x^3\left(x^3 - \frac{2a^3}{27}\right) = 0$$

Es ist mithin

entweder $x = 0$ oder $x = \frac{1}{3}a\sqrt[3]{2}$

für diese Werthe von x erhält man aus Gleichung 6

entweder $y = 0$ oder $y = \frac{1}{3}a\sqrt[3]{4}$

11. Um nun zu erfahren, ob für die

erhaltenen Werthe von x und y die Function zu einem Maximum oder zu einem Minimum oder zu keinem von beiden geworden ist, bildet man das zweite D. Dies hat man aus Gleichung 2:

$$\frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial \frac{\partial u}{\partial y}}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

also

$$\frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial y}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y \cdot \partial x}\right] + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

Setzt man nun nach Vorschrift den Werth $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ in diese Gleichung so reducirt sich dieselbe auf

$$\frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

woraus $$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)}{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)}$$

Ist nun dieses zweite D. subtractiv, so entsteht ein Maximum; ist es additiv, ein Minimum. Ist das zweite D. = 0, so mufs das 3te und 4te D. gebildet und verfahren werden wie oben vorgeschrieben worden.

12. Die Regel für die Auffindung der Maxima und Minima einer implicite gegebenen Function ist daher folgende:

Man nehme das Differenzial der Gleichungsformel in Beziehung auf die Urveränderliche (x), als wenn diese allein variabel und die Function (y) also constant wäre; setze dies $D = 0$ und entwickele x und y aus beiden Gleichungen, so dafs beide durch constant gegebene Gröfsen ausgedrückt werden. Alsdann nehme man das zweite D. der Gleichungsformel, wiederum x allein veränderlich angesehen, dividire dies zweite D. durch das erste D. der Gleichungsformel, bei welchem y als die alleinige Veränderliche betrachtet wird, gebe diesem Quotient das entgegengesetzte Vorzeichen und setze in den so erhaltenen Ausdruck die zuerst gefundenen Werthe von x und y. Ein Minimum für y findet statt, wenn der zuletzt gefundene Ausdruck additiv wird, ein Maximum wenn er subtractiv wird.

1. Beispiel. Die obige Gleichung

$$u = y^3 - axy + x^3 = 0$$

Es ist ermittelt für $u = 0$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -ay + 3x^2 = 0$$

$$y = \frac{3x^2}{a}$$

x entweder $= 0$ oder $= \frac{1}{3}a\sqrt[3]{2}$

also y entweder $= 0$ oder $= \frac{1}{3}a\sqrt[3]{4}$

Man erhält $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 3y^2 - ax$$

also für die beiden ersten zusammengehörigen Werthe $x = 0$ und $y = 0$ erhält man $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} : \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{6x}{3y^2 - ax} = \frac{0}{0}$

Es ist also der Prüfungscoefficient nicht $= 0$ sondern eine bestimmte Gröfse, die hier in der Form $\frac{0}{0}$ erscheint und man findet den Werth nach Capitel II, pag. 294, wenn das Differenzial des Zählers durch das Differenzial des Nenners dividirt, und zwar den Werth des Quotient ausschliefslich für die Werthe $x = 0$ und $y = 0$.

Setzt man um nur eine Veränderliche zu erhalten für y den durch x bestimmten Werth $= \frac{3x^2}{a}$, so erhält man den Quotient

$$= \frac{6x}{3\left(\frac{3x^2}{a}\right)^2 - ax} = \frac{2a^2}{9x^3 - a^3}$$

und $x = 0$ gesetzt

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} : \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2}{a}$$

folglich den entgegengesetzten Quotient $+\frac{2}{a}$, also eine additive Gröfse, und folglich ist für $x = 0$, die Function $y = 0$ ein Minimum.

Setzt man in den Quotient $\frac{6x}{3y^2 - ax}$ die beiden anderen zusammengehörigen Werthe $x = \frac{1}{3}a\sqrt[3]{2}$ und $y = \frac{1}{3}a\sqrt[3]{4}$ so erhält man ihn

$$= \frac{2a\sqrt[3]{2}}{\frac{1}{3}a^2\sqrt[3]{16} - \frac{1}{3}a^2\sqrt[3]{2}} = +\frac{6}{a}$$

der entgegengesetzte Quotient $= -\frac{6}{a}$, eine subtractive Gröfse und $y = \frac{1}{3}a\sqrt[3]{4}$ ist folglich ein Maximum.

2. Beispiel.

$$u = y^4 - 4a^2xy + x^4 = 0$$

Es ist $\frac{\partial u}{\partial x} = -4a^2y + 4x^3 = 0$

woraus $y = \frac{x^3}{a^2}$

Diesen Werth in die Gleichung für u gesetzt, ergibt

$$\frac{x^{12}}{a^8} - 4x^4 + x^4 = 0$$

also reducirt $x^4(x^8 - 3a^8) = 0$

woraus

x entweder $= 0$ oder $= \pm a\sqrt[8]{3}$

Die hierzu gehörigen Werthe von y sind

y entweder $= 0$ oder $= \pm a\sqrt[8]{27}$

Um die Prüfungsformel zu erhalten hat man

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = +12x^2$$

und $\frac{\partial u}{\partial y} = 4y^3 - 4a^2x$

hieraus der Prüfungsquotient

$$\frac{12x^2}{4y^3 - 4a^2x} = \frac{3x^2}{y^3 - a^2x}$$

für $x = 0$ und $y = 0$ wird der Quotient $= \frac{0}{0}$

Also wie bei dem ersten Beispiel den Quotient der Differenziale genommen, zuvor um nur **eine** Veränderliche zu haben, den Werth von $y = \frac{x^3}{a^2}$ eingesetzt, gibt den Prüfungsquotient

$$= \frac{3x^2}{\left(\frac{x^3}{a^2}\right)^3 - a^2x} = \frac{3a^6x}{x^8 - a^8}$$

also $\frac{\partial(3a^6x)}{\partial(x^8 - a^8)} = \frac{3a^6}{8x^7}$

und für $x = 0$ wird derselbe ∞. Es existirt also für $x = 0$ und $y = 0$ weder ein Maximum noch ein Minimum für y.

Setzt man in den Prüfungsquotient die zweiten zusammengehörigen Werthe von $x = \pm a\sqrt[8]{3}$ und von $y = \pm a\sqrt[8]{27}$ und zwar zuerst die Werthe mit den oberen Vorzeichen so erhält man

$$\frac{3a^2\sqrt[4]{3}}{+a^3\sqrt[8]{27^3} - a^3\sqrt[8]{3}} = \frac{3\sqrt[8]{3^2}}{3a\sqrt[8]{3} - a\sqrt[8]{3}} = \frac{+3\sqrt[8]{3}}{2a}$$

Der entgegengesetzte Prüfungsquotient ist also eine subtractive bestimmte Gröfse und y wird für $x = +a\sqrt[8]{3}$ ein Maximum.

Für die Werthe mit den unteren Vorzeichen erhält man

$$\frac{+3\sqrt[8]{3^2}}{-3a\sqrt[8]{3} + a\sqrt[8]{3}} = -\frac{3\sqrt[8]{3}}{2a}$$

Der entgegengesetzte Quotient ist eine additive bestimmte Gröfse und y wird für $x = -a\sqrt[8]{3}$ ein Minimum.

13. Eine Function von 2 Urveränderlichen ist gegeben, man soll die Maxima und Minima derselben bestimmen.

Es sei $y = f(x, z)$

so ist nach Kapitel I, No. 5 (pag. 291)

$$\begin{aligned}
y + \Delta y = y &+ \frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\Delta x}{1} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\cdot\frac{\Delta x^2}{2} + \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\cdot\frac{\Delta x^3}{(3)} + \ldots \\
&+ \frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\Delta z}{1} + \frac{\partial^2 y}{\partial x\cdot\partial z^2}\cdot\frac{\Delta x\cdot\Delta z}{1\cdot 1} + \frac{\partial^3 y}{\partial x\cdot\partial z^2}\cdot\frac{\Delta x\cdot\Delta z^2}{1\cdot(2)} + \ldots \\
&+ \frac{\partial^2 y}{\partial z^2}\cdot\frac{\Delta z^2}{(2)} + \frac{\partial^3 y}{\partial x^2\cdot\partial z}\cdot\frac{\Delta x^2\cdot\Delta z}{2\cdot 1} + \ldots \\
&+ \frac{\partial^3 y}{\partial z^3}\cdot\frac{\Delta z^3}{(3)} + \ldots \\
&+ \ldots
\end{aligned}$$

bezeichnet man die Summe aller Glieder von höheren Abmessungen der Zuwachse mit R so ist

$$y + \Delta y = y + \frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\Delta x}{1} + \frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\Delta z}{1} + R$$

und man kann mit beliebiger Abnahme von Δx und von Δz den Rest R kleiner machen als $\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\Delta x$ und kleiner als $\frac{\partial y}{\partial z}\cdot\Delta z$.

Denn setzt man $\Delta x = 0$, so kann R kleiner werden als $\frac{\partial y}{\partial z}\cdot\Delta z$ und setzt man $\Delta z = 0$ so kann R kleiner werden als $\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\Delta x$

Haben nun die Differenziale $\frac{\partial y}{\partial x}$ und $\frac{\partial y}{\partial z}$ reelle Werthe, so wächst y, wenn Δx

und $\triangle z$ additiv sind und y nimmt ab, wenn man $\triangle x$ und $\triangle z$ subtractiv nimmt. Es entsteht also in diesem Fall für y weder ein Maximum noch ein Minimum, weil die benachbarten Werthe auf der einen Seite gröſser, auf der anderen Seite kleiner werden. Folglich dürfen $\frac{\partial y}{\partial x}$ und $\frac{\partial y}{\partial z}$ keine reellen Werthe haben, sie müssen wie bei den Functionen mit nur einer Urveränderlichen entweder 0 oder ∞ sein. Die ersten Bedingungen für das Vorhandensein eines Maximums oder eines Minimums ist daher

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 0 \text{ oder } = \infty$$

und

$$\frac{\partial y}{\partial z} = 0 \text{ oder } = \infty$$

Für die Beurtheilung, ob ein Maximum oder ein Minimum oder keines von beiden entsteht, ist wie bisher geschehen auf das D. der nächstfolgenden Dimension zu achten.

Dies ist aus der obigen Zusammenstellung der Reihen für $y + \triangle y$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \frac{\triangle x^2}{2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x \cdot \partial z} \cdot \frac{\triangle x}{1} \cdot \frac{\triangle z}{1} + \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \cdot \frac{\triangle z^2}{2}$$

und es kann der noch fehlende Rest R' zur Vervollständigung von $y + \triangle y$ kleiner werden als jedes einzelne der 3 zweiten Differenziale.

Wird daher die Summe der 3 Glieder, wenn man $\triangle x$ und $\triangle z$ beliebig klein nimmt für $+\triangle x$ und $+\triangle z$ gröſser oder kleiner und wenn man $-\triangle x$ und $-\triangle z$ setzt, kleiner oder gröſser, so ist die Function weder ein Maximum noch ein Minimum, weil die benachbarten Werthe von y einerseits gröſser und andrerseits kleiner sind. Werden dagegen die 3 Glieder in Summa für additive und für subtractive $\triangle x$ und $\triangle y$ beiderseits gröſser oder beiderseits kleiner, so entsteht im ersten Fall für y ein Minimum, im zweiten Fall ein Maximum.

Um das Verhältniſs der hierzu gehörigen Gröſsen für diese Bedingung ermitteln zu können, setze der leichteren Uebersicht wegen

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \alpha, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x \cdot \partial z} = \beta \text{ und } \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = \gamma$$

so hat man die obigen 3 Glieder

$$\alpha \cdot \frac{\triangle x^2}{2} + \beta \cdot \triangle x \cdot \triangle z + \gamma \frac{\triangle z^2}{2}$$
$$= \tfrac{1}{2}(\alpha \triangle x^2 + 2\beta \cdot \triangle x \cdot \triangle z + \gamma \triangle z^2)$$

Von den 3 Gliedern ist nur das mittelste, welches bei Aenderung der Vorzeichen von $\triangle x$ und von $\triangle y$ das Vorzeichen wechselt; das erste und das letzte Glied bleiben, weil sie Quadrate sind immer positiv. Es kommt also darauf an, daſs das mittlere Glied auf das Vorzeichen der ganzen dreigliedrigen Gröſse keine Aenderung ausüben kann, und dies geschieht dann nicht wenn

$$\alpha \triangle x^2 + \gamma \triangle z^2 > 2\beta \triangle x \cdot \triangle z$$

oder wenn

$$\alpha \cdot \triangle x^2 + \gamma \triangle z^2 - 2\beta \triangle x \cdot \triangle z > 0$$

oder wenn

$$\triangle x^2 + \frac{\gamma}{\alpha} \triangle z^2 - \frac{2\beta}{\alpha} \triangle x \cdot \triangle z > 0$$

Nun ist $-\frac{2\beta}{\alpha} \triangle x \cdot \triangle z$ das doppelte Product des Quadrats von $\triangle x - \frac{\beta}{\alpha} \triangle z$. Man hat demnach die Bedingung

$$\left(\triangle x - \frac{\beta}{\alpha} \triangle z\right)^2 + \frac{\gamma}{\alpha} \triangle z^2 - \frac{\beta^2}{\alpha^2} \triangle z^2 > 0$$

oder

$$\left(\triangle x - \frac{\beta}{\alpha} \triangle z\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{\alpha} - \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right) \triangle z^2 > 0$$

Nun ist, welche Gröſsen auch $\triangle x$, $\triangle z$, β und α sein mögen $\left(\triangle x - \frac{\beta}{\alpha} \triangle z\right)^2$ und $\triangle z^2$ immer positiv. Folglich bleibt die Bedingung $\frac{\gamma}{\alpha} - \frac{\beta^2}{\alpha^2} > 0$

oder $\gamma\alpha - \beta^2 > 0$

oder

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \times \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} - \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x \cdot \partial z}\right)^2 > 0 \quad \text{(I)}$$

als die Bedingung für die Möglichkeit eines Maximums oder eines Minimums.

Die Bedingung für das Maximum ist nun:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} < 0 \text{ und } \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} < 0 \quad \text{(II)}$$

die Bedingung für das Minimum:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} > 0 \text{ und } \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} > 0 \quad \text{(III)}$$

Beispiel. Die Function

$$u = xy^2 + a(x + y)^2 - b(x + y) \quad (1)$$

soll auf Maximum und Minimum untersucht werden.

Man hat

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 + 2a(x + y) - b = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2xy + 2a(x + y) - b = 0 \quad (3)$$

die untere von der oberen abgezogen gibt

$$y^2 - 2xy = 0$$

hieraus hat man für ein mögliches M

entweder $y = 0$

oder $y = 2x$

Für $y = 0$ erhält man aus 2 oder 3

$$2ax - b = 0$$

also für $y = 0$ ist $x = \frac{b}{2a}$ (4)

für $y = 2x$ hat man aus 2 oder 3

$$4x^2 + 6ax - b = 0$$

woraus

$$(\text{für } y = 2x)\ x = \frac{-3a \pm \sqrt{9a^2 + 4b}}{4} \quad (5)$$

Man hat also in den Gleichungen 4 und 5 für x drei verschiedene Werthe gefunden, für welche mit den beiden zugehörigen Y ein M aus der Function hervorgehen kann.

Nimmt man nun die zweiten Differenziale aus 2 und 3

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = +2a \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} = +2a + 2x \quad (7)$$

so geht aus diesen hervor, dafs wegen der Uebereinstimmung beider zweiten D. in den Vorzeichen ein M entsteht, und zwar, weil die Vorzeichen additiv sind, ein Minimum, **wenn die Prüfungsformel I. ein M zuläfst.**

Um diese zu bilden hat man aus 2 oder 3

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \cdot \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \cdot \partial x} = 2y + 2a \quad (8)$$

und es soll nun als Bedingung für ein M sein

$$2a \times (2a + 2x) - (2y + 2a)^2 > 0$$

oder reducirt

$$a(x + a) > (y + a)^2 \quad (9)$$

Für den ersten Werth $y = 0$ wird (nach Gl. 4) $x = \frac{b}{2a}$

man hat demnach aus 9 die Vergleichung

$$a \cdot \frac{b}{2a} + a^2 > a^2$$

oder $\frac{b}{2} > 0$

welche ein M zuläfst wenn b nicht subtractiv ist.

Für den zweiten Werth $y = 2x$ ist (nach Gl. 5)

$$x = \frac{-3a \pm \sqrt{9a^2 + 4b}}{4}$$

Läfst man diesen Ausdruck für x vorläufig aufser Betracht, so hat man, in Formel 9 den Werth $y = 2x$ gesetzt

$$ax + a^2 > (2x + a)^2$$

woraus reducirt

$$3a > 4x$$

mithin ist die Bedingung für ein M für den zweiten Werth $y = 2x$

$$x < \tfrac{3}{4}a$$

hieraus geht hervor, dafs in dem Ausdruck (5) für x das Minuszeichen vor der $\sqrt{\ }$ gilt; dafs aber auch das + Zeichen gestattet ist, wenn

$$\sqrt{9a^2 + 4b} < 2 \cdot 3a$$

oder $9a^2 + 4b < 36a^2$

also wenn $b < \frac{27}{4} a^2$ (10)

1. Zu dem M in den betreffenden drei Fällen übergehend, setze in die Function u (1) für y den ersten möglichen Werth $= 0$ so entsteht

$$u = ax^2 - bx \quad (11)$$

Man sieht, dafs durch Vergröfserung von x, wenn x positiv genommen wird, u ebenfalls immerfort wächst und dafs also für $x = \infty$ ein absolutes Maximum entsteht, welches niemals zu einer Aufgabe gehören kann.

Für x den Werth aus 4 für $y = 0$ gesetzt, nämlich $x = \frac{b}{2a}$ entsteht:

$$u = a \cdot \frac{b^2}{4a^2} - b \cdot \frac{b}{2a} = -\frac{b^2}{4a} \quad (12)$$

Setzt man zur Probe, ob wirklich dieser Werth von x für u ein Minimum gibt; $a = 1$; $b = 3$

so ist $u = x^2 - 3x$

x für das Minimum $= -\frac{3}{2} = -1{,}5$

u für das Minimum $= -2{,}25$

für $x = -1{,}6$ wird $u = -2{,}24$

für $x = -1{,}4$ wird $u = -2{,}24$

Beide benachbarten Werthe von u sind also gröfser und $u = -2{,}25$ ist ein Minimum.

2. Setze nun den zweiten möglichen Werth von $y = 2x$ in die Function u (1) so erhält man

$$u = 4x^3 + 9ax^2 - 3 \cdot bx \quad (13)$$

und es wird u nach (5) ein Minimum für

$$x = \frac{-3a \pm \sqrt{9a^2 + 4b}}{4} \quad (14)$$

Nun ist oben gezeigt, dafs beide Vorzeichen der $\sqrt{\ }$ gelten können wenn nur $b < \frac{27}{4} a^2$ ist.

Man setze z. B. $a = 1$; $b = 4$ so ist

$$u = 4x^3 + 9x^2 - 12x \quad (15)$$

Aus (14) hat man

$$x = \frac{-3 \pm 5}{4} = \text{entweder } +\tfrac{1}{2}$$

$$\text{oder } -2$$

Für $x = \frac{1}{2}$ hat man $u = -3\frac{1}{4}$

für $x = -2$ hat man $u = +28$

Setzt man zur Probe $x = \frac{1}{3}$

so entsteht $u = -2\frac{23}{27}$

und setzt man $x = \frac{2}{3}$

so entsteht $u = -2\frac{22}{27}$

Es erscheint also für $x = \frac{1}{2}$, u als ein Minimum weil $-2\frac{23}{27} > -3\frac{1}{4} < -2\frac{23}{27}$.

Um den zweiten Werth $x = -2$ zu probiren, setze die benachbarten Werthe $-1\frac{3}{4}$ und $-2\frac{1}{4}$, so erhält man

für $x = -1\frac{3}{4}$

$u = +27\frac{1}{8}$

für $x = -2\frac{1}{4}$

$u = +27$

3. Es erscheint also hier u als ein Maximum, welches der allgemeinen Untersuchung nach nicht möglich sein sollte.

Dafs aber u für $x = +\frac{1}{2}$ wirklich ein Minimum und für $x = -2$ wirklich ein Maximum wird, davon überzeugt man sich wenn man an die aus der Bestimmung $y = 2x$ hervorgegangene Gleichung 13, und für $a = 1$ und $b = 4$ als angenommene Werthe an Gleichung 14 sich unmittelbar wendet.

Denn da (15) $u = 4x^3 + 9x^2 - 12x$

so ist $$\frac{\partial u}{\partial x} = 12x^2 + 18x - 12 = 0$$

woraus $$x = \frac{-3 \pm 5}{4} = \text{entweder} + \tfrac{1}{2}$$
$$\text{oder} \quad -2$$

Nun ist $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 24x + 18$$

folglich gibt der positive Werth $x = \frac{1}{2}$ ein Minimum; und es kann auch ein Maximum für u entstehen, wenn $24x+18$ subtractiv wird, d. h. wenn x subtractiv wird und $(-x) < (-\frac{3}{4})$.

Da nun $-2 <$ ist als $-\frac{3}{4}$ so ist u für $x = -2$ ein Maximum.

Es scheint also, als wenn die aus der allgemeinen Untersuchung zu gewinnenden Bestimmungen nicht stichhaltig wären. Man bemerke dagegen, dafs wenn man in Gleichung 7 den Werth $x = -2$ setzt,
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = +2a - 4a = -2a$$
entsteht.

Da nun $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = +2a$ ist

so haben beide zweiten Differenziale ungleichnamige Vorzeichen und es existirt weder Maximum noch Minimum. Es ist mithin der specielle Werth $x = -2$ nicht dahingehörig.

Um dergleichen Inconsequenzen zu vermeiden, thut man gut, nur die Werthe von y in x ausgedrückt, aus den Gleichungen 2 und 3 zu entwickeln und diese (hier $y = 0$ und $y = 2x$) in die Gleichung (1) für u einzusetzen, wonach man mit einer Function von nur einer Veränderlichen zu thun hat.

4. Eine Inconsequenz gegen die Resultate der allgemeinen Untersuchung entsteht, wenn man gegen die Bestimmung (10) $b > \frac{27}{4}a^2$ in die Function nimmt.

Es bleibe in dem Beispiel $a = 1$, so soll (nach 10) $b < 6\frac{3}{4}$ sein, wenn das subtractive Zeichen vor der $\sqrt{}$ Geltung hat. Man setze $b = 10$ so ist
$$u = 4x^3 + 9x^2 - 30x$$
$$x = \frac{-3 \pm 7}{4} = \text{entweder} - 2{,}5$$
$$\text{oder} \quad +1$$

Für $x = +1$ wird u ein Minimum, der Werth dafür ist $= -17$; alle benachbarten Werthe werden $-(17 - \triangle u)$.

Für $x = -2{,}5$ wird aber u ein Maximum $= +68{,}75$ und alle benachbarten Werthe werden $+(68{,}75 - \triangle u)$.

Man überzeugt sich davon, wenn man die vorstehende Formel für u differenzirt
$$u = 4x^3 + 9x^2 - 30x$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} = 12x^2 + 18x - 30 = 0$$
woraus $$x = \frac{-3 \pm 7}{4} \text{ entweder} = -2{,}5$$
$$\text{oder} \quad = +1$$

Nun ist $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 24x - 18$$

folglich gibt $x = +1$ ein Minimum, und es entsteht ein Maximum, wenn x subtractiv genommen wird und zwar $(-x) < (-\frac{3}{4})$; folglich gibt $-2{,}5$ für x ein Maximum für u.

Differenzio-Differenzialrechnung ist die Lehre von der Bildung der höheren Differenziale. Sie wird in der Differenzialrechnung mit vorgetragen und befindet sich hier in dem Art. „Differenzial" No. 46 bis No. 57.

Dignität ist ein Product von mehreren gleichen Factoren, und wird gewöhnlich Potenz genannt.

Digression s. v. w. Ausweichung s. d. Bd. 1.

Dimension s. v. w. Abmessung s. d. Bd. 1.

Dioktaeder (δις zweimal) Zweimalachtflächner, Vierundvierkantner, ein Krystall von 16 Flächen, 24 Kanten und 10 Ecken in der Form des Didodekaeders, Fig. 558, wenn man für die 12eckige gemeinschaftliche mittlere Basis der beiden Pyramiden ein symmetrisches Achteck sich denkt. Auch bei diesem sind die Flächen ungleichseitige

Dreiecke, daher auch die Kanten und Ecken dreierlei.

Von den Kanten sind 8 längere meist schärfere, 8 kürzere meist stumpfere Scheitelkanten A, B und in der Basis liegende 8 Seitenkanten D. Von den Ecken sind 2 symmetrische 8flächige Scheitelecken C, 8 vierflächige Ecken, von denen je 4 und 4 symmetrisch sind.

Die Hauptaxe verbindet die beiden Ecken C, die beiden Nebenaxen verbinden je 2 Paar gegenüberliegende Ecken, in welchen die längeren Kanten A zusammentreffen. Die Ebenen, welche durch 2 Paar einander gegenüberliegende Endkanten gelegt werden sind Rhomben.

Diophantische Gleichungen, diophantische Aufgaben, (von Diophantus, einem Mathematiker einige Jahrhunderte vor Chr. Geburt, der diese Aufgaben erfunden, oder sie zuerst gelöst haben soll) auch unter dem Namen Unbestimmte Analysis oder unbestimmte Analytik bekannt, sind Gleichungen oder Aufgaben, welche mehrere Resultate zulassen, indem die unbekannten Gröfsen mit den bekannten nicht in so vielen Beziehungen gegeben sind als zu deren Bestimmung erforderlich ist, so dafs eine oder mehrere unbekannte willkührlich angenommen werden können. Einen Theil dieser Disciplin der Algebra macht die Blindrechnung, Regel coeci aus (s. d. Bd. 1, pag. 376.) Die Aufgaben bestehen darin, dafs eine oder mehrere Gleichungen weniger gegeben sind als Unbekannte gefunden werden sollen.

$$x + y = 10$$

ist eine Aufgabe, die für x und y eine unendliche Menge Auflösungen zuläfst. Nimmt man $x = 1$ so ist $y = 9$; für $x = 2, 3, 4 \ldots$ entsteht $y = 8, 7, 6 \ldots$; für $x = -1$ wird $y = +11$ u. s. w. Es sind hier 2 Unbekannte und nur eine Gleichung ist gegeben.

Eine Gleichung vom 2ten Grade läfst 2 Auflösungen zu, die beiden Unbekannten sind aber ganz bestimmte der Natur der Gleichung zukommende Gröfsen, daher ist solche Gleichung keine diophantische Aufgabe; desgleichen nicht eine Gleichung vom $n$ten Grade, welche n Unbekannte liefert, von denen aber keine willkührlich angenommen werden kann weil dieselben alle aus der Auflösung als ganz bestimmte Gröfsen hervorgehen.

Die in dem Art. Blindrechnung aufgeführten Beispiele gehören hierher. Es sollen nun noch einige andere hinzugefügt werden.

1. Es werden 2 Zahlen gesucht, deren Quadrate, wenn sie addirt werden, wieder eine Quadratzahl geben (Meyer Hirsch, pag. 262, No. 34).

Die Aufgabe ist $a^2 + b^2 = c^2$
oder auch $a^2 = c^2 - b^2 = (c + b)(c - b)$

Nun kann man a^2 ebenfalls als ein Product von 2 ungleichen Factoren betrachten, z. B. $p^2 \times q^2$ und man kann den einen Factor $c + b = p^2$ und den anderen $c - b = q^2$ setzen. Dann hat man:

$$c + b = p^2$$
$$c - b = q^2$$

hieraus $2b = p^2 - q^2$

also $b = \dfrac{p^2 - q^2}{2}$

nun ist $a^2 = p^2q^2$
also $a = pq$

Die beiden gesuchten Zahlen haben demnach die Form $\dfrac{p^2 - q^2}{2}$ und pq oder $p^2 - q^2$ und $2pq$.

Für $p = 5$, $q = 1$ ist $a = 24$; $b = 10$;
$$a^2 + b^2 = 24^2 + 10^2 = 26^2$$

2. Es mögen a und c ein paar Rationalzahlen bezeichnen: welche Rationalzahlen können für x und y angenommen werden, wenn die Formel $a^2x^2 + cy^2$ ein vollkommenes Quadrat werden soll (Meyer Hirsch, pag. 263, No. 35).

Setzt man
$$a^2x^2 + cy^2 = z^2$$
schreibt $cy^2 = z^2 - a^2x^2 = (z + ax)(z - ax)$
setzt ferner $y^2 = m^2 \cdot n^2$
nimmt $cm^2 = z + ax$
$n^2 = z - ax$

so erhält man $cm^2 - n^2 = 2ax$

oder $\dfrac{cm^2 - n^2}{2a} = x$

hierzu $mn = y$

und die allgemeine Form der Zahlen x und y ergibt sich wenn man beide Ausdrücke noch mit $2a$ multiplicirt,

$$x = cm^2 - n^2$$
$$y = 2amn$$

Man kann diese von Mayer Hirsch angegebenen Formen vereinfachen wenn man beide mit m^2 dividirt. Man erhält

$$x = c - \left(\frac{n}{m}\right)^2$$

$$y = 2a\left(\frac{n}{m}\right)$$

für $\dfrac{n}{m}$ die ganze Zahl n geschrieben

$$x = c - n^2;\ y = 2an$$

und es ist
$$a^2x^2 + cy^2 = a^2(c - n^2)^2 + c(2an)^2 = a^2(c + n)^2$$

3. Man soll 2 Zahlen von einer solchen Beschaffenheit finden, dafs die Differenz

dieser Zahlen der Differenz ihrer Cuben gleich sei (Mayer Hirsch, pag. 266, No. 45). (Die allgemeine Form der beiden Zahlen hat M. H. nicht angegeben.)

Bedeuten x und y die verlangten Zahlen, so ist

$$y - x = y^3 - x^3$$
$$= (y - x)(y^2 + xy + x^2)$$

daraus $y^2 + xy + x^2 = 1$

oder $y^2 + xy + x^2 - 1 = 0$

woraus $y = -\frac{x}{2} + \sqrt{\frac{x^2}{4} - x^2 + 1}$

$$= \frac{-x + \sqrt{4 - 3x^2}}{2} \qquad (1)$$

Es muſs also $4 - 3x^2$ ein vollkommenes Quadrat sein, und um die Form von x dafür zu finden setze, damit x positiv wird

$$\sqrt{4 - 3x^2} = x\sqrt{\frac{4}{x^2} - 3} = x\sqrt{\left(\frac{2}{x}\right)^2 - 3}$$

also $y = \frac{-1 + \sqrt{\left(\frac{2}{x}\right)^2 - 3}}{2} \cdot x$

Da $\left(\frac{2}{x}\right)^2 - 3$ ein vollkommenes Quadrat sein soll, so kann man

$$\left(\frac{2}{x}\right)^2 - 3 = \left(\frac{2}{x} - a\right)^2$$

setzen, und wenn man die Klammer auflöst und reducirt, so erhält man

$$\frac{4a}{x} - a^2 - 3 = 0$$

woraus $x = \frac{4a}{a^2 + 3} \qquad (2)$

und $y = \frac{2a}{a^2+3}\left[-1 + \sqrt{\left(\frac{a^2+3}{2a}\right)^2 - 3}\right] = \frac{2a}{a^2+3}\left[-1 + \frac{a^2+3}{2a} - a\right]$

oder $y = \pm\frac{-a^2 + 2a + 3}{a^2 + 3} \qquad (3)$

Aus Gleichung 1 für y geht zunächst hervor, daſs x nicht > 1 sein kann, für $x = 1$ wird aber $y = 0$, welches unmöglich ist, folglich muſs $x < 1$ sein. Es ist also

$$y = -\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{4 - 3x^2}}{2}$$

des zweiten Gliedes wegen ebenfalls < 1. Nun wird in dem Ausdruck 3 für y, für $a = 1$ und kleiner als 1 der Zähler gröſser als der Nenner, folglich muſs a eine ganze Zahl sein, und dann kann, wenn y positiv sein soll nur das negative Vorzeichen gelten. Man hat demnach

$$y = \frac{a^2 - 2a - 3}{a^2 + 3} \qquad (4)$$

Zugleich wird in dem Ausdruck 2 für x der Zähler nur dann kleiner als der Nenner, wenn

$$a^2 - 4a + 2 > 0$$

wenn also $a > 2 + \sqrt{2}$

Für $a = 4$ erhält man $x = \frac{16}{19}$; $y = \frac{5}{19}$

Es ist $\frac{16}{19} - \frac{5}{19} = \frac{11}{19}$

$$\left(\frac{16}{19}\right)^3 - \left(\frac{5}{19}\right)^3 = \frac{3971}{6859} = \frac{11}{19} \cdot \frac{361}{361} = \frac{11}{19}$$

Diopter, ein französisches Wort, sind bei den Meſsinstrumenten, welche ohne Fernrohr eingerichtet sind, die zum Visiren bestimmten Durchsehöffnungen. Sie sind in dem Art. Boussole Bd. 1, pag. 398 mit Fig. 233 abgebildet. Die Oculardiopter, unmittelbar vor dem Auge, besteht in einer senkrecht geradlinigen sehr engen Spalte; die dieser gegenüberstehende D., die Objectivdiopter, hat eine breitere Spalte, in deren Mitte ein senkrechter Faden gespannt ist, welcher mit der ersten D. und der Axe des Instruments in einerlei senkrechten Ebene liegt (vergl. auch Alhidade); man findet also die Richtung des in der Ferne befindlichen Punkts, wenn die Diopter so gerichtet werden, daſs dieser Punkt von dem Faden gegen das Auge gedeckt wird.

Dioptrik ist die Lehre von den Erscheinungen, welche mit der Brechung der Lichtstrahlen zusammenhangen. Zu derselben gehören die Art. Ablenkung des Lichtstrahls, achromatisch, astronomisches Fernrohr, astr. Refraction, Brechende Kraft eines Mediums, Brechung der Lichtstrahlen, Brennglas, Brille u. s. w.

Discrete Gröſse s. u. collective Gröſse.

Distanzpunkt s. u. Augenpunkt.

Divergenz s. u. Convergenz.

Dividend ist eine Zahl, welche dividirt werden soll.

Dividiren heiſst eine Zahl in eine bestimmte Anzahl gleicher Theile zerlegen. Die Zahl, welche getheilt wird heiſst der Dividend, die vorgeschriebene Anzahl der gleichen Theile der Divisor und die

Gröfse eines jeden dieser gleichen Theile der **Quotient**.

Division ist die vierte einfache Rechnungsart, die letzte der sogenannten 4 Species, wenn man das Wurzelausziehen zu denselben nicht mitzählen will. Sie begreift die Aufgabe: Zwei nach irgend einem System geschriebene Zahlen durch einander zu theilen und die daraus hervorgehende dritte Zahl nach demselben System darzustellen. Z. B. die nach dem dekadischen System geschriebenen Zahlen 8424 und 26 sollen durch einander getheilt werden. Das Exempel gestaltet sich:

```
     | 26
8424 | 324
78
 62
 52
 104
 104
```

Die dritte Zahl 324 der **Quotient** ist entstanden, indem man die Zahl 8424 durch 26 getheilt hat. Man hat sich in der Entstehung dieses Quotienten die Rechnung folgender Art vorzustellen.

```
     | 26
8424 | 300 + 20 + 4
7800
 624
 520
 104
 104
```

Man zerlegt nämlich in Gedanken den Dividend in 8400 + 24. Sagt 26 in 8400 geht 300mal; nun sind $26 \times 300 = 7800$ wegzunehmen, es bleibt von der Zahl noch 624, welche durch 26 noch zu theilen ist, diese wird zerlegt in 620 + 4. Man sagt wieder 26 in 620 geht 20mal; nun sind $26 \times 20 = 520$ von 620 fortzunehmen, bleibt 100, hierzu die noch zum Dividend gehörende 4 hinzugenommen gibt 104 und diese wiederum durch 26 getheilt gibt 4, so dafs die Zahl 26 nach und nach die Zahlen 7800, 520 und 104 also deren gegebene Summe 8424 getheilt hat.

Man nennt daher die einzelnen Dividenden 84 (8400), 62 (620) und 104 die **Partialdividenden**, so wie die Zahlen 3 (300), 2 (20) und 4 die **Partialquotienten**.

2. Die Division kann betrachtet werden als eine wiederholte Subtraction mit einem und demselben Subtrahendus; denn zu dem Quotient $24 : 4 = 6$ gelangt man auch, wenn man die Zahl 4 von der Zahl 24 abzieht, von dem Rest 20 wieder 4 und so fort abzieht bis kein Rest mehr bleibt, und wo sich dann ergibt, dafs das Subtrahiren 6mal geschehen kann und geschehen ist.

Diese Uebereinstimmung der D. mit der Subtraction veranlafst mehrere Rechnenlehrer, die D. von den Species auszuschliefsen wie die Multiplication, welche als eine wiederholte Addition betrachtet werden kann; sie könnte übrigens noch eher deshalb zu den zusammengesetzten Rechnungsarten gezählt werden, weil sie zur Darstellung des Quotienten aus der Reihe von Partialdivisionen der Subtraction sich bedient.

3. Quotient und Divisor haben einerlei Beziehung zum Dividendus: der Quotient ist in dem Dividend so oft enthalten als der Divisor Einheiten enthält und der Divisor ist in dem Dividend so oft enthalten als der Quotient Einheiten enthält. Vertauscht man Divisor mit Quotient so erhält man bei demselben Dividend den einen aus dem anderen.

4. Eine vorzunehmende D. wird angezeigt entweder durch die Bruchform als $\frac{8424}{26}$, wo der Zähler den Dividend, der Nenner den Divisor anzeigt; oder durch ein zwischen beide Zahlen gesetztes Kolon 8424 : 26.

5. Das Exempel $\frac{4335}{25}$ oder 4335 : 25 läfst einen Rest = 10, die Division geht nicht auf.

```
     | 25
4335 | 173
25
183
175
  85
  75
  10
```

Es läfst sich also die Zahl in ihren Einheiten nicht angeben, um wie viel mal die Zahl 4335 gröfser ist als die Zahl 25. Denn jene ist gröfser als 173×25 und kleiner als 174×25.

Mithin bleibt der Quotient $\frac{4335}{25}$ ein **Zahlbegriff** und wird geschrieben $173\frac{10}{25}$. D. h. der Quotient ist = der Zahl 173 + derjenigen Zahl, welche entstehen würde, wenn man den Rest 10 noch durch 25 theilen könnte. Dies würde aber offenbar geschehen können, wenn man sich die Einheit 1 aus 25 gleich grofsen Theilen bestehend denkt, denn alsdann hätte

man unter $\frac{10}{25}$ sich 10 solcher Einheiten zu denken. Und dies geschieht auch: $\frac{1}{25}$ ist die Darstellung einer Einheit, die 25 mal kleiner ist als die Einheit 1. In dieser Beziehung nennt man die Eins (1) die absolute Einheit auch ursprüngliche Einheit, primitive Einheit; die Zahlbegriffe $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ u. s. w. relative Einheiten, Brucheinheiten.

5. Dieser Umstand, dafs die D. nicht aufgeht, veranlafst die D. in Decimalstellen fortzusetzen: Man schreibt hinter die Zahl 173 ein Komma und hinter den Rest 10 eine Null, so dafs die Zahl 10 in die Zahl $\frac{100}{10}$ geändert wird, in welcher die Zahl 25 noch $\frac{4}{10}$mal enthalten ist. Der nach dekadischem System geschriebene vollständige Quotient ist nun $= 173{,}4$.

Die Praxis der Ausführung einer D. in Decimalstellen und mit Decimalbrüchen in Decimalbrüche, s. den Art. „Decimalbruch" No. 3; die D. von gemeinen Brüchen durch einander, s. d. Art. „Bruch, No. 7; die D. von Buchstabengröfsen durch einander in dem Art. „Buchstabenrechnung" D. pag. 438. Vergl. auch den kurzen Art. „Aufheben der Brüche.

Divisionszeichen s. u. Division No. 4.

Divisor s. u. dividiven.

Dodekadik, dodekadisches Zahlensystem, ein zwölftheiliges System, in welches also noch einzelne Ziffern für die Zahlen 10 und 11 gehören, in welchem unsere Zahl 12 die kleinste zweiziffrige Zahl ist und mit 10 bezeichnet wird; 20 würde unsre Zahl 24 sein, 29 unsere Zahl 33; 100 unsre 144, 1000 unsre 1728. Die dodekadische geschriebene Zahl

1249 ist dekadisch

$$= 12^3 + 2 \times 12^2 + 4 \times 12 + 9 = 2073$$

das System ist natürlich nicht gebräuchlich.

Dodekaeder ist einer der 5 vieleckigen regulären Körper oder Polyeder, welche zur Untersuchung ihrer Eigenschaften einen Artikel in diesem Wörterbuch erhalten werden. Das D. wird von 12 regelmäfsigen Fünfecken eingeschlossen, es hat 30 gleich grofse Kanten, 20 dreiflächige Ecken mit 60 ebenen Winkeln zu 108°.

Bezeichnet man in einem regelmäfsigen Polyeder mit

m die Anzahl der Ebenen die zu jeder Ecke gehören,

n die Anzahl der zu jeder Grenzfläche gehörenden Kanten,

N die Anzahl der Grenzflächen des Körpers,

so ist hier $m = 3$; $n = 5$; $N = 12$.

Bezeichnet man nun den Neigungswinkel je zweier zusammen treffenden Grenzebenen mit α, so ist

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\cos\frac{180^\circ}{m}}{\sin\frac{180^\circ}{n}} = \frac{\cos 60^\circ}{\sin 36^\circ} = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}}$$

und $\alpha = 116^\circ\ 33'\ 54''$

Bezeichnet man die Länge einer Kante mit k, so ist der Halbmesser der um das D. zu beschreibenden Kugel

$$R = \tfrac{1}{2}k \cdot tg\frac{\alpha}{2} \cdot tg\frac{180^\circ}{m} = \tfrac{1}{4}k\sqrt{3(6 + 2\sqrt{5})} = 1{,}401\ 2585 \times k$$

Bezeichnet r den Halbmesser der in dem D. zu beschreibenden Kugel, so ist

$$r = \tfrac{1}{2}k \cdot tg\frac{\alpha}{2}\cot\frac{180^\circ}{n} = \tfrac{1}{4}k \cdot \sqrt{\tfrac{1}{5}(50 + 22\sqrt{5})} = 1{,}114\ 6381 \times k$$

$$R = r \cdot \frac{tg\frac{180^\circ}{m}}{\cot\frac{180^\circ}{n}} = r\sqrt{3(5 - 2\sqrt{5})} \qquad = 1{,}258\ 4086 \times r$$

$$r = R \cdot \frac{\cot\frac{180^\circ}{n}}{tg\frac{180^\circ}{m}} = \tfrac{1}{3}R\sqrt{\tfrac{1}{3}(5 + 2\sqrt{5})} \qquad = 0{,}794\ 6544 \times R$$

$$k = 2R \cdot \cot\frac{\alpha}{2} \cdot \cot\frac{180^\circ}{m} = \tfrac{1}{3}R\sqrt{6(3 - \sqrt{5})} \qquad = 0{,}713\ 6441 \times R$$

$$k = 2r \cdot \cot\frac{\alpha}{2} \cdot tg\frac{180^\circ}{n} = r\sqrt{50 - 22\sqrt{5}} \qquad = 0{,}778\ 7840 \times r$$

Bezeichnet J^2 den Inhalt einer Begrenzungsebene, so ist

$$J^2 = \tfrac{1}{4} nk^2 \cdot cot \frac{180^\circ}{n} = \tfrac{1}{4} k^2 \sqrt{5(5+2\sqrt{2})} \qquad = 1{,}720\,4773 \times k^2$$

$$J^2 = nR^2 \cdot cot^2 \frac{\alpha}{2} \cdot cot \frac{180^\circ}{n} \cdot cot^2 \frac{180^\circ}{m} = \tfrac{1}{6} R^2 \sqrt{10(5-\sqrt{5})} \qquad = 0{,}876\,218 \times R^2$$

$$J^2 = nr^2 \cdot cot^2 \tfrac{1}{2} \cdot tg \frac{180^\circ}{n} = \tfrac{5}{2} r^2 \sqrt{2(65-29\sqrt{5})} \qquad = 1{,}245\,1340 \times r^2$$

Bezeichnet J^3 den Inhalt des Polyeders, so ist

$$J^3 = \tfrac{1}{24} nNk^3 \cdot tg \frac{\alpha}{2} \cdot cot^2 \frac{180^\circ}{n} = \tfrac{1}{4} k^3 (15+7\sqrt{5}) \qquad = 7{,}663\,1189 \times k^3$$

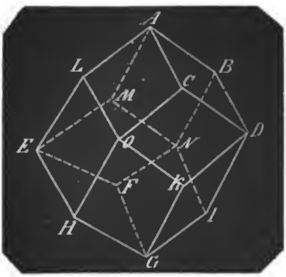
$$J^3 = \tfrac{1}{3} nNR^3 \cdot cot^2 \frac{\alpha}{2} \cdot cot^2 \frac{180^\circ}{n} \cdot cot^3 \frac{180^\circ}{m} = \tfrac{2}{9} R^3 \sqrt{30(3+\sqrt{5})} \qquad = 2{,}785\,164 \times R^3$$

$$J^3 = \tfrac{1}{3} nNr^3 \cdot cot^2 \frac{\alpha}{2} \cdot tg \frac{180^\circ}{n} = 10 r^3 \sqrt{2(65-29\sqrt{5})} \qquad = 4{,}980\,5360 \times r^3$$

Dodekaeder (Krystallographie), Zwölfflächner, ist ein Körper mit 12 Flächen, die aber nicht wie das D. in der Stereometrie aus regulären **Fünfecken** bestehen, sondern aus 12 Rhomben. Daher heifst es auch Rhombendodekaeder, auch Granatoeder.

Die einschliefsenden Rhomben haben 24 gleiche Kanten und 14 Ecken, deren Umfangswinkel sind 109° 28′ und 70° 32′. Das D. stellt sich auf wie der Würfel: Ist *EFGH* die Grundfläche, so ist die derselben ‡ gegenüber liegende Fläche die Raute *ABCD*; rechtwinklig mit beiden Flächen stehen die beiden ‡ mit einander befindlichen Flächen *ALEM* und *DKGJ*, so dafs auch diese beiden als

Fig. 564.



Grundflächen angenommen werden können, wo dann jene dieselbe Lage zu diesen, wie diese zu jenen beiden Flächen haben.

Es ist also deren Lage mit der der Würfelflächen ganz dieselbe, nur ist der Unterschied, dafs beim Würfel die Flächen mit den Kanten sich ansetzen, wogegen beim D. die Ecken der Flächen gemeinschaftlich sind, nämlich die 4 Ecken *D*, *G*, *A* und *E*.

Zwischen diesen 4 Rauten gruppiren sich die 8 übrigen Rauten der Art symmetrisch, dafs deren Kanten unter einander gemeinschaftlich sind und dafs je 4 der Flächen in einer gemeinschaftlichen Ecke zusammen treffen, also beide Paare in den beiden Ecken *O* und *N*. Die genannten 6 Ecken sind vierflächig und werden durch die längeren Diagonalen der Rhomben mit einander verbunden; die übrigen 8 Ecken sind dreiflächig.

Wenn man den Krystall mit der Ecke *G* sich aufgestellt denkt, so dafs *GA* die lothrechte Hauptaxe ist, so bildet die Ebene, in welcher die 4 Diagonalen *DO*, *OE*, *EN*, *ND* die Basis des Krystalls, die 4 Diagonalen liegen wie 4 Seiten des Octaeders und die 4 Ecken *D*, *O*, *E*, *N* nebst den beiden *G* und *A* liegen wie die 6 Ecken des Octaeders; daher heifsen auch die 6 vierflächigen Ecken des D. dessen Octaederecken.

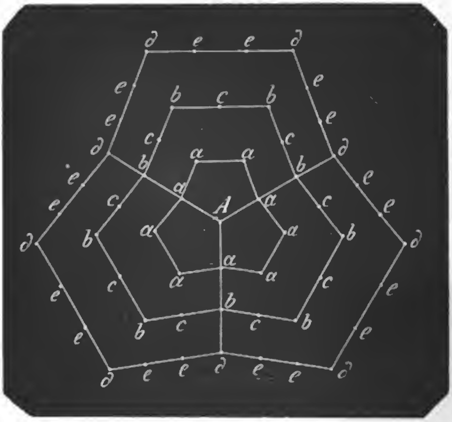
Bleibt man bei derselben Aufstellung des Krystalls, verbindet die 4 dreiflächige Ecken *B*, *C*, *L*, *M* und die anderen 4 derselben *J*, *K*, *H*, *F* durch die kürzeren Diagonalen, so liegen jede 4 dieser Diagonalen in zwei Ebenen die einander ‡ und mit der Axe *AG* rechtwinklig sind; und da nun diese 8 Diagonalen zwei Quadrate bilden, so liegen die 8 Ecken wie die 8 Ecken in dem Hexaeder; deshalb nennt man die 8 dreiflächigen Ecken des D. dessen Hexaederecken.

Dodekaedralzahl ist diejenige der 5 Polyedralzahlen, deren zu Grunde liegendes Polyeder das Dodekaeder ist. Die Zahlen sind nämlich die Anzahl der Punkte, welche die Ecken und in gleichbleibenden Entfernungen von einander die Kanten aufnehmen, wenn man die Kanten

des Körpers 1, 2, 3 ... *n* mal vergröfsert und zu diesen Kanten jeder Gröfse die zugehörigen Dodekaeder construirt.

Es sei *A* eine der 20 Ecken mit den in ihr zusammentreffenden 3 fünfeckigen Begrenzungsebenen; *Aa*, *Aa*, *Aa* seien die 3 Kanten von der Länge = 1, die zu diesen gehörenden Fünfecke sind mit *AaaaaA* bezeichnet. Da nun das Dodekaeder 20 Ecken hat, so befinden sich auf dessen Oberfläche 20 Punkte und 20 ist die Grundzahl der Dodekaedralzahlen. Da zugleich mit beliebiger Abnahme der Kanten *Aa* von *A* aus das Dodekaeder in dem Punkt *A* verschwindet, *A* nur **einen** Punkt gibt, so ist 1 die erste und 20 die zweite D.

Fig. 565.



Verlängert man nun die drei Kanten *Aa* um ihre eigene Länge *Aa* zu den 3 Kanten *Ab*, *Ab*, *Ab*, so entstehen die zugehörigen 3 Fünfecke, welche mit *AbbbbA* bezeichnet sind. Von den bis jetzt gezeichneten 6 Fünfecken liegen immer je 2 und 2 in einer Ebene; construirt man aber die zu *Aa* und die zu *Ab* gehörenden beiden Polyeder, so haben dieselben nur die einzige Ecke *A* gemein, und die beiden Körper nehmen eine Lage zu einander an, wie Fig. 556 die beiden Zehnecke *Aa* .. *aA* und *Ab* ... *bA*: der eine Körper steckt in dem andern und beide sind an den 3 kleinen Oberflächen *AbbbbA* mit einander verbunden.

Es kommt nun darauf an zu ermitteln, wie viele Punkte hinzugekommen sind.

Aufser der Ecke *A* sind 19 neue Ecken gebildet worden, mithin sind hinzugekommen 19 Eckpunkte; für die gleich grofs bleibende gegenseitige Entfernung der Punkte müssen alle Kanten wie die 3 Kanten *Ab* noch einen Punkt in der Mitte erhalten, und da das Dodekaeder 30 Kanten hat, so sind noch 27 Kantenpunkte hinzugekommen. Nun müssen aber sämmtliche Begrenzungsflächen 2 Punkte *a* in deren Mitte erhalten, bei 3 Flächen findet dies schon statt. Das Dodekaeder hat 12 Begrenzungsflächen, folglich kommen hinzu $9 \times 2 = 18$ Flächenpunkte. In Summa kommen hinzu $19 + 27 + 18 = 64$ Punkte und die dritte D. ist $= 20 + 64 = 84$.

Verlängert man wiederum die 3 Kanten *Ab* um die Länge $Aa = 1$ zu den 3 Kanten *Ad*, *Ad*, *Ad*, so entstehen die 3 zugehörigen Fünfecke, welche mit *AddddA* bezeichnet sind. Von den bis jetzt gezeichneten 9 Fünfecken liegen immer je 3 und 3 in derselben Ebene, die zugehörigen Polyeder haben die Lage wie Fig. 556 die 3 Zehnecke zu einander, ein Körper steckt in dem andern und alle 3 haben ihren einzigen Zusammenhang mit den 3 Fünfecksflächen *AddddA*. Für die mit dem dritten Dodekaeder hinzugekommenen Punkte hat man Folgendes.

Es sind 19 neue Ecken mit 19 Punkten hinzugekommen; die neuen Kanten erhalten wie *Ad* zwei Punkte in der Mitte, folglich zusammen $27 \times 2 = 54$ Kantenpunkte; die neuen Flächen erhalten wie die 3 gezeichneten Flächen, 2 Punkte *a*, 2 Punkte *b* und 3 Punkte *c*, zusammen 7 Punkte, also überhaupt $9 \times 7 = 63$ Punkte. Die Anzahl der hinzugekommenen Punkte ist demnach $19 + 54 + 63 = 136$ und die 4te D. ist $= 84 + 136 = 220$.

Das Gesetz für die Bildung der D. ergibt sich also aus folgender Reihe der immer neu hinzukommenden Zahlen, d. h. der Differenzen je zweier auf einander folgenden Dodekaedralzahlen:

1. Differenz = 1
2. „ „ = 19
3. „ „ = 19 + 1 · 27 + 2 · 9 = 64
4. „ „ = 19 + 2 · 27 + 7 · 9 = 136
5. Differenz = 19 + 3 · 27 + 15 · 9 = 235
6. „ „ = 19 + 4 · 27 + 26 · 9 = 361

. . . .

$$n.\ \text{Differenz} = 19 + (n-2)\,27 + \frac{n-2}{2}(3n-5)\,9 = \frac{9n}{2}(3n-5) + 10$$

Diese Reihe ist eine Reihe der dritten Ordnung, die Dodekaedralzahlen bilden also eine Reihe der 4ten Ordnung und man hat die Darstellung

3. Differenzenreihe	„	„	„	27	27....	
2. „ „	„	„	45	72	99....	
1. „ „	„	19	64	136	235....	
Dodekaedralzahl	1	20	84	210	455....	

$$\text{die } n\text{te D. ist} = 1 + \frac{n-1}{1}\cdot 19 + \frac{n-1\cdot n-2}{1\cdot 2}\,45 + \frac{n-1\cdot n-2\cdot n-3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 27$$
$$= \frac{n}{2}(9n^2 - 9n + 2)$$

Dodekagonalzahl ist diejenige Polygonalzahl, deren zu Grunde liegendes Polygon das Zwölfeck ist. Es verhält sich mit diesen Zahlen wie mit den Dekagonalzahlen, und ihre Entstehung ist wie Fig. 556 wenn man Zwölfecke statt der Zehnecke construirt.

Die 1. D. ist = 1
„ 2. „ „ = 1 + 11 = 12
die 3. D. ist = 12 + 11 + 1 · 10 = 33
„ 4. „ „ = 33 + 11 + 2 · 10 = 64
„ 5. „ „ = 64 + 11 + 3 · 10 = 105

. . . .

Die D.zahlen bilden eine Reihe der zweiten Ordnung; das erste Glied der ersten Differenzenreihe ist = 1, die constante Differenz deren Glieder ist 10. Man hat also die Darstellung

Differenzen	10	10	10	10	10	 10
1. Differenzenreihe	1	11	21	31	41	.... $(10n-9)$
Dodekagonalzahlen	1	12	33	64	105	.... $n(5n-4)$

Die Summe der ersten n D.zahlen ist $\frac{1}{6}n(n+1)(10n-7)$

Doppelbruch ist ein Bruch, dessen Zähler und Nenner aus Brüchen bestehen, s. Bruch No. 2.

Doppelpunkt ist ein Punkt, in welchem eine Curve einen Knoten oder eine Spitze bildet, den ersten Fall zeigt Fig. 523 die untere Konchoide, den zweiten Fall Fig. 521 die Cissoide. Der Punkt K Fig. 545 und 546 ist kein Doppelpunkt, weil derselbe von den beiden verkürzten Cycloiden also von zweien Curven gebildet wird.

Doppelsterne. Hierunter versteht man 2 Fixsterne, von welchen der eine um den andern sich herumbewegt wie ein Planet um unsere Sonne oder wie ein Trabant um einen Planet, z. B. der Mond um unsre Erde, indem beide Fixsterne wie diese in unmittelbaren attractorischen Verhältnissen mit einander sich befinden. Da bei der so sehr grofsen Entfernung dieser Sterne von unsrem Sonnensystem es ganz undenkbar ist, dafs auch nur einer derselben, wenn er nicht selbstständig leuchtete von uns gesehen werden könnte, so sind beide Sterne Sonnen und die D. bilden also ein Doppelsonnensystem, die fest stehende Sonne ist die Centralsonne, der Centralstern, die herumkreisende Sonne der Fixsterntrabant, der Begleitstern.

Die Anzahl dieser Doppelsonnensysteme ist nicht gering, Herschel allein hat etwa 450 derselben entdeckt, und man kennt gegenwärtig über 2800 Doppelsterne, von denen aber auch viele wegen ihrer grofsen scheinbaren Nähe an einander für Doppelsterne gehalten werden mögen, ohne dafs sie es wirklich sind, was zu entscheiden noch Jahrhunderte langen Beobachtungen vorbehalten bleibt, weil die Bewegung der Begleitsterne oft erst innerhalb sehr langer Zeit wahrnehmbar wird. Auch mehrfache als Doppelsysteme, selbst siebenfache sind entdeckt worden, so dafs bei diesen statt der an sich dunklen Planeten unsres Sonnensystems, Sonnen es sind, die um eine gröfsere Centralsonne kreisen, und von denen jede

einzelne Begleitsonne wiederum ein Sonnensystem ähnlich dem unsrigen bildet (vergl. die hypothetische Bemerkungen Bd. 1, pag. 32, links, pag. 168 No. 7).

Von mehreren dieser D. hat man bereits die Bewegungsgesetze und deren Bahnen erforscht. Am vollständigsten von dem Doppelstern ϱ des grofsen Bären, in welchem eine schwache bläuliche Sonne, die als Stern 5ter Gröfse erscheint, um eine weifse Centralsonne, ein Stern 4ter Gröfse, sich bewegt und zwar mit einer Schnelligkeit, dafs sie ihren Lauf in 58 Jahren vollendet.

Doppelt gerade ganze Zahl eine nicht mehr gebräuchliche Bezeichnung für ein ganzes Vielfaches der Zahl 4.

Doppelverhältnifs ist das Produkt zweier gleichen Verhältnisse. Ist das einfache Verhältnifs $a:b$ so ist das D. $= a^2 : b^2$

Drachenkopf ein alter Name für den aufsteigenden Knoten des Mondes, so wie der absteigende Knoten desselben Drachenschwanz genannt wird. Die Namen rühren daher, dafs wegen der Finsternisse, welche während und in der Nähe des Durchgangs des Mondes durch die Ekliptik eintreten, im Alterthum der Glaube war, dafs der Mond hier mit einem Drachen in Kampf sich befinde.

Drachenmonat ist die Zeit, in welcher der Mond von seinem aufsteigenden oder absteigenden Knoten zum zweitenmal in denselben Knoten wieder eintritt. Dieser Monat ist von allen astronomischen Monaten der kürzeste, weil die Knoten mit einer Schnelligkeit von 19° 19′ in einem Jahre, also von etwa $1\frac{1}{2}°$ in einem Monat den Zeichen entgegen einen Rückgang machen. Der D beträgt 27 Tage 5 Stunden 6 Minuten und 56 Secunden (vergl. den vor. Art.).

Drachenschwanz s. u. Drachenkopf.

Dreieck ist eine Fläche, welche von 3 Linien, Seiten genannt, eingeschlossen ist. Man betrachtet nur D., welche auf Ebenen oder auf Kugeloberflächen verzeichnet sind; erstere sind die ebenen D., letztere die sphärischen oder Kugeldreiecke. Unter den ebenen D. betrachtet man wieder nur die geradlinigen D., krummlinige D. kommen nicht vor, die gemischtlinigen D, welche aus zwei Radien und einem Kreisbogen gebildet werden, heifsen Kreisausschnitte oder Sectoren.

Dreiecke, ebene. Die Lehre von den Dreiecken bildet die Grundlage zu allen Erkenntnissen der Geometrie. Es liegt dies darin, dafs erstens das Dreieck die Figur ist, welche die geringst mögliche Anzahl von Seiten hat, dafs also jede Figur von mehreren Seiten in Dreiecke zerlegt werden kann; dann aber weil das D. eine nicht zu ändernde Gestalt annimmt, wenn die Seiten dieselben bleiben, in welcher Ordnung dieselben auch an einander gesetzt werden, während schon Vierecke verschoben und in unzählige andere Gestalten abgeändert werden können, wenn auch ihre Seiten in derselben Ordnung verbleiben.

Von der Unverrückbarkeit der D. überzeugt man sich, wenn man in einem Kreise aus den Endpunkten eines Durchmessers nach einem beliebigen Punkt der Peripherie, der ungleich weit von beiden Endpunkten entfernt ist, zwei gerade Linien zieht, und somit ein D. bildet. Man kann nun durch Verlegung beider Bogen vier Dreiecke zeichnen, die alle einander vollkommen gleich sind und so aufeinander gelegt werden können, dafs sie sich decken.

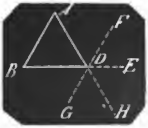
Es ist also das erste Erfordernifs, die Bedingungen kennen zu lernen, unter welchen Dreiecke sich einander decken können, ohne dafs die Gleichheit aller einzelnen Stücke, die der 3 Seiten und der 3 Winkel nachgewiesen werden mufs, und diese Bedingungen ergeben die 4 Sätze von der Congruenz der Dreiecke (s. d. pag. 41 bis 44 mit Fig. 309 bis 314).

2. Man kann die Peripherie eines Kreises in 3 gleiche Theile theilen, verbindet man diese Theilpunkte durch gerade Linien mit einander, so erhält man ein D. von 3 gleichen Seiten, was sich durch den ersten Satz von der Congruenz der D. (2 Seiten und der eingeschlossene $\angle =$) erweisen läfst, wenn man von dem Mittelpunkt des Kreises nach den Endpunkten des D. gerade Linien zieht, womit 3 congruente D. entstehen. Ein D. kann also 3 gleiche Seiten haben und es heifst ein solches ein gleichseitiges Dreieck. Nimmt man in der Peripherie nur zwei Bogen einander gleich, so entsteht ein D. mit zwei gleichen Seiten und ein solches heifst ein gleichschenkliges Dreieck; die beiden gleichen Seiten heifsen die Schenkel, die dritte heifst die Grundlinie des D., der Scheitelpunkt zwischen beiden Schenkeln heifst die Spitze, der Winkel daselbst der Winkel an der Spitze, die beiden anderen Winkel die Winkel an der Grundlinie. Dreiecke, in welchen keine

Seite einer anderen gleich ist heifsen ungleichseitige Dreiecke.

3. Verlängert man eine Seite *BD* eines D. so entsteht aufserhalb des D. ein ∠*ADE*. Dieser heifst Aufsenwinkel des D.

Fig. 566.



Der ∠ *ADB* heifst sein innerer anliegender Winkel, die beiden ∠*ABD* und *BAD* heifsen seine inneren ihm gegenüberliegende Winkel.

4. Unter *AB* kann man sich eine unzählige Menge von Linien vorstellen, die auf einander liegen; nimmt man eine derselben und bewegt sie mit gleichbleibender Lage nach dem Punkt *D*, und ist diese Linie *DF*, so haben beide Linien *AB* und *DF* einerlei Lage gegen die Linie *BE* behalten, d. h. ∠ *ABD* ist = ∠ *FDE*. Beide Linien haben aber auch einerlei Lage gegen die Linie *AD* behalten.

D. h. ∠ *BAD* = ∠ *GDH*
welcher entsteht, wenn man die Linien *AD* und *FD* verlängert.

Da nun ∠ *GDH* = *ADF* (als Scheitelwinkel), so ist

∠*ABD*+∠*BAD*=∠*FDE*+∠*ADF*=∠*ADE*
Der Aufsenwinkel ist also gleich seinen beiden ihm gegenüberliegenden inneren Winkeln.

5. Der Aufsenwinkel *ADE* ist der Nebenwinkel des ihm anliegenden inneren Winkels *ADB*, beide zusammen sind also zweien rechten Winkeln gleich, folglich ist auch die Summe der drei inneren Winkel eines Dreiecks gleich zweien rechten Winkeln.

6. Ein D. kann also nicht mehr als einen rechten Winkel erhalten, und ein D. mit einem rechten Winkel heifst rechtwinkliges Dreieck; die beiden den rechten Winkel einschliefsenden Seiten heifsen die Katheten (κάθετος das Bleiloth), die ihm gegenüberliegende Seite heifst die Hypotenuse (ὑποτείνω, darunter spannen).

Ein D. kann nur einen stumpfen Winkel haben und ein D. mit einem stumpfen Winkel heifst stumpfwinkliges Dreieck.

7. Legt man das bei *F* rechtwinklige Dreieck *ABF* um *AF* bis es wieder in dieselbe Ebene fällt, so ist das daraus entstandene zweite △ *AFE* ≌ △ *AFB*
da nun ∠ *AFB* = ∠ *AFE* = *R*
so ist *BFE* eine gerade Linie, weil 2

Fig. 567.



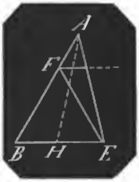
rechte ∠ mit gemeinschaftlichem Scheitelpunkt und einem gemeinschaftlichen Schenkel 2 Nebenwinkel bilden; folglich ist *ABE* ein △, und da *AB* = *AE* ist, ein gleichschenkliges △. Da nun ∠ *B* = ∠ *E*, so sind in einem gleichschenkligen D. die Winkel an der Grundlinie einander gleich.

Hieraus folgt unmittelbar, dafs in einem gleichschenkligen D. ein Loth aus der Spitze auf die Grundlinie gefällt, die Grundlinie und den Winkel an der Spitze halbirt. Ferner dafs in jedem gleichseitigen △ sämmtliche 3 Winkel einander gleich sind.

8. In jedem Dreieck liegt der gröfseren Seite auch der gröfsere Winkel gegenüber. Denn ist *AB*>*BE*, so nimm *BF* = *BE*, ziehe *EF* so ist △*BFE* ein gleichschenkliges △;

daher ist ∠ *BFE* = ∠ *BEF* nach No. 7
∠ *BFE* > ∠ *BAE* nach No. 4
also auch ∠ *BEF* > ∠ *BAE*
folglich ∠ *BEA* > ∠ *BAE*

Fig. 568.



Indirect wird nun erwiesen, dafs wenn ∠ *AEB* > ∠ *BAE*, auch *AB* > *BE*. Oder in jedem D. liegt dem gröfseren Winkel auch die gröfsere Seite gegenüber.

9. **In jedem D. sind zwei Seiten zusammengenommen gröfser als die dritte.** Denn ist das $\triangle AFE$ gegeben, sind AF und EF die beiden kleineren Seiten, so verlängere AF bis B, dafs $FB = FE$, ziehe BE

so ist $\angle FEB = \angle FBE$ nach No. 7
also $\angle AEB > \angle ABE$
folglich $AB > AE$ nach No. 8
oder $AF + EF > AE$

10. Fällt man aus dem Eckpunkt eines D. ein Loth AH auf die gegenüberliegende Seite, so heifst das Loth AH die **Höhe des Dreiecks** in Beziehung auf die Seite BE, welche dann die **Grundlinie des Dreiecks** genannt wird.

11. Da jedes Parallelogramm von einer Diagonale in 2 congruente D. getheilt wird und Parallelogramme von gleichen Grundlinien und Höhen einander gleich sind, so ist der Flächeninhalt eines D. gleich dem halben Flächeninhalt eines # wenn beide einerlei oder gleiche Grundlinien und Höhen haben, und folglich sind auch Dreiecke von einerlei oder gleichen Grundlinien und Höhen einander gleich.

Hieraus ergeben sich noch folgende Sätze:

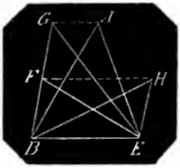
A. Jedes Dreieck wird durch eine gerade Linie aus einer Ecke nach der Mitte der gegenüberliegenden Seite gehälftet.

B. Theilt man eine Seite eines D. in eine beliebige Anzahl gleicher Theile und zieht aus der gegenüberliegenden Ecke nach den Theilpunkten grade Linien, so wird auch das D. in dieselbe Anzahl gleicher Theile getheilt.

C. Dreiecke von gleichen Höhen verhalten sich wie ihre Grundlinien. Denn es sei das Verhältnifs der Grundlinien $= n : m$, so kann man die eine Grundlinie in n, die andere in m gleiche Theile theilen und aus den gegenüberliegenden Ecken nach den Theilpunkten grade Linien ziehen. In dem einen D. hat man dann n, in dem anderen m Dreiecke, die alle einander gleich sind.

D. Dreiecke von gleichen Grundlinien verhalten sich wie ihre Höhen. Denn wenn man beide Dreiecke mit ihren gleichen Grundlinien auf einander legt, dann hat man, wie Fig. 569 die Dreiecke ABE und HBE, deren gemeinschaftliche Grundlinie BE. Errichtet man nun in B auf BE eine Normale BG, zieht $AG \parallel BE$ und die Linie GE so ist $\triangle ABE = \triangle GBE$, weil beide Dreiecke einerlei Grundlinie und Höhe haben. Fällt nun die Spitze H des zweiten Dreiecks innerhalb der mit BE parallelen Linie FH, so ist dieses zweite D. gleich grofs mit $\triangle BEF$. Nun kann man die auf BG normale BE als die beiden Dreiecken gemeinschaftliche Höhe und deren Seiten BG und BF als deren Grundlinien betrachten, wo dann die beiden D. wie diese Grundlinien also wie ihre ursprünglichen Höhen sich verhalten.

Fig. 569.



E. Das $\triangle A$ habe die Grundlinie a, die Höhe h; das $\triangle B$ die Grundlinie a; die Höhe h'; das $\triangle C$ die Grundlinie a' die Höhe h', so ist:

$$\triangle A : \triangle B = h : h'$$
$$\triangle B : \triangle C = a : a'$$

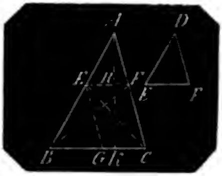
folglich $\triangle A : \triangle C = ah : a'h'$

d. h. Zwei Dreiecke verhalten sich wie die Producte aus Grundlinie in Höhe.

12. Dreiecke, die in solche Lage gebracht werden können, dafs jede der Seiten des einen D. einer Seite des anderen $\parallel$ läuft, heifsen **ähnliche Dreiecke**. Diese Dreiecke können mit einer Ecke so aufeinander gelegt werden, dafs zwei Schenkel in einander fallen, und die dritten Seiten mit einander $\parallel$ laufen, denn die parallelen Seiten gegenüberliegender Winkel sind einander gleich. Die als parallel zusammengehörigen Seiten, oder die Seiten, welche gleichen Winkeln gegenüber liegen, heifsen **homologe Seiten**.

Es sei das $\triangle DEF$ so auf $\triangle ABC$ gelegt, dafs $EF \parallel BC$ ist. Zieht man die Linien CE und BF, so hat man

Fig. 570.



$$\triangle CEF = \triangle BEF$$
hierzu $\triangle AEF = \triangle AEF$
gibt $\triangle ACE = \triangle ABF$

Nun ist $\triangle ACE : \triangle AFE = AC : AF$
$\triangle ABF : \triangle AEF = AB : AE$

hieraus $AC : AF = AB : AE$ (1)
also auch $AF : AC - AF = AE : AB - AE$
oder $AF : CF = AE : BE$ (2)
desgleichen $AC : CF = AE : BE$ (3)

Zieht man $EG \# AC$, so ist eben so:
$$AE : AB = CG : BC$$
oder $AE : AB = EF : BC$ (4)
auch $AF : AC = EF : BC$ (5)
oder in einem Satz ausgedrückt
$$AE : AF : EF = AB : AC : BC$$
d. h. In ähnlichen Dreiecken stehen die homologen Seiten mit einander in Proportion.

13. Denkt man sich eine Höhe von der gemeinschaftlichen Spitze auf die Grundlinie BC gefällt, so theilt diese beide Dreiecke wieder in zwei ähnliche Dreiecke, die Höhen werden zu Seiten und man hat dieselben Proportionen als:
$$AE : AB = AH : AK \quad (6)$$
$$EF : BC = AH : AK$$
u. s. w.

Nun ist nach No. 11:
$$\triangle AEF : \triangle ABC = EF \cdot AH : BC \cdot AK$$
hierzu die letzte Proportion gibt
$$\triangle AEF : \triangle ABC = EF^2 : BC^2 = AH^2 : AK^2$$
d. h. Aehnliche Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate homologer Seiten oder wie die Quadrate homologer Höhen.

14. Wie die Sätze von der Congruenz der Dreiecke, so lassen sich auch aus dem Vorigen folgende Sätze für die Aehnlichkeit der Dreiecke und zwar sehr leicht ableiten.

1. Dreiecke sind $\sim$, wenn sie 2 gleiche Winkel haben.

2. Wenn sie einen gleichen Winkel haben und die diesen Winkel einschliefsenden Seiten in Proportion stehen.

3. Wenn sie alle 3 Seiten proportional haben.

4. Wenn 2 Paar Seiten in Proportion stehen, von den diesen Seiten anliegenden Winkeln ein Paar gleich ist und das andre Paar zu 2 Rechten sich nicht ergänzt.

Dieser 4te Satz ist analog mit dem 4ten Satz von der Congruenz der D. pag. 44. Es seien dort die beiden Dreiecke ACB und DEF einander $\sim$ deshalb weil:
$$AC : AB = DF : DE$$
$$\angle ABC = \angle DEF$$
und weil 2 rechte Winkel entweder kleiner oder gröfser sind als
$$\angle ACB + \angle DFE$$
so ist diese letzte Bedingung deshalb wesentlich, weil, wenn man $AG = AC$ macht, ein $\triangle AGB$ entsteht, in welchem nun
$$AG : AB = DF : DE$$
$$\angle ABG = \angle DEF$$
Allein da $\angle AGC = \angle ACB = \angle DFE$
und $\angle AGC + \angle AGB = 2R$
so ist $\angle AGB + \angle DFE = 2R$
die beiden Dreiecke AGB und DFE sind also nicht $\sim$, ungeachtet die ersten beiden Bedingungen des Satzes erfüllt werden.

Nach No. 8 liegt der kleineren Seite immer der kleinere Winkel gegenüber; man kann daher aus dem 4ten Satz auch folgenden ableiten:

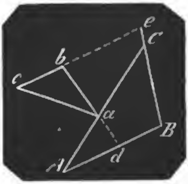
Dreiecke sind ähnlich, wenn zwei Seiten proportional und die den gröfseren von beiden gegenüberliegenden Winkel einander gleich sind.

Denn alsdann liegen die Winkel, welche nach dem Satz zu 2 Rechten sich nicht ergänzen sollen, den kleineren Seiten in den Dreiecken gegenüber, sind also beide spitz und ergänzen sich nicht zu 2 Rechten. Liegt aber der gleiche Winkel der kleineren Seite gegenüber, so kann von den beiden den gröfseren Seiten gegenüberliegenden Winkeln der eine stumpf der andere spitz sein und beide können sich zu 2 rechten Winkeln ergänzen.

Dieser Satz stimmt nun ganz mit Satz 4 von der Congruenz der Dreiecke, er ist aber nicht so allgemein als Satz 4 von der Aehnlichkeit der Dreiecke.

15. Aus dem ersten Satz über die Aehnlichkeit der Dreiecke oder überhaupt aus deren Eigenschaft, dafs ihre 3 Winkel gegenseitig einander gleich sind, entspringt noch ein Satz über dieselbe, der häufig Anwendung findet, nämlich:

Fig. 571.



Dreiecke sind ähnlich, wenn sich die Seiten derselben oder ihre Verlängerungen gegenseitig unter gleichen Winkeln

schneiden, die nach einerlei Richtung gemessen werden

Die beiden Dreiecke *abc* und *ABC* sind also dann einander ∾, wenn $\angle caA = \angle bdA = \angle ceB$.

Denn es ist

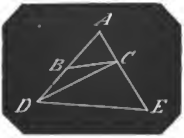
$$\begin{array}{lrcl} & \angle Cab + \angle bac + \angle caA & = & \angle Aad + \angle aAd + \angle adA = 2R \\ \text{Nun ist} & Cab & = & Aad \\ & \angle caA & = & \angle adA \\ \hline \text{folglich} & \angle bac & = & \angle aAd \end{array}$$

Eben so wird die Gleichheit der $\angle b$ und B, c und C bewiesen.

16. Zwei Dreiecke, die einen gleichen Winkel haben, verhalten sich wie die Producte der diesen Winkel einschliefsenden Seiten.

Denn zieht man in Fig. 572 die Hülfslinie CD so hat man

Fig. 572.



$$\begin{array}{l} \triangle ADC : \triangle ABC = AD : AB \\ \triangle ADE : \triangle ADC = AE : AC \\ \hline \text{daher } \triangle ADE : \triangle ABC = AD \cdot AE : AB \cdot AC \end{array}$$

17. Wenn $\angle ADC = \angle EDC$ so hat man nach No. 16

$$\begin{array}{l} \triangle DAC : \triangle DEC = AD \cdot CD : ED \cdot CD \\ \qquad = AD : ED \end{array}$$

aber auch

$$\begin{array}{l} \triangle DAC : \triangle DEC = AC : EC \\ \hline \text{daher } AD : ED = AC : EC \end{array}$$

d. h. Wenn ein Winkel eines Dreiecks halbirt wird, so schneidet die Halbirungslinie auf der gegenüberliegenden Seite zwei Stücke ab, die sich verhalten wie die diesen Stücken anliegenden Seiten.

18. Zieht man durch einen innerhalb eines Dreiecks beliebig liegenden Punkt C von den Endpunkten nach den gegenüberliegenden Seiten gerade Linien, so sind die Producte der drei von den Seiten abgeschnittenen links liegenden Stücke a, b, c gleich dem Product der drei rechts liegenden Stücke α, β, γ.

Fig. 573.



Denn es ist

$$\begin{array}{ll} & \triangle BAD : \triangle GAD = a : \alpha \\ & \triangle BCD : \triangle GCD = a : \alpha \\ \text{folglich} & \\ & \triangle BAD - \triangle BCD : \triangle GAD - \triangle GCD = a : \alpha \\ \text{oder} & \triangle ACB : \triangle ACG = a : \alpha \\ \text{ebenso} & \triangle BCG : \triangle BCA = b : \beta \\ \text{und} & \triangle ACG : \triangle BCG = c : \gamma \\ \hline \text{folglich} & 1 : 1 = a \cdot b \cdot c : \alpha \cdot \beta \cdot \gamma \\ \text{oder} & a \cdot b \cdot c = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma \end{array}$$

19. Indirect läfst sich nun beweisen, dafs wenn auf den Seiten eines Dreiecks Abschnitte a, α; b, β; c, γ genommen werden, so dafs $a \cdot b \cdot c = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma$, die graden Verbindungslinien der Theilpunkte mit den gegenüberliegenden Eckpunkten in einem Punkt sich schneiden.

Es folgt hieraus unmittelbar, dafs die graden Verbindungslinien zwischen den Eckpunkten und den Mitten der gegenüberliegenden Seiten eines Dreiecks in einem Punkt sich schneiden.

20. Die Halbirungslinien der Winkel eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt. Denn sind Fig. 573 AD, BE, GF diese Halbirungslinien, so hat man nach No. 17

$$\begin{array}{ll} & AB : AG = a : \alpha \\ & BG : AB = b : \beta \\ & AG : BG = c : \gamma \\ \hline \text{folglich} & 1 : 1 = a \cdot b \cdot c : \alpha \cdot \beta \cdot \gamma \end{array}$$

Man erhält noch folgende Gesetze:

$$\begin{array}{ll} \text{Es ist} & \triangle ABD = \triangle AGD \\ \text{auch} & \triangle CBD = \triangle CGD \\ \hline \text{hieraus} & \triangle ACB = \triangle ACG \end{array}$$

folglich auch

$$\begin{array}{l} \triangle ACB = \triangle ACG \\ \qquad = \triangle BCG = \tfrac{1}{3} \triangle ABG \end{array}$$

Da nun

$$\triangle ABG : \triangle CBG = AD : CD$$

$$\begin{array}{ll} \text{so ist} & CD = \tfrac{1}{3} AD \\ \text{eben so} & CE = \tfrac{1}{3} BE \\ \text{und} & CF = \tfrac{1}{3} GF \end{array}$$

21. Die drei Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt. Denn stellen Fig. 573 die Linien AD, BE, GF die

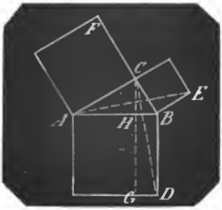
drei Höhen vor, so haben die beiden Dreiecke ABD und GBF den $\angle B$ gemeinschaftlich und die Winkel bei D und F sind rechte, folglich sind beide $\triangle$ einander $\sim$.

Daher $AB : BG = a : \gamma$
aus demselben Grunde
$$BG : AG = b : \alpha$$
und $AG : AB = c : \beta$

daher $1 : 1 = a \cdot b \cdot c : \alpha \cdot \beta \cdot \gamma$

22. Es sei $\triangle ABC$ bei C rechtwinklig; zeichnet man über den 3 Seiten die Quadrate AD, AF, CE, fällt aus dem Scheitelpunkt C des rechten Winkels das Loth CG, zieht die Linien AE und CD

Fig. 574.



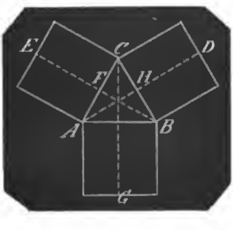
so ist
$$AB = BD$$
$$BE = BC$$
$$\angle ABE = \angle CBD$$
folglich $\triangle ABE \sim \triangle BDC$
also auch $\frac{1}{2} \square CE = \frac{1}{2}$ Rectangel BG
oder $\square CE =$ Rectangel BG
eben so ist $\square AF =$ Rectangel AG

folglich $\square CE + \square AF = \square AD$

d. h. In einem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat der Hypotenuse = den beiden Quadraten der Katheten zusammengenommen. Dieser Satz wird von seinem muthmafslichen Erfinder der pythagorische Lehrsatz genannt.

23. In jedem Dreieck ist das Quadrat der einem spitzen Winkel gegenüberliegenden Seite = der Summe der Quadrate der beiden anderen Seiten weniger den beiden Rechtecken, welche jede dieser Seiten mit der Projection der anderen auf ihr bildet. Also

Fig. 575.



$$\square AB = \square AC + \square BC - CB \times CH - AC \times CF$$

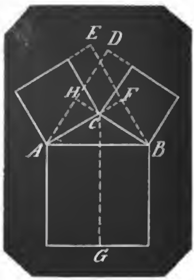
Denn zeichnet man die Quadrate über den drei Seiten und fällt aus den Winkelspitzen die 3 Lothe AD, BE, CG, so ist
$$\sqsupset CD = DH \times CH = CB \times CH$$
und $\sqsupset CE = EF \times CF = AC \times CF$

Nun ist wie im vorigen Satz, wenn man dieselbe Construction macht:
$$\sqsupset BG = \sqsupset BD = \square BC - \sqsupset CD$$
und $\sqsupset AG = \sqsupset AE = \square AC - \sqsupset CE$

folglich
$$\square AB = \square AC + \square BC - CB \times CH - AC \times CF$$

24. Ist der der Seite AB gegenüberliegende Winkel stumpf so ist

Fig. 576.



$$\square AB = \square AC + \square BC + CB \times CH + AC \times CF$$
wie aus Figur 576 und mit Hülfe von No. 23 hervorgeht.

25. Die beiden Rectangel $CB \times CH$ und $AC \times CF$ in beiden Dreiecken, dem spitzwinkligen und dem stumpfwinkligen sind einander gleich.

Denn die Dreiecke ACH und BCF haben in Fig. 575 den $\angle ACB$ gemeinschaftlich, in Fig. 576 sind die $\angle ACH$ und BCF Scheitelwinkel; aufserdem sind die Dreiecke rechtwinklig, folglich einander $\sim$ und es ist
$$AC : CH = BC : CF$$
woraus $AC \times CF = BC \times CH$

26. Indirect läfst sich nun beweisen:

A. Wenn in einem $\triangle$ das Quadrat der einen Seite = der Summe der Quadrate der beiden anderen Seiten ist, so liegt der Seite des gröfseren Quadrats ein rechter Winkel gegenüber.

B. Ist das Quadrat einer Seite > als die Summe der Quadrate der beiden anderen Seiten so liegt der ersten Seite ein stumpfer Winkel gegenüber.

C. Ist das Quadrat einer Seite kleiner als die Summe der Quadrate der beiden anderen Seiten, so liegt der ersten Seite ein spitzer Winkel gegenüber.

27. In dem rechtwinkligen $\triangle ACB$ (Fig. 574) ist CH ein Loth auf die Diagonale, daher ist

$$\triangle ACB \sim \triangle AHC \sim \triangle CHB$$

hieraus folgt

$$AB : BC = BC : BH \qquad (1)$$

$$AB : AC = AC : AH \qquad (2)$$

$$AH : CH = CH : BH \qquad (3)$$

und aus diesen 3 Proportionen

$$BC^2 = AB \times BH \qquad (4)$$

$$AC^2 = AB \times AH \qquad (5)$$

$$CH^2 = AH \times BH \qquad (6)$$

Es ist $AH : BH = AH : BH$

$$= AB \cdot AH : AB \cdot BH$$

folglich aus 5 und 6

$$AH : BH = AC^2 : BC^2 \qquad (7)$$

vergleiche Chorde No. 10.

Ist in Fig. 578 AD die Halbirungslinie der Seite BG, so hat man nach No. 23 und 24:

$$AB^2 = BD^2 + AD^2 + 2AD \times DJ$$

und

$$AG^2 = DG^2 + AD^2 - 2DG \times DJ$$

daraus

$$AB^2 + AG^2 = 2AD^2 + 2BD^2 = 2AD^2 + 2GD^2$$

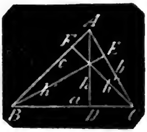
28. Zwischen 3 in einer Ebene liegenden Punkten läfst sich ein vierter Punkt finden, der von jedem der drei Punkte gleich weit entfernt ist. Da dies also auch zwischen den drei Punkten A, B, C (Fig. 577) geschehen kann, so läfst sich um jedes Dreieck ein Kreis beschreiben; und da dies auch zwischen den 3 Standpunkten D, E, F der Höhen geschehen kann, so läfst sich in jedem Dreieck ein Kreis beschreiben.

29. Der Inhalt eines Parallelogramms ist = dem Product aus Grundlinie und Höhe, es ist also nach No. 11 der Inhalt eines Dreiecks = dem halben Product aus Grundlinie und Höhe. Bezeichnet man die Grundlinie mit a, die Höhe mit h, so ist der Inhalt des $\triangle$

$$J = \tfrac{1}{2}a \cdot h \qquad (1)$$

30. Bezeichnet man die Projection der Seite b auf die Seite a mit x, die Höhe auf a mit h so ist, je nachdem $\angle C$ stumpf oder spitz ist

Fig. 577.



$$c^2 = a^2 + b^2 \pm 2ax$$

$$h^2 = b^2 - x^2 = b^2 - \left[\frac{c^2 - a^2 - b^2}{\pm 2a}\right]^2$$

$$= \frac{2a^2b^2 - (c^2 - a^2 - b^2)^2}{4a^2}$$

mithin $h = \frac{1}{2a}\sqrt{2a^2b^2 - (c^2 - a^2 - b^2)^2}$ (2)

Um mit Logarithmen rechnen zu können verwandelt man die Klammergröfse in ein Product und erhält

$$h = \frac{1}{2a}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)} \qquad (3$$

Es ist hiermit der Inhalt des $\triangle$ wenn die 3 Seiten gegeben sind $(\frac{1}{2}ah) =$

$$J = \tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)} \qquad (4)$$

Ist das Dreieck gleichschenklig, $b = c$, so ist die Höhe h auf der Grundlinie a

$$h = \tfrac{1}{2}\sqrt{4b^2 - a^2} \qquad (5)$$

die Höhe auf einen Schenkel b

$$h' = \frac{a}{2b}\sqrt{4b^2 - a^2} \qquad (6)$$

Der Inhalt des gleichschenkligen Dreiecks bei der Grundlinie a

$$J = \tfrac{1}{4}a\sqrt{4b^2 - a^2} \qquad (7)$$

Ist das $\triangle$ gleichseitig so ist

$$h = \tfrac{1}{2}a\sqrt{3} \qquad (8)$$

$$J = \tfrac{1}{4}a^2\sqrt{3}$$

31. Sind die 3 Höhen h, h', h'' gegeben, so hat man

$$\frac{ah}{2} = \frac{bh'}{2} = \frac{ch''}{2}$$

woraus $b = a\frac{h}{h'}$ und $c = a\frac{h}{h''}$

Setzt man diese Werthe in Formel 3 so wird

$$a + b + c = a + a\frac{h}{h'} + a\frac{h}{h''}$$

$$= \frac{a}{h'h''}[hh' + hh'' + h'h'']$$

und in derselben Weise erhält man die anderen 3 Factoren der Wurzelgröfse $(hh' + hh'' - h'h'')$; $(hh' + h'h'' - hh'')$; $(hh'' + h'h'' - hh')$. Demnach ist wenn die in Klammern stehenden 3 Glieder der 4 Factoren mit A, B, C, D bezeichnet:

$$\frac{ah}{2} = \frac{1}{4} \frac{a^2}{(h'h'')^2} \sqrt{A \cdot B \cdot C \cdot D}$$

woraus

$$a = \frac{2h\,(h'h'')^2}{\sqrt{(hh'+hh''+h'h'')(hh'+hh''-h'h'')(hh'+h'h''-hh'')(hh''+h'h''-hh')}} \quad (10)$$

und der Inhalt

$$J = \frac{(hh'h'')^2}{\sqrt{(hh'+hh''+h'h'')(hh'+hh''-h'h'')(hh'+h'h''-hh'')(hh''+h'h''-hh')}} \quad (11)$$

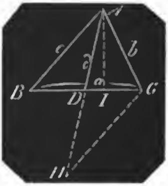
32. Ist $AD = d$ die Halbirunglinie der Seite $BG = a$, so hat man nach No. 27

$$b^2 + c^2 = 2d^2 + 2\left(\frac{a}{2}\right)^2$$

woraus $a = \sqrt{2(b^2 + c^2 - 2d^2)}$

Verlängert man AD um $DH = d$, zieht GH, so ist $\triangle GDH \cong \triangle BDA$ und GH ist $= c$. Es ist folglich $\triangle ABG = AHG$, der Inhalt des letzteren also auch des ersteren oder

Fig. 578.



$$J = \tfrac{1}{4}\sqrt{(b + c + 2d)(b + c - 2d)(b + 2d - c)(2d + c - b)} \quad (12)$$

33. Sind sämmtliche 3 Halbirungslinien d, e, f der 3 Seiten gegeben, so hat man

1) $b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2} = 2d^2$

2) $a^2 + c^2 - \frac{b^2}{2} = 2e^2$

3) $a^2 + b^2 - \frac{c^2}{2} = 2f^2$

hieraus $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{4}{3}(d^2 + e^2 + f^2)$

Subtrahirt man hiervon Gl. 1, reducirt und radicirt, so erhält man

$$a = \tfrac{2}{3}\sqrt{2e^2 + 2f^2 - d^2} \quad (13)$$

eben so wenn man die 2te und die 3te Gleichung von der 4ten abzieht

$$b = \tfrac{2}{3}\sqrt{2d^2 + 2f^2 - e^2} \quad (14)$$

$$c = \tfrac{2}{3}\sqrt{2d^2 + 2e^2 - f^2} \quad (15)$$

Die Inhaltsbestimmung des $\triangle$ geschieht nach No. 32 und No. 20. Denn es ist (Fig. 573) in $\triangle BCG = \frac{1}{3}ABG = \frac{1}{3}J$

$BC = \frac{2}{3}e$, $GC = \frac{2}{3}f$ und $CD = \frac{1}{3}d$

folglich nach Formel 11

$$\tfrac{1}{3}J = \tfrac{1}{4}\sqrt{(\tfrac{2}{3}d + \tfrac{2}{3}e + \tfrac{2}{3}f)(\tfrac{2}{3}d + \tfrac{2}{3}e - \tfrac{2}{3}f)(\tfrac{2}{3}d + \tfrac{2}{3}f - \tfrac{2}{3}e)(\tfrac{2}{3}e + \tfrac{2}{3}f - \tfrac{2}{3}d)}$$

$$J = \tfrac{1}{3}\sqrt{(d + e + f)(d + e - f)(d + f - e)(e + f - d)} \quad (16)$$

34. Ist $AE = d$ der Durchmesser des um das $\triangle ABD$ beschriebenen Kreises, BF die Höhe h auf $AD = a$, so hat man wenn man noch BE zieht

Fig. 579.



$\angle ABE = \angle BFD = R\angle$

$\angle AEB = \angle ADB$ (auf einerlei Bogen AB)

daher $\triangle ABE \sim \triangle BFD$

also $d : b = c : h$

woraus $h = \frac{b \cdot c}{d}$

folglich $J = \triangle ABD = \frac{1}{2}ah = \frac{abc}{2d}$

Nun ist

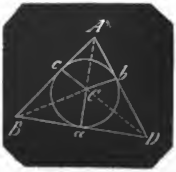
$J = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}$

folglich

$$d = \frac{2abc}{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}} \quad (17)$$

35. Ist C der Mittelpunkt des in dem $\triangle ABD$ beschriebenen Kreises, so sind die Lothe von C auf den Seiten die Halbmesser $r = \frac{1}{2}d$ desselben; zieht man nun die 3 Linien CA, CB, CD so hat man

Fig. 580.



die 3 Dreiecke ACB, ACD, BCD =

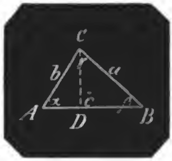
$$J = \tfrac{1}{2}r\,(a+b+c) \quad (18)$$

und

$$d = \frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}}{a+b+c} \quad (19)$$

36. Wenn von einem Dreieck 3 Seiten gegeben sind, so findet man die Winkel folgendermaafsen.

Fig. 581.



Nach No. 23 hat man

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2c \cdot AD$$
$$= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$$

hieraus $$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad (20)$$

Ist A ein stumpfer Winkel, so wird das Product $2cAB$ positiv, $\cos\alpha$ wird negativ, die Formel ist also allgemein gültig.

Für Rechnung mit Logarithmen eignet sich die Formel nicht.

Ist A ein rechter Winkel, so ist $\cos\alpha = 0$ und es entsteht

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Bezeichnet man CD mit h, so ist

$$h = b \sin\alpha$$

demnach hat man mit Hülfe von Formel 3

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}}{2bc} \quad (21)$$

Es ist $\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}(1-\cos\alpha)$

Schreibt man diesen Werth in Formel 20, so erhält man

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right) = \frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{4bc} = \frac{a^2-(b-c)^2}{4bc} = \frac{(a+b-c)(a+c-b)}{4bc}$$

hieraus $$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a+b-c)(a+c-b)}{bc}} \quad (22)$$

Es ist $\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}(1+\cos\alpha)$

Diesen Werth in Formel 20 gesetzt gibt

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right) = \frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{4bc} = \frac{(b+c)^2-a^2}{4bc}$$

hieraus $$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a+b+c)(b+c-a)}{bc}} \quad (23)$$

37. Wenn in einem Dreieck zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel gegeben sind, so erhält man

$$BD = c - b\cos\alpha$$

da nun

$$BD\,tg\,\beta = b\sin\alpha$$

so ist

$$tg\,\beta = \frac{b\sin\alpha}{c-b\cos\alpha} \text{ auch } = \frac{b\sin\gamma}{a-b\cos\gamma} \quad (24)$$

eben so

$$tg\,\alpha = \frac{a\sin\gamma}{b-a\cos\gamma} = \frac{a\sin\beta}{c-a\cos\beta} \quad (2$$

Diese Formeln sind für Rechnung mit Logarithmen unbrauchbar mindestens unbequem. Man hat aber folgende Formeln aus der Trigonometrie

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\beta - \cos\alpha = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Dividirt man die erste Formel durch die zweite, so erhält man

$$\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta} = tg\,\frac{\alpha+\beta}{2} \qquad (26)$$

und dividirt man die dritte durch die zweite

$$\frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta} = tg\,\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad (27)$$

hieraus

$$tg\,\frac{\alpha+\beta}{2} : tg\,\frac{\alpha-\beta}{2} = \sin\alpha + \sin\beta : \sin\alpha - \sin\beta$$

Nun ist

$$a\sin\beta = b\sin\alpha$$

oder $a : b = \sin\alpha : \sin\beta$

woraus

$$a + b : a - b = \sin\alpha + \sin\beta : \sin\alpha - \sin\beta$$

folglich

$$a + b : a - b = tg\,\frac{\alpha+\beta}{2} : tg\,\frac{\alpha-\beta}{2}$$

und $$tg\,\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{a-b}{a+b} : tg\,\frac{\alpha+\beta}{2} \qquad (28)$$

Sind nun die Seiten a, b und der $\angle\gamma$ gegeben,

so ist $\alpha+\beta+\gamma = 180°$

folglich $$\frac{\alpha+\beta}{2} = 90° - \frac{\gamma}{2}$$

und $$tg\,\frac{\alpha+\beta}{2} = cot\,\frac{\gamma}{2}$$

Man hat also die Formel

$$tg\,\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{a-b}{a+b}\,cot\,\frac{\gamma}{2} \qquad (29)$$

welche sich ohne Unterbrechung mit Logarithmen berechnen läſst. Hat man $\frac{\alpha-\beta}{2}$ also auch $\alpha - \beta = \varphi$ gefunden, so erhält man, da $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ ist,

$$\alpha = \tfrac{1}{2}(180° + \varphi - \gamma)$$

und $$\beta = \tfrac{1}{2}(180° - \varphi - \gamma)$$

Eben so ist

$$tg\,\frac{\alpha-\gamma}{2} = \frac{a-c}{a+c}\cdot cot\,\frac{\beta}{2} \qquad (30)$$

$$tg\,\frac{\beta-\gamma}{2} = \frac{b-c}{b+c}\cdot cot\,\frac{\alpha}{2} \qquad (31)$$

ferner hat man

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos\alpha \qquad (32)$$

Setzt man $\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1$ in diese Formel, so erhält man

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bc - 4bc\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$$= (b+c)^2 - \left(2\sqrt{bc}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2$$

folglich $$a = \sqrt{\left(b + c + 2\sqrt{bc}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\right)\left(b + c - 2\sqrt{bc}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\right)} \qquad (33)$$

den Inhalt des $\triangle$ hat man unmittelbar

$$J = \tfrac{1}{2}ab\cdot\sin\gamma = \tfrac{1}{2}ac\cdot\sin\beta = \tfrac{1}{2}bc\cdot\sin\alpha \quad (34)$$

38. Wenn eine Seite und die 3 Winkel gegeben sind, so ist

$$b = a\cdot\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = c\,\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} \qquad (35)$$

$$CD = h = a\sin\beta = b\sin\alpha \qquad (36)$$

Nun ist $a\sin\gamma = c\sin\alpha$

oder $$a = c\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$$

Diesen Werth in Formel 36 gesetzt gibt

$$h = c\cdot\frac{\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin\gamma} \qquad (37)$$

Nun ist $$J = \frac{c\cdot h}{2} = \frac{c^2}{2}\cdot\frac{\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin\gamma} \qquad (38)$$

39. Wenn 2 Seiten a, b und der gröſsere $\angle\alpha$ der beiden anliegenden Winkel gegeben sind, dann ist

$$\sin\beta = \frac{c}{a}\sin\alpha \qquad (39)$$

$$c = AD + BD = AD + \sqrt{BC^2 - CD^2}$$

also $$c = b\cos\alpha + \sqrt{a^2 - b^2\sin^2\alpha} \qquad (40)$$

und $$J = \tfrac{1}{2}hc = \tfrac{1}{2}b\sin\alpha\left[b\cos\alpha + \sqrt{a^2 - b^2\sin^2\alpha}\right] \qquad (41)$$

Dreimalachtflächner, der deutsche Name des Pyramidenoktaeders oder Triakisoktaeders, eines Krystalls von 24 Flächen in gleichschenkligen Dreiecken, 36 Kanten und 14 Ecken von der Form eines Octaeders, auf dessen 8 Flächen dreiseitige Pyramiden aufgesetzt sind.

Dreiunddreikantner, der deutsche Name des Hemididodekaeders oder Skalenoeders, eines Krystalls von 12 Flächen in ungleichseitigen Dreiecken, 18 Kanten und 8 Ecken; er hat das Ansehn zweier sechsflächigen Pyramiden mit gemeinschaftlicher mittlerer sechseckiger

Basis, deren 6 Ecken aber nicht in einer Ebene sondern in einem Zickzack liegen.

Dreiundeinaxiges Krystallisationssystem, s. u. Axensystem pag. 261, No. 3.

Druck ist bei unmittelbarer Berührung zweier Körper die Einwirkung des einen auf den anderen, welche diesen hindert eine beabsichtigte Bewegung zu beginnen oder in der diesem Körper inwohnenden Kraft entsprechenden Geschwindigkeit anzunehmen. Im Gegensatz zu Stofs, die mit unmittelbarer Berührung zweier Körper eintretende Wirkung des Hindernisses, das der eine Körper dem anderen entgegengesetzt, eine bereits begonnene Bewegung mit derselben Geschwindigkeit fortzusetzen oder dessen gänzlichen Stillstand veranlafst.

Druck im Gegensatz zu Zug ist die Einwirkung eines Körpers auf einen andern mit dem Bestreben dessen Volumen zu vermindern, während Zug das Bestreben äufsert das Volum zu vergröfsern. Oder Druck wirkt auf die Verdichtung der materiellen Theile eines Körpers, Zug auf deren Trennung. Im Uebrigen sind Druck und Zug bei einerlei Kraftäufserung von einerlei Wirkung.

Allgemeiner sagt man: Druck ist die Einwirkung einer Kraft in ihrem Angriffspunkt auf einen Körper mit dem Bestreben ihn fortzubewegen; und wenn man den Begriff Zug als Gegensatz hinzufügen will, so kann man von dem Druck sagen, dafs er das Bestreben äufsere, den Körper durch Bewegung zu entfernen, der Zug hat dann das Bestreben den Körper zu nähern. Man hat auch Druck und Zug in der Ferne; jener heifst Abstofsung, dieser Anziehung.

Jeder auf unserer Erdoberfläche befindliche Körper empfängt die Wirkung eines Zuges, welchen die Schwerkraft des Erdkörpers auf ihn übt und ihm, also durch Anziehung das Bestreben mittheilt, dem Sitz der Kraft, dem Mittelpunkt der Erde sich zu nähern. Liegt ein solcher Körper A auf einem festen Körper B, so äufsert A dieses Bestreben auf B, also mit einer Kraft, welche den Körper B durch Fortbewegung entfernen will, während B dem Körper A mit einer gleich grofsen Kraft ein Hindernifs setzt, die seinem Bestreben gemäfse Bewegung zu beginnen Beide Körper A und B äufsern also gleich grofse Druckwirkungen auf einander; ein Körper, der einen andern drückt wird wieder gedrückt, es ist überall Druck und Gegendruck in gleichen Gröfsen.

Da jede Einwirkung die Folge einer Kraft ist, so nennt man den Druck auch eine todte Kraft im Gegensatz zu lebendiger Kraft, die eine in Bewegung befindliche Masse mit ihrem Bewegungsvermögen entwickelt und eine andere Masse in Bewegung bringt. Ein Beispiel wie eine blofs drückende Masse zu lebendiger Kraft wird gibt das oberschlächtige Wasserrad, welches bei bestimmter Wassermenge per Secunde und bestimmtem Gefälle (senkrecht gemessene Entfernung des Oberwasserspiegels vom Unterwasserspiegel) am wirksamsten ist, wenn das Wasser mit der Geschwindigkeit der Radperipherie in die Schaufeln fällt, so dafs die im Radkranz befindliche Wassermasse einzig und allein auf Druck wirkt, während beim unterschlächtigen Rade das Wasser durch Stofs allein die Bewegung hervorbringt.

Druck ist also das Ergebnifs einer auf einen Körper wirkenden Kraft, wirkt selbst als Kraft und zwar als eine Kraft, die das Bestreben äufsert Bewegung hervorzubringen. Gleicher Druck und Gegendruck oder Druck und Zug in gleichen Gröfsen und in gerader Linie wirkend heben einander auf, es ist Gleichgewicht; die wissenschaftliche Untersuchung der Druckwirkungen gehört mit den Kräften in die Statik.

Der Ort auf den Oberflächen zweier sich berührenden Körper wo Druck erfolgt, ist der Angriffspunkt des Drucks, die gerade Linie nach welcher Bewegung statt finden würde ist die Richtung des Drucks. Die gerade oder krumme Verbindungslinie der Angriffspunkte mehrerer auf einander drükkender Körper ist die Mittellinie des Drucks. Der Druck wird wie die Kraft gemessen und seine Gröfse wie diese in einer geraden Linie symbolisch dargestellt. Oder vielmehr es wird die Gröfse jeder Kraft mit einem Druck verglichen und nach einer Druckeinheit gemessen. Denn die oben gedachte Anziehungskraft der Erde auf jedes Massenelement in gleichem Maafse gibt in der Anzahl der materiellen Theile eines Körpers auch die Anzahl jener gleich grofsen Anziehungswirkungen und diese spricht sich als Gewicht aus; die Gröfse eines Drucks und mit diesem die Gröfse einer Kraft wird also durch ein Gewicht gemessen und deren Gröfse ist gleich diesem Gewicht.

Druck, hydrostatischer, der Druck, den eine Flüssigkeitsmasse gegen die Gefäfswandungen und auf eingesenkte Körper ausübt, ist unabhängig von der Form des

Gefäſses und dessen Wandungen und in gleicher Tiefe vom Wasserspiegel ab gleich groſs. Es geht dies daraus hervor, daſs eine Wassermasse in einem stillstehenden Gefäſs ebenfalls in Ruhe ist, daſs also alle horizontalen Wasserschichten in Gleichgewicht sich befinden, weil sonst eine ununterbrochene Wiederherstellung des gestörten Gleichgewichts durch fortdauernde Strudel und Wirbel sich kenntlich machen würde.

Die oberste Schicht Wasser lagert ruhig auf der nächst unteren, diese wieder auf der folgenden und so fort bis zur tiefsten Schicht. Wenngleich nun das Wasser incompressibel, also unten so specifisch schwer als oben ist, so veranlaſst die Belastung von Schicht auf Schicht, daſs mit der Tiefe auch der Druck gröſser wird, und zwar unabhängig von der Flächenausdehnung der Schicht.

Daher halten Wassersäulen von sehr verschieden groſsen Querschnitten bei einerlei Höhe, also von sehr verschiedenen Gewichten einander das Gleichgewicht, und wenn man auf die Oberfläche des in einer dünnen Röhre befindlichen Wassers einen Druck p ausübt, der dem Gewicht von h Fuſs Wassersäule = ist, so hält dieser einer mit der Röhre communicirenden Wassersäule von $m$fachen Querschnitt und der Höhe h, also einem Druck = mp das Gleichgewicht, eine Eigenschaft, die das Princip der hydraulischen Presse ausmacht.

Eine Wassersäule von 32 Fuſs Höhe übt den Druck der Atmosphäre aus, etwa 14 Zollpfund auf den □Zoll; in 64 Fuſs Tiefe unter dem Wasserspiegel würde der Druck des Wassers schon 2 Atmosphären = 28 Pfund auf den □Zoll betragen.

Da die atmosphärische Luft an der Erdoberfläche 770 mal leichter als Wasser ist, so gehören 770 Atmosphären Druck dazu um der Luft die Dichtigkeit des Wassers zu geben, wenn das Mariottesche Gesetz bis so weit noch gilt; also in 32×770 Fuſs = 24640 Fuſs oder in einer Meile Tiefe im Weltmeer würde Luft in einer unten offenen Taucherglocke herabgelassen bis zur Dichte des Wassers zusammengedrückt werden.

2. Jeder Körper verliert, wenn er in Wasser gesenkt wird, so viel an Gewicht, als das Gewicht des von ihm verdrängten Wassers beträgt, weil das um den Körper befindliche Wasser mit dem verdrängten Wasser also mit dessen Gewicht im Gleichgewicht sich befunden hat und dasselbe Gewicht auch jetzt noch zu tragen übernimmt. Wiegt ein Körper in der freien Luft 10 Pfund und sind nur 8 Pfund auf der Waagschale erforderlich um ihm das Gleichgewicht zu halten wenn er an einem Faden in Wasser ganz eingesenkt ist, so hat er 2 Pfund an Gewicht verloren, das Wasser von dem Volum des Körpers wiegt also 2 Pfund; $10 : 2 = 5 : 1$ ist das Verhältniſs seines absoluten Gewichts zu dem des Wassers, d. h. der Stoff aus dem der Körper besteht, hat das specifische Gewicht = 5.

3. Ein Körper schwimmt, wenn er so viel Wasser verdrängt als er selbst schwer ist, weil dann erst das umliegende Wasser mit dem Körper Gleichgewicht hat.

Jeder in Wasser gesenkte Körper vermehrt den Druck auf den Boden des Gefäſses um sein absolutes Gewicht. Ein Stab ins Wasser gestellt ohne daſs er den Boden berührt, drückt auf den Boden um das Gewicht des von ihm verdrängten Wassers, welches um so viel in die Höhe steigt, daſs der Raum des vom Stabe verdrängten Wassers wieder ersetzt wird.

4. Die Ausfluſsgeschwindigkeit einer Flüssigkeit bei bestimmter Höhe h des Spiegels über der Ausfluſsöffnung ist unabhängig von dem specifischen Gewicht der Flüssigkeit (s. Ausfluſs tropfbarer Flüssigkeiten No. 4).

Duodecimal zeigt die Beziehung zur Zahl 12 an. Vergl. Decimal, Dodekadik.

Duodecimalmaaſs ist ein Maaſs, dessen Einheit in 12 gleiche Theile getheilt ist, wonach diese Theile als Einheiten wieder in 12 gleiche Theile getheilt werden, wie in Preuſsen und in anderen Ländern das Längenmaaſs als Werkmaaſs. 1 Ruthe hat 12 Fuſs, 1 Fuſs hat 12 Zoll, 1 Zoll 12 Linien. Dieser Eintheilung entsprechend 1 □Ruthe = 144 □Fuſs u. s. w. 1 Kubikruthe = 1728 Kubikfuſs u. s. w. vergleiche Decimalmaaſs.

Durchgang eines Gestirns durch den Meridian s. u. Culmination.

Durchmesser ist zunächst eine gerade Linie, die durch den Mittelpunkt einer geschlossenen Curve bis zu den entgegengesetzt liegenden Punkten des Umfangs gezogen wird, also zunächst in dem Kreise und der Ellipse jede durch den Mittelpunkt gezogene Sehne.

Die Begriffe von Mittelpunkt und Durchmesser sind wechselseitig. Mittelpunkt einer Curve ist der Punkt der alle durch ihn gezogenen Sehnen halbirt, und Durch-

messer sind Sehnen die alle in einem Punkt sich schneiden durch welchen sie halbirt werden.

Der Kreis und die Ellipse haben also unzählig viele Durchmesser. Jeder derselben hat die Eigenschaft, dafs er sowohl die Curve als auch die von derselben eingeschlossene Ebene halbirt; oder vielmehr die Curve hat einen Mittelpunkt, wenn jede durch ihn gezogene Sehne die Curve selbst und die von ihr eingeschlossene Ebene halbirt und diese gleichen Theile sind ≅, weil unter den vorgedachten Bedingungen die Punkte der Curve zu beiden Seiten eines Durchmessers symmetrisch angeordnet sein müssen. Hieraus folgt, dafs wenn durch gleichweit vom Mittelpunkt auf einem Durchmesser genommene Punkte parallele Chorden gezogen werden, diese 4 Bogen und Flächenstücke abschneiden von denen je zwei und zwei einander ≅ sind.

Fig. 582.

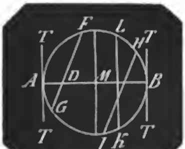


Fig. 583.

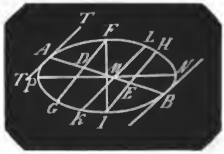


Fig. 582 ist ein Kreis, Fig. 583 eine Ellipse, ***M*** sind die Mittelpunkte, ***AB*** Durchmesser; ist ***MD*** = ***ME***, sind ***FG*** durch ***D*** und ***HJ*** durch ***E*** parallele Sehnen, so ist

Bogen und Abschnitt ***FAG*** ≅ ***JBH***

Ferner Bogen ***AF*** ≅ Bogen ***BJ***

und Bogen ***AG*** ≅ ***BH***

Ausschnitt ***ADF*** ≅ ***JBE***

und Ausschnitt ***ADG*** ≅ ***BEH***

Die Sehnen ***FG*** und ***HJ*** werden von den Durchmessern ***AB*** nicht halbirt, dagegen gibt es Sehnen, welche von den ***D*** unter bestimmten Winkeln mit denselben halbirt werden. Da diese Sehnen gegen die Endpunkte des ***D*** hin immerfort kleiner werden und in den Endpunkten selbst zu Null verschwinden müssen, so ist klar, dafs nur diejenigen Sehnen es sein können, welche wie ***KL*** mit den in den Endpunkten ***A***, ***B*** der Durchmesser an der Curve gezogenen Tangenten ***TT*** parallel laufen.

Die einfachste Beziehung paralleler Ordinaten mit ihrem Durchmesser ist offenbar die, wenn sie normal auf einander stehen, und es stimmt mit dem allgemeinen Begriff Axe (s. d.) wenn man denjenigen Durchmesser, welcher normal zu ihm gerichtete Ordinaten halbirt, Axe nennt. In dem Kreise steht jede Tangente auf ihrem Durchmesser normal, daher ist jeder Durchmesser des Kreises zugleich Axe; bei der Ellipse sind es nur 2 Durchmesser, der längste ***NP*** und der normal auf ihm befindliche kürzeste Durchmesser ***FJ***.

In Folge der Eigenschaft des D., dafs er ein bestimmtes System paralleler Ordinaten halbirt ist auch der Begriff des D. dahin erweitert worden wie in dem Art.: conjugirte Durchmesser die Definition von D. lautet, und wohin ich für das Uebrige, was noch in diesem Art. über D. gesagt werden sollte, verweise.

Hierbei mufs ich bemerken, dafs in Folge meiner längeren Abwesenheit vom Druckort mehrere Fehler im Text sich vorfinden: Statt Fig. 314, 315, 316 ist zu lesen: Fig. 315, 316, 317. In Fig. 317 fehlt im Durchschnittspunkt zwischen der Peripherie und der Linie ***CO*** der Buchstabe ***H*** und pag. 45 rechts, Zeile 22 von oben ist hinter dem Wort aufzuweisen eine sinnentstellende Auslassung geschehen. Der Satz lautet: Dagegen hat die Parabel keine anderen Durchmesser als die Axe aufzuweisen, auf welchem die gleichen entgegengesetzten Ordinaten normal sind; sämmtliche der Axe Parallelen sind Durchmesser, die von diesen halbirten Doppelordinaten sind ∦ der in dem Endpunkt des jedesmaligen Durchmessers an die Parabel gezogenen Tangente.

Die Parabel hat keinen Mittelpunkt aufzuweisen, wohl aber die Ellipse und die Hyperbel, bei welchen jede durch den Mittelpunkt gezogene gerade Linie ein Durchmesser ist, wie ***FG*** durch ***C*** Fig. 315, ***CJ*** durch ***C*** Fig. 316.

Durchschnitt ist die beliebig gewählte Grenze, durch welche eine geometrische Gröfse getheilt wird. D. zweier Linien ist der Punkt (Durchschnittspunkt), in welchem beide sich gegenseitig theilen. D. zweier Ebenen die gerade Linie (Durchnittslinie) in welcher beide sich gegenseitig theilen. Im Gegensatz von Berührung, bei welcher beliebig gewählte Grenzen der geometrischen Gröfsen gemeinschaftlich werden ohne zu theilen. D. eines Körpers ist die Fläche (Durchschnittsfläche) mit welcher derselbe getheilt wird.

D. als Zeichnung eines Baugegenstandes ist die Zeichnung desselben, nachdem der Gegenstand durch eine oder mehrere Ebenen, die Durchschnittsebenen, getheilt gedacht ist.

Durchnittsebene, -fläche, -linie, -punkt s. Durchschnitt.

Durchschnittszahl s. v. w. arithmetisches Mittel.

Dyadisches Zahlensystem, Dyadik, bei welchem die Werthe der Stellen von der Rechten zur Linken statt nach den Potenzen von 10, wie bei unsrem dekadischen System, nach den Potenzen von 2 steigen. Es existirt also nur die Ziffer 1 und das Nullzeichen.

dec. Syst.		dyad. S	dec. Syst.		dyad. S.
1	=	1	9	=	1001
2	=	10	10	=	1010
3	=	11	11	=	1011
4	=	100	12	=	1100
5	=	101	13	=	1101
6	=	110	14	=	1110
7	=	111	15	=	1111
8	=	1000	16	=	10000

u. s. w.

Dynamik, dynamische Wissenschaften s. u. angewandte Mathematik.

Inhaltsverzeichnifs und Sachregister.

Die Gegenstände als Ueberschriften der Artikel sind gesperrt gedruckt.

E.

F.

G.

P.

Q.

R.

S.

T.

U.

V.

W.

Z.

Berlin, Druck der Gebr. Unger'schen Hofbuchdruckerei.